Compléments de Géométrie

R. Taillefer

4 novembre 2013

Table des matières

I Géométrie vectorielle euclidienne : rappels et compléments

A Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie (pas euclidien pour l'instant).

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases de E, on note $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ le déterminant du système $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les e'_j exprimés dans la base $\mathcal{B}$ (matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$) :

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{vmatrix} \rightarrow e_i \\ \quad \downarrow \\ \quad e'_j \end{array}$$

Propriétés A.1. **(i)** $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$.

(ii) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

(iii) $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = (\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}')^{-1}$.

(iv) Si $\mathcal{B}''$ est une autre base de E, alors $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'' = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \cdot \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}''$.

Proposition A.2. La relation $\sim$ définie par $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Cette relation a exactement *deux* classes d'équivalence.

Démonstration. La réflexivité vient de **(ii)**, la symétrie de **(iii)** et la transitivité de **(iv)**.

Fixons une base $\mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B}_1$ la base obtenue à partir de $\mathcal{B}_0$ en remplaçant le premier vecteur de $\mathcal{B}_0$ par son opposé. Alors $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_1 = -1 < 0$, donc $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_0$ et donc il y a au moins deux classes d'équivalence.

Soit maintenant $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Si $\mathcal{B} \not\sim \mathcal{B}_0$, alors $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} < 0$ et donc $\det_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B} = \det_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_0 \cdot \det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} = -\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} > 0$ donc $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}_1$. Il n'y a donc que deux classes d'équivalence. □

Définition A.3. *Orienter E, c'est* choisir *l'une des deux classes d'équivalence de $\sim$. Les bases de la classe choisie sont alors dites directes, celles de l'autre classe sont dites indirectes, inverses ou rétrogrades.*

Définition A.4. *Par définition, l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle de la base canonique* $\{(1, 0, \cdots, 0), \dots, (0, \cdots, 0, 1)\}$.

B Orientation d'un espace vectoriel euclidien

On suppose désormais que E est *euclidien* de dimension n.

B.1 Rappels

Définition B.1. *Un endomorphisme orthogonal ou transformation orthogonale de E est un endomorphisme de E qui est une isométrie (conserve la norme).*

Proposition B.2. Soit φ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est orthogonal.

(ii) φ est inversible d'inverse φ^* (l'adjoint).

(iii) La matrice M de φ dans une (toute) base orthonormale est une matrice orthogonale, *i.e.* $M\,{}^tM = I_n$.

Proposition B.3. Soit φ un endomorphisme orthogonal de E. Alors

✦ $\det(\varphi) = \pm 1$.

✦ Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par φ alors $F^\perp$ est stable par φ.

✦ Si λ est une valeur propre (réelle) de φ (s'il en existe), alors $\lambda = \pm 1$. Les sous-espaces propres associés à -1 et à 1 sont orthogonaux.

c.f. L2.

Remarque B.4. Attention, un endomorphisme orthogonal peut ne pas être diagonalisable.

B.2 Orientation

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E. On rappelle que la matrice de passage de l'une à l'autre est une matrice *orthogonale*, donc de déterminant ± 1. Donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation (*resp.* des orientations opposées) si et seulement si $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$ (*resp.* $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = -1$).

C Produit mixte, produit vectoriel

Soit E un espace euclidien.

Supposons que deux bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la *même* orientation. Pour toute famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs de E, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \cdot \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \ldots, v_n). \tag{C.1}$$

Cette relation justifie la définition suivante :

Définition C.1. *Supposons que E soit orienté et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. Pour toute famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs de E, le nombre réel $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ s'appelle le produit mixte de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Il ne dépend pas du choix de base orthonormale directe.*

On suppose désormais que l'espace euclidien E est *orienté.*

Soit $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ une famille de $n-1$ vecteurs de E (où n est la dimension de E). Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale directe de E. On considère le vecteur w dont les coordonnées sont les produits mixtes

$$\langle w, e_i \rangle = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, e_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Par linéarité, on a les propriétés suivantes.

Propriétés C.2. (1) $\langle w, x \rangle = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ pour tout $x \in E$.

(2) En particulier, $\|w\|^2 = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)$ et

(3) $\langle w, v_i \rangle = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Proposition C.3. Le vecteur w défini ci-dessus ne dépend pas de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ choisie.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ une autre base orthonormale directe de E, et soit w' le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ sont $\langle w', e'_i\rangle = \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \ldots, v_{n-1}, e'_i) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, e'_i)$ d'après (C.1). Par linéarité, on a donc $\langle w', x\rangle = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, x) = \langle w, x\rangle$ pour tout $x \in E$. Alors $\langle w - w', x\rangle = \langle w, x\rangle - \langle w', x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, donc $w = w'$. □

Définition C.4. *Le vecteur w défini ci-dessus s'appelle le* produit vectoriel *de la famille* $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *. On le note* $w = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$.

Lemme C.5. L'application

$$\begin{array}{rcl} E^{n-1} & \to & E \\ (v_1, \ldots, v_{n-1}) & \mapsto & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \end{array}$$

est une application multilinéaire alternée (*i.e.* elle est linéaire en chaque variable v_i et pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$ on a $v_1 \wedge \ldots \wedge v_i \wedge \ldots \wedge v_j \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = -v_1 \wedge \ldots \wedge v_j \wedge \ldots \wedge v_i \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$).

Démonstration. Cela découle de la propriété **(1)** et du fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme multinéaire alternée. □

Proposition C.6. **(a)** Si la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est liée, alors $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = 0$.

(b) Si la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre, alors $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ est l'unique vecteur w de E tel que

- **(i)** w est orthogonal à $v_1, \ldots, v_{n-1}$,
- **(ii)** $\|w\| = |\det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \ldots, v_{n-1})|$ où $\mathcal{B}_1$ est une base orthonormale de l'hyperplan $H = \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$,
- **(iii)** la base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ de E est directe.

Démonstration. **(a)** Si la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est liée, alors

$$\|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\|^2 = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) = 0$$

d'après la propriété **(2)**, donc $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = 0$.

(b) Supposons que la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre et posons $w = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$. Notons H l'hyperplan engendré par $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Soit $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ une base orthonormale de H. On complète en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ de E (e_n est *le* vecteur de norme 1 de la droite $H^\perp$ tel que $\mathcal{B}$ soit directe). Alors d'après **(3)**, $w \in H^\perp = \operatorname{vect}\{e_n\}$ donc $w = \lambda e_n$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais $\lambda = \langle w, e_n\rangle = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n) = \det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. De plus, $\|w\| = \|\lambda e_n\| = |\lambda|$ donc on a bien **(ii)**. Enfin, en utilisant **(ii)** et la propriété **(2)** on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, w) = \|w\|^2 = \det_{\mathcal{B}_1}(v_1, \ldots, v_{n-1})^2 > 0$ donc la famille $\langle v_1, \ldots, v_{n-1}, w\rangle$ est bien une base directe.

Pour l'unicité, supposons toujours que la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre et soit w un vecteur vérifiant **(i)**, **(ii)** et **(iii)**. Soit u l'unique vecteur unitaire de $H^\perp$ tel que la base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, u\}$ soit directe. D'après **(i)**, $w \in H^\perp$ donc $w = \mu u$ pour un $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mu = \det_{\{v_1, \ldots, v_{n-1}, u\}}(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)$$

(il s'agit du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$), donc $\mu > 0$ d'après **(iii)**. Donc $\mu = |\mu| = \|w\|$ est défini de manière unique d'après **(ii)**. Finalement, w est bien défini de manière unique, il s'agit donc de $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$. □

D Le groupe orthogonal

On fixe un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

D.1 Généralités

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ de tous les automorphismes (endomorphismes inversibles) de E est un groupe pour la composition. Notons $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. Comme tout endomorphisme orthogonal est bijectif, on a $\mathrm{O}(E) \subseteq \mathcal{GL}(E)$.

$\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ (c'est-à-dire que $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$, et que si $\varphi, \psi \in \mathrm{O}(E)$ alors $\psi \circ \varphi$ et φ^{-1} sont dans $\mathrm{O}(E)$), appelé groupe orthogonal de E.

Si on fixe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, l'application qui à $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme du groupe $\mathrm{O}(E)$ dans le groupe

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M^{\,t}M = I_n\right\} \subseteq \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

L'application $\det : \mathrm{O}(E) \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes : $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$.

On pose

$$\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E) = \{\varphi \in \mathrm{O}(E); \det(\varphi) = 1\} = \mathrm{Ker}(\det)$$

et

$$\mathrm{O}^-(E) = \{\varphi \in \mathrm{O}(E); \det(\varphi) = -1\}.$$

Alors $\mathrm{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, isomorphe à $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$.

Supposons E orienté. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $\varphi \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\det(\varphi) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B}))$, donc $\varphi \in \mathrm{O}^+(E)$ si et seulement si φ conserve l'orientation, *i.e.* $\varphi(\mathcal{B})$ a la même orientation que $\mathcal{B}$, et $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$ si et seulement si φ renverse l'orientation, *i.e.* $\varphi(\mathcal{B})$ n'a pas la même orientation que $\mathcal{B}$.

Exemple D.1. Si $\dim E = 1$, alors $\mathrm{O}(E) = \{-\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E\}$.

D.2 Symétries orthogonales

Définition-Proposition D.2. (Rappel) Un endomorphisme s de E (pas nécessairement euclidien ici) est appelé symétrie si $s^2 := s \circ s = \mathrm{id}_E$. On a alors $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(s - \mathrm{id}_E)$, donc $s(u+v) = u - v$ pour $u \in F$ et $v \in G$; on dit que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Définition-Proposition D.3. Soit E un espace euclidien. Soient F, G_1, G_2 des sous-espaces vectoriels de E tels que $F = G_1 \oplus G_2$. On dit que cette somme directe est une somme directe orthogonale si $G_1 \subseteq (G_2)^\perp$ (ou ce qui revient au même $G_2 \subseteq (G_1)^\perp$) et on la note $F = G_1 \overset{\perp}{\oplus} G_2$.
En particulier, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

Proposition D.4. Soit $s : E \to E$ une symétrie. On reprend les notations de la définition-proposition **D.2** Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) s est un endomorphisme orthogonal

(ii) $G = F^\perp$ (*i.e.* la somme directe $E = F \oplus G$ est orthogonale).

Démonstration. ✦ Si **(i)** est vérifiée, alors pour tous $u \in F$ et $v \in G$ on a

$$\langle u, v\rangle = \langle s(u), s(v)\rangle = \langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle$$

donc $\langle u, v\rangle = 0$ et donc $G \subseteq F^\perp$. De plus, $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^\perp$ donc $G = F^\perp$.

✦ Si **(ii)** est vraie, soit $\left\{e_1, \ldots, e_p\right\}$ une base orthonormale de F, soit $\left\{e_{p+1}, \ldots, e_n\right\}$ une base orthonormale de G. Puisque $G = F^\perp$, la famille $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormale de E. La matrice de s dans cette base orthonormale est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ qui est orthogonale, donc s est orthogonal. □

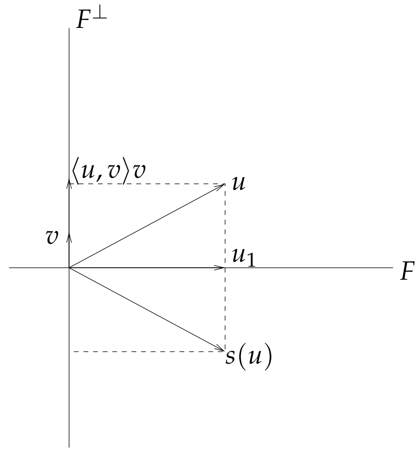
Définition D.5. *Si les assertions de la proposition* **D.4** *sont vérifiées, alors on dit que s est la symétrie orthogonale par rapport à F.*

Remarque D.6. Comme $\det(s) = (-1)^{n-p}$, $s \in O^+(E)$ si et seulement si $n = \dim E$ et $p = \dim F$ ont la même parité.

Définition D.7. *Lorsque F est un* hyperplan, *la symétrie orthogonale s par rapport à F est appelée une réflexion par rapport à F.*

Lorsque F est de dimension $n-2$, la symétrie orthogonale par rapport à F est appelée un retournement.

Remarque D.8. Dans le cas où s est une réflexion, $s \in O^-(E)$ et on peut décrire s de la façon suivante : soit v un vecteur *unitaire* normal à F. Alors si $u \in E$, on a $u = u_1 + \langle u, v\rangle v$ avec u_1 dans F, et donc $s(u) = u_1 - \langle u, v\rangle v = u - 2\langle u, v\rangle v$.



D.3 Description de $O(E)$ lorsque E est un espace euclidien orienté de dimension 2

Fixons une base orthonormale *directe* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ de E.

a) Description de $\varphi \in O^+(E)$

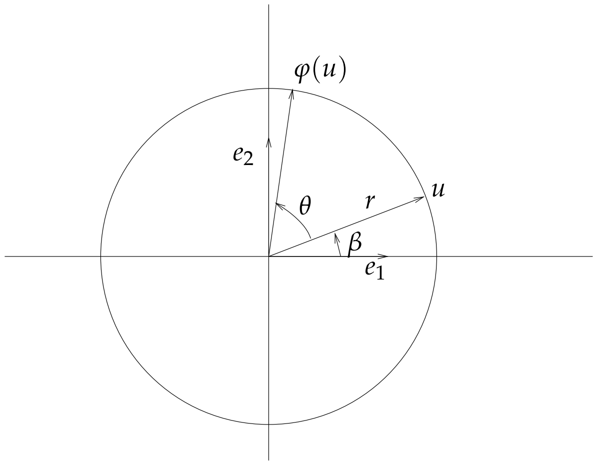
Si $\varphi \in O^+(E)$ on a vu l'an dernier que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =: R_\theta$ pour un réel θ.

On remarque de plus que $R_\theta R_\alpha = R_{\alpha+\theta} = R_\alpha R_\theta$.

Soit $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormale *directe* de E. Alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale, dont le déterminant est 1 (puisque les deux bases sont directes), donc elle est aussi de la forme $P = R_\alpha$ pour un réel α. Puisque $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = R_\theta$ et $P = R_\alpha$ commutent, on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)P = P^{-1}P\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = R_\theta$. Finalement, $\{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale directe.

De plus, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\beta+\theta) \\ r\sin(\beta+\theta) \end{pmatrix}$.

Définition D.9. *On dit que φ est la rotation d'angle θ. Donc $O^+(E) = SO(E)$ est l'ensemble des rotations de E. C'est un groupe commutatif* ($\dim E = 2$).



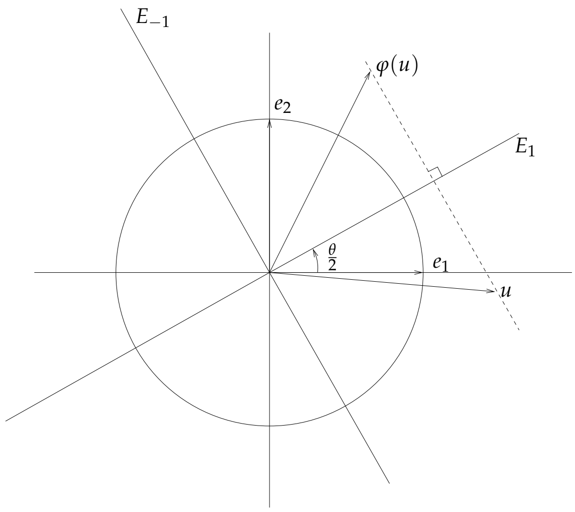
Remarque D.10. $-\mathrm{id}_E$ est la rotation d'angle π.

b) Description de $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$

Si $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$ on a vu l'an dernier que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un réel θ. De plus, φ a deux valeurs propres, 1 et -1, et E est la somme directe orthogonale des deux sous-espaces propres : $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}$. On en déduit que φ est la réflexion par rapport à la droite E_1.

Donc $\mathrm{O}^-(E)$ est l'ensemble des réflexions de E.

Remarque D.11. E_1 est la droite engendrée par $\cos\frac{\theta}{2} e_1 + \sin\frac{\theta}{2} e_2$, puisque $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.



Remarque D.12. Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale *indirecte*, alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant -1 et orthogonale, donc de la forme $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ pour un réel α. On constate alors que si φ est une rotation dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est R_θ, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_{-\theta}$.

Autrement dit, lorsque l'on passe d'une base orthonormale directe à une base orthonormale indirecte, il faut changer l'angle θ d'une rotation en $-\theta$.

c) Rotations et réflexions

Proposition D.13. Soit E un espace euclidien de dimension 2. Toute rotation de E est la composée de deux réflexions, l'une de ces réflexions pouvant être choisie arbitrairement.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{O}^+(E)$. Pour $\psi \in \mathrm{O}^-(E)$, comme $\psi^2 = \mathrm{id}_E$, on a $\varphi = \varphi \circ \psi^2 = (\varphi \circ \psi) \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi \in \mathrm{O}^-(E)$. On a de même $\varphi = \psi \circ (\psi \circ \varphi)$ avec $\psi \circ \varphi \in \mathrm{O}^-(E)$. □

Plus précisément :

Proposition D.14. Soit $\varphi \in \mathrm{O}^+(E)$ la rotation d'angle θ. Notons r la rotation d'angle $\frac{\theta}{2}$. Si ψ est la réflexion par rapport à la droite D alors :

- $\varphi = (\varphi \circ \psi) \circ \psi$ où $\varphi \circ \psi$ est la réflexion par rapport à $r(D)$.
- $\varphi = \psi \circ (\psi \circ \varphi)$ où $\psi \circ \varphi$ est la réflexion par rapport à $r^{-1}(D)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ pour un réel α. La droite D est alors la droite engendrée par $\cos\frac{\alpha}{2}\, e_1 + \sin\frac{\alpha}{2}\, e_2$. On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & -\cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

donc $\varphi \circ \psi$ est la réflexion par rapport à la droite engendrée par $\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) e_2$ qui est bien $r(D)$.

On raisonne de même pour l'autre expression de φ. □

D.4 Description de $\mathrm{O}(E)$ lorsque E est un espace euclidien orienté de dimension 3

a) Description de $\mathrm{O}^+(E)$

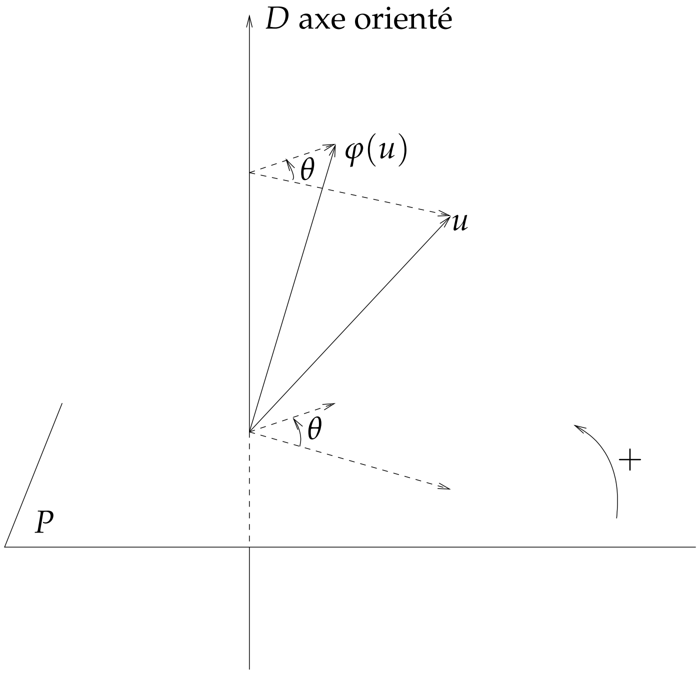
Soit $\varphi \in \mathrm{O}^+(E)$ avec $\varphi \neq \mathrm{id}_E$. Alors 1 est valeur propre de φ avec la multiplicité 1 *[c.f. TD L2]*. Notons D le sous-espace propre associé et posons $P = D^\perp$.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormale *directe* telle que $e_1 \in D$ et $e_2, e_3 \in P$. En particulier, D est orienté par e_1 et P est orienté par $\{e_2, e_3\}$ et ces orientations sont compatibles (c'est-à-dire que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale directe).

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. L'ensemble $\{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ne change pas si on remplace $\mathcal{B}$ par une base orthonormale directe $\{e_1, e_2', e_3'\}$ (avec e_1 inchangé et $\{e_2', e_3'\}$ une base orthonormale directe de P), mais on doit changer θ en $-\theta$ si on remplace $\mathcal{B}$ par une base orthonormale directe $\{-e_1, e_2'', e_3''\}$ (avec $\{e_2'', e_3''\}$ base orthonormale indirecte de P pour que $\{e_1, e_2'', e_3''\}$ soit directe) : *c.f.* remarque **D.12** puisque P a changé d'orientation. Il faut donc bien préciser l'orientation de l'axe D (donnée par e_1).

Définition D.15. *On dit que φ est la rotation d'axe* $\mathrm{vect}\,\{e_1\}$ *et d'angle θ. On convient que* id_E *est la rotation d'axe* $\mathrm{vect}\,\{e_1\}$ *et d'angle nul (mais dans ce cas, il n'y a pas unicité de l'axe).*

$\mathrm{O}^+(E)$ *est donc l'ensemble des rotations de E.*



b) Description de $\mathrm{O}^-(E)$

Soit $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$ avec $\varphi \neq -\mathrm{id}_E$. Alors -1 est valeur propre de φ avec la multiplicité 1. Notons D le sous-espace propre associé et posons $P = D^\perp$.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormale *directe* telle que $e_1 \in D$ et $e_2, e_3 \in P$.

Alors $\mathcal{M}_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. On a les mêmes remarques sur θ que dans le cas précédent lorsque l'on change de base orthonormale directe.

De plus, si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors φ est la réflexion par rapport à P, et si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\varphi = r \circ \sigma = \sigma \circ r$ où σ est la réflexion par rapport à P et r est la rotation d'axe $\operatorname{vect}\{e_1\}$ et d'angle θ.

Définition D.16. *On dit que φ est la* <u>*réflexion-rotation d'axe* $\operatorname{vect}\{e_1\}$ *et d'angle* θ</u>. *On convient que $-\mathrm{id}_E$ est la réflexion-rotation d'axe $\operatorname{vect}\{e_1\}$ et d'angle π (mais dans ce cas, il n'y a pas unicité de l'axe).*

$\mathrm{O}^-(E)$ *est donc la réunion de l'ensemble des réflexions et de l'ensemble des réflexions-rotations de E.*

c) Rotations et réflexions

Proposition D.17. Soit E un espace euclidien de dimension 3.

✦ La composée de deux réflexions est une rotation. De plus, si les plans des réflexions se coupent suivant une droite, celle-ci est l'axe de la rotation.

✦ Toute rotation d'axe D est la composée de deux réflexions dont les plans contiennent D, l'une de ces réflexions pouvant être choisie arbitrairement.

Démonstration. ✦ Si ψ_1 et ψ_2 sont des réflexions, elles sont dans $\mathrm{O}^-(E)$ et leur composée est dans $\mathrm{O}^+(E)$, c'est-à-dire que c'est une rotation. De plus, si une droite D est contenue dans les plans des deux réflexions, alors elle est contenue dans le sous-espace propre associé à 1 pour $\psi_2 \circ \psi_1$ donc c'est l'axe de la rotation. *[Remarque. Il n'y a que deux cas possibles : les deux plans se coupent suivant une droite, ou les deux plans sont égaux auquel cas $\psi_1 = \psi_2$ et $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_E$.]*

✦ Soit φ une rotation d'axe D. Il existe donc une base orthonormale directe $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E dans laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ où e_1 dirige D et R_θ est la rotation du plan $D^\perp = \operatorname{vect}\{e_2, e_3\}$ d'angle θ. On sait d'après la proposition **D.13** que $R_\theta = r_2 \circ r_1$ avec r_i réflexions du plan $D^\perp$, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement. On prolonge r_i à un endomorphisme ψ_i de E en posant $\psi_i(e_1) = e_1$. Alors ψ_1 et ψ_2 sont des réflexions de E par rapport à des plans contenant D et $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$. □

D.5 Description de $\mathrm{O}(E)$ lorsque E est un espace euclidien orienté de dimension quelconque

Exemple D.18. Supposons que $\dim E = 2$.

- Si φ est une réflexion, alors φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (c'est le cas de toute symétrie orthogonale en général.)
- Si φ est la rotation d'angle θ, alors le polynôme caractéristique de φ est $\chi_\varphi(t) = t^2 - 2\cos\theta\, t + 1$ dont le discriminant réduit $\Delta' = \cos^2\theta - 1$ est strictement négatif si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On en déduit que φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi = \pm\,\mathrm{id}_E$. *[Mais φ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car si $\varphi \neq \pm\,\mathrm{id}_E$ il a deux valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ distinctes.]*

Lemme D.19. Soit E un espace vectoriel réel (qui n'est pas nécessairement euclidien) de dimension $n \geqslant 2$ et soit φ un endomorphisme de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel F, de dimension 1 ou 2, stable par φ.

Démonstration. Si φ a une valeur propre réelle λ, toute droite F du sous-espace propre E_λ convient.

Supposons que φ n'a pas de valeur propre réelle. On décompose alors le polynôme caractéristique χ_φ en produit de facteurs de degré 2 sans racine réelle dans $\mathbb{R}[X]$: $\chi_\varphi = P_k \cdots P_1$ avec $k = \frac{n}{2}$ (n est nécessairement pair). Posons $P_i(t) = t^2 + \alpha_i t + \beta_i$ avec $\alpha_i^2 - 4\beta_i < 0$. On sait que $P_k(\varphi) \circ \cdots \circ P_1(\varphi) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, donc il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $P_i(\varphi)$ ne soit pas injective. Soit alors $u \neq 0$ tel que $P_i(\varphi)(u) = 0$ et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par u et $\varphi(u)$. Comme φ n'a pas de valeur propre réelle, on a $\dim F = 2$. D'autre part, $\varphi^2(u) = -\alpha_i\varphi(u) - \beta_i u \in F$. Ainsi $\varphi(u) \in F$ et $\varphi(\varphi(u)) \in F$ donc F est stable par φ. □

Proposition D.20. Soit E un espace euclidien et soit φ un endomorphisme orthogonal de E. Alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k$ de E, de dimension 1 ou 2, stables par φ, tels que

$$E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k \tag{D.1}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

- Si $n = 1$ ou $n = 2$, il n'y a rien à faire.
- Soit donc $n \geqslant 3$. Supposons la propriété vraie pour les espaces euclidiens de dimension $< n$. Soient E un espace euclidien de dimension n est soit $\varphi : E \to E$ un endomorphisme orthogonal. D'après le lemme **D.19**, il existe un sous-espace vectoriel F_1, de dimension 1 ou 2, stable par φ. La proposition **B.3 (i)** montre que $F_1^\perp$ est stable par φ. Alors $F_1^\perp$ est un sous-espace euclidien de dimension $< n$ stable par φ, et $\varphi_{|F_1^\perp} : F_1^\perp \to F_1^\perp$ est orthogonal. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $F_1^\perp$ et $\varphi_{|F_1^\perp}$ pour obtenir des sous-espaces vectoriels $F_2, \ldots, F_k$ de $F_1^\perp$, de dimension 1 ou 2, stables par φ et tels que $F_1^\perp = F_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k$. On a donc $F = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k$ avec les F_i stables par φ. □

Remarque D.21. Dans la décomposition (D.1), on peut supposer que chaque F_i de dimension 2 ne peut pas s'écrire $F_i = G_1 \overset{\perp}{\oplus} G_2$ avec G_1 et G_2 de dimension 1 et stables par φ. On dira alors que (D.1) est une décomposition maximale.

Théorème D.22. [dit théorème spectral des endomorphismes orthogonaux] Soit E un espace euclidien de dimension n et soit φ un endomorphisme orthogonal de E. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de φ a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

où $r \in \mathbb{N}$, $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ avec $\theta_i \notin \pi\mathbb{Z}$ est la matrice d'une rotation différente de $\pm \mathrm{id}_E$, $p \in \mathbb{N}$ est la multiplicité de la valeur propre 1 et $q \in \mathbb{N}$ est la multiplicité de la valeur propre -1. On a $p + q + 2r = n$ (p, q ou r peuvent être nuls).

Démonstration. On décompose E comme en (D.1) de façon maximale. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E qui soit réunion de bases orthonormales de chaque F_i. Si $\dim F_i = 2$ alors $\varphi_{|F_i}$ n'est pas diagonalisable à cause de la maximalité de (D.1), donc sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ avec $\theta_i \notin \pi\mathbb{Z}$. Si $\dim F_i = 1$, alors $\varphi_{|F_i} = \pm \mathrm{id}_E$. ☐

Remarque D.23. Traduction matricielle du théorème : Pour tout matrice orthogonale A d'ordre n, il existe une matrice orthogonale P d'ordre n telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ est de la forme (D.2).

Commentaires.

✦ φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $r = 0$, ce qui est équivalent à dire que φ est une symétrie orthogonale.

✦ φ est une réflexion si et seulement si $p = n - 1$ (et alors $r = 0$ et $q = 1$).

✦ $\det\varphi = (-1)^q$ donc $\varphi \in \mathrm{O}^+(E)$ si et seulement si q est pair.

Définition D.24. *La matrice* (D.2) *est dite forme normale pour φ (ou A dans la version matricielle).*

Corollaire D.25. Avec les notations du théorème **D.22**, φ est la composée de $n - p = q + 2r$ ($\leqslant n$) réflexions. En particulier, le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Démonstration. Posons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit σ_i la réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\{e_{p+i}\})^\perp$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. La matrice de σ_i est donc $\begin{pmatrix} I_{p+i-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-p-i} \end{pmatrix}$. Posons $P_j = \mathrm{vect}\{e_{p+q+2j-1}\} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{vect}\{e_{p+q+2j}\}$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. La restriction $\varphi_{|P_j}$ est une rotation du sous-espace P_j de dimension 2 donc on peut écrire $\varphi_{|P_j} = \sigma'_j \circ \sigma''_j$ où σ'_j et σ''_j sont des réflexions du plan P_j d'après la proposition **??**. Notons u_j un vecteur non nul de P_j tel que $\sigma'_j(u_j) = -u_j$ (donc u_j dirige la droite orthogonale à la droite fixée par σ'_j dans P_j) et de même v_j un vecteur non nul tel que $\sigma''_j(v_j) = -v_j$. Soit alors $\tilde{\sigma}'_j$ la réflexion de E par rapport à $(\mathrm{vect}\{u_j\})^\perp$ (on a prolongé σ'_j à E par l'identité) et $\tilde{\sigma}''_j$ la réflexion de E par rapport à $(\mathrm{vect}\{v_j\})^\perp$.

Alors $\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_q \circ \tilde{\sigma}'_1 \circ \tilde{\sigma}''_1 \circ \cdots \circ \tilde{\sigma}'_r \circ \tilde{\sigma}''_r$ est la composée de $q + 2r$ réflexions. ☐

Corollaire D.26. Toute matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. En effet, $R_\theta = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$ avec $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. ☐

E Mesure des angles

Dans cette section, E est un espace euclidien.

E.1 Angles non-orientés

Soient u et v des vecteurs non nuls dans E. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$-1 \leqslant \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1$$

donc il existe $\theta \in [0, \pi]$ unique tel que $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$. On dit que θ est la mesure de l'angle non orienté (u, v).

Propriétés E.1. **(1)** $\theta = \frac{\pi}{2} \iff u \perp v$.

(2) $\theta = 0 \iff u$ et v sont colinéaires de même sens.

(3) $\theta = \pi \iff u$ et v sont colinéaires de sens opposés.

(4) θ est aussi la mesure de (v, u) ou de $(-u, -v)$.

(5) $\pi - \theta$ est la mesure de $(-u, v)$.

(6) Tout $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ conserve la mesure des angles non-orientés. En effet, $\dfrac{\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle}{\|\varphi(u)\|\,\|\varphi(v)\|} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$.

(7) Si d est la demi-droite vectorielle dirigée par u, *i.e.* $d = \{\lambda u; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0\}$, et d' est la demi-droite vectorielle dirigée par v, alors θ s'appelle la mesure de l'angle non-orienté de demi-droites (d, d').

(8) Si D est la droite engendrée par u et D' est la droite engendrée par v, alors le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$ s'appelle la mesure de l'angle non orienté de droites (D, D').

E.2 Angles orientés dans le *plan* orienté E

Proposition E.2. Soient u, v dans le plan orienté E tels que $\|u\| = \|v\| \neq 0$. Il existe une unique rotation φ telle que $\varphi(u) = v$.

Démonstration. Si cette rotation existe, elle doit vérifier $\varphi\left(\dfrac{u}{\|u\|}\right) = \dfrac{v}{\|u\|} = \dfrac{v}{\|v\|}$ donc on peut supposer que $\|u\| = \|v\| = 1$, ce que l'on fera désormais.

Soit w le vecteur tel que $\{u, w\}$ soit une base orthonormale directe de E. Posons $v = au + bw$ (avec $a^2 + b^2 = 1$). Si φ existe, alors on doit avoir

$$\mathcal{M}_{\{u,w\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{E.1}$$

en utilisant l'expression de v et le fait que la matrice de φ doit être orthogonale de déterminant 1. Donc φ est unique.

Réciproquement, on vérifie facilement que φ définie par (E.1) convient. □

Définition E.3. *Soient u et v deux vecteurs non nuls de E et soient d et d' les demi-droites vectorielles engendrées respectivement par u et v. Si θ est une mesure de l'angle de la rotation φ telle que $\varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$, on dit que θ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$ ou $\widehat{(d, d')}$. Toute autre mesure est de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure appartenant à $]-\pi, \pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle en question.*

Propriétés E.4. **(1)** $u \perp v \iff \theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

(2) u et v sont colinéaires de même sens si et seulement si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

(3) u et v sont colinéaires de sens opposé si et seulement si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

(4) Supposons u et v linéairement indépendants. Alors $\{u, v\}$ est une base de E. On va caractériser l'orientation définie par cette base à l'aide de la mesure principale θ de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$.

On sait que θ est la mesure de l'angle orienté $\widehat{(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})}$. De plus, la base $\{u, v\}$ définit la même orientation que la base $\left\{\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\}$. On peut donc supposer que u et v sont de norme 1.

On reprend les notations de la proposition **E.2** et de sa démonstration. On a en particulier la base orthonormale directe $\{u, w\}$. On remarque que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ puisque θ est précisément l'angle de la rotation φ.

Alors $\det_{\{u,w\}}(u, v) = \det_{\{u,w\}}(u, \varphi(u)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = b = \sin\theta$, donc $\det_{\{u,w\}}(u, v)$ est du signe de $\sin\theta$ et donc de θ. Donc

✦ la base $\{u, v\}$ est directe si et seulement si $\theta > 0$,

✦ la base $\{u, v\}$ est indirecte si et seulement si $\theta < 0$.

De plus, $\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \langle u, v\rangle = \langle u, au + bw\rangle = a\|u\|^2 = a = \cos\theta$, donc

✦ si $\theta > 0$, *i.e.* $\theta \in]0, \pi]$, la mesure de l'angle non-orienté (u, v) est égale à la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$,

✦ si $\theta < 0$, *i.e.* $\theta \in]-\pi, 0[$, alors $\cos\theta = \cos(-\theta)$ avec $-\theta \in]0, \pi[$, donc la mesure de l'angle non-orienté (u, v) est l'opposé de la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$.

(5) Quelle que soit la mesure θ de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$, on a $\langle u, v\rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$.

Proposition E.5. Soient D et D' deux droites respectivement engendrées par u et v avec $\|u\| = \|v\|$. Soit θ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$. Il existe exactement deux rotations qui transforment D en D' : il s'agit de la rotation d'angle θ et celle d'angle $\theta + \pi$.

Démonstration. Soit φ une rotation telle que $\varphi(D) = D'$. Alors $\varphi(u) = v$ ou $\varphi(u) = -v$. Donc il n'y a que deux possibilités pour φ, les deux rotations obtenues à l'aide de la proposition **E.2**.

Réciproquement, la rotation φ_1 telle que $\varphi_1(u) = v$ et la rotation φ_2 telle que $\varphi(u) = -v$ de la proposition **E.2** conviennent. □

Définition E.6. *Avec les notations ci-dessus, tout élément de $\{\theta + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ s'appelle une mesure de l'angle orienté des droites $\widehat{(D, D')}$. La mesure qui se trouve dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ s'appelle la mesure principale.*

Remarque E.7. La valeur absolue de la mesure principale coïncide avec la mesure de l'angle non-orienté.

II Géométrie affine euclidienne

A Rappels de géométrie affine

Dans tout ce qui suit, $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel *réel* de dimension $n \geqslant 1$.

Définition A.1. *Un espace affine associé à l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est un triplet $(E, \overrightarrow{E}, \Phi)$ où :*

- *E est un ensemble non vide*
- *Φ est une application de $\overrightarrow{E} \times E$ dans E vérifiant les axiomes :*

  (A1) pour tous $p \in E$, $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$, $\vec{v} \in \overrightarrow{E}$, on a $\Phi(\vec{u}, \Phi(\vec{v}, p)) = \Phi(\vec{u} + \vec{v}, p)$;

  (A2) pour tous $p, q \in E$, il existe un et un seul $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ tel que $q = \Phi(\vec{u}, p)$.

Autrement dit, le groupe additif $(\overrightarrow{E}, +)$ agit sur l'ensemble E (via Φ, axiome (A1)) simplement (ou librement) transitivement (axiome (A2)).

On note $\Phi(\vec{u}, p) := p + \vec{u}$.

L'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $q = p + \vec{u}$ est noté $\vec{u} = \overrightarrow{pq}$.

Les éléments de E sont appelés les points de l'espace affine E. La dimension de E est par définition la dimension de $\overrightarrow{E}$, c'est-à-dire n.

Définition A.2. *Soient $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ et $p \in E$. La partie $F = p + \overrightarrow{F} = \left\{p + \vec{v}; \vec{v} \in \overrightarrow{F}\right\}$ s'appelle un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{F}$ et de dimension $\dim \overrightarrow{F}$.*

Deux sous-espaces affines $p + \overrightarrow{F}$ et $q + \overrightarrow{F}$ de même direction sont dits parallèles. Si $\overrightarrow{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{G}$, alors $p + \overrightarrow{F}$ est dit faiblement parallèle à $q + \overrightarrow{G}$.

Définition A.3. *Une application $f : E \to E$ est dite affine s'il existe un endomorphisme (linéaire) φ de $\overrightarrow{E}$ et un point $a \in E$ tels que $f(a + \vec{u}) = f(a) + \varphi(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{f(a)f(a + \vec{u})} = \varphi(\vec{u})$).*

L'application φ est entièrement déterminée par f (ne dépend pas de a) et s'appelle l'endormorphisme associé à f ou la partie linéaire de f. On note $\varphi = \overrightarrow{f}$.

On a $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq})$ pour tous $p, q \in E$.

Proposition A.4. ⋆ Une application affine f est entièrement déterminée par sa partie linéaire et par l'image $f(a)$ d'un point a donné de E.

⋆ Une application affine f est entièrement déterminée par les images des points d'un repère barycentrique. *[On rappelle qu'un repère barycentrique est la donnée de $n + 1$ points $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $\{\overrightarrow{a_0a_1}; \ldots ; \overrightarrow{a_0a_n}\}$ soit une base de $\overrightarrow{E}$.]*

Exemple A.5. Fixons $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$. L'application $t_{\vec{u}} : E \to E$ qui à p associe $q = p + \vec{u}$ est une application affine dont la partie linéaire est $\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$. On l'appelle la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition-Proposition A.6. Soit $f : E \to E$ une application affine. Alors f est bijective si et seulement si $\vec{f}$ est bijective. On pose

$$\mathrm{GA}(E) = \{f : E \to E; f \text{ est affine et bijective}\}.$$

C'est un groupe pour la composition, appelé groupe affine de E, et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(E) & \to & \mathcal{GL}(\vec{E}) \\ f & \mapsto & \vec{f} \end{array}$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est l'ensemble des translations $\mathcal{T}(E) := \left\{t_{\vec{u}}; \vec{u} \in \vec{E}\right\}$.
Fixons $a \in E$. Alors $\mathrm{GA}_a(E) := \{f \in \mathrm{GA}(E); f(a) = a\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ isomorphe à $\mathcal{GL}(\vec{E})$. Tout $f \in \mathrm{GA}(E)$ s'écrit de manière unique $f = t \circ g$ avec $t \in \mathcal{T}(E)$ et $g \in \mathrm{GA}_a(E)$. En fait, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$ et g est l'unique élément de $\mathrm{GA}_a(E)$ dont l'endomorphisme associé est $\vec{f}$.
De même, tout $f \in \mathrm{GA}(E)$ s'écrit de manière unique $f = g' \circ t'$ avec $t' \in \mathcal{T}(E)$ et $g' \in \mathrm{GA}_a(E)$. En fait, t' est la translation de vecteur $\overrightarrow{f^{-1}(a)a}$ et $g' = g$.

Définition A.7. *Soit $f : E \to E$ une application affine. On pose*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{a \in E; f(a) = a\}$$

(l'ensemble des points fixes de f).

Proposition A.8. **(a)** Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.

(b) f a un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Démonstration. **(a)** Soit $p \in \mathrm{Fix}(f)$.

- ⋆ Si $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$, alors $f(p + \vec{u}) = f(p) + \vec{f}(\vec{u}) = p + \vec{u}$ donc $p + \vec{u} \in \mathrm{Fix}(f)$ et donc $p + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$.
- ⋆ Si $q \in \mathrm{Fix}(f)$, alors $\vec{f}(\vec{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \vec{pq}$ donc $\vec{pq} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ et $q = p + \vec{pq} \in p + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.
- ⋆ Finalement, $\mathrm{Fix}(f) = p + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$ est un sous-espace affine, de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.

(b) ⋆ Si f a un unique point fixe, alors $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \left\{\vec{0}\right\}$ et donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

- ⋆ Si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, alors $\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}$ est injective, donc bijective. Montrons que $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$. Fixons $a \in E$. Si $p = a + \vec{u}$ alors $f(p) = f(a) + \vec{f}(\vec{u})$ si bien que $f(p) = p$ si et seulement si $(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{u}) = \overrightarrow{f(a)a}$. Comme $\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}$ est surjective, il existe $\vec{u}$ tel que $(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})(\vec{u}) = \overrightarrow{f(a)a}$ et donc $p \in \mathrm{Fix}(f)$. Ainsi $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$. Mais alors c'est un sous-espace affine, et c'est un point puisque sa direction est $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \left\{\vec{0}\right\}$. □

A.1 Exemples classiques d'applications affines de E dans E

a) Les translations

Ce sont les applications affines dont la partie linéaire est $\mathrm{id}_{\vec{E}}$.

b) Les homothéties

Définition A.9. *Soient $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'homothétie de centre a et de rapport λ est l'application affine $h : E \to E$ définie par $h(p) = a + \lambda\overrightarrow{ap}$.*

Proposition A.10. ⋆ La partie linéaire d'une homothétie de rapport λ est $\lambda \,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$.

⋆ Réciproquement, si $\lambda \notin \{0;1\}$ et si $f : E \to E$ est une application affine de partie linéaire $\lambda \,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}$, alors il existe un point a de E tel que f soit l'homothétie de centre a et de rapport λ.

⋆ Notons $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties de E. Alors $\mathcal{H}(E) \cap \mathcal{T}(E) = \{\mathrm{id}_E\}$.

⋆ $\mathcal{D}(E) := \mathcal{H}(E) \cup \mathcal{T}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ appelé le sous-groupe des homothéties-translations ou sous-groupe des dilatations. L'application de $\mathcal{D}(E)$ dans le groupe $H(\overrightarrow{E}) = \{\lambda \,\mathrm{id}_{\overrightarrow{E}}; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ des homothéties vectorielles de rapport non nul de $\overrightarrow{E}$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau $\mathcal{T}(E)$.

c) Les projections

Lemme A.11. Soient F et G deux sous-espaces affines de E de directions respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$. On suppose que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont supplémentaires, c'est-à-dire que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Alors $F \cap G$ est réduit à un point. En particulier, pour tout a de E, $F \cap (a + \overrightarrow{G})$ est réduit à un point.

Définition A.12. *Soient F et G deux sous-espaces affines supplémentaires de E. La projection sur F parallèlement à G (ou de direction $\overrightarrow{G}$) est l'application π qui à un point a associe l'unique point de $F \cap (a + \overrightarrow{G})$.*

Proposition A.13. La projection π est une application affine de partie linéaire la projection (linéaire) de $\overrightarrow{E}$ sur $\overrightarrow{F}$, parallèlement à $\overrightarrow{G}$ (*i.e.* $\overrightarrow{\pi} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ envoie $\vec{u} = \vec{u}_{\overrightarrow{F}} + \vec{u}_{\overrightarrow{G}}$ sur $\vec{u}_{\overrightarrow{F}}$).

Proposition A.14. Une application affine $f : E \to E$ est une projection si et seulement si $f \circ f = f$. C'est alors la projection sur l'image de f parallèlement à $\mathrm{Ker}\, \overrightarrow{f}$.

d) Les symétries

Définition A.15. *Avec les notations du paragraphe* **c)**, *posons*

$$s(a) = a + 2\overrightarrow{a\pi(a)}.$$

Alors s s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction $\overrightarrow{G}$).

Proposition A.16. La symétrie s est une application affine dont la partie linéaire est la symétrie (linéaire) de $\overrightarrow{E}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$: $\vec{s}(\vec{u}_{\overrightarrow{F}} + \vec{u}_{\overrightarrow{G}}) = \vec{u}_{\overrightarrow{F}} - \vec{u}_{\overrightarrow{G}}$.

Proposition A.17. Une application affine f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Il s'agit alors de la symétrie par rapport à $\mathrm{Fix}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} + \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$.

e) Critères classiques

Théorème A.18. $\star$ Une application $f : E \to E$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres, c'est-à-dire que pour toute famille finie $\{(A_i, \lambda_i); 1 \leqslant i \leqslant m\}$ de points pondérés telle que $\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$ de barycentre G, le barycentre de la famille $\{(f(A_i), \lambda_i); 1 \leqslant i \leqslant m\}$ est $f(G)$.

$\star$ On suppose que $\dim E \geqslant 2$. Une *bijection* $f : E \to E$ est affine si et seulement si elle transforme trois points alignés quelconques en trois points alignés.

$\star$ On suppose que $\dim E \geqslant 2$. Une *bijection* $f : E \to E$ est affine si et seulement si elle transforme deux droites parallèles quelconques en deux droites parallèles.

$\star$ On suppose que $\dim E \geqslant 2$. Une *bijection* $f : E \to E$ est une dilatation (homothétie-translation) si et seulement si elle transforme toute droite en une droite parallèle.

B Espaces affines euclidiens : généralités

Définition B.1. *Soit E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\vec{E}$. On dit que E est euclidien si $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien.*

Dans toute la suite, E est un espace affine euclidien de dimension n.

Définition-Proposition B.2. Si x et y sont deux points de E, on pose

$$d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \quad \text{noté aussi } xy.$$

Alors $d : E \times E \to \mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $d(x, y)$ est une distance sur E, appelée distance euclidienne de l'espace affine euclidien E.

Propriétés B.3. (1) $d(x + \vec{u}, y + \vec{u}) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in E, \vec{u} \in \vec{E}$.

(2) Si h est une homothétie de centre a et de rapport $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $d(h(x), h(y)) = |\lambda| \, d(x, y)$.

Démonstration. **(1)** $\overrightarrow{(x + \vec{u})(y + \vec{u})} = \overrightarrow{xy}$.

(2) $d(h(x), h(y)) = \left\|\overrightarrow{h(x)h(y)}\right\| = \left\|\vec{h}(\overrightarrow{xy})\right\| = \|\lambda \overrightarrow{xy}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{xy}\| = |\lambda| \, d(x, y)$. □

B.1 Orthogonalité

Définition B.4. *Soient F et G deux sous-espaces affines de E, de directions respectives $\vec{F}$ et $\vec{G}$. On dit que F et G sont supplémentaires orthogonaux si $\vec{G} = \vec{F}^{\perp}$.*

Remarque B.5. En particulier, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires puisque $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^{\perp} = \vec{F} \oplus \vec{G}$, donc $F \cap G$ est réduit à un point d'après le lemme **A.11**.

Définition B.6. $\star$ *La projection π_F sur F de direction $\vec{F}^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.*

$\star$ *La symétrie s_F par rapport à F de direction $\vec{F}^{\perp}$ s'appelle la symétrie orthogonale par rapport à F.*
Si $\dim F = n - 1$, *alors s_F s'appelle la réflexion par rapport à F.*
Si $\dim F = n - 2$, *alors s_F s'appelle le retournement par rapport à F.*

Définition B.7. *Soient a un point de E et F un sous-espace affine de E. La distance de a à F est $d(a, F) = \inf \{d(a, q); q \in F\}$. Si G est un autre sous-espace affine de E, la distance de F à G est $d(F, G) = \inf \{d(p, q); p \in F, q \in G\}$* – c.f. *Topologie.*

Lemme B.8. Soient a un point de E et F un sous-espace affine de E. Alors $\pi_F(a)$ est l'unique point p de F tel que $ap = d(a, F)$.

Démonstration. Posons $q = \pi_F(a)$. Pour tout $p \in F$, on a $\overrightarrow{aq} \perp \overrightarrow{qp}$ donc $ap^2 = aq^2 + qp^2 \geqslant aq^2$ avec égalité si et seulement si $p = q$. □

Généralisons ce résultat :

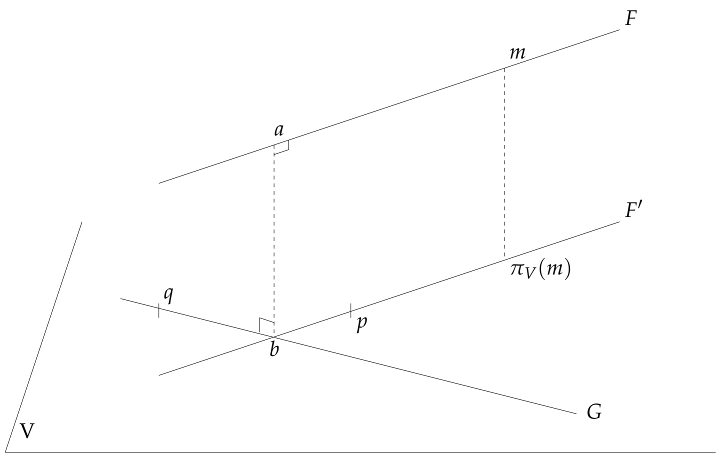
Proposition B.9. Soient F et G deux sous-espaces affines de E. Alors

(i) Il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que $ab = d(F, G)$.

(ii) Le couple $(a, b) \in F \times G$ tel que $ab = d(F, G)$ est unique si et seulement si $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

(iii) Si $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $F \cap G = \varnothing$, alors la droite affine (ab) est l'unique droite coupant F et G et telle que $\overrightarrow{(ab)} \in \overrightarrow{F}^{\perp}$ et $\overrightarrow{(ab)} \in \overrightarrow{G}^{\perp}$. On dit que c'est la perpendiculaire commune à F et G.

Démonstration. **(i)** Soit V le sous-espace affine de E contenant G et de direction $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ (il s'agit de $g + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ avec g un point de G).
Posons $F' = \pi_V(F)$: c'est un sous-espace affine de E contenu dans V et dont la direction est $\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{\pi_V}(\overrightarrow{F}) = \pi_{\overrightarrow{V}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}$ puisque $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{V}$.



Montrons qu'il existe un point $b \in F' \cap G$: soient $p \in F'$ et $q \in G$. Alors p et q sont dans V donc $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{V} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ et donc $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. On a donc $b := p + \overrightarrow{u} = q + \overrightarrow{v} \in F' \cap G$.
De plus, puisque $b \in F' = \pi_V(F)$, il existe $a \in F$ tel que $b = \pi_V(a)$. Nous allons montrer que $ab = d(F, G)$.
Puisque $b = \pi_V(a)$, le lemme **B.8** montre que $d(a, V) = ab$. De plus, pour tout point $m \in F$, on a $d(m, V) = m\pi_V(m)$. Comme $\overrightarrow{am} \in \overrightarrow{F}$, on a $\overrightarrow{b\pi_V(m)} = \overrightarrow{\pi_V(a)\pi_V(m)} = \pi_{\overrightarrow{V}}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{am}$, si bien que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{m\pi_V(m)}$ d'où $d(m, V) = ab = d(a, V)$. Pour tout $(m, n) \in F \times G$ on a donc $mn \geqslant d(m, G) \geqslant d(m, V) = ab$ (puisque $G \subseteq V$) donc $d(F, G) = \inf\{mn; (m, n) \in F \times G\} \geqslant ab \geqslant d(F, G)$. Finalement, $d(F, G) = ab$.

(ii) On a $ab \geqslant d(a, G) \geqslant d(F, G) = ab$ donc $ab = d(a, G)$ donc $b = \pi_G(a)$ si bien que $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{G}^{\perp}$. De même, $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F}^{\perp}$. Ainsi, $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F}^{\perp} \cap \overrightarrow{G}^{\perp} = (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})^{\perp}$.
Soit maintenant $(p, q) \in F \times G$. Alors il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$ tels que $p = a + \overrightarrow{u}$ et $q = b + \overrightarrow{v}$. De plus, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ donc $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ sont orthogonaux et donc (Pythagore)

$$pq^2 = \|\overrightarrow{pq}\|^2 = \left\|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{ab}\right\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = ab^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = d(F, G)^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2.$$

On a donc $pq = d(F, G) \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$. Donc :

⋆ si $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ donc $(p, q) = (a, b)$ et le couple (a, b) est bien unique ;

★ si $\vec{F} \cap \vec{G} \neq \left\{\vec{0}\right\}$ alors soit $\vec{u} \in \vec{F} \cap \vec{G}$: le couple $(p,q) = (a+\vec{u}, b+\vec{u})$ est distinct de (a,b) et vérifie $pq = d(F,G)$ donc le couple (a,b) n'est pas unique.

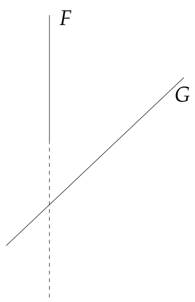
(iii) D'après **(i)** et **(ii)** il existe un unique $(a,b) \in F \times G$ tel que $ab = d(F,G)$. On a vu que $\overrightarrow{ab} \in \vec{F}^{\perp} \cap \vec{G}^{\perp} = (\vec{F}+\vec{G})^{\perp} = \vec{V}^{\perp}$. De plus, $F \cap G = \varnothing$ donc $\overrightarrow{ab} \neq \vec{0}$ et (ab) est une droite.

Soit maintenant D une droite qui coupe F et G et telle que $\vec{D} \subseteq \vec{F}^{\perp} \cap \vec{G}^{\perp}$. Soient $c \in D \cap F$ et $d \in D \cap G$. On a donc $D = (cd)$. De plus, par hypothèse $\overrightarrow{cd} \in \vec{D} \subseteq \vec{F}^{\perp} \cap \vec{G}^{\perp} = (\vec{F}+\vec{G})^{\perp}$ donc $d \in G \subset V$ et $d \in c + \vec{V}^{\perp}$ donc $d = \pi_V(c)$ et on a donc $cd = d(F,G) = ab$ d'après la démonstration de **(i)**. L'unicité de (a,b) donne $c = a$ et $d = b$ donc $D = (ab)$. □

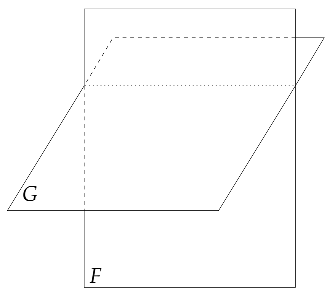
B.2 Autres situations d'orthogonalité

Définition-Proposition B.10. **(i)** F et G sont dits orthogonaux (pas nécessairement supplémentaires) si $\vec{F} \subseteq \vec{G}^{\perp}$ (ou, ce qui est équivalent, $\vec{G} \subseteq \vec{F}^{\perp}$). Dans ce cas, si $F \cap G \neq \varnothing$ alors $F \cap G$ est réduit à un point.

(ii) F et G sont dits perpendiculaires si $\vec{F}^{\perp} \subseteq \vec{G}$ (ou, ce qui est équivalent, $\vec{G}^{\perp} \subseteq \vec{F}$). Dans ce cas, on a toujours $F \cap G \neq \varnothing$ et $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim E$.



orthogonaux



perpendiculaires

Démonstration. **(i)** On a $\vec{F} \cap \vec{G} \subseteq \vec{G}^{\perp} \cap \vec{G} = \left\{\vec{0}\right\}$ donc si $F \cap G \neq \varnothing$ c'est un sous-espace affine de direction $\left\{\vec{0}\right\}$ et donc un singleton.

(ii) Soit $m \in F$. Alors $\pi_G(m) \in G$ et $\overrightarrow{m\pi_G(m)} \in \vec{G}^{\perp} \subseteq \vec{F}$ donc $\pi_G(m) = m + \overrightarrow{m\pi_G(m)} \in F$. Donc $F \cap G \neq \varnothing$. C'est donc un sous-espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$ et on a donc $\dim \vec{F} \cap \vec{G} = \dim \vec{F} + \dim \vec{G} - \dim(\vec{F}+\vec{G}) = \dim F + \dim G - \dim E$ car $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{F}^{\perp} \subseteq \vec{F} + \vec{G} \subseteq \vec{E}$. □

B.3 Traductions affines de propriétés de l'espace vectoriel euclidien associé à E

Soient A, B et C trois points de E (*i.e.* un triangle).

★ Le *théorème de Pythagore* de $\vec{E}$ s'écrit dans E :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \text{ i.e. } (AB) \text{ est orthogonale à } (AC) \iff BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

★ Soit I le milieu de BC. Le *théorème de la médiane* de $\vec{E}$ s'écrit dans E :

$$2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ ou } 2AI^2 + 2IB^2 = AB^2 + AC^2.$$

C Isométries de l'espace affine euclidien E.

On note d la distance euclidienne de E.

C.1 Généralités

Proposition C.1. Soit $f : E \to E$ une application affine. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f conserve les distances, *i.e.*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \qquad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

(ii) $\vec{f} \in \mathrm{O}(\vec{E})$.

Démonstration. $d(f(x), f(y)) = \left\|\overrightarrow{f(x)f(y)}\right\| = \left\|\vec{f}(\vec{xy})\right\|$ et $d(x, y) = \|\vec{xy}\|$. □

Définition C.2. *Une application affine $f : E \to E$ vérifiant les assertions équivalentes de la proposition* **C.1** *est appelée une* <u>*isométrie*</u> *de E. On note $\mathrm{Is}(E)$ l'ensemble des isométries de E.*

Remarque C.3. Les translations de E sont des isométries de E.

Remarque C.4. Une isométrie de E est bijective (puisque sa partie linéaire l'est).

$\mathrm{Is}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(E)$ et l'application $\mathrm{Is}(E) \to \mathrm{O}(\vec{E})$ qui à f associe $\vec{f}$ est un homomorphisme de groupes surjectif de noyau $\mathcal{T}(E)$.

Définition C.5. *On pose* $\mathrm{Is}^+(E) = \left\{f \in \mathrm{Is}(E); \vec{f} \in \mathrm{O}^+(\vec{E})\right\}$ *et* $\mathrm{Is}^-(E) = \left\{f \in \mathrm{Is}(E); \vec{f} \in \mathrm{O}^-(\vec{E})\right\}$.

Un élément de $\mathrm{Is}^+(E)$ est appelé un <u>*déplacement*</u> *de E; un élément de $\mathrm{Is}^-(E)$ est appelé un* <u>*anti-déplacement*</u> *de E.*

Remarque C.6. $\mathrm{Is}^+(E)$ est le noyau de l'homomorphisme de groupes $\mathrm{Is}(E) \to \{1; -1\}$ qui envoie f sur $\det(\vec{f})$.

Exemple C.7. Soit F un sous-espace affine de E et soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors $\vec{s_F}$ est la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à $\vec{F}$.

Donc s_F est une isométrie et s_F est un déplacement si et seulement si $\dim E$ et $\dim F$ ont même parité. En particulier, une réflexion est un anti-déplacement et un retournement est un déplacement.

Lorsque F est un point, on dit que s_F est une <u>symétrie centrale</u>. C'est un déplacement si et seulement si n est pair. Notons que les symétries centrales sont les isométries f telles que $\vec{f} = -\mathrm{id}_{\vec{E}}$.

Définition C.8. *Soit E un espace affine euclidien orienté (c'est-à-dire que $\vec{E}$ est orienté) de dimension 2. Soient $a \in E$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'isométrie f telle que $f(a) = a$ et $\vec{f}$ est la rotation vectorielle de $\vec{E}$ d'angle θ s'appelle la* <u>*rotation de centre a et d'angle θ*</u>.

Remarque C.9. Soit E un plan affine euclidien orienté. Si f est la rotation de centre a et d'angle θ avec $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors a est le *seul* point fixe de f. Cela découle de la proposition **A.8**.

Définition C.10. *Soit E un espace affine euclidien orienté (c'est-à-dire que $\vec{E}$ est orienté) de dimension 3. Soient D une droite orientée de E (i.e. $\vec{D}$ est orientée) et $\theta \in \mathbb{R}$. On fixe un point $a \in D$. L'isométrie f telle que $f(a) = a$ et $\vec{f}$ est la rotation d'axe $\vec{D}$ et d'angle θ est appelée la* <u>*rotation d'axe D et d'angle θ*</u>.

Si P est un plan orthogonal à D, la <u>*réflexion-rotation par rapport au plan P, d'axe D et d'angle θ*</u> *est $s_P \circ r(D, \theta)$, qui est égale à $r(D, \theta) \circ s_P$, où s_P est la réflexion par rapport à P et $s(D, \theta)$ est la rotation d'axe D et d'angle θ.*

Remarque C.11. Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Soit f la rotation d'axe D et d'angle θ.

Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $\mathrm{Fix}(f) = D$.

Si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, alors f est le retournement d'axe D.

C.2 Isométries fixant un point donné

Définition C.12. *Soit $a \in E$. On note $\mathrm{Is}_a(E)$ l'ensemble des isométries f de E telles que $f(a) = a$.*

Remarque C.13. L'application $\mathrm{Is}_a(E) \to \mathrm{O}(E)$ qui à f associe sa partie linéaire est un isomorphisme de groupes. On en déduit :

⋆ Si $n = 1$ alors $\mathrm{Is}_a(E) = \{\mathrm{id}_E; s_a\}$ où s_a est la symétrie centrale de centre a.

⋆ Si $n = 2$ alors $\mathrm{Is}_a^+(E)$ est l'ensemble des rotations de centre a et $\mathrm{Is}_a^-(E)$ est l'ensemble des réflexions par rapport aux droites contenant a.

La composée de deux réflexions dont les axes se coupent en a est une rotation de centre a. Toute rotation de centre a est produit de deux réflexions dont les axes passent par a, une de ces réflexions pouvant être choisie arbitrairement. *c.f.* Proposition **D.13** du Chapitre **I**.

⋆ Si $n = 3$ alors $\mathrm{Is}_a^+(E)$ est l'ensemble des rotations dont l'axe contient a et $\mathrm{Is}_a^-(E)$ est la réunion de l'ensemble des réflexions par rapport aux plans contenant a et de l'ensemble des réflexions-rotations dont le plan et l'axe sont orthogonaux et se coupent en a (proposition **D.17** du Chapitre **I**).

La composée de deux réflexions dont les plans se coupent suivant une droite D est une rotation d'axe D. Toute rotation d'axe D est composée de deux réflexions dont les plans se coupent suivant D, une de ces réflexions pouvant être choisie arbitrairement (proposition **D.17** du Chapitre **I**).

La composée de deux retournements dont les axes se coupent suivant un point a est une rotation dont l'axe passe par a et est orthogonal aux axes des retournements. Toute rotation d'axe D est composée de deux retournements dont les axes se coupent en un point de D orthogonalement à D, un de ces retournements pouvant être choisi arbitrairement. *c.f.* TD.

C.3 Cas général

Lemme C.14. Soit $\varphi : E \to E$ une application affine ayant au moins un point fixe. Alors

$$t_{\vec{v}} \circ \varphi = \varphi \circ t_{\vec{v}} \iff \vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}.$$

Démonstration. Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) = a$.

⋆ Supposons que $t_{\vec{v}} \circ \varphi = \varphi \circ t_{\vec{v}}$. Appliquée à a, cela donne $a + \vec{v} = \varphi(a + \vec{v}) = a + \vec{\varphi}(\vec{v})$ donc $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$.

⋆ Réciproquement, supposons que $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$. Alors $t_{\vec{v}} \circ \varphi(a) = a + \vec{v} = \varphi \circ t_{\vec{v}}(a)$. Comme $\overrightarrow{t_{\vec{v}} \circ \varphi} = \vec{\varphi} = \overrightarrow{\varphi \circ t_{\vec{v}}}$, on en déduit que $t_{\vec{v}} \circ \varphi = \varphi \circ t_{\vec{v}}$. □

Théorème C.15. Pour toute isométrie f de E, il existe $\vec{v} \in \vec{E}$ et $\varphi \in \mathrm{Is}(E)$ uniques tels que $f = t_{\vec{v}} \circ \varphi = \varphi \circ t_{\vec{v}}$ et $\mathrm{Fix}\, \varphi \neq \varnothing$. De plus, on a $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$.

Démonstration. ⋆ *Existence.* Démontrons d'abord que $\vec{E} = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \quad (*)$.

Puisque $\vec{f} \in \mathrm{O}(\vec{E})$, on a

$$(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})^* = \vec{f}^* - \mathrm{id}_{\vec{E}} = \vec{f}^{-1} - \mathrm{id}_{\vec{E}}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \mathrm{Ker}\left(\vec{f} \circ (\mathrm{id}_{\vec{E}} - \vec{f}^{-1})\right) = \mathrm{Ker}(\vec{f}^{-1} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \mathrm{Ker}((\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})^*) = (\mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}))^{\perp}.$$

(On rappelle qu'en général, si ψ est un endomorphisme linéaire de $\vec{E}$ on a $\mathrm{Ker}(\psi^*) = (\mathrm{Im}\, \psi)^{\perp}$.)

Ainsi, on a $\vec{E} = \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$.

Soit maintenant $m \in E$. Alors $\overrightarrow{mf(m)} = \vec{u} + \vec{v}$ dans la somme directe $(*)$. En particulier, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\vec{u} = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}$ pour un certain $\vec{w} \in \vec{E}$.

Posons $a = m - \vec{w}$. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{af(a)} &= \overrightarrow{am} + \overrightarrow{mf(m)} + \overrightarrow{f(m)f(a)}\\ &= \vec{w} + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w} + \vec{v} + \vec{f}(\overrightarrow{ma})\\ &= \vec{w} + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w} + \vec{v} - \vec{f}(\vec{w})\\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

donc $f(a) = a + \vec{v}$.

Posons $\varphi = t_{-\vec{v}} \circ f$. Alors $\varphi \in \mathrm{Is}(E)$ (comme composée d'éléments de $\mathrm{Is}(E)$) et $\varphi(a) = a$ par construction. Ainsi, $\mathrm{Fix}\,\varphi \neq \varnothing$.

Comme $\vec{\varphi} = \vec{f}$, on a $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$. On peut alors appliquer le lemme **C.14** à φ, si bien que l'on a $t_{\vec{v}} \circ \varphi = \varphi \circ t_{\vec{v}}$. Or $f = t_{\vec{v}} \circ \varphi$ par construction de φ.

$\star$ *Unicité.* Supposons que $f = t_{\vec{v}'} \circ \varphi' = \varphi' \circ t_{\vec{v}'}$ avec $\mathrm{Fix}\,\varphi' \neq \varnothing$. D'après le lemme **C.14**, on a $\vec{f}(\vec{v}') = \vec{v}'$.

Soit $a' \in E$ tel que $\varphi'(a') = a'$. On a $f(a) = a + \vec{v}$, $f(a') = a' + \vec{v}'$ et $\vec{v} - \vec{v}' = \overrightarrow{af(a)} - \overrightarrow{a'f(a')} = \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'f(a)} + \overrightarrow{f(a')a'} = \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{f(a')f(a)} = \overrightarrow{aa'} - \vec{f}(\overrightarrow{aa'}) \in \mathrm{Im}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$. Or $\vec{f}(\vec{v} - \vec{v}') = \vec{v} - \vec{v}'$, donc $\vec{v} - \vec{v}' \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{id}_{\vec{E}})$. Par suite, $(*)$ entraîne que $\vec{v} - \vec{v}' = \vec{0}$, *i.e.* $\vec{v} = \vec{v}'$. De plus, $\varphi' = t_{-\vec{v}'} \circ f = t_{-\vec{v}} \circ f = \varphi$. □

Corollaire C.16. Pour déterminer toutes les isométries de E, il suffit de composer (dans n'importe quel ordre !) les isométries φ ayant au moins un point fixe avec toutes les translations de vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$.

Nous allons maintenant donner une classification des isométries de E lorsque $\dim E = 2$ ou 3, à l'aide du théorème **C.15**.

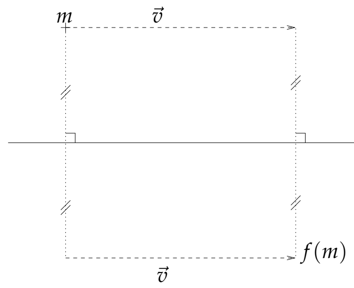
C.4 $\mathrm{Is}(E)$ lorsque E est de dimension 2

Remarque C.17. On suppose que E est un plan affine euclidien orienté. Soit f une isométrie de E dont la partie linéaire $\vec{f}$ est une rotation (vectorielle) distincte de $\mathrm{id}_{\vec{E}}$. Alors f a un unique point fixe a et donc f est une rotation de centre a.

En effet, on sait d'après le théorème **C.15** qu'il existe $\vec{v} \in \vec{E}$ et $\varphi \in \mathrm{Is}(E)$ tels que $f = t_{\vec{v}}$, $\mathrm{Fix}(\varphi) \neq \varnothing$ et $\vec{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}$. Mais $\vec{\varphi} = \vec{f}$ est une rotation distincte de $\mathrm{id}_{\vec{E}}$ donc $\mathrm{Ker}(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_{\vec{E}}) = \left\{\vec{0}\right\}$ et donc $\vec{v} = \vec{0}$. On en déduit que $f = \varphi$ a un point fixe. L'unicité de ce point fixe provient de la proposition **A.8**.

Définition C.18. *Soient D une droite et $\vec{v} \in \vec{D}$. La réflexion glissée par rapport à D de vecteur $\vec{v}$ est $t_{\vec{v}} \circ s_D$ qui est aussi égale à $s_D \circ t_{\vec{v}}$.*

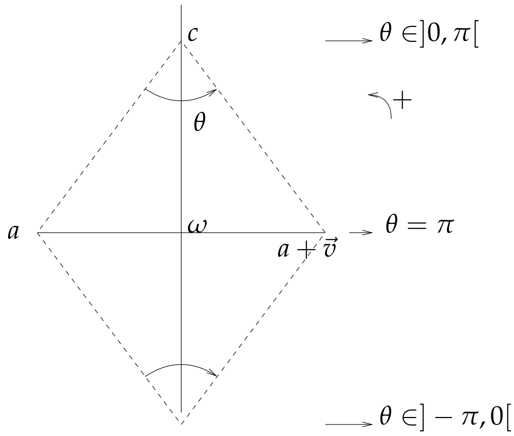
$$\begin{aligned}\mathrm{Is}^+(E) &= \mathcal{T}(E) \cup \{\text{rotations d'angle } \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}\\ \mathrm{Is}^-(E) &= \{\text{réflexions}\} \cup \left\{\text{réflexions glissées de vecteur } \vec{v} \neq \vec{0}\right\}\end{aligned}$$



Etudions les composées d'éléments de $\mathrm{Is}^+(E)$.

a) Composée d'une rotation et d'une translation

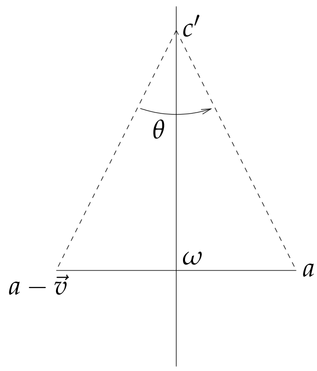
Soit $f = t_{\vec{v}} \circ r(a, \theta)$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Alors $\vec{f}$ est la rotation vectorielle d'angle θ, donc f est une rotation d'angle θ. Notons c son centre. Alors $f(a) = a + \vec{v}$ et on a la figure



donc c appartient à la médiatrice du segment $[a, (a + \vec{v})]$.

b) Composée d'une translation et d'une rotation

Soit $g = r(a, \theta) \circ t_{\vec{v}}$. Alors g est la rotation de centre c' et d'angle θ avec $g(a - \vec{v}) = a$.



c) Composée de deux rotations

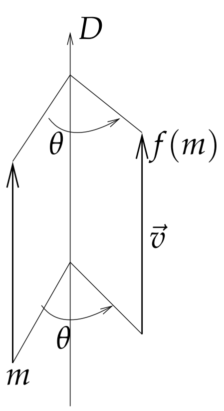
En TD.

C.5 $\mathrm{Is}(E)$ lorsque E est de dimension 3

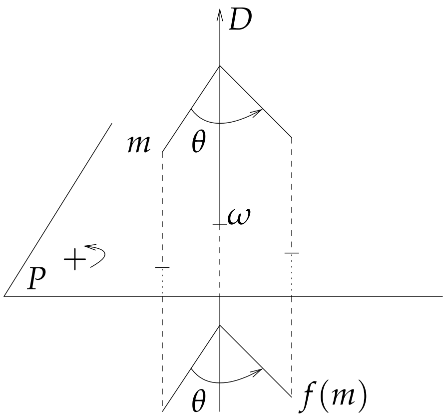
Définition C.19. ⋆ *Soit D une droite affine. Le vissage f d'axe D, d'angle θ et de vecteur $\vec{v} \in \vec{D}$ est $t_{\vec{v}} \circ r(D, \theta)$. On a aussi $f = r(D, \theta) \circ t_{\vec{v}}$.*

⋆ *Soient P un plan et $\vec{v} \in \vec{P}$. La réflexion glissée par rapport à P de vecteur $\vec{v}$ est $t_{\vec{v}} \circ s_P$ qui est aussi égale à $s_P \circ t_{\vec{v}}$.*

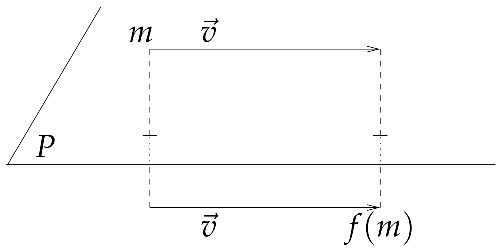
Remarque C.20. On vérifie facilement que la réflexion-rotation par rapport à P d'angle π est la symétrie centrale s_ω où ω est le point d'intersection de P et D.



vissage



réflexion-rotation



réflexion-glissée

$$\begin{aligned}
\mathrm{Is}^+(E) &= \{\text{translations}\} \cup \{\text{rotations d'angle } \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\} \\
&\quad \cup \left\{\text{vissages d'angle } \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ et de vecteur } \vec{v} \neq \vec{0}\right\}. \\
\mathrm{Is}^-(E) &= \{\text{réflexions}\} \cup \{\text{réflexions-rotations d'angle } \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\} \\
&\quad \cup \left\{\text{réflexions glissées de vecteur } \vec{v} \neq \vec{0}\right\}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Is}^+(E)$ est l'ensemble des vissages de E (si on autorise le vecteur ou l'angle nul) donc contient en particulier les retournements $r(D, \pi) = s_D$.

Quelle est la composée de deux de ces retournements $s_{D_2} \circ s_{D_1}$? Certains cas ont été cités dans la section **C.2** ou seront vus en TD :

- ⋆ Si D_1 et D_2 sont concourantes en un point a, alors $s_{D_2} \circ s_{D_2}$ est une rotation dont l'axe est orthogonal au plan déterminé par D_1 et D_2 et contient a.
- ⋆ Si D_1 et D_2 sont parallèles, alors $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une translation. Plus précisément, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \vec{D}_1^\perp$ tel que $D_2 = D_1 + \vec{u}$ et on obtient alors la translation de vecteur $2\vec{u}$. Réciproquement, la translation de vecteur $\vec{v}$ est la composée des retournements $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ où D_1 est une droite orthogonale à vect $\{\vec{v}\}$ et $D_2 = D_1 + \frac{1}{2}\vec{v}$.

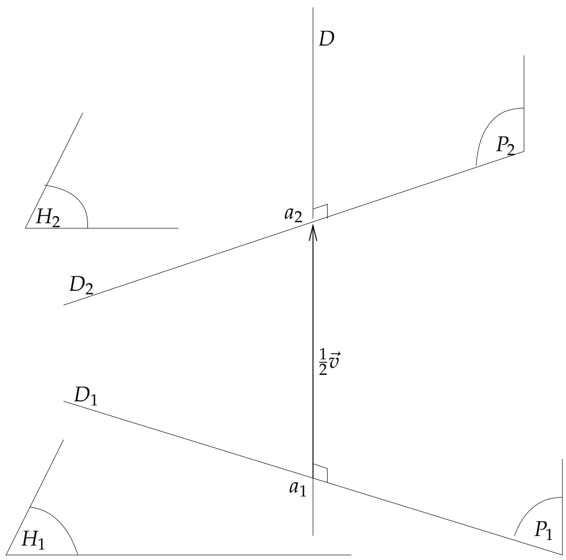
Proposition C.21. **(i)** Soient D_1 et D_2 deux droites *non coplanaires* et soit D leur perpendiculaire commune. Alors $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est un vissage d'axe D.

(ii) Réciproquement, soient D une droite et f un vissage d'axe D. Alors f est composée de deux retournements dont les axes rencontrent orthogonalement D. L'un de ces axes peut être choisi arbitrairement. En particulier, le groupe $\mathrm{Is}^+(E)$ est engendré par les retournements.

Démonstration. On utilise dans cette démonstration le résultat suivant qui sera démontré en TD (exercice **II.**) :

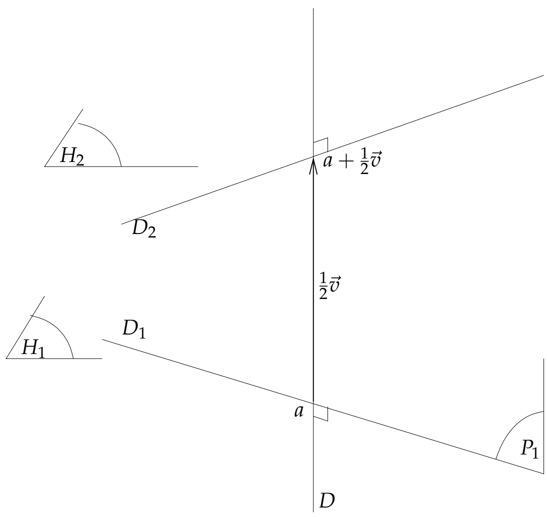
Soient F et G deux sous-espaces affines de E. On suppose F et G perpendiculaires (donc leur intersection est non vide). Alors $s_G \circ s_F = s_F \circ s_G = s_{F \cap G}$.

(i)



Soit $i \in \{1,2\}$. On sait que D et D_i sont concourantes en un point d'après la proposition **B.9**, notons a_i ce point.
On pose $H_i = a_i + \vec{D}^{\perp}$ et $P_i = a_i + \vec{D}_i + \vec{D}$. Ce sont des plans, H_i est orthogonal à D et P_i contient D_i et D.
Comme $\vec{H}_i^{\perp} = \vec{D} \subseteq \vec{P}_i$, les plans H_i et P_i sont perpendiculaires et on peut appliquer le résultat rappelé ci-dessus. Or $D_i = a_i + \vec{D}_i \subset P_i$ et $\vec{D}_i \subset \vec{D}^{\perp}$ (puisque D est orthogonale à D_i par définition de D) donc $D_i \subset H_i$. Donc $H_i \cap P_i = D_i$.
On a donc $s_{D_i} = s_{H_i} \circ s_{P_i}$. D'où $s_{D_2} \circ s_{D_1} = (s_{H_2} \circ s_{P_2}) \circ (s_{H_1} \circ s_{P_1})$.
De plus, $\vec{H}_1^{\perp} = \vec{D} \subseteq \vec{P}_2$ donc H_1 et P_2 sont perpendiculaires ; on applique à nouveau le résultat ci-dessus : $s_{P_2} \circ s_{H_1} = s_{H_1} \circ s_{P_2}$. Donc on obtient $s_{D_2} \circ s_{D_1} = (s_{H_2} \circ s_{H_1}) \circ (s_{P_2} \circ s_{P_1})$.
Comme H_1 et H_2 sont parallèles, $s_{H_2} \circ s_{H_1} = t_{\vec{v}}$ pour un $\vec{v} \in \vec{H}_1^{\perp} = \vec{D}$. Comme $P_1 \cap P_2 = D$, d'après la remarque **C.13** $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ est une rotation d'axe D. Soit θ son angle.
Finalement, $s_{D_2} \circ s_{D_1} = t_{\vec{v}} \circ r(D,\theta)$ est le vissage d'axe D, d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$.

(ii)



Soit f un vissage d'axe D, d'angle θ et de vecteur $\vec{v} \in \vec{D}$, donc $f = t_{\vec{v}} \circ r(D,\theta)$.
Soit a un point de D. Posons $H_1 = a + \vec{D}^{\perp}$ et $H_2 = H_1 + \frac{1}{2}\vec{v}$. D'après ce qui précède la proposition, on a $s_{H_2} \circ s_{H_1} = t_{\vec{v}}$.
Soit D_1 une droite orthogonale à D et coupant D en a. Soient $P_1 = a + \vec{D} + \vec{D}_1$ le plan contenant D et D_1. D'après la remarque **C.13** il existe un plan P_2 contenant D tel que $r(D,\theta) = s_{P_2} \circ s_{P_1}$.
On remarque que $D_1 = P_1 \cap H_1$ et on pose $D_2 = P_2 \cap H_2$.

On a alors

$$\begin{aligned} f &= s_{H_2} \circ s_{H_1} \circ s_{P_2} \circ s_{P_1} \\ &= s_{H_2} \circ s_{P_2} \circ s_{H_1} \circ s_{P_1} \text{ car } \vec{H}_1^{\perp} = \vec{D} \subseteq \vec{P}_2 \text{ donc } P_2 \text{ et } H_1 \text{ sont perpendiculaires} \\ &= s_{D_2} \circ s_{D_1}. \end{aligned}$$

Donc f est bien la composée de deux retournements. Il reste à démontrer que D_2 est orthogonale à D et coupe D. Mais on a $\vec{D}_2 = \vec{H}_2 \cap \vec{P}_2 = \vec{D}^{\perp} \cap \vec{P}_2 \subseteq \vec{D}^{\perp}$. Enfin, $a + \frac{1}{2}\vec{v} \in H_2$ par définition de H_2 et comme $a \in D$ et $\vec{v} \in \vec{D}$ on a $a + \frac{1}{2}\vec{v} \in D \subseteq P_2$ donc $a + \frac{1}{2}\vec{v} \in H_2 \cap P_2 = D_2$. □

D Le groupe des isométries laissant globalement invariante une partie donnée

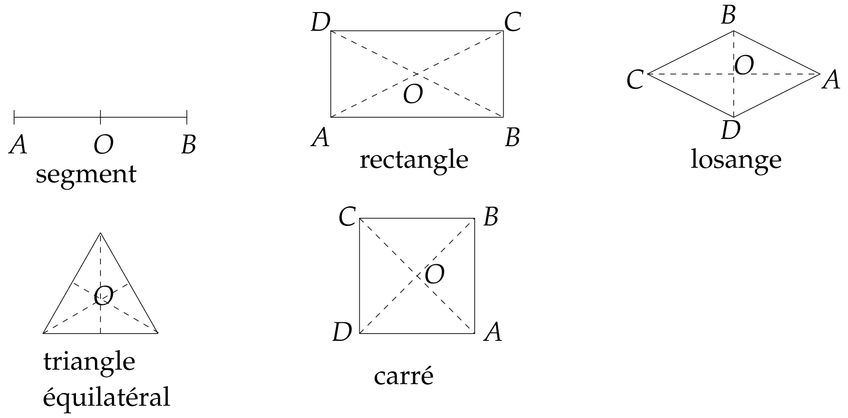
Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de E. On pose

$$\begin{aligned} &\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) = \{f : E \to E \text{ isométrie} ; f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\} \\ &\mathrm{Is}^+_{\mathcal{A}}(E) = \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) \cap \mathrm{Is}^+(E) \\ &\mathrm{Is}^-_{\mathcal{A}}(E) = \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) \cap \mathrm{Is}^-(E) \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$ et $\mathrm{Is}^+_{\mathcal{A}}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(E)$.

On a déjà déterminé explicitement $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}(E)}$ lorsque $\mathcal{A} = \{a\}$ et $n = 2$ ou 3.

On va démontrer que $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}(E)}$ est souvent contenu dans $\mathrm{Is}_O(E)$ pour un certain point O. Ce sera le cas des parties $\mathcal{A}$ suivantes du plan :



Théorème D.1. Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide *bornée* de E. Parmi les boules fermées contenant $\mathcal{A}$, il en existe une et une seule de rayon minimal. Si on note cette dernière $\bar{B}(O, R)$, on a $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq \mathrm{Is}_O(E)$. En particulier, si $M \in \mathcal{A}$ avec $OM = R$ et si $f \in \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E)$, on a $Of(M) = R$.

Démonstration. ✯ *Existence.*

Soit $a \in E$ quelconque. Puisque $\mathcal{A}$ est bornée, $\{am; m \in \mathcal{A}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}_+$, on peut donc considérer sa borne supérieure qui est un réel, positif. Lorsque a varie dans E, ces bornes supérieures forment une partie de $\mathbb{R}_+$ qui admet donc une borne inférieure. Posons $R = \inf_{a \in E} \sup_{m \in \mathcal{A}} am$. C'est un réel positif.

Si $\mathcal{A} \subseteq \bar{B}(a, R')$, alors $\sup_{m \in \mathcal{A}} am \leqslant R'$, d'où $R' \geqslant R$. Donc s'il existe un point $O \in E$ tel que $\mathcal{A} \subseteq \bar{B}(O, R)$, alors R est bien minimal.

Montrons donc l'existence de O tel que $\mathcal{A} \subseteq \bar{B}(O, R)$, c'est-à-dire tel que $\forall m \in \mathcal{A}$ on ait $Om \leqslant R$, c'est-à-dire tel que $\sup_{m \in \mathcal{A}} Om \leqslant R$.

On introduit $\varphi : E \to [0, +\infty[$ définie par $\varphi(a) = \sup_{m \in \mathcal{A}} am$. On a donc $R = \inf_{a \in E} \varphi(a)$ et on cherche un point $O \in E$ tel que $\varphi(O) \leqslant R$ (et même $\varphi(O) = R$).

Démontrons d'abord que φ est continue. Soient a et b deux points de E. Alors, pour tout $m \in \mathcal{A}$ on a $am \leqslant ab + bm$ d'où $\varphi(a) \leqslant ab + \varphi(b)$. De même, $\varphi(b) \leqslant ab + \varphi(a)$. Finalement, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant ab$ donc φ est continue (elle est 1-Lipschitzienne).

Fixons $\omega \in E$. Puisque $am \geqslant a\omega - \omega m$, on a $\varphi(a) \geqslant a\omega - \varphi(\omega)$ si bien que $\lim_{a\omega \to +\infty} \varphi(a) = +\infty$. En particulier, il existe $\rho > 0$ tel que $a\omega > \rho \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(\omega)$.

Sur le compact $\bar{B}(\omega, \rho)$, la fonction continue φ atteint sa borne inférieure, *i.e.* il existe $O \in \bar{B}(\omega, \rho)$ tel que $\varphi(O) = \inf \varphi(\bar{B}(\omega, \rho))$. Donc pour tout $a \in \bar{B}(\omega, \rho)$, on a $\varphi(a) \geqslant \varphi(O)$.

De plus, si $a \notin \bar{B}(\omega, \rho)$, alors $a\omega > \rho$ donc $\varphi(a) > \varphi(\omega) \geqslant \varphi(O)$.

Finalement, $\varphi(O) = \inf_{a \in E} \varphi(a) = R$, ce que l'on voulait.

✯ *Unicité.* Supposons qu'il existe un autre point $O' \in E$ tel que $\mathcal{A} \subseteq \bar{B}(O', R)$ (avec le R minimal obtenu ci-dessus). On note c le milieu de $[O, O']$.

L'égalité de la médiane donne pour tout $m \in \mathcal{A}$: $Om^2 + O'm^2 = 2cm^2 + \frac{1}{2}OO'^2$.

Puisque $m \in \mathcal{A} \subseteq \bar{B}(O, R)$ on a $Om \leqslant R$. De même, $O'm \leqslant R$.

On pose $\delta = \frac{1}{2}OO'$. On a donc $2R^2 \geqslant 2cm^2 + 2\delta^2$. Ainsi $R^2 - \delta^2 \geqslant cm^2 \geqslant 0$ pour tout $m \in \mathcal{A}$. Finalement, $\mathcal{A} \subseteq \bar{B}(c, \sqrt{R^2 - \delta^2})$. La minimalité de R implique $\delta = 0$ et donc $O = O'$.

✯ Il reste à vérifier l'inclusion $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq \mathrm{Is}_O(E)$, c'est-à-dire que O est un point fixe de tout $f \in \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E)$. On a $\bar{B}(f(O), R) = f(\bar{B}(O, R)) \supseteq f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. L'unicité de O montre que $f(O) = O$. □

Exemple D.2. On suppose que $n = 2$ et que $\mathcal{A}$ est le segment $[A, B]$. Déterminons $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}$.

Le milieu O de $[A, B]$ est le centre du disque de rayon minimal contenant $[A, B]$.

Soit $f \in \mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E)$. D'après le théorème, $f(O) = O$ donc f est soit une rotation de centre O, soit une réflexion d'axe contenant O.

Comme $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, on a $f(A) \in \mathcal{A}$. Or $Of(A) = f(O)f(A) = OA$ si bien que $f(A) = A$ ou $f(A) = B$.

Cas 1. $f(A) = A$. Alors soit $f = \mathrm{id}_E$, qui convient, soit $f = s_{(AB)}$, qui convient.

Cas 2. $f(A) = B$. Alors soit $f = s_O$, qui convient, soit $f = s_D$ où D est la médiatrice de (AB), qui convient.

Donc $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E) = \left\{ \mathrm{id}_E, s_O, s_{(AB)}, s_D \right\}$. Tous les éléments sont des symétries (donc de carré id_E).

Pour déterminer le groupe dont il s'agit, écrivons la table de multiplication :

	id_E	s_O	$s_{(AB)}$	s_D
id_E	id_E	s_O	$s_{(AB)}$	s_D
s_O	s_O	id_E	s_D	$s_{(AB)}$
$s_{(AB)}$	$s_{(AB)}$	s_D	id_E	s_O
s_D	s_D	$s_{(AB)}$	s_O	id_E

Pour le calcul de $s_O \circ s_{(AB)}$: c'est un anti-déplacement (car composée d'un déplacement et d'un anti-déplacement) tel que $s_O \circ s_{(AB)}(A) = s_O(A) = B$, donc $s_O \circ s_{(AB)} = s_D$.

On complète ensuite la table en sachant que tous les éléments du groupe se retrouvent dans chaque ligne ou dans chaque colonne *[en effet, si g est fixé dans un groupe fini G, alors $\{gh; h \in G\} = G = \{hg; h \in G\}$ donc tous les éléments de G apparaissent dans chaque ligne et chaque colonne de la table].*

Le groupe $\mathrm{Is}_{\mathcal{A}}(E)$ est commutatif non cyclique d'ordre 4 ; c'est donc le groupe de Klein.

Références

- Jean TRIGNAN, *Constructions géométriques et courbes remarquables, Cours et exercices CAPES, LP2, Agregation Interne,* Vuibert 2004, BU 516.15 TRI
- E. BLANCK-PAULIAT, P. VERDIER, *Préparation au CAPES de mathématiques 2, Géométrie,* CRDP du Limousin, BU 510.79 BLA
- FREDON, NECER, *Best of Algèbre et géométrie 2me année,* Dunod 2002, BU 512.107 6 FRE
- J.P. ESCOFFIER, *Toutes l'algèbre dy 1er cycle*, Sciences Sup, Dunod 2002, BU 512 ESC
- M GAULTIER, *Algèbre, Les Sciences en Fac,* Vuibert 1999, BU 512 GAU
- J. GUEGAND, T. DUGARDIN, *Algèbre en Classes Prépa MP-MP*,* Ellipse 1999, BU 512 DUG
- A.I. KOSTRIKIN, *Exercices in Algebra (a collection of exercises in algebra, linear algebra and geometry),* Gordon and Breach Publishers 1996, BU 512..007 6 KOS