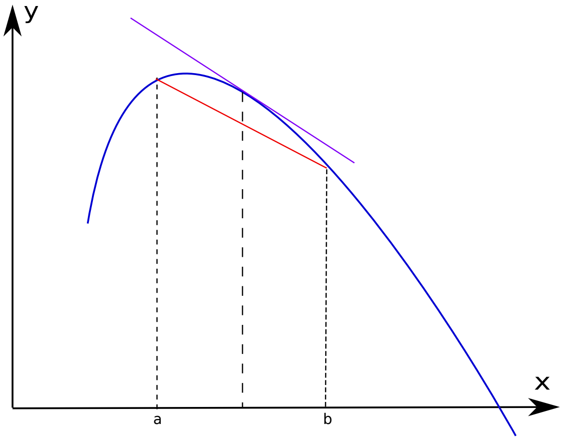
IV

DÉRIVATION NUMÉRIQUE

Analyse Numérique
Tronc Commun

Un exemple

Calcul approché de la dérivée en $\frac{1}{2}(a+b)$.



La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux (expression difficile à évaluer)

La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux (expression difficile à évaluer)
- Imprécis : Fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple)

La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux (expression difficile à évaluer)
- Imprécis : Fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple)
- Impossible : Dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple

La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux (expression difficile à évaluer)
- Imprécis : Fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple)
- Impossible : Dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple

La dérivée d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux (expression difficile à évaluer)
- Imprécis : Fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple)
- Impossible : Dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple

Idée simple : Calculer le quotient différentiel :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad |h| \ll 1$$

Erreur d'arrondi : Un exemple

Supposons que l'on travaille sur un calculateur avec 3 chiffres significatifs.

Erreur d'arrondi : Un exemple

Supposons que l'on travaille sur un calculateur avec 3 chiffres significatifs.
Soit $f(x) = x^2$. On veut calculer $f'(7) = 14$ avec cette méthode.

Erreur d'arrondi : Un exemple

Supposons que l'on travaille sur un calculateur avec 3 chiffres significatifs.
Soit $f(x) = x^2$. On veut calculer $f'(7) = 14$ avec cette méthode.

Avec $h = 0{,}1$, on a $(7{,}1)^2 = 50{,}41$

$$\frac{f(7{,}1) - f(7)}{0{,}1} = \frac{(7{,}1)^2 - 7^2}{0{,}1} = \frac{50{,}4 - 49}{0{,}1} = 14{,}0$$

Erreur d'arrondi : Un exemple

Supposons que l'on travaille sur un calculateur avec 3 chiffres significatifs.
Soit $f(x) = x^2$. On veut calculer $f'(7) = 14$ avec cette méthode.

Avec $h = 0{,}1$, on a $(7{,}1)^2 = 50{,}41$

$$\frac{f(7{,}1) - f(7)}{0{,}1} = \frac{(7{,}1)^2 - 7^2}{0{,}1} = \frac{50{,}4 - 49}{0{,}1} = 14{,}0$$

Avec $h = 0{,}01$, on a $(7{,}01)^2 = 49{,}1401$

$$\frac{f(7{,}01) - f(7)}{0{,}01} = \frac{(7{,}01)^2 - 7^2}{0{,}01} = \frac{49{,}1 - 49}{0{,}01} = 10{,}0 \qquad !!!$$

Erreur d'arrondi : Un exemple

Supposons que l'on travaille sur un calculateur avec 3 chiffres significatifs.
Soit $f(x) = x^2$. On veut calculer $f'(7) = 14$ avec cette méthode.

Avec $h = 0{,}1$, on a $(7{,}1)^2 = 50{,}41$

$$\frac{f(7{,}1) - f(7)}{0{,}1} = \frac{(7{,}1)^2 - 7^2}{0{,}1} = \frac{50{,}4 - 49}{0{,}1} = 14{,}0$$

Avec $h = 0{,}01$, on a $(7{,}01)^2 = 49{,}1401$

$$\frac{f(7{,}01) - f(7)}{0{,}01} = \frac{(7{,}01)^2 - 7^2}{0{,}01} = \frac{49{,}1 - 49}{0{,}01} = 10{,}0 \qquad \text{!!!}$$

Ainsi, une petite perturbation de $f(x)$ (erreur d'arrondi) a induit une grande perturbation de $f'(x)$.

Erreur d'arrondi

Soit δ la précision relative de la machine (*ex. :* 7 chiffres significatifs $\Longrightarrow \delta = 10^{-7}$).
L'erreur absolue sur l'évaluation d'une fonction f en un point x est de l'ordre de $\delta\,|f(x)|$. On peut estimer l'erreur sur le numérateur par

$$\delta|f(x+h)| + \delta|f(x)| \approx 2\delta\,|f(x)|.$$

Erreur d'arrondi

Soit δ la précision relative de la machine (*ex. :* 7 chiffres significatifs $\Longrightarrow \delta = 10^{-7}$).
L'erreur absolue sur l'évaluation d'une fonction f en un point x est de l'ordre de $\delta\,|f(x)|$. On peut estimer l'erreur sur le numérateur par

$$\delta|f(x+h)| + \delta|f(x)| \approx 2\delta\,|f(x)|.$$

L'erreur absolue sur le quotient différentiel est alors estimée par :

$$E_a = 2\delta \left|\frac{f(x)}{h}\right|$$

Erreur d'arrondi

Soit δ la précision relative de la machine (*ex.* : 7 chiffres significatifs $\Longrightarrow \quad \delta = 10^{-7}$).
L'erreur absolue sur l'évaluation d'une fonction f en un point x est de l'ordre de $\delta\,|f(x)|$. On peut estimer l'erreur sur le numérateur par

$$\delta|f(x+h)| + \delta|f(x)| \approx 2\delta\,|f(x)|.$$

L'erreur absolue sur le quotient différentiel est alors estimée par :

$$E_a = 2\delta \left|\frac{f(x)}{h}\right|$$

Dans le cas de l'exemple précédent ($\delta = 10^{-3}$), on a pour $h = 0{,}1$:

$$E_a = 2 \times 10^{-3} \times \frac{49}{0{,}1} = 0{,}98 \approx 1$$

Erreur d'arrondi

Soit δ la précision relative de la machine (*ex.* : 7 chiffres significatifs $\Longrightarrow \quad \delta = 10^{-7}$). L'erreur absolue sur l'évaluation d'une fonction f en un point x est de l'ordre de $\delta\,|f(x)|$. On peut estimer l'erreur sur le numérateur par

$$\delta|f(x+h)| + \delta|f(x)| \approx 2\delta\,|f(x)|.$$

L'erreur absolue sur le quotient différentiel est alors estimée par :

$$E_a = 2\delta \left|\frac{f(x)}{h}\right|$$

Dans le cas de l'exemple précédent ($\delta = 10^{-3}$), on a pour $h = 0{,}1$:

$$E_a = 2 \times 10^{-3} \times \frac{49}{0{,}1} = 0{,}98 \approx 1$$

Pour $h = 0{,}01$:

$$E_a = 2 \times 10^{-3} \times \frac{49}{0{,}01} \approx 10$$

POLYTECH CLERMONT-FERRAND

Erreur de troncature

On a par la formule de Taylor (on suppose f 2 fois continûment dérivable) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\tilde{x})\,\frac{h^2}{2} \qquad |x-\tilde{x}| < |h|.$$

Erreur de troncature

On a par la formule de Taylor (on suppose f 2 fois continûment dérivable) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\tilde{x})\,\frac{h^2}{2} \qquad |x - \tilde{x}| < |h|.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f''(\tilde{x})\,\frac{h}{2}.$$

Erreur de troncature

On a par la formule de Taylor (on suppose f 2 fois continûment dérivable) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\tilde{x})\,\frac{h^2}{2} \qquad |x-\tilde{x}| < |h|.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f''(\tilde{x})\,\frac{h}{2}.$$

L'erreur de troncature pour des petites valeurs de $|h|$ est définie par

$$E_t = \frac{|h|}{2}\,|f''(\tilde{x})|$$

Erreur totale

Elle est définie par

$$E = E_a + E_t$$

Erreur totale

Elle est définie par

$$E = E_a + E_t$$

Ainsi pour notre méthode

$$E = 2\delta \left| \frac{f(x)}{h} \right| + \frac{|h|}{2} |f''(\widetilde{x})|$$

Erreur totale

Elle est définie par

$$E = E_a + E_t$$

Ainsi pour notre méthode

$$E = 2\delta \left| \frac{f(x)}{h} \right| + \frac{|h|}{2} |f''(\widetilde{x})|$$

Théorème

La quantité

$$E = 2\delta \left| \frac{f(x)}{h} \right| + \frac{|h|}{2} |f''(\widetilde{x})|$$

est minimale pour

$$|h| = 2\sqrt{\delta \left| \frac{f(x)}{f''(\tilde{x})} \right|}.$$

Démonstration

Soit

$$g(s) := 2\delta \frac{|f(x)|}{s} + \frac{s}{2}|f''(\widetilde{x})| = \frac{a}{s} + bs$$

où

$$a = 2\delta|f(x)|, \quad b = \frac{1}{2}|f''(\widetilde{x})|.$$

Démonstration

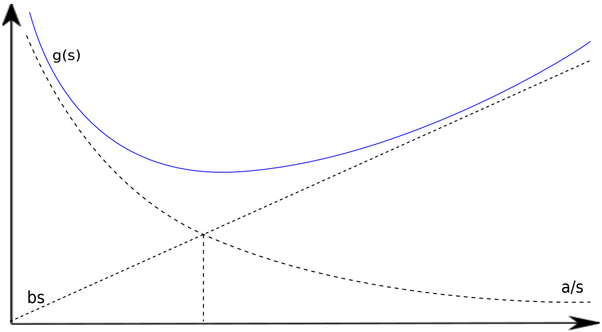
Soit

$$g(s) := 2\delta\frac{|f(x)|}{s} + \frac{s}{2}|f''(\widetilde{x})| = \frac{a}{s} + bs$$

où

$$a = 2\delta|f(x)|, \quad b = \frac{1}{2}|f''(\widetilde{x})|.$$

Puisque a et b sont positifs, on a le graphe :



On en déduit

$$g'(\bar{s}) = 0 \iff -\frac{a}{\bar{s}^2} + b = 0 \iff \bar{s} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

D'où

$$|h| = 2\sqrt{\delta \left| \frac{f(x)}{f''(\widetilde{x})} \right|}.$$

On en déduit

$$g'(\bar{s}) = 0 \iff -\frac{a}{\bar{s}^2} + b = 0 \iff \bar{s} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

D'où

$$|h| = 2\sqrt{\delta \left| \frac{f(x)}{f''(\tilde{x})} \right|}.$$

Exemple :

On prend $f(x) = x^2$ et $\delta = 10^{-3}$. On en déduit

$$f''(x) = 2, \quad h = \sqrt{2\delta f(x)} = \sqrt{2\delta}\,|x|.$$

Si $x = 7$, on a $h = 10\sqrt{\delta} \approx 0{,}3$.

Autres schémas

Le quotient différentiel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est appelé différence décentrée *à droite*.

Autres schémas

Le quotient différentiel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est appelé différence décentrée *à droite*.

On peut tout aussi bien choisir une différence décentrée *à gauche* :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Le quotient différentiel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est appelé différence décentrée *à droite*.

On peut tout aussi bien choisir une différence décentrée *à gauche* :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

ou une différence centrée autour de x, *i.e.*

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Dans ce cas, l'erreur d'arrondi reste la même. Par contre, on modifie l'erreur de troncature.

Théorème

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$ et de dérivées bornées. Alors on a

$$\left|f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right| \leq \frac{h^2}{6} \sup_{y\in\mathbb{R}} |f'''(y)|$$

Théorème

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$ et de dérivées bornées. Alors on a

$$\left|f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right| \le \frac{h^2}{6} \sup_{y\in\mathbb{R}} |f'''(y)|$$

En effet, on a par la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi), \qquad \text{où} \quad \xi \in [x, x+h],$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\eta), \qquad \text{où} \quad \eta \in [x-h, x].$$

Théorème

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$ et de dérivées bornées. Alors on a

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \sup_{y\in\mathbb{R}} |f'''(y)|$$

En effet, on a par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi), && \text{où} \quad \xi \in [x, x+h],\\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\eta), && \text{où} \quad \eta \in [x-h, x].
\end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x+h)}{2h} = -\frac{h^2}{12} \left(f'''(\xi) + f'''(\eta) \right).$$

On a

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\approx \frac{f'(x+\frac{h}{2}) - f'(x-\frac{h}{2})}{h} \\
&\approx \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) \\
&= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}
\end{aligned}
$$

Dérivée seconde

On a

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\approx \frac{f'(x+\frac{h}{2}) - f'(x-\frac{h}{2})}{h} \\
&\approx \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) \\
&= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}
\end{aligned}
$$

On montre alors le résultat :

THÉORÈME

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ et de dérivées bornées jusqu'à l'ordre 4. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, la majoration :

$$
\left| f''(x) - \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(4)}(x)|
$$