

# Un schéma Volumes finis MUSCL pour les équations d'Euler compressibles en axisymétrie

Rachid Touzani, David Rochette

Université Blaise Pascal, Clermont–Ferrand, France

Stéphane Clain

Université de Toulouse, France

8 avril 2009

## Objectif :

- Simulation numérique de torches à plasma inductives (ICP : *Inductively Coupled Plasma Torch*)
- L'étude fait partie d'un TRP (Technology Research Program) de l'ESA (European Space Agency)

## Principe :

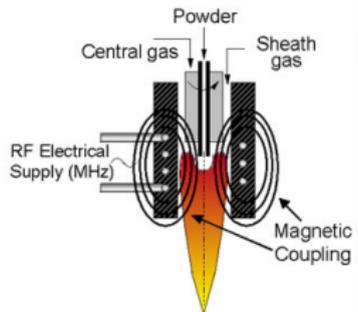
- La torche à plasma est une méthode d'analyse chimique permettant de doser les éléments d'un échantillon.
- Elle consiste à ioniser l'échantillon en l'injectant dans un plasma (en général d'Argon) : Les atomes sont ionisés par une flamme chaude (6 000 à 8 000 K).
- L'échantillon subit ainsi une **fusion** (solide), une **vaporisation**, puis une **ionisation**.
- La température est entretenue par induction magnétique (à l'aide d'un générateur HF).
- Les ions sont détectés soit par **spectrométrie de masse** soit par **spectrométrie d'émission**.

## Objectif :

- Simulation numérique de torches à plasma inductives (ICP : *Inductively Coupled Plasma Torch*)
- L'étude fait partie d'un TRP (Technology Research Program) de l'ESA (European Space Agency)

## Principe :

- La torche à plasma est une méthode d'analyse chimique permettant de doser les éléments d'un échantillon.
- Elle consiste à ioniser l'échantillon en l'injectant dans un plasma (en général d'Argon) : Les atomes sont ionisés par une flamme chaude (6 000 à 8 000 K).
- L'échantillon subit ainsi une **fusion** (solide), une **vaporisation**, puis une **ionisation**.
- La température est entretenue par induction magnétique (à l'aide d'un générateur HF).
- Les ions sont détectés soit par **spectrométrie de masse** soit par **spectrométrie d'émission**.



- Un modèle pour les ICP
- Équations d'Euler axisymétriques
- Une méthode de volumes finis
- Les schémas MUSCL
- Application aux équations d'Euler
- Solutions stationnaires radiales
- Essais numériques

La modélisation mathématique de ce procédé tient en compte des différents effets entrant en jeu :

- **Induction électromagnétique** : On utilise un modèle de courants de Foucault (on néglige les courants de déplacement) quasi-statiques. La difficulté réside dans le fait qu'une partie (inconnue) du gaz se transforme en plasma et devient donc conductrice.
- **Dynamique des gaz** : Il s'agit d'un écoulement compressible que l'on suppose stationnaire.
- On utilise une description **axisymétrique** à cause de la géométrie du dispositif.

La modélisation mathématique de ce procédé tient en compte des différents effets entrant en jeu :

- **Induction électromagnétique** : On utilise un modèle de courants de Foucault (on néglige les courants de déplacement) quasi-statiques. La difficulté réside dans le fait qu'une partie (inconnue) du gaz se transforme en plasma et devient donc conductrice.
- **Dynamique des gaz** : Il s'agit d'un écoulement compressible que l'on suppose stationnaire.
- On utilise une description **axisymétrique** à cause de la géométrie du dispositif.

La modélisation mathématique de ce procédé tient en compte des différents effets entrant en jeu :

- **Induction électromagnétique** : On utilise un modèle de courants de Foucault (on néglige les courants de déplacement) quasi-statiques. La difficulté réside dans le fait qu'une partie (inconnue) du gaz se transforme en plasma et devient donc conductrice.
- **Dynamique des gaz** : Il s'agit d'un écoulement compressible que l'on suppose stationnaire.
- On utilise une description **axisymétrique** à cause de la géométrie du dispositif.

## 1. L'électromagnétisme

Les équations des courants de Foucault s'écrivent en régime quasi-statique (harmonique en temps) :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ i\omega\mu_0\mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \end{cases}$$

$\mathbf{J}$  : Densité de courant

$\mathbf{J}_0$  : Courant source

$\mathbf{E}$  : Champ électrique

$\mathbf{H}$  : Champ magnétique

$\omega$  : Pulsation du courant

$\sigma$  : Conductivité électrique

$\mu_0$  : Perméabilité magnétique du vide

## 1. L'électromagnétisme

Les équations des courants de Foucault s'écrivent en régime quasi-statique (harmonique en temps) :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ i\omega\mu_0\mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \end{cases}$$

$\mathbf{J}$  : Densité de courant

$\mathbf{J}_0$  : Courant source

$\mathbf{E}$  : Champ électrique

$\mathbf{H}$  : Champ magnétique

$\omega$  : Pulsation du courant

$\sigma$  : Conductivité électrique

$\mu_0$  : Perméabilité magnétique du vide

Ici on a négligé le transport du courant par le fluide (En fait, on a  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{J}_0$ ).

Dans ce modèle, on choisit de formuler le problème en champ électrique.

On a

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{J}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ |\mathbf{E}(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{cases}$$

où  $\sigma = \sigma(e)$  avec

$$\sigma(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \leq e_0, \\ > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $e$  est l'énergie interne et  $e_0$  est l'énergie nécessaire pour l'ionisation.

Ici on a négligé le transport du courant par le fluide (En fait, on a  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{J}_0$ ).

Dans ce modèle, on choisit de formuler le problème en champ électrique.

On a

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{J}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ |\mathbf{E}(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{cases}$$

où  $\sigma = \sigma(e)$  avec

$$\sigma(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \leq e_0, \\ > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $e$  est l'énergie interne et  $e_0$  est l'énergie nécessaire pour l'ionisation.

## 2. L'écoulement du gaz-plasma

On utilise les équations d'Euler compressibles (on néglige les effets de la viscosité et de la diffusion thermique) avec les caractéristiques suivantes :

- Le mouvement du gaz est généré par la force de Lorentz (que l'on moyenne sur une période).
- La source d'énergie est donnée par l'effet de Joule (moyennée également).

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \times \bar{\mathbf{H}})$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\nabla \cdot ((E + p) \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}) - R$$

$$p = p(\rho, e)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{g}$  est le vecteur gravité,  $e$  est l'énergie interne spécifique et  $E$  est l'énergie totale définie par  $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$ ,  $R$  est une source de rayonnement.

Dans ce qui suit, on restreint au cas d'un gaz idéal

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \gamma : \text{rapport des chaleurs spécifiques}$$

## 2. L'écoulement du gaz-plasma

On utilise les équations d'Euler compressibles (on néglige les effets de la viscosité et de la diffusion thermique) avec les caractéristiques suivantes :

- Le mouvement du gaz est généré par la force de Lorentz (que l'on moyenne sur une période).
- La source d'énergie est donnée par l'effet de Joule (moyennée également).

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \times \bar{\mathbf{H}})$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\nabla \cdot ((E + p) \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}) - R$$

$$p = p(\rho, e)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{g}$  est le vecteur gravité,  $e$  est l'énergie interne spécifique et  $E$  est l'énergie totale définie par  $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$ ,  $R$  est une source de rayonnement.

Dans ce qui suit, on restreint au cas d'un gaz idéal

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \gamma : \text{rapport des chaleurs spécifiques}$$

## 2. L'écoulement du gaz-plasma

On utilise les équations d'Euler compressibles (on néglige les effets de la viscosité et de la diffusion thermique) avec les caractéristiques suivantes :

- Le mouvement du gaz est généré par la force de Lorentz (que l'on moyenne sur une période).
- La source d'énergie est donnée par l'effet de Joule (moyennée également).

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \times \bar{\mathbf{H}})$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\nabla \cdot ((E + p) \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}) - R$$

$$p = p(\rho, e)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse,  $p$  est la pression,  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{g}$  est le vecteur gravité,  $e$  est l'énergie interne spécifique et  $E$  est l'énergie totale définie par  $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$ ,  $R$  est une source de rayonnement.

Dans ce qui suit, on restreint au cas d'un gaz idéal

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \gamma : \text{rapport des chaleurs spécifiques}$$

# Équations d'Euler axisymétriques

- On considère les équations d'Euler compressibles évolutives.
- La géométrie du domaine suggère l'utilisation d'un modèle axisymétrique.
- On ne tient pas compte des sources (Joule et Lorentz)

En notant par  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques et par  $(u_r, u_\theta, u_z)$  les composantes d'un vecteur dans ce système, on obtient le système d'équations (tenant compte de l'invariance en  $\theta$ ) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(r\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r^2 + rp) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) &= \rho u_\theta^2 + p \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_z^2 + rp) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\theta u_z) &= -\rho u_\theta u_r \\ \frac{\partial}{\partial t}(rE) + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r(E + p)) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z(E + p)) &= 0 \\ p &= (\gamma - 1)\rho e\end{aligned}$$

# Équations d'Euler axisymétriques

- On considère les équations d'Euler compressibles évolutives.
- La géométrie du domaine suggère l'utilisation d'un modèle axisymétrique.
- On ne tient pas compte des sources (Joule et Lorentz)

En notant par  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques et par  $(u_r, u_\theta, u_z)$  les composantes d'un vecteur dans ce système, on obtient le système d'équations (tenant compte de l'invariance en  $\theta$ ) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(r\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r^2 + rp) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) &= \rho u_\theta^2 + p \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_z^2 + rp) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\theta u_z) &= -\rho u_\theta u_r \\ \frac{\partial}{\partial t}(rE) + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r(E + p)) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z(E + p)) &= 0 \\ p &= (\gamma - 1)\rho e\end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(rU) + \frac{\partial}{\partial r}(rF_r(U)) + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z(U)) = G(U)$$

où :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_z \\ \rho u_\theta \\ E \end{pmatrix}, F_r(U) = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_z u_r \\ \rho u_\theta u_r \\ u_r(E + p) \end{pmatrix}, F_z(U) = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_r u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho u_\theta u_z \\ u_z(E + p) \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u_\theta^2 + p \\ 0 \\ -\rho u_\theta u_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette formulation fait intervenir une forme divergentielle pouvant être traitée par volumes finis, le reste étant traité comme terme source.

# Une méthode de volumes finis

Considérons une triangulation du domaine  $\Omega$  des paramètres  $(r, z)$ . On note :

- $T_i$  : Triangle,  $1 \leq i \leq n_T$
- $e_{ij}$  : Arête commune aux triangles  $T_i$  et  $T_j$
- $\mathbf{n}_{ij} = (n_{ij,r}, n_{ij,z})$  : Normale unité au triangle  $T_i$  dirigée vers  $T_j$
- $\nu(i)$  : Ensemble des indices des (3) triangles voisins de  $T_i$

En intégrant le système d'équations sur un triangle  $T_i$  et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U(r, z, t) r \, dr \, dz + \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r \, d\sigma = \int_{T_i} G(U) \, dr \, dz$$

Soit  $(t^n = n \delta t)_{n \in \mathbb{N}}$  une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, \infty)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{T_i} U(r, z, t^{n+1}) r \, dr \, dz &= \int_{T_i} U(r, z, t^n) r \, dr \, dz \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r \, d\sigma \, dt \\ &\quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) \, dr \, dz \, dt \end{aligned}$$

# Une méthode de volumes finis

Considérons une triangulation du domaine  $\Omega$  des paramètres  $(r, z)$ . On note :

- $T_i$  : Triangle,  $1 \leq i \leq n_T$
- $e_{ij}$  : Arête commune aux triangles  $T_i$  et  $T_j$
- $\mathbf{n}_{ij} = (n_{ij,r}, n_{ij,z})$  : Normale unité au triangle  $T_i$  dirigée vers  $T_j$
- $\nu(i)$  : Ensemble des indices des (3) triangles voisins de  $T_i$

En intégrant le système d'équations sur un triangle  $T_i$  et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U(r, z, t) r dr dz + \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r d\sigma = \int_{T_i} G(U) dr dz$$

Soit  $(t^n = n \delta t)_{n \in \mathbb{N}}$  une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, \infty)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{T_i} U(r, z, t^{n+1}) r dr dz &= \int_{T_i} U(r, z, t^n) r dr dz \\ &- \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r d\sigma dt \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) dr dz dt \end{aligned}$$

Considérons une triangulation du domaine  $\Omega$  des paramètres  $(r, z)$ . On note :

- $T_i$  : Triangle,  $1 \leq i \leq n_T$
- $e_{ij}$  : Arête commune aux triangles  $T_i$  et  $T_j$
- $\mathbf{n}_{ij} = (n_{ij,r}, n_{ij,z})$  : Normale unité au triangle  $T_i$  dirigée vers  $T_j$
- $\nu(i)$  : Ensemble des indices des (3) triangles voisins de  $T_i$

En intégrant le système d'équations sur un triangle  $T_i$  et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U(r, z, t) r dr dz + \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r d\sigma = \int_{T_i} G(U) dr dz$$

Soit  $(t^n = n \delta t)_{n \in \mathbb{N}}$  une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, \infty)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{T_i} U(r, z, t^{n+1}) r dr dz &= \int_{T_i} U(r, z, t^n) r dr dz \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial T_i} (F_r(U)n_{ij,r} + F_z(U)n_{ij,z}) r d\sigma dt \\ &\quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) dr dz dt \end{aligned}$$

On note

$$|T_i| = \int_{T_i} dr dz, \quad |T_i|_r = \int_{T_i} r dr dz, \quad |e_{ij}| = \int_{e_{ij}} d\sigma, \quad |e_{ij}|_r = \int_{e_{ij}} r d\sigma,$$

et on définit l'approximation

$$U_i^n \approx \frac{1}{|T_i|_r} \int_{T_i} U(r, z, t^n) r dr dz.$$

Soit le flux approché :

$$F_{ij}^n \approx \frac{1}{\delta t |e_{ij}|_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{e_{ij}} (F_r(U) n_{ij,r} + F_z(U) n_{ij,z}) r d\sigma dt$$

et le terme source

$$G_i^n \approx \frac{1}{\delta t |T_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) dr dz dt.$$

On définit alors le schéma

$$|T_i|_r U_i^{n+1} = |T_i|_r U_i^n - \delta t \sum_{j \in \nu(i)} |e_{ij}|_r F_{ij}^n + \delta t |T_i| G(U_i^n) \quad 1 \leq i \leq n_T.$$

On note

$$|T_i| = \int_{T_i} dr dz, \quad |T_i|_r = \int_{T_i} r dr dz, \quad |e_{ij}| = \int_{e_{ij}} d\sigma, \quad |e_{ij}|_r = \int_{e_{ij}} r d\sigma,$$

et on définit l'approximation

$$U_i^n \approx \frac{1}{|T_i|_r} \int_{T_i} U(r, z, t^n) r dr dz.$$

Soit le flux approché :

$$F_{ij}^n \approx \frac{1}{\delta t |e_{ij}|_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{e_{ij}} (F_r(U) n_{ij,r} + F_z(U) n_{ij,z}) r d\sigma dt$$

et le terme source

$$G_i^n \approx \frac{1}{\delta t |T_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) dr dz dt.$$

On définit alors le schéma

$$|T_i|_r U_i^{n+1} = |T_i|_r U_i^n - \delta t \sum_{j \in \nu(i)} |e_{ij}|_r F_{ij}^n + \delta t |T_i| G(U_i^n) \quad 1 \leq i \leq n_T.$$

On note

$$|T_i| = \int_{T_i} dr dz, \quad |T_i|_r = \int_{T_i} r dr dz, \quad |e_{ij}| = \int_{e_{ij}} d\sigma, \quad |e_{ij}|_r = \int_{e_{ij}} r d\sigma,$$

et on définit l'approximation

$$U_i^n \approx \frac{1}{|T_i|_r} \int_{T_i} U(r, z, t^n) r dr dz.$$

Soit le flux approché :

$$F_{ij}^n \approx \frac{1}{\delta t |e_{ij}|_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{e_{ij}} (F_r(U) n_{ij,r} + F_z(U) n_{ij,z}) r d\sigma dt$$

et le terme source

$$G_i^n \approx \frac{1}{\delta t |T_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{T_i} G(U) dr dz dt.$$

On définit alors le schéma

$$|T_i|_r U_i^{n+1} = |T_i|_r U_i^n - \delta t \sum_{j \in \nu(i)} |e_{ij}|_r F_{ij}^n + \delta t |T_i| G(U_i^n) \quad 1 \leq i \leq n_T.$$

Le schéma volumes finis est donc entièrement déterminé par le choix de  $F_{ij}^n$  et  $G_i^n$ .  
Par exemple, le schéma de **Rusanov** contient à définir les flux :

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2}(F_r(U_i) + F_r(U_j))n_{ij,r} + \frac{1}{2}(F_z(U_i) + F_z(U_j))n_{ij,z} - \lambda_{ij}(U_j - U_i)$$

où  $\lambda_{ij}$  est assez grand pour garantir la stabilité.

Autres schémas possibles :

- **Godunov** : Il consiste à résoudre exactement les problèmes de Riemann ainsi posés.
- **HLL** (Harten, Lax, Van Leer) : Résolution approchée des problèmes de Riemann
- **HLLC** (+ Contact) : Adaptation du schéma HCC aux discontinuités de contact.

Le schéma volumes finis est donc entièrement déterminé par le choix de  $F_{ij}^n$  et  $G_i^n$ .  
Par exemple, le schéma de **Rusanov** contient à définir les flux :

$$F_{ij}^n = \frac{1}{2}(F_r(U_i) + F_r(U_j))n_{ij,r} + \frac{1}{2}(F_z(U_i) + F_z(U_j))n_{ij,z} - \lambda_{ij}(U_j - U_i)$$

où  $\lambda_{ij}$  est assez grand pour garantir la stabilité.

Autres schémas possibles :

- **Godunov** : Il consiste à résoudre exactement les problèmes de Riemann ainsi posés.
- **HLL** (Harten, Lax, Van Leer) : Résolution approchée des problèmes de Riemann
- **HLLC** (+ Contact) : Adaptation du schéma HCC aux discontinuités de contact.

# Un schéma de deuxième ordre (MUSCL)

- Le premier schéma MUSCL (*Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws*) est dû à Van Leer ('79) pour le cas 1-D.
- Il existe dans la littérature plusieurs extensions au cas multidimensionnel.
- T. Buffard, S. Clain et V. Clauzon ont proposé une nouvelle extension basée sur le calcul de dérivées directionnelles.

Nous présentons cette extension pour le cas axisymétrique.

# Un schéma de deuxième ordre (MUSCL)

- Le premier schéma MUSCL (*Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws*) est dû à Van Leer ('79) pour le cas 1-D.
- Il existe dans la littérature plusieurs extensions au cas multidimensionnel.
- T. Buffard, S. Clain et V. Clauzon ont proposé une nouvelle extension basée sur le calcul de dérivées directionnelles.

Nous présentons cette extension pour le cas axisymétrique.

# Un schéma de deuxième ordre (MUSCL)

- Le premier schéma MUSCL (*Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws*) est dû à Van Leer ('79) pour le cas 1-D.
- Il existe dans la littérature plusieurs extensions au cas multidimensionnel.
- T. Buffard, S. Clain et V. Clauzon ont proposé une nouvelle extension basée sur le calcul de dérivées directionnelles.

Nous présentons cette extension pour le cas axisymétrique.

Considérons la loi de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Le schéma de base de volumes finis utilise une approximation constante par morceaux. Soit, par exemple, un schéma décentré du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{f(u_j) - f(u_{j-1})}{\delta x} = 0$$

Ce schéma est connu pour être diffusif *i.e.* il lisse les chocs et discontinuités.

Pour obtenir moins de diffusion numérique, on peut considérer une approximation linéaire par morceaux du type :

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}})}{\delta x} = 0$$

où

$$u_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \quad u_{i-\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_i).$$

Ce schéma est plus précis mais est oscillant (*i.e.* non TVD).

Considérons la loi de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Le schéma de base de volumes finis utilise une approximation constante par morceaux. Soit, par exemple, un schéma décentré du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f(u_i) - f(u_{i-1})}{\delta x} = 0$$

Ce schéma est connu pour être diffusif *i.e.* il lisse les chocs et discontinuités.

Pour obtenir moins de diffusion numérique, on peut considérer une approximation linéaire par morceaux du type :

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}})}{\delta x} = 0$$

où

$$u_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \quad u_{i-\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_i).$$

Ce schéma est plus précis mais est oscillant (*i.e.* non TVD).

Considérons la loi de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Le schéma de base de volumes finis utilise une approximation constante par morceaux. Soit, par exemple, un schéma décentré du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f(u_i) - f(u_{i-1})}{\delta x} = 0$$

Ce schéma est connu pour être diffusif *i.e.* il lisse les chocs et discontinuités.

Pour obtenir moins de diffusion numérique, on peut considérer une approximation linéaire par morceaux du type :

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f(u_{i+\frac{1}{2}}) - f(u_{i-\frac{1}{2}})}{\delta x} = 0$$

où

$$u_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \quad u_{i-\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_i).$$

Ce schéma est plus précis mais est oscillant (*i.e.* non TVD).

La variation totale discrète est définie par :

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|.$$

Un schéma est dit **TVD** (Total Variation Diminishing) si

$$\frac{d}{dt} TV(u) \leq 0$$

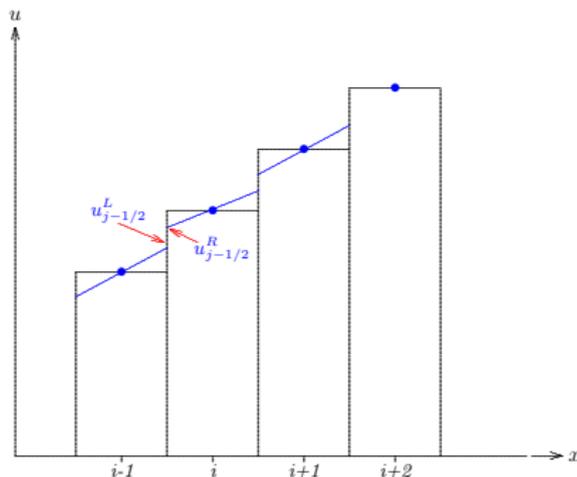
ou, après discrétisation en temps :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$

On peut alors utiliser un schéma de type MUSCL :

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^*}{\delta x} = 0$$

Les flux numériques  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^*$  correspondent à une combinaison non-linéaire d'approximations du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre de  $f(u)$ .



On définit :

$$u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = u_{i\pm\frac{1}{2}}^*(u_{i\pm\frac{1}{2}}^L, u_{i\pm\frac{1}{2}}^R)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{1}{2}\phi(r_i)(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_{i+1} - \frac{1}{2}\phi(r_{i+1})(u_{i+2} - u_{i+1})$$

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

Le fonction  $\phi$  est un limiteur de pente permettant d'assurer que la solution obtenue est TVD, avec

$$\phi(r) = 0 \text{ si } r \leq 0, \quad \phi(1) = 1.$$

Il existe dans la littérature une multitude de limiteurs de pente.

Par exemple le limiteur `minmod` est défini par

$$\phi(r) = \max(0, \min(1, r)), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 1.$$

On définit :

$$u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = u_{i\pm\frac{1}{2}}^*(u_{i\pm\frac{1}{2}}^L, u_{i\pm\frac{1}{2}}^R)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{1}{2}\phi(r_i)(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_{i+1} - \frac{1}{2}\phi(r_{i+1})(u_{i+2} - u_{i+1})$$

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

Le fonction  $\phi$  est un limiteur de pente permettant d'assurer que la solution obtenue est TVD, avec

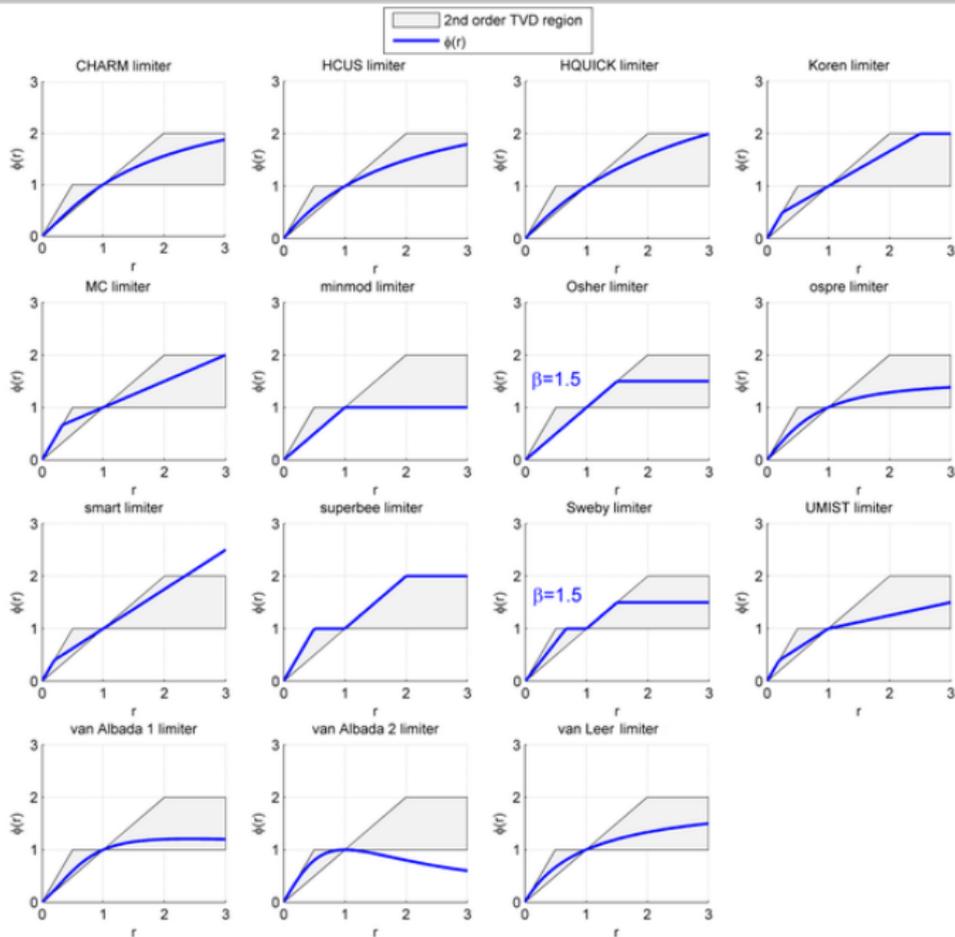
$$\phi(r) = 0 \text{ si } r \leq 0, \quad \phi(1) = 1.$$

Il existe dans la littérature une multitude de limiteurs de pente.

Par exemple le limiteur **minmod** est défini par

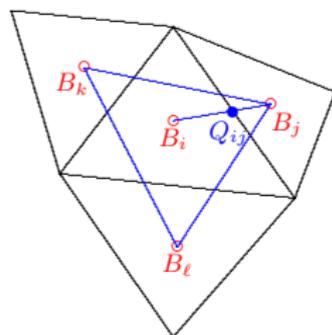
$$\phi(r) = \max(0, \min(1, r)), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 1.$$

# Limiteurs de pente



# Les schémas MUSCL pour les équations d'Euler

Pour un triangle  $T_i$  on note par  $B_i$  son barycentre et par  $Q_{ij}$  l'intersection du segment  $[B_i, B_j]$  avec l'arête  $e_{ij}$  pour tout  $j \in \nu(i)$ .



On introduit les coordonnées barycentriques  $(\rho_{ij})_{j \in \nu(i)}$  par

$$\sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} B_j = B_i, \quad \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} = 1.$$

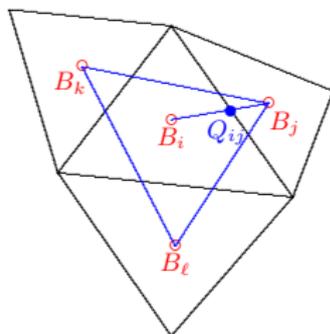
On suppose que  $B_i$  est strictement à l'intérieur du triangle formé par les barycentres des triangles voisins. Ainsi  $\rho_{ij} > 0$ .

On définit la direction

$$t_{ij} = \frac{B_i B_j}{|B_i B_j|}$$

# Les schémas MUSCL pour les équations d'Euler

Pour un triangle  $T_i$  on note par  $B_i$  son barycentre et par  $Q_{ij}$  l'intersection du segment  $[B_i, B_j]$  avec l'arête  $e_{ij}$  pour tout  $j \in \nu(i)$ .



On introduit les coordonnées barycentriques  $(\rho_{ij})_{j \in \nu(i)}$  par

$$\sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} B_j = B_i, \quad \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} = 1.$$

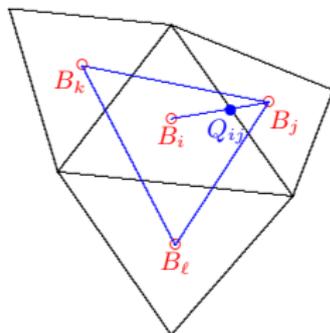
On suppose que  $B_i$  est strictement à l'intérieur du triangle formé par les barycentres des triangles voisins. Ainsi  $\rho_{ij} > 0$ .

On définit la direction

$$t_{ij} = \frac{B_i B_j}{|B_i B_j|}$$

# Les schémas MUSCL pour les équations d'Euler

Pour un triangle  $T_i$  on note par  $B_i$  son barycentre et par  $Q_{ij}$  l'intersection du segment  $[B_i, B_j]$  avec l'arête  $e_{ij}$  pour tout  $j \in \nu(i)$ .



On introduit les coordonnées barycentriques  $(\rho_{ij})_{j \in \nu(i)}$  par

$$\sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} B_j = B_i, \quad \sum_{j \in \nu(i)} \rho_{ij} = 1.$$

On suppose que  $B_i$  est strictement à l'intérieur du triangle formé par les barycentres des triangles voisins. Ainsi  $\rho_{ij} > 0$ .

On définit la direction

$$t_{ij} = \frac{B_i B_j}{|B_i B_j|}$$

On obtient ainsi une décomposition

$$t_{ij} = \sum_{\substack{j \in \nu(i) \\ k \neq i}} \beta_{ijk} t_{ik}, \quad \beta_{ijk} = -\frac{\rho_{ik}}{\rho_{ij}} \frac{|B_i B_k|}{|B_i B_j|}$$

On veut maintenant reconstruire les valeurs  $U_{ij}$  sur l'arête  $e_{ij}$ .  
Soit  $\nu$  une composante quelconque de  $U$  (constante par triangle).  
On définit un premier ensemble de pentes **aval** par :

$$p_{ij}^+ = \frac{v_j - v_i}{|B_i B_j|} \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Ainsi  $p_{ij}^+$  est une approximation de la dérivée de  $\nu$  dans la direction  $t_{ij}$ .  
La pente **amont** est définie par :

$$p_{ij}^- = - \sum_{\substack{k \in \nu(i) \\ k \neq j}} \beta_{ijk} p_{ik}^+ \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Les pentes  $p_{ij}$  sont alors obtenues par un limiteur. Par exemple

$$p_{ij} := \text{minmod}(p_{ij}^+, p_{ij}^-)$$

On obtient ainsi une décomposition

$$t_{ij} = \sum_{\substack{j \in \nu(i) \\ k \neq i}} \beta_{ijk} t_{ik}, \quad \beta_{ijk} = -\frac{\rho_{ik}}{\rho_{ij}} \frac{|B_i B_k|}{|B_i B_j|}$$

On veut maintenant reconstruire les valeurs  $U_{ij}$  sur l'arête  $e_{ij}$ .  
Soit  $\nu$  une composante quelconque de  $U$  (constante par triangle).  
On définit un premier ensemble de pentes **aval** par :

$$p_{ij}^+ = \frac{v_j - v_i}{|B_i B_j|} \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Ainsi  $p_{ij}^+$  est une approximation de la dérivée de  $\nu$  dans la direction  $t_{ij}$ .

La pente **amont** est définie par :

$$p_{ij}^- = - \sum_{\substack{k \in \nu(i) \\ k \neq j}} \beta_{ijk} p_{ik}^+ \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Les pentes  $p_{ij}$  sont alors obtenues par un limiteur. Par exemple

$$p_{ij} := \text{minmod}(p_{ij}^+, p_{ij}^-)$$

On obtient ainsi une décomposition

$$t_{ij} = \sum_{\substack{j \in \nu(i) \\ k \neq i}} \beta_{ijk} t_{ik}, \quad \beta_{ijk} = -\frac{\rho_{ik}}{\rho_{ij}} \frac{|B_i B_k|}{|B_i B_j|}$$

On veut maintenant reconstruire les valeurs  $U_{ij}$  sur l'arête  $e_{ij}$ .  
Soit  $\nu$  une composante quelconque de  $U$  (constante par triangle).  
On définit un premier ensemble de pentes **aval** par :

$$p_{ij}^+ = \frac{v_j - v_i}{|B_i B_j|} \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Ainsi  $p_{ij}^+$  est une approximation de la dérivée de  $\nu$  dans la direction  $t_{ij}$ .  
La pente **amont** est définie par :

$$p_{ij}^- = - \sum_{\substack{k \in \nu(i) \\ k \neq j}} \beta_{ijk} p_{ik}^+ \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Les pentes  $p_{ij}$  sont alors obtenues par un limiteur. Par exemple

$$p_{ij} := \text{minmod}(p_{ij}^+, p_{ij}^-)$$

On obtient ainsi une décomposition

$$t_{ij} = \sum_{\substack{j \in \nu(i) \\ k \neq i}} \beta_{ijk} t_{ik}, \quad \beta_{ijk} = -\frac{\rho_{ik}}{\rho_{ij}} \frac{|B_i B_k|}{|B_i B_j|}$$

On veut maintenant reconstruire les valeurs  $U_{ij}$  sur l'arête  $e_{ij}$ .  
Soit  $\nu$  une composante quelconque de  $U$  (constante par triangle).  
On définit un premier ensemble de pentes **aval** par :

$$p_{ij}^+ = \frac{v_j - v_i}{|B_i B_j|} \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Ainsi  $p_{ij}^+$  est une approximation de la dérivée de  $\nu$  dans la direction  $t_{ij}$ .  
La pente **amont** est définie par :

$$p_{ij}^- = - \sum_{\substack{k \in \nu(i) \\ k \neq j}} \beta_{ijk} p_{ik}^+ \quad \forall j \in \nu(i), 1 \leq i \leq n_T.$$

Les pentes  $p_{ij}$  sont alors obtenues par un limiteur. Par exemple

$$p_{ij} := \text{minmod}(p_{ij}^+, p_{ij}^-)$$

et la reconstruction de  $v$  sur  $e_{ij}$  est donnée par

$$v_{ij} := v_i + p_{ij} |B_i Q_{ij}|$$

## Remarques

- Cette reconstruction est exacte pour les fonctions affines :  $v(Q_{ij}) = v_{ij}$  si  $v$  est linéaire par morceaux
- Le principal intérêt est que la reconstruction est 1-D. Ceci permet d'utiliser les limiteurs de pente 1-D les plus populaires.
- La propriété  $p_{ij} > 0$  implique  $\beta_{ijk} < 0$ . Donc si  $v_i$  est un extrémum local on a  $p_{ij}^+ p_{ij}^- \leq 0$ . Donc  $p_{ij} = 0$ . Ainsi, les extréma ne croissent pas.
- Pour des raisons de positivité, la reconstruction doit se faire sur les variables physiques et non conservatives.

et la reconstruction de  $v$  sur  $e_{ij}$  est donnée par

$$v_{ij} := v_i + p_{ij} |B_i Q_{ij}|$$

## Remarques

- Cette reconstruction est exacte pour les fonctions affines :  $v(Q_{ij}) = v_{ij}$  si  $v$  est linéaire par morceaux
- Le principal intérêt est que la reconstruction est 1-D. Ceci permet d'utiliser les limiteurs de pente 1-D les plus populaires.
- La propriété  $p_{ij} > 0$  implique  $\beta_{ijk} < 0$ . Donc si  $v_i$  est un extrémum local on a  $p_{ij}^+ p_{ij}^- \leq 0$ . Donc  $p_{ij} = 0$ . Ainsi, les extréma ne croissent pas.
- Pour des raisons de positivité, la reconstruction doit se faire sur les variables physiques et non conservatives.

et la reconstruction de  $v$  sur  $e_{ij}$  est donnée par

$$v_{ij} := v_i + p_{ij} |B_i Q_{ij}|$$

## Remarques

- Cette reconstruction est exacte pour les fonctions affines :  $v(Q_{ij}) = v_{ij}$  si  $v$  est linéaire par morceaux
- Le principal intérêt est que la reconstruction est 1-D. Ceci permet d'utiliser les limiteurs de pente 1-D les plus populaires.
- La propriété  $p_{ij} > 0$  implique  $\beta_{ijk} < 0$ . Donc si  $v_i$  est un extrémum local on a  $p_{ij}^+ p_{ij}^- \leq 0$ . Donc  $p_{ij} = 0$ . Ainsi, les extréma ne croissent pas.
- Pour des raisons de positivité, la reconstruction doit se faire sur les variables physiques et non conservatives.

et la reconstruction de  $v$  sur  $e_{ij}$  est donnée par

$$v_{ij} := v_i + p_{ij} |B_i Q_{ij}|$$

## Remarques

- Cette reconstruction est exacte pour les fonctions affines :  $v(Q_{ij}) = v_{ij}$  si  $v$  est linéaire par morceaux
- Le principal intérêt est que la reconstruction est 1-D. Ceci permet d'utiliser les limiteurs de pente 1-D les plus populaires.
- La propriété  $p_{ij} > 0$  implique  $\beta_{ijk} < 0$ . Donc si  $v_i$  est un extrémum local on a  $p_{ij}^+ p_{ij}^- \leq 0$ . Donc  $p_{ij} = 0$ . Ainsi, les extréma ne croissent pas.
- Pour des raisons de positivité, la reconstruction doit se faire sur les variables physiques et non conservatives.

et la reconstruction de  $v$  sur  $e_{ij}$  est donnée par

$$v_{ij} := v_i + p_{ij} |B_i Q_{ij}|$$

## Remarques

- Cette reconstruction est exacte pour les fonctions affines :  $v(Q_{ij}) = v_{ij}$  si  $v$  est linéaire par morceaux
- Le principal intérêt est que la reconstruction est 1-D. Ceci permet d'utiliser les limiteurs de pente 1-D les plus populaires.
- La propriété  $p_{ij} > 0$  implique  $\beta_{ijk} < 0$ . Donc si  $v_i$  est un extrémum local on a  $p_{ij}^+ p_{ij}^- \leq 0$ . Donc  $p_{ij} = 0$ . Ainsi, les extréma ne croissent pas.
- Pour des raisons de positivité, la reconstruction doit se faire sur les variables physiques et non conservatives.

# Solutions stationnaires radiales

Afin de tester le schéma numérique, on construit une solution stationnaire radiale des équations :  
On cherche une solution  $(u_r, u_\theta, u_z, p, e)$  ne dépendant que de  $r$  et telle que  $u_z = u_\theta = 0$ . On obtient le système

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(r\rho u_r) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(r(\rho u_r^2 + p)) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(r u_r (e + p)) &= 0 \\ p &= (\gamma - 1)\rho e\end{aligned}$$

On en déduit, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{\left(\alpha\rho^2 r^2 - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)(\gamma-1)r}, \quad u_r = \frac{\beta}{\rho r}$$

# Solutions stationnaires radiales

Afin de tester le schéma numérique, on construit une solution stationnaire radiale des équations :  
On cherche une solution  $(u_r, u_\theta, u_z, p, e)$  ne dépendant que de  $r$  et telle que  $u_z = u_\theta = 0$ . On obtient le système

$$\frac{d}{dr}(r\rho u_r) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r(\rho u_r^2 + p)) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r u_r (e + p)) = 0$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e$$

On en déduit, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{\left(\alpha\rho^2 r^2 - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)(\gamma-1)r}, \quad u_r = \frac{\beta}{\rho r}$$

# Solutions stationnaires radiales

Afin de tester le schéma numérique, on construit une solution stationnaire radiale des équations :  
On cherche une solution  $(u_r, u_\theta, u_z, p, e)$  ne dépendant que de  $r$  et telle que  $u_z = u_\theta = 0$ . On obtient le système

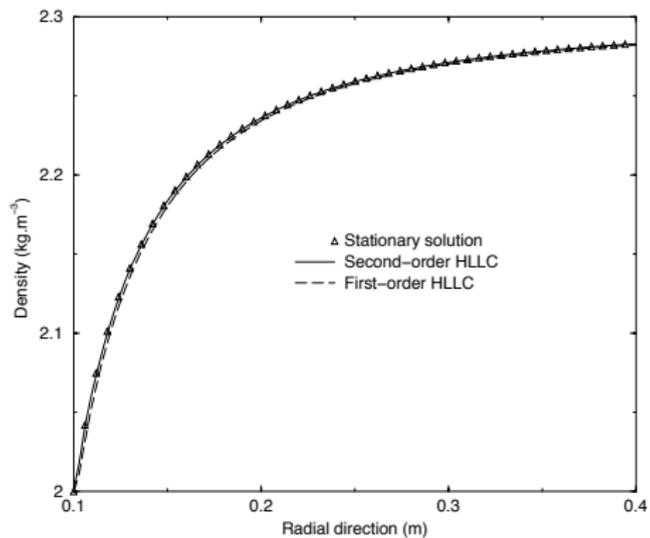
$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(r\rho u_r) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(r(\rho u_r^2 + p)) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(r u_r (e + p)) &= 0 \\ p &= (\gamma - 1)\rho e\end{aligned}$$

On en déduit, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{\left(\alpha\rho^2 r^2 - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)(\gamma-1)r}, \quad u_r = \frac{\beta}{\rho r}$$

- 1 Solution stationnaire radiale
- 2 Tube à choc (SOD) : Plusieurs configurations
- 3 Écoulement supersonique dans un canal

## Solution



Soit le domaine des paramètres

$$\Omega = \{(r, z); r \in [0, 1), z \in (0, 1)\}.$$

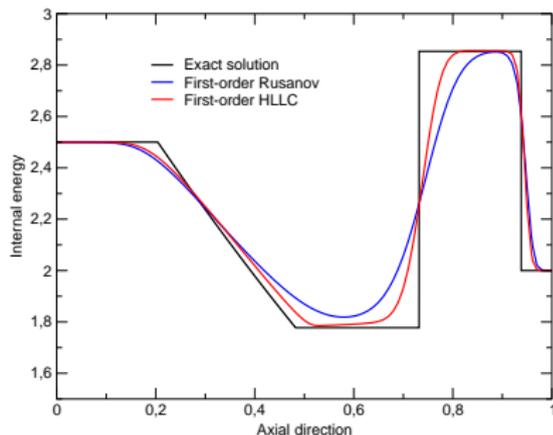
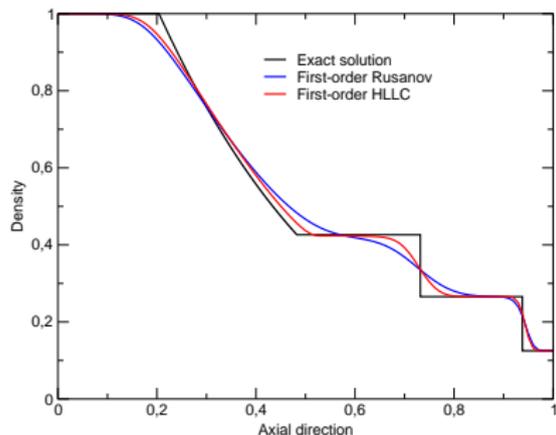
On définit  $\Omega_L = (0, 1) \times (0, \frac{1}{2})$ ,  $\Omega_R = (0, 1) \times (\frac{1}{2}, 1)$  et les conditions initiales :

$$U(t = 0) = \begin{cases} U_L & \text{dans } \Omega_L \\ U_R & \text{dans } \Omega_R \end{cases}$$

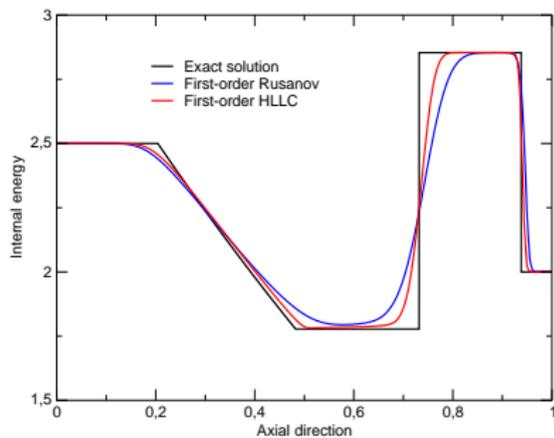
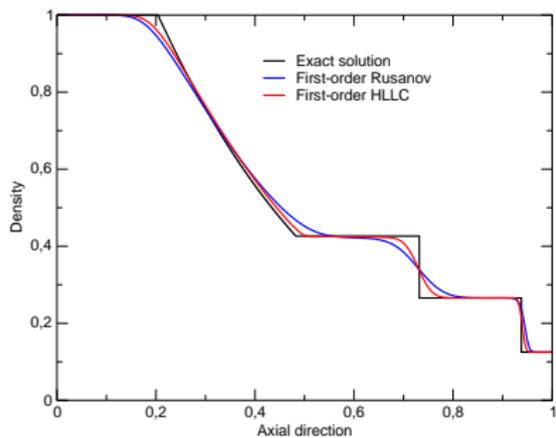
# Tube à choc : Test 1

On teste une configuration avec une onde de raréfaction à gauche, une discontinuité de contact à droite. On prescrit pour cela :

$$\rho_L = 1, \rho_R = 0.125, \quad u_L = u_R = 0, \quad p_L = 1, p_R = 0.1$$

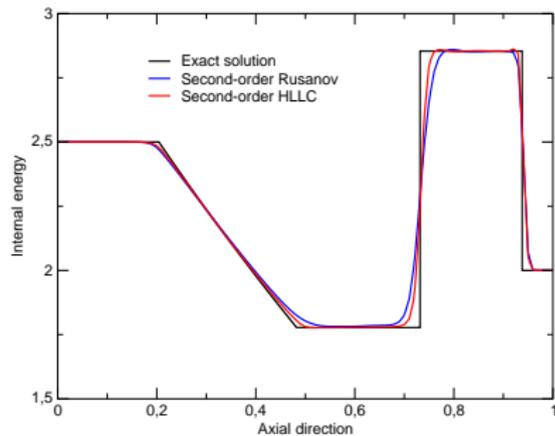
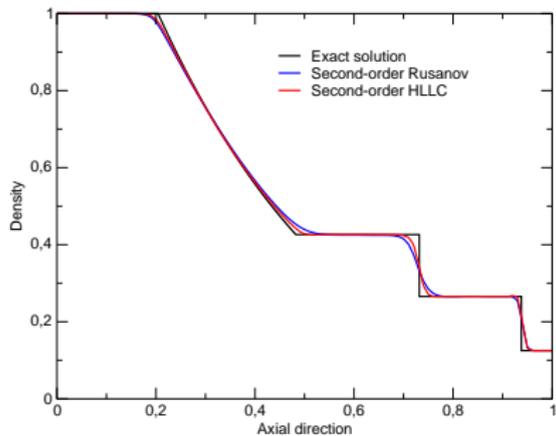


Ordre 1 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/100



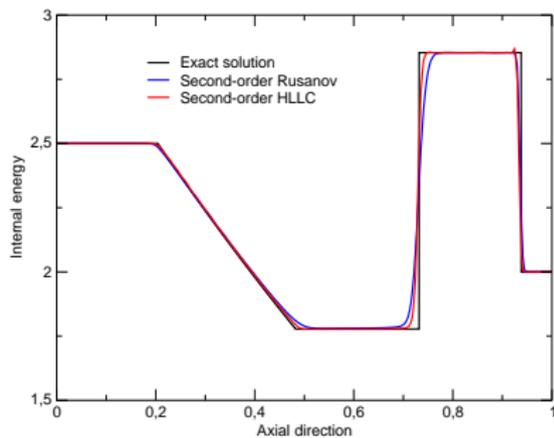
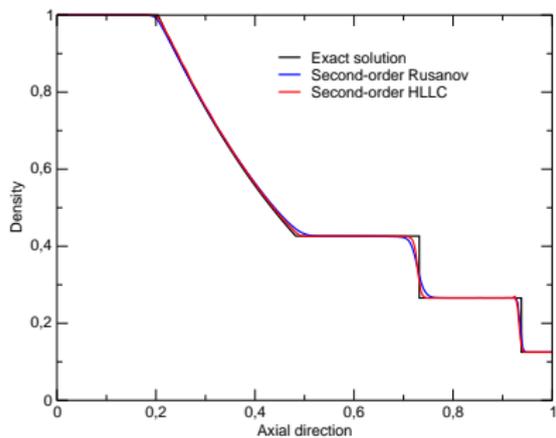
Ordre 1 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/200

# Tube à choc : Test 1



Ordre 2 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/100

# Tube à choc : Test 1

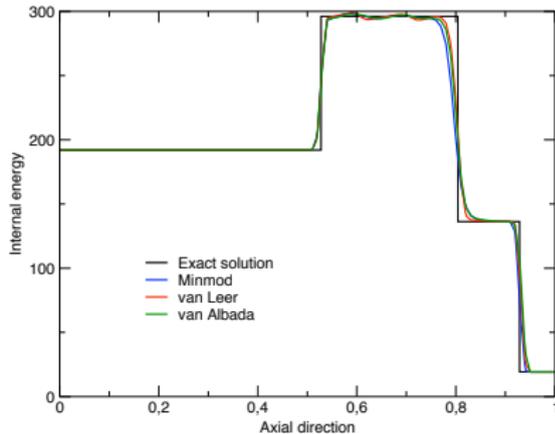
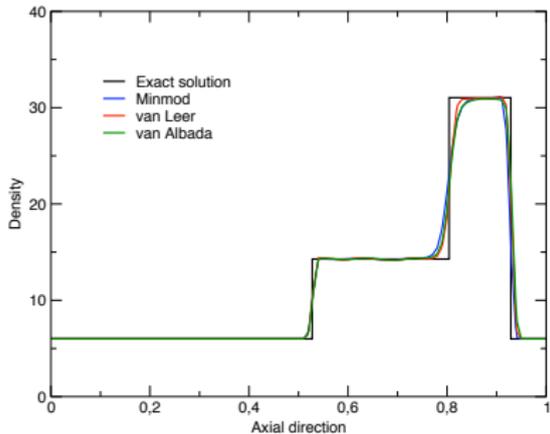


Ordre 2 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/200

# Tube à choc : Test 2

On teste maintenant une configuration avec un double choc et une détente. Ceci est obtenu avec les conditions :

$$\rho_L = \rho_R = 6, \quad u_L = 19.6, \quad u_R = -6.2, \quad p_L = 460, \quad p_R = 46$$

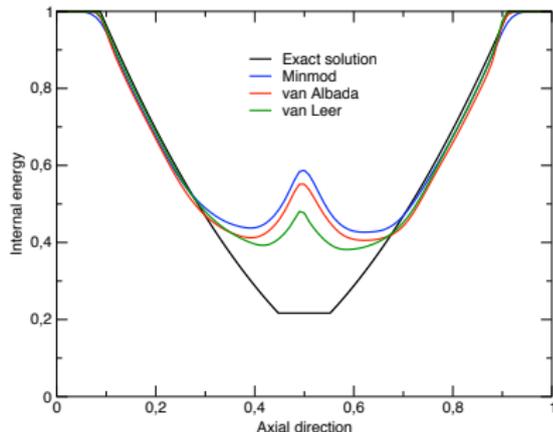
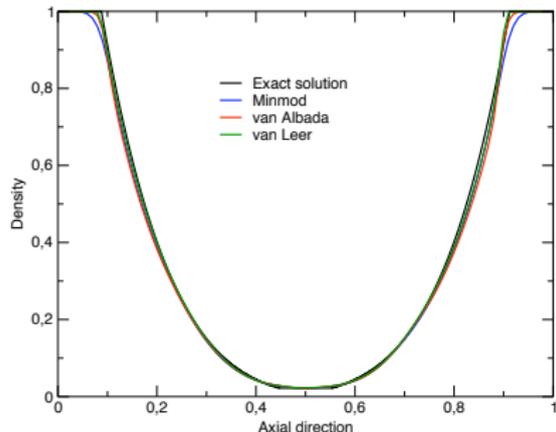


Ordre 2 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/200

# Tube à choc : Test 3

On teste maintenant une configuration avec 2 raréfactions et une discontinuité de contact où la solution présente un état proche du vide. Ceci on obtenu avec les conditions :

$$\rho_L = \rho_R = 1, \quad u_L = -2, \quad u_R = 2, \quad p_L = 1, \quad p_R = 0.4$$



Ordre 2 : Schémas de Rusanov et HLLC. Maillage 1/200

# Écoulement supersonique dans un canal

On considère un écoulement dans un canal avec un obstacle oblique (10 degrés) formant un cône.  
Données du problème :

$$P_{\infty} = 10^5 Pa, \rho_{\infty} = 1.16 Kg/m^3, M_{\infty} = 2$$

Maillage : 5176 triangles.

Animation

Animation