Géométrie affine

R. Taillefer
Université Jean Monnet
Licence de Mathématiques 2006-2007
Semestre 3

Table des matières

I Espaces affines, sous-espaces affines

A Espaces affines

Définition A.1. *Un* espace affine *(sur $\mathbb{R}$) est un triplet $(X, \vec{X}, \Phi)$ où :*

- *X est un ensemble non vide*
- *$(\vec{X}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*
- *Φ est une application de $\vec{X} \times X$ dans X vérifiant les axiomes :*
  (A1) pour tous $x \in X$, $\vec{\zeta} \in \vec{X}$, $\vec{\eta} \in \vec{X}$, on a $\Phi(\vec{\zeta}, \Phi(\vec{\eta}, x)) = \Phi(\vec{\zeta} + \vec{\eta}, x)$;
  (A2) pour tous $x, y \in X$, il existe un et un seul $\vec{\zeta} \in \vec{X}$ tel que $y = \Phi(\vec{\zeta}, x)$.

Définition A.2. *Les éléments de X sont appelés les* points *de l'espace affine, les éléments de $\vec{X}$ sont appelés les* vecteurs *de l'espace affine, $\vec{X}$ est dit* direction *de $(X, \vec{X}, \Phi)$.*

Remarque A.3. Si $y = \Phi(\vec{\zeta}, x)$, l'axiome (A2) dit qu'il n'existe pas d'autre vecteur $\vec{\eta}$ tel que $y = \Phi(\vec{\eta}, x)$. Le vecteur $\vec{\zeta}$ est déterminé par (x, y), et on le note $\overrightarrow{xy}$.

Remarque A.4. Soit $\vec{\zeta} \in \vec{X}$. L'application $\Phi(\vec{\zeta}, \cdot) : X \to X$ correspond à une translation (celle de vecteur $\vec{\zeta}$). On note donc $\Phi(\vec{\zeta}, \cdot) = t_{\vec{\zeta}}$.

L'axiome (A1) est alors équivalent à :

$$\forall \vec{\zeta} \in \vec{X}, \forall \vec{\eta} \in \vec{X},\ t_{\vec{\zeta}} \circ t_{\vec{\eta}} = t_{\vec{\zeta} + \vec{\eta}},$$

et l'axiome (A2) est équivalent à

$$\forall x, y \in X,\ \exists! \vec{\zeta} \in \vec{X} \text{ tel que } y = t_{\vec{\zeta}}(x).$$

Exemples A.5. **(a)** Soit $\vec{X}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On prend $X = \vec{X}$ et $\Phi(\vec{\zeta}, x) = x + \vec{\zeta}$ pour tous $x, \vec{\zeta} \in \vec{X}$.

(b) On pose :

- $X = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$; notons que $X \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\vec{X} = \{(\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\Phi : \vec{X} \times X \to X$, $((\alpha, 0), (x, 1)) \mapsto (x + \alpha, 1)$ est la restriction de l'addition usuelle de $\mathbb{R}^2$.

Notons qu'on peut aussi écrire, par exemple, $X = \{(3, 1) + (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) On pose :

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}$.
- $\vec{X} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha + \beta = 0\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $\Phi : \vec{X} \times X \to X$, $((\alpha, \beta), (x, y)) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ est la restriction de l'addition usuelle de $\mathbb{R}^2$.

Notons que l'on peut aussi écrire, par exemple, $X = \{(1/2, 1/2) + (\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) On pose :

- $X = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$ (géométriquement il s'agit d'un plan horizontal).
- $\vec{X} = \{(\alpha, \beta, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (plan vectoriel horizontal).
- $\Phi : \vec{X} \times X \to X$ est la restriction de l'addition usuelle de $\mathbb{R}^3$.

Notons que l'on peut écrire, par exemple, $X = \{(1, 1, 1) + (\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(e) Les exemples ci-dessus sont tous de la même forme :

- on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\vec{F}$, $\vec{u}_0 \in \vec{F}$, $\vec{X}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{F}$;

- on considère $X = \{\vec{u} + \vec{u}_0 ; \vec{u} \in \vec{X}\}$, et Φ est la restriction à $\vec{X} \times X$ de l'addition des vecteurs de $\vec{F}$: $\Phi(\vec{v}, \vec{u}_0 + \vec{u}) = \vec{u}_0 + \vec{u} + \vec{v}$.

Un cas particulier est celui où $\vec{u}_0 = \vec{0}$. Dans ce cas, $X = \vec{X}$, i.e. tout espace vectoriel est muni d'une structure d'espace affine. Ainsi $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) sont des $\mathbb{R}$-espaces affines (ce résultat est celui donné par l'exemple **(a)**).

Convention : Quand il n'y aura pas d'ambiguité, on notera à présent X un espace affine $(X, \vec{X}, \Phi)$. De plus, au lieu de noter $\Phi(\vec{\zeta}, x)$ on notera $x + \vec{\zeta}$. On a donc en particulier $y = x + \overrightarrow{xy}$ pour tous $x, y \in X$.

Attention, il ne faut pas confondre ce symbole $+$ avec la loi additive sur $\vec{X}$. Notons aussi que l'on ne peut pas ajouter des points de X.

Proposition A.6. (règles de calcul) Soit $(X, \vec{X}, \Phi)$ un espace affine.

(i) Pour tous $x, y, z \in X$, on a $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (*Relation de Chasles*).

(ii) Pour tout $x \in X$, on a $\overrightarrow{xx} = \vec{0}$. Donc $x = x + \vec{0}$. Plus précisément, pour tous $x, y \in X$, on a $\overrightarrow{xy} = \vec{0}$ si et seulement si $x = y$.

(iii) Pour tous $x, y \in X$, $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$.

(iv) Pour tous $x, y, z, t \in X$, $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{tz}$ si et seulement si $\overrightarrow{xt} = \overrightarrow{yz}$.

(v) Pour tous $x, y, z \in X$, $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zy} - \overrightarrow{zx}$.

(vi) Soit $x_0 \in X$ fixé. On définit $\Theta_{x_0} : X \to \vec{X}$ par $y \mapsto \overrightarrow{x_0 y}$. Cette application est une bijection de X dans $\vec{X}$ et sa bijection réciproque est $\Phi(\cdot, x_0)$.

Démonstration. (i) On a $x + (\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}) = (x + \overrightarrow{xy}) + \overrightarrow{yz}$ par l'axiome (A1). D'où $x + (\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}) = y + \overrightarrow{yz} = z$. Par l'axiome (A2), on a alors $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

(ii) D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx}$. Donc $\overrightarrow{xx} = \vec{0}$, et $x = x + \vec{0}$.
Si $\overrightarrow{xy} = \vec{0}$, on a $y = x + \overrightarrow{xy} = x + \vec{0} = x$.
Enfin, si $x = y$, on a $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$.

(iii) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$.

(iv) On a $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xt} + \overrightarrow{tz} + \overrightarrow{zy}$. D'où $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xt} + \overrightarrow{tz}$. D'où le résultat.

(v) $\overrightarrow{zy} - \overrightarrow{zx} = \overrightarrow{zy} + \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}$.

(vi) On a pour tout $y \in X$,
$$\Phi(\cdot, x_0) \circ \Theta_{x_0}(y) = \Phi(\cdot, x_0)(\overrightarrow{x_0 y}) = x_0 + \overrightarrow{x_0 y} = y$$
Soit $\vec{u} \in \vec{X}$. On sait qu'il existe $y \in X$ tel que $y = x_0 + \vec{u}$. Alors
$$\Theta_{x_0} \circ \Phi(\cdot, x_0)(\vec{u}) = \Theta_{x_0}(x_0 + \vec{u}) = \Theta_{x_0}(y) = \overrightarrow{x_0 y} = \vec{u}. \quad \square$$

B Sous-espaces affines

Définition B.1. *Soit $(X, \vec{X}, \Phi)$ un espace affine et soit Y une partie non vide de X. On dit que Y est un* sous-espace affine *de $(X, \vec{X}, \Phi)$ s'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{Y}$ de $\vec{X}$ tel que le triplet $(Y, \vec{Y}, \Phi|_{\vec{Y} \times Y})$ soit un espace affine. Le sous-espace $\vec{Y}$ est alors appelé* direction *de Y.*

Propriété B.2. Soit $(X, \vec{X}, \Phi)$ un espace affine. Soient $x_0 \in X$ et $\vec{E}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$. Alors $Y := x_0 + \vec{E} := \{x_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{E}\}$ est un sous-espace affine de $(X, \vec{X}, \Phi)$ de direction $\vec{Y} = \vec{E}$.

Démonstration. Montrons que $(Y, \vec{E}, \Phi_{|\vec{E} \times Y})$ est un espace affine :

- $Y \neq \varnothing$ ($x_0 \in Y$).
- l'application $\Phi_{|\vec{E} \times Y}$ est bien à valeurs dans Y.
- l'axiome (A1) est vérifié car X est un espace affine.

- Vérifions l'axiome (A2) : soient $y_0 \in Y$ et $y \in Y$. Par définition, il existe $\vec{u} \in \vec{E}$ et $\vec{v} \in \vec{E}$ tels que $y_0 = x_0 + \vec{u}$ et $y = x_0 + \vec{v}$. Comme X est un espace affine, il existe un et un seul $\vec{w} \in \vec{X}$ tel que $y = y_0 + \vec{w}$. Il faut montrer que $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}$.

  Or on a aussi $y = y_0 - \vec{u} + \vec{v}$. Donc $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} \in \vec{E}$. Donc pour tous $y_0 \in Y$, $y \in Y$, il existe un et un seul $\vec{w} \in \vec{E}$ tel que $y_0 = y + \vec{w}$: l'axiome (A2) est vérifié. □

Proposition B.3. Soit $(X, \vec{X}, \Phi)$ un espace affine

(i) Soit Y une partie non vide de X. S'il existe $y_0 \in Y$ tel que $\{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$, alors Y est un sous-espace affine de $(X, \vec{X}, \Phi)$ de direction $\vec{Y} = \{\overrightarrow{y_0y}; y \in Y\}$.

(ii) Soit Y un sous-espace affine de $(X, \vec{X}, \Phi)$. Alors pour tout $y_1 \in Y$, on a

$$\vec{Y} = \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\}, \qquad \text{et} \qquad Y = y_1 + \vec{Y}.$$

Démonstration. (i) Montrons que $Y = y_0 + \{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\}$. L'inclusion $y_0 + \{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\} \subseteq Y$ est évidente puisque $y_0 + \overrightarrow{y_0y} = y \in Y$. Soit $y \in Y$. Alors $y = y_0 + \overrightarrow{y_0y}$, donc $Y \subseteq y_0 + \{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\}$.

D'après la propriété précédente, puisque $\{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$, Y est un sous-espace affine de X. Sa direction est $\{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in Y\}$.

(ii) Soit $y_1 \in Y$. Montrons que $\overrightarrow{Y} = \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\}$:

- Montrons que $\overrightarrow{Y} \subseteq \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\}$: si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{Y}$, posons $y := y_1 + \overrightarrow{v}$. Alors $y \in Y$ puisque Y est un sous-espace affine. Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{y_1y} \in \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\}$.
- Montrons que $\{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\} \subseteq \overrightarrow{Y}$: soit $\overrightarrow{y_1y} \in \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\}$ avec $y \in Y$. Alors il existe un unique $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{Y}$ tel que $y = y_1 + \overrightarrow{w}$ (puisque Y est un sous-espace affine de X), et donc $\overrightarrow{y_1y} = \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{Y}$.

Finalement, on peut montrer comme au début de la proposition que $Y = y_1 + \{\overrightarrow{y_1y} \mid y \in Y\} = y_1 + \overrightarrow{Y}$. □

Remarque B.4. Tout sous-espace affine est de la forme $Y = x_0 + \vec{Y}$, où $\vec{Y}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ et où x_0 est un point de X. Si $\vec{Y} = \{\vec{0}\}$, on obtient une partie réduite à un point. Donc pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est un sous-espace affine de X.

Remarque B.5. On peut avoir une partie Z de X pour laquelle $\{\overrightarrow{z_1z_2} \mid z_1 \in Z, z_2 \in Z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ sans que Z soit un sous-espace affine de X. On peut considérer l'exemple $X = \vec{X} = \mathbb{R}$ et $Z = [0, +\infty[$. On a $\{\overrightarrow{z_1z_2} \mid z_1 \in Z, z_2 \in Z\} = \mathbb{R}$. Si Z était un sous-espace affine de X, sa direction serait $\vec{X}$, donc $\mathbb{R}$, et on aurait $Z = z_1 + \vec{X} = X$.

Exemple B.6. Soit $X = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ et $\vec{X} = \mathbb{R}^2$. On définit $\Phi : \vec{X} \times X \to X$ par $((t, s), (x, y, 1)) \mapsto (x + t, y + s, 1)$. On vérifie que $(X, \vec{X}, \Phi)$ est bien un espace affine.

Soit $Y = \{(x, x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset X$. On lui associe $\vec{Y} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Alors $Y = (0, 0, 1) + \vec{Y}$ par exemple, avec $\vec{Y}$ sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ et $(0, 0, 1) \in Y$, donc Y est une sous-espace affine de X.

Remarque B.7. Si Y_1 et Y_2 sont deux sous-espaces affines de X tels que $Y_1 \subseteq Y_2$, alors $\vec{Y_1} \subseteq \vec{Y_2}$.

La réciproque est fausse. On peut avoir $\vec{Y_1} \subseteq \vec{Y_2}$ et $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. Par exemple, c'est le cas si $X = \vec{X} = \mathbb{R}^2$, $\vec{Y_1} = \vec{Y_2} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $Y_1 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $Y_2 = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Proposition B.8. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace affine X. Alors $\cap_{i \in I} A_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de X de direction $\cap_{i \in I} \vec{A_i}$.

Démonstration. Supposons que $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Soit $a \in \cap_{i \in I} A_i$. Alors, pour tout $x \in \cap_{i \in I} A_i$, on a $\overrightarrow{ax} \in \vec{A_i}$ pour tout $i \in I$, i.e. $\overrightarrow{ax} \in \cap_{i \in I} \vec{A_i}$. D'où $\cap_{i \in I} A_i \subseteq a + \cap_{i \in I} \vec{A_i}$.

Pour l'inclusion réciproque, supposons que $y \in a + \cap_{i \in I} \vec{A_i}$. Alors $\overrightarrow{ay} \in \cap_{i \in I} \vec{A_i}$, donc $\overrightarrow{ay} \in \overrightarrow{A_i}$ pour tout $i \in I$. Comme $a \in A_i$ pour tout i, on a donc $y \in A_i$ pour tout i, et donc $y \in \cap_{i \in I} A_i$.

Donc $\cap_{i \in I} A_i = a + \cap_{i \in I} \vec{A_i}$.

Enfin, on sait que $\cap_{i \in I} \vec{A_i}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$. On conclut par la propriété B.2. □

Remarque B.9. La réunion de deux sous-espaces affines n'est pas en général un sous-espace affine.

Définition B.10. *Soit $\mathcal{Y}$ une partie non vide d'un espace affine X. On appelle* sous-espace affine engendré par $\mathcal{Y}$, *et l'on note* $\mathrm{aff}(\mathcal{Y})$, *le plus petit sous-espace affine de X contenant $\mathcal{Y}$. C'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de X contenant $\mathcal{Y}$.*

Définition B.11. *Si la direction $\vec{X}$ d'un espace affine $(X, \vec{X}, \Phi)$ est de dimension finie, on dit que l'espace affine $(X, \vec{X}, \Phi)$ est de* dimension finie, *et l'on pose* $\dim X := \dim \vec{X}$.

Définition B.12.

(i) Un point *est un espace affine de dimension* 0.

(ii) Une droite affine *est un espace affine de dimension* 1.

(iii) Un plan affine *est un espace affine de dimension* 2.

(iv) Soit X un espace affine de dimension finie n. Un hyperplan affine *est un sous-espace affine de X de dimension* $n-1$.

Définition B.13. *Soit X un espace affine. On dit que :*

(i) les points $a_1, \ldots, a_n$ de X sont alignés *s'ils appartiennent tous à une même droite affine de X.*

(ii) les points $a_1, \ldots, a_n$ de X sont coplanaires *s'ils appartiennent tous à un même plan affine de X.*

(iii) les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ de X sont concourantes *si elles ont un unique point commun, i.e. $\Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_n$ est un point. Dans le cas de deux droites (soit $n = 2$), on dit parfois* sécantes.

Proposition B.14. **(1)** Par deux points distincts a et b de X passe une droite affine et une seule. C'est le sous-espace affine engendré par les deux points. Notation : (ab).

(2) Par trois points non alignés a, b et c d'un espace affine passe un plan et un seul. C'est le sous-espace affine engendré par les trois points. Notation : (abc).

(3) Par deux droites concourantes passe un plan et un seul.
Par deux droites sans point commun ayant la même direction passe un plan et un seul.

(4) Une droite qui a deux points dans un plan est contenue toute entière dans ce plan.

C Parallélisme

Définition C.1. *Soient A et B deux sous-espaces affines d'un espace affine X de directions $\vec{A}$ et $\vec{B}$. On dit que :*

(i) A est parallèle *à B si $\vec{A} = \vec{B}$. Notation : $A \mathbin{//} B$.*

(ii) A est faiblement parallèle *à B si $\vec{A} \subset \vec{B}$. Notation : $A \mathrel{</} B$.*

Remarque C.2. Si A est un sous-espace affine de X, alors A est parallèle à A, et A est faiblement parallèle à X.

Théorème C.3. Soit X un espace affine.

(i) Deux sous-espaces affines parallèles sont disjoints ou égaux.

(ii) Si $A \mathrel{</} B$ alors $A \subseteq B$ ou $A \cap B = \varnothing$.

(iii) On a $A \mathrel{</} B$ si et seulement si A est parallèle à un sous-espace affine de B.

(iv) Soit A un sous-espace affine de X et b un point de X. Alors il existe un unique sous-espace affine passant par b et parallèle à A.

Démonstration. (i) Soient A et B deux sous-espace affines parallèles. Alors $\vec{A} = \vec{B}$. Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$, et soit $p \in A \cap B$. Alors $B = p + \vec{B} = p + \vec{A} = A$.

(ii) Soient A et B deux sous-espace affines avec A faiblement parallèle à B. Alors $\vec{A} \subseteq \vec{B}$. Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$, et soit $p \in A \cap B$. Alors $A = p + \vec{A} \subseteq p + \vec{B} = B$.

(iii)
- Supposons que $A < / B$. On a donc $\vec{A} \subseteq \vec{B}$. Soit $b \in B$. Alors $b + \vec{A}$ est un sous-espace affine de $B = b + \vec{B}$, et il est parallèle à A.
- Réciproquement, supposons que A soit parallèle à un sous-espace affine de B. Alors il existe $b \in B$ tel que $b + \vec{A}$ soit un sous-espace affine de B. La direction de ce sous-espace est donc contenue dans celle de B, *i.e.* $\vec{A} \subseteq \vec{B}$, et donc $A < / B$.

(iv) Soit B un sous-espace affine de X passant par b et parallèle à A. Alors la direction de B est $\vec{A}$, et comme $b \in B$ on a $B = b + \vec{A}$. On en déduit l'unicité. De plus, comme $b + \vec{A}$ est un sous-espace affine de X passant par b et parallèle à A, on a bien l'existence. □

Remarque C.4. On a retrouvé l'axiome des parallèles : par un point donné passe une droite et une seule parallèle à une droite donnée.

Remarque C.5. Les réciproques de (i) et (ii) sont fausses.

Exemple C.6. $X = \vec{X} = \mathbb{R}^4$ et Φ est l'addition usuelle.

On pose :
- $\Delta_1 = \{(x, 0, 1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, droite de direction $\vec{\Delta_1} = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- $\Delta_2 = \{(x, 4, 2, 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$, droite de direction $\vec{\Delta_2} = \vec{\Delta_1}$.
- $\Delta_3 = \{(0, y, 2, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$, droite de direction $\vec{\Delta_3} = \{(0, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles et disjointes. On a $\Delta_1 \cap \Delta_3 = \varnothing$ et Δ_1 et Δ_3 ne sont pas parallèles.

On pose :
- $P_1 = \{(x, y, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ plan de direction $\vec{P_1} = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $P_2 = \{(x, y, 2, 5) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ plan de direction $\vec{P_2} = \vec{P_1}$.
- $P_3 = \{(x, 1, z, 3) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ plan de direction $\vec{P_3} = \{(x, 0, z, 0) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$.

On a $\vec{\Delta_1} \subseteq \vec{P_1}$, donc Δ_1 est faiblement parallèle à P_1. On a aussi $\vec{\Delta_3} \subseteq \vec{P_1}$, donc Δ_3 est faiblement parallèle à P_1. Enfin, $\Delta_3 \cap P_3 = \varnothing$ et Δ_3 n'est pas faiblement parallèle à P_3.

D Position relative de deux sous-espaces affines (dimension finie)

Lemme D.1. (Rappel) Soit $\vec{X}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux sous-espaces vectoriels de $\vec{X}$ de dimension finie. On a alors l'égalité

$$\dim(\vec{A} \cap \vec{B}) + \dim(\vec{A} + \vec{B}) = \dim(\vec{A}) + \dim(\vec{B}).$$

Démonstration. C'est du cours d'algèbre linéaire. □

Lemme D.2. Soient A et B deux sous-espaces affines de X, de directions respectives $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Soient $a \in A$, $b \in B$. Alors $A \cap B \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{ab} \in \vec{A} + \vec{B}$.

Démonstration. Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$. Soit $c \in A \cap B$. On a $\overrightarrow{ac} \in \vec{A}$ et $\overrightarrow{bc} \in \vec{B}$. Donc $\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ab} \in \vec{A} + \vec{B}$.

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{ab} \in \vec{A} + \vec{B}$. Il existe donc $\vec{u}_1 \in \vec{A}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{B}$ tels que $\overrightarrow{ab} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Or $\vec{u}_1 \in \vec{A}$ et $a \in A$, donc il existe $c \in A$ tel que $\vec{u}_1 = \overrightarrow{ac}$. D'où $\vec{u}_2 = \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{cb}$. Or $b \in B$, donc $c = b + \overrightarrow{bc} \in b + \vec{B} = B$. Donc $c \in A \cap B$. □

Théorème D.3. Soient A et B deux sous-espaces affines de X, de directions respectives $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

(i) Si $\vec{A} + \vec{B} = \vec{X}$, alors $A \cap B \neq \varnothing$.

(ii) Si $\vec{A} \oplus \vec{B} = \vec{X}$, alors $A \cap B$ est un point.

Démonstration. (i) est un corollaire immédiat du lemme précédent.

(ii) On sait que $A \cap B \neq \varnothing$. De plus, $A \cap B$ est un espace affine de direction $\vec{A} \cap \vec{B} = \vec{0}$ (proposition B.8). Donc $A \cap B$ est un point. $\square$

Remarque D.4. Le théorème donne des conditions suffisantes pour dire que $A \cap B \neq \varnothing$, mais ce ne sont pas des conditions nécessaires. En effet, si A est un sous-espace affine strict de X, on a $\vec{A} + \vec{A} = \vec{A} \neq \vec{X}$ et $A \cap A \neq \varnothing$. De même, on peut avoir $A \cap B$ réduit à un point sans avoir $\vec{A} \oplus \vec{B} = \vec{X}$. Il suffit de considérer par exemple $A = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et $X = \mathbb{R}^3$.

Exemples D.5.

(a) Intersection de deux droites d'un plan.
Soit X un plan affine, et soient D_1 et D_2 deux droites de X. On a donc $\dim(D_1) = \dim(D_2) = 1$. Or on a :

$$\dim(\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) + \dim(\vec{D}_1 + \vec{D}_2) = \dim(\vec{D}_1) + \dim(\vec{D}_2) = 2.$$

Comme $\dim(\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) \leqslant \dim(\vec{D}_1)$, on n'a que deux possibilités :
- $\dim(\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) = 0$, et donc $\dim(\vec{D}_1 + \vec{D}_2) = 2$. Alors $\vec{X} = \vec{D}_1 \oplus \vec{D}_2$. D'après le théorème, $D_1 \cap D_2$ est réduit à un point.
- $\dim(\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) = 1$, i.e. $\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2 = \vec{D}_1 = \vec{D}_2$. Les deux droites D_1 et D_2 sont parallèles.

Donc deux droites d'un plan affine sont soit parallèles (égales ou disjointes) soit concourantes.

(b) Intersection de deux plans d'un espace de dimension 3.
On montre de la même manière (exercice) que deux plans d'un espace affine :
- soit se coupent en une droite.
- soit sont parallèles.

(c) Intersection d'un plan et d'une droite en dimension 3 :
Soient E un espace affine de dimension 3, P un plan de E et D une droite de E. On a $\dim(\vec{D} \cap \vec{P}) + \dim(\vec{D} + \vec{P}) = 3$. On a deux cas possibles puisque $(\vec{D} \cap \vec{P}) \subseteq \vec{D}$:
- $\dim(\vec{D} \cap \vec{P}) = 0$. Alors $\dim(\vec{D} + \vec{P}) = 3$, et $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{P}$. Donc $D \cap P$ est réduit à un point d'après le théorème.
- $\dim(\vec{D} \cap \vec{P}) = 1$. Alors $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$, donc $\vec{D} \subseteq \vec{P}$: D est faiblement parallèle à P. On a alors deux sous-cas : soit $D \cap P = \varnothing$, soit $D \cap P \neq \varnothing$ et alors $D \subseteq P$.

Théorème D.6. Soient A et B deux sous-espaces affines de X de dimensions finies et $\mathrm{aff}(A \cup B)$ le sous-espace affine qu'ils engendrent. On a alors deux possibilités :

(i) Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\dim(\mathrm{aff}(A \cup B)) = \dim(\vec{A} + \vec{B}) + 1$.

(ii) Si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $\dim(\mathrm{aff}(A \cup B)) = \dim(\vec{A} + \vec{B})$.

Démonstration. On pose $C = \mathrm{aff}(A \cup B)$. Montrons d'abord que $\vec{A} + \vec{B} \subseteq \vec{C}$: en effet, $A \subseteq C$ donc $\vec{A} \subseteq \vec{C}$, de même $\vec{B} \subseteq \vec{C}$ et donc $\vec{A} + \vec{B} \subseteq \vec{C}$.

(i) On suppose que $A \cap B = \varnothing$. Soient $a \in A$, $b \in B$. D'après le lemme, on a $\overrightarrow{ab} \notin \vec{A} + \vec{B}$. De plus, $a, b \in C$, donc $\overrightarrow{ab} \in \vec{C}$, donc $\vec{A} + \vec{B} \neq \vec{C}$. On a donc $\vec{A} + \vec{B} \subsetneq \vec{C}$.
D'autre part, $a + (\mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \vec{A} + \vec{B})$ contient A et B, donc doit contenir $C = \mathrm{aff}(A \cup B)$ (puisque c'est le plus petit espace affine contenant $A \cup B$).
Donc

$$\dim(\vec{A} + \vec{B}) < \dim(\vec{C}) \leqslant \dim(\mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \vec{A} + \vec{B}) = \dim(\vec{A} + \vec{B}) + 1.$$

D'où $\dim \vec{C} = \dim(\vec{A} + \vec{B}) + 1$.

(ii) On suppose que $A \cap B \neq \varnothing$. Soit $d \in A \cap B$. Alors $d + \vec{A} + \vec{B}$ est un sous-espace affine qui contient A et B. Donc $C \subseteq d + \vec{A} + \vec{B}$. D'autre part, $\vec{A} + \vec{B} \subseteq \vec{C}$, donc $d + \vec{A} + \vec{B} \subseteq C$. D'où l'égalité $\mathrm{aff}(A \cup B) = d + \vec{A} + \vec{B}$, et $\dim(\mathrm{aff}(A \cup B)) = \dim(\vec{A} + \vec{B})$. $\square$

Remarque D.7. On a montré que dans le cas (i), $\mathrm{aff}(A \cup B) = a + \mathbb{R}\overrightarrow{ab} + \vec{A} + \vec{B}$ où $a \in A$ et $b \in B$ et dans le cas (ii), $\mathrm{aff}(A \cup B) = d + \vec{A} + \vec{B}$ où $d \in A \cap B$.

E Géométrie analytique affine

Définition E.1. *Soit X un espace affine de dimension n. Un* repère cartésien *de X est la donnée d'un point $\omega \in X$, l'origine du repère, et d'une base de $\vec{X}$: $(\omega \mid \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.*

Pour un point x de X, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Ces nombres sont appelés coordonnées cartésiennes *de x dans le repère $(\omega \mid \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.*

Remarque E.2. Soit $x \in X$. Alors les coordonnées de x dans le repère $(\omega \mid \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\omega x}$ dans la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\vec{X}$.

Remarque E.3. Soient x et y des points de X, avec $x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ et $y = \omega + \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i$. On sait que $\overrightarrow{xy}$ est l'unique vecteur tel que $y = x + \overrightarrow{xy}$. Notons $\overrightarrow{xy} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$. On a donc

$$\omega + \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i = \omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = \omega + \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha_i) \vec{e}_i.$$

L'unicité des coordonnées cartésennes de y impose que $y = x_i + \alpha_i$, et donc

$$\overrightarrow{xy} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \vec{e}_i.$$

E.1 Equations d'hyperplans affines

Proposition E.4. Soit $(\omega \mid \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de l'espace affine X.

(i) Etant donnés $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient non tous nuls, l'ensemble des points de X dont les coordonnées cartésiennes vérifient la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0$ est un hyperplan affine.

(ii) Etant donné un hyperplan H de X, il existe $(n+1)$ scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, tels que H soit l'ensemble des points de X dont les coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n)$ vérifient la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0$. De plus, cette équation est unique à une multiplication par un scalaire près.

Démonstration. (i) Soit $A = \{x \in X \mid x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0\}$.

- $A \neq \varnothing$: comme les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas tous nuls, il existe $\alpha_k \neq 0$, et ainsi $\omega + \frac{\alpha_0}{\alpha_k} \vec{e}_k \in A$, et donc $A \neq \varnothing$.
- Soit $a \in A$. Montrons que $\left\{\overrightarrow{ax} \in \vec{X} \mid x \in A\right\}$ est un hyperplan vectoriel de $\vec{X}$: soit φ l'application linéaire de $\vec{X}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(\vec{e}_i) = \alpha_i$. Alors φ et une forme linéaire non nulle, donc il suffit de montrer que $\left\{\overrightarrow{ax} \in \vec{X} \mid x \in A\right\} = \operatorname{Ker} \varphi$:
  - ◇ Si $x \in A$, alors $x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$; notons $a = \omega + \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$. On a :

    $$\varphi(\overrightarrow{ax}) = \varphi(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \alpha_i = 0$$

    puisque $a, x \in A$. D'où $\overrightarrow{ax} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, et donc $\operatorname{Ker}(\varphi) \supseteq \{\overrightarrow{ax} \in \vec{X} \mid x \in A\}$.
  - ◇ Inversement, si $\vec{u} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, soit $x = a + \vec{u}$. On écrit $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$, d'où

    $$\begin{aligned} x &= \omega + \overrightarrow{\omega a} + \vec{u} \\ &= \omega + \sum_{i=1}^n (u_i + a_i) \vec{e}_i. \end{aligned}$$

    Montrons que $x \in A$:

    $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i + a_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \\ &= \varphi(\vec{u}) + \alpha_0 \\ &= \alpha_0 \end{aligned}$$

(car $a \in A$ et $\vec{u} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$). Donc $x \in A$ et donc $\vec{u} \in \{\overrightarrow{ax} \mid x \in A\}$.
On en déduit donc que A est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker}(\varphi)$. Comme $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan vectoriel, A est un hyperplan affine.

(ii) Soit H un hyperplan affine de X.

- $\vec{H}$ est un hyperplan vectoriel de $\vec{X}$ donc il existe une forme linéaire non nulle sur $\vec{X}$ telle que $\vec{H} = \operatorname{Ker} \varphi$. Posons $\alpha_i = \varphi(\vec{e}_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Les α_i ne sont pas tous nuls. Ainsi $\vec{H} = \{\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i\vec{e}_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0\}$.
- Fixons $a = \omega + \sum_{i=1}^n a_i\vec{e}_i \in H$. Posons $\alpha_0 = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$ et montrons que

$$H = \left\{ x \in X \mid x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0 \right\} :$$

◇ Si $x \in H$, alors $x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$, et on a :

$$x = a + \overrightarrow{ax} = a + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)\vec{e}_i.$$

Comme $\overrightarrow{ax} \in \vec{H}$, on a $\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)\alpha_i = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i = \alpha_0$.

◇ Réciproquement, soit $x \in X$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i = \alpha_0$. On a $\overrightarrow{ax} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)\vec{e}_i$ et $\varphi(\overrightarrow{ax}) = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i - \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = 0$. Donc $\overrightarrow{ax} \in \vec{H}$ et $x \in H$, d'où le résultat :

$$H = \{x \in X \mid x = \omega + \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0\}$$

- Montrons enfin l'unicité de l'équation à un scalaire près : soit $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = \beta_0$ une autre équation de H. Alors $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 0$ est une autre équation de $\vec{H}$ et $\vec{H} = \operatorname{Ker}(\psi)$ où ψ est la forme linéaire définie par $\psi(\vec{e}_i) = \beta_i$. D'après le cours d'algèbre linéaire, puisque $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$ et que φ et ψ sont deux formes linéaires (non nulles), il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$. D'où $\beta_i = \lambda\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément de H. On a $\sum_{i=1}^n \lambda\alpha_i x_i = \beta_0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0$. D'où $\beta_0 = \lambda\alpha_0$. □

Remarque E.5. **(a)** Cette proposition donne l'équation cartésienne d'un hyperplan affine.

(b) Si H est l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_0$, sa direction $\vec{H}$ est l'hyperplan vectoriel d'équation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$.

(c) On obtient les équations d'un sous-espace affine par intersection d'hyperplans.

L'équation d'un hyperplan peut-être obtenue à l'aide de la proposition suivante.

Proposition E.6. Soit X un espace affine rapporté au repère cartésien $(\omega \mid \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, et prenons $n+1$ points $P_0, \ldots, P_n$ de X. Notons $(p_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de P_j. Alors $P_0, \ldots, P_n$ appartiennent à un même hyperplan si et seulement si le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} p_{10} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0} & \cdots & p_{nn} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. • Si les $n+1$ points $P_0, \ldots, P_n$ appartiennent à un même hyperplan, d'après la proposition précédente, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ soient non tous nuls et $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ij} = \alpha_0$ pour tout $j = 0, \ldots, n$. En notant $\vec{v}_i = {}^t(p_{i0}, \ldots, p_{in}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, pour $i = 1, \ldots, n$, les $n+1$ égalités précédentes s'écrivent $\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Alors les éléments $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sont liés, donc leur déterminant est nul. D'où le résultat.

- Si le déterminant de l'énoncé est nul, avec les notations précédentes, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i - \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

  On a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, sinon $\alpha_0 = 0$ et alors tous les α_i sont nuls. De plus l'égalité vectorielle $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ conduit aux $(n+1)$ égalités $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ij} = \alpha_0$ pour $j = 0, \dots, n$. D'après la proposition précédente, les points $P_0, \dots, P_n$ appartiennent à même un hyperplan. □

E.2 Equations cartésiennes des droites d'un plan affine

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine muni d'un repère cartésien $(O \mid \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une droite d'un plan affine est un hyperplan, on peut donc utiliser les résultats de la partie précédente.

Propriétés E.7. (i) Soit Δ une droite de $\mathcal{P}$. Alors Δ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Sa direction $\vec{\Delta}$ a alors pour équation $ax + by = 0$. On appelle *vecteur directeur* de Δ un élément non nul de $\vec{\Delta}$. Par exemple, le vecteur de coordonnées $(-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

(ii) Soient $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$ trois points de $\mathcal{P}$. Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

.

(iii) Une équation de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

En effet, M est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

(iv) Une équation de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et par $M_1(x_1, y_1)$ est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

(il suffit d'appliquer (iii) avec $\vec{u} = \overrightarrow{M_0M_1}$), ou par

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x \\ y_0 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(en écrivant que M_0, M_1 et M_2 sont alignés).

(v) Parallélisme : soit Δ_1 une droite de $\mathcal{P}$ d'équation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, et soit Δ_2 une droite de $\mathcal{P}$ d'équation $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Ces deux droites sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. (Il suffit d'ecrire que leurs vecteurs directeurs sont liés).

(vi) Ecriture paramétrique d'une droite D de $\mathcal{P}$: $D = p_0 + \mathbb{R}\vec{u} = \{p_0 + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, où $p_0 \in D$ et $\vec{u} \in \vec{D} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$.

Exemple E.8. Soient $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Alors le point $M(x, y) \in (M_1M_2)$ si et seulement si on a $\begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, soit $2x + y = 4$. Donc l'équation de la droite (M_1M_2) est $2x + y - 4 = 0$.

E.3 Equations cartésiennes des plans et des droites en dimension 3

Soit X un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O \mid \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Un plan affine de X est un hyperplan, on peut donc utiliser les résultats de la partie E.1.

Plans affines

Propriétés E.9. (i) Soit $\mathcal{P}$ un plan de X. Alors $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. Sa direction $\vec{\mathcal{P}}$ a pour équation $ax+by+cz=0$.

(ii) Soient $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ et $P_3(x_3,y_3,z_3)$ quatre points de X. Ils sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(iii) Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de X et soient $\vec{v}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$ et $\vec{v}'=\alpha'\vec{\imath}+\beta'\vec{\jmath}+\gamma'\vec{k}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors le plan $\mathcal{P}$ passant par M_0 et parallèle au plan vectoriel $\mathbb{R}\vec{v}+\mathbb{R}\vec{v}'$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$

(iv) Représentation paramétrique : $\mathcal{P}=p_0+\mathbb{R}\vec{u}+\mathbb{R}\vec{v}$, où $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une famille libre de $\vec{\mathcal{P}}$.

(v) Parallélisme : Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ deux plans d'équations $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Alors :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont liés. En effet, les plans vectoriels d'équations $a_1x+b_1y+c_1z=0$ et $a_2x+b_2y+c_2z=0$ sont les mêmes si et seulement si les équations sont liées, *i.e.* si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont liés.
- Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, alors on a vu que $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\Delta$ est une droite.

Exemple E.10. Les trois points $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$ et $M_3(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ déterminent un plan. Le point $M(x,y,z)$ appartient à ce plan si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore, en soustrayant à la quatrième ligne la somme des trois autres,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1-x-y-z \end{vmatrix} = 1-x-y-z=0$$

Donc l'équation du plan $(M_1M_2M_3)$ est $x+y+z-1=0$.

Droites affines

Propriétés E.11. (i) Représentation paramétrique d'une droite D de X : $D=p_0+\mathbb{R}\vec{u}$, où $p_0\in D$ et $\vec{u}\in\vec{D}\setminus\{\vec{0}\}$.

(ii) Intersection de deux plans : les droites de X sont les ensembles de points de la forme $\{M(x,y,z)\in X \mid a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2\}$ avec (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) linéairement indépendants, *i.e.* ce sont les intersections de deux plans non parallèles.

Démonstration. • Soit Δ une droite de X. Soient $M_0\in\Delta$ et $\vec{u}\in\vec{\Delta}\setminus\{\vec{0}\}$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ tels que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}\}$ soit libre. On pose $\mathcal{P}_1=M_0+\mathbb{R}\vec{u}_1+\mathbb{R}\vec{u}$, $\mathcal{P}_2=M_0+\mathbb{R}\vec{u}_2+\mathbb{R}\vec{u}$. Ce sont deux plans contenant Δ, et ils admettent chacun une équation $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$, $i=1,2$. Comme $\vec{u}_1\in\vec{\mathcal{P}}_1$ et $\vec{u}_1\notin\vec{\mathcal{P}}_2$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles (ce qui équivaut à dire que (a_1,b_1,c_1) et $(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants). Comme de plus X est de dimension 3, $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$ est une droite, nécessairement égale à Δ.

- On suppose maintenant que l'on a $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^4$ et $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) soient linéairement indépendants. On considère les ensembles $\mathcal{P}_1 = \{M(x, y, z) \in X \mid a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{M(x, y, z) \in X \mid a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0\}$ et $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. On veut montrer que Δ est une droite. On sait déjà que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des plans. Les vecteurs (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) étant linéairement indépendants, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. Comme X est de dimension 3, on sait que l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite. □

E.4 Changement de repère cartésien

Soit E un espace affine de dimension n, $\mathcal{R} = (\omega \mid \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E. Un second repère cartésien $\mathcal{R}' = (\omega' \mid \vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ étant donné, nous allons déterminer les relations entre les coordonnées d'un même point dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Soit $x \in E$. Nous notons :

- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{R}$.
- X' la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{R}'$.
- b la matrice colonne des coordonnées de ω' dans $\mathcal{R}$.
- P la matrice de passage de la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ à la base $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\}$ (matrice des coordonnées des vecteurs $\vec{\varepsilon}_i$ dans la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$).

La relation $\overrightarrow{\omega' x} = \overrightarrow{\omega x} - \overrightarrow{\omega\omega'}$ montre que la matrice colonne X_1 des coordonnées de $\overrightarrow{\omega' x}$ dans la base $\{\vec{e}_i\}$ est $X_1 = X - b$. D'autre part, la formule de changement de base dans un espace vectoriel réel permet d'écrire $X_1 = PX'$. D'où la relation :

$$X = b + PX'.$$

II Barycentre, calcul barycentrique

A Barycentre, propriétés

La notion de barycentre est une notion essentielle en géométrie affine, c'est ce que nous allons voir dans ce chapitre.

Dans tout ce chapitre, X désignera un espace affine.

Définition A.1. *On appelle* point pondéré *un couple (A, λ) formé d'un point A de X et d'un réel λ. Le réel λ est appelé le* poids *du point pondéré.*

Proposition A.2. Soit $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ une famille de n points pondérés de X telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Alors il existe un unique point G de X tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ce point est $G = O + \dfrac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$, pour un point O quelconque de X.

Démonstration. Soit $O \in X$. L'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ équivaut à $(\sum_{i=1}^n \lambda_i)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$, d'où l'existence de G, indépendant du choix de O.

Si G' est un autre point vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{G'A_i} = \vec{0}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{G'A_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{G'A_i}$ d'où $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{G'G'} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. □

Définition A.3. *Le point G vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ est appelé* barycentre *de la famille $\{(A_i, \lambda_i); i \in \{1, \dots, n\}\}$.*

Lorsque tous les coefficients λ_i sont égaux entre eux, on dit que G est le centre de gravité *ou encore l'*isobarycentre *de la famille $\{(A_i, \lambda); i = 1, \dots, n\}$.*

Propriété A.4. Le barycentre d'une famille de points pondérés est inchangé si tous les poids sont multipliés par un coefficient non nul.

Démonstration. C'est clair puisque si $\lambda \neq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda\lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ équivaut à $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. □

Remarque A.5. On pourra donc toujours supposer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ (si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$), quitte à diviser tous les poids par leur somme.

B Théorème d'associativité

Théorème B.1. (Théorème d'associativité)

(i) Soit $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \dots, n\}$ une famille de points pondérés de X telle que $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in K}$ une partition de $\{1, \dots, n\}$ telle que $S_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i \neq 0$, pour tout $\alpha \in K$. Notons G le barycentre de la famille $\{(A_i, \lambda_i); i \in \{1, \dots, n\}\}$ et G_α celui de $\{(A_i, \lambda_i); i \in I_\alpha\}$.
Alors G est le barycentre de la famille $\{(G_\alpha, S_\alpha); \alpha \in K\}$.

(ii) Réciproquement, soit G le barycentre d'une famille de points pondérés $\{(G_\alpha, S_\alpha); \alpha \in K\}$. Supposons que pour tout $\alpha \in K$, G_α soit le barycentre d'une famille de points pondérés $\{(A_i, \lambda_i); i \in I_\alpha\}$ avec $\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i = S_\alpha$ et les ensembles I_α disjoints.
Alors G est le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i); i \in \cup_{\alpha \in K} I_\alpha\}$.

Démonstration. On a l'égalité :

$$\sum_{\alpha\in K} S_\alpha \overrightarrow{GG_\alpha} = \sum_{\alpha\in K} S_\alpha \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i\in I_\alpha} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i\in\cup_{\alpha\in K}} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}.$$

On en déduit que le premier terme est le vecteur nul si et seulement si le dernier est le vecteur nul, c'est-à-dire que G est le barycentre de $\{(G_\alpha, S_\alpha); \alpha \in K\}$ si et seulement si G est le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i); i \in \cup_{\alpha\in K} I_\alpha\}$. □

Exemple B.2. Soit G le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$. Soit I le barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$. Alors $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, donc I est le milieu de (B,C). Le théorème d'associativité dit que G est le barycentre de $(A,2)$ et $(I,2)$, c'est-à-dire le milieu de (A,I).

C Barycentre et sous-espaces affines

Proposition C.1. (Caractérisation des sous-espaces affines). Une partie non vide A de l'espace affine X est un sous-espace affine si et seulement si le barycentre de toute famille finie de points pondérés de A est dans A.

Démonstration.
- On suppose que A est un sous-espace affine. Soit $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \dots, n\}$ une famille finie de points pondérés de A et notons $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Soit G le barycentre de la famille $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \dots, n\}$. Montrons que $G \in A$.

  Soit $O \in A$. Puisque O et les A_i, $i = 1, \dots, n$, sont des points de A, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in \vec{A}$, et donc $G = O + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \in A$.
- On suppose que le barycentre de toute famille finie de points pondérés de A est dans A. Soient $a \in A$ et $\vec{E} = \{\overrightarrow{ax} \mid x \in A\}$. Montrons que $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$.

  Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe $x, y \in A$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{ax}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ay}$. On a alors $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha\overrightarrow{ax} + \beta\overrightarrow{ay} = \overrightarrow{az}$, où $z \in X$. Mais $\overrightarrow{az} = \alpha\overrightarrow{ax} + \beta\overrightarrow{ay} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{aa}$. Donc z est le barycentre de (x,α), (y,β), $(a,(1-\alpha-\beta))$ (notons que la somme des poids est non nulle). Donc $z \in A$ et $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \overrightarrow{az} \in \vec{E}$. Donc $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ et A est un sous-espace affine de X. □

Corollaire C.2. Le sous-espace affine engendré par une partie non vide A de X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de A.

Démonstration. Notons B l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de A.

- D'après la proposition C.1, tous les barycentres de points pondérés de aff(A), et donc en particulier de A, sont dans aff(A). Donc $B \subseteq \text{aff}(A)$.
- On a $A \subseteq B$. Montrons que B est un sous-espace affine de X. On aura alors $A \subseteq B$ avec B sous-espace affine de X, et donc aff$(A) \subseteq B$, d'où l'égalité.

  Soit donc $a \in A \subseteq B$, et montrons que $\vec{E} := \{\overrightarrow{ax} \mid x \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$.

  Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\vec{E}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x \in B$ et $y \in B$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{ax}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ay}$. De plus, il existe $z \in X$ tel que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{az}$. Il faut montrer que z est dans B. Or

  $$\overrightarrow{az} = \alpha\overrightarrow{ax} + \beta\overrightarrow{ay} = \alpha\overrightarrow{ax} + \beta\overrightarrow{ay} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{aa},$$

  et la somme des coefficients dans ce dernier terme est 1, donc z est le barycentre de (x,α), (y,β) et $(a, 1-\alpha-\beta)$. Comme x et y sont des barycentres de points de A et que $a \in A$, d'après le théorème d'associativité, z est le barycentre d'une famille de points pondérés de A, donc z est dans B, et donc $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \vec{E}$. □

D Calcul barycentrique, coordonnées barycentriques

Dans la suite, grâce à la remarque A.5, on considérera une famille de points pondérés $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$ avec deux cas seulement : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ ou $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Remarque D.1. Si $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$ est une famille de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ ne dépend pas de M. En effet, pour tout autre point M', $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{M'A_i} = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

Donc à une famille $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$, on fera correspondre :

- un vecteur, égal à $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ pour un point quelconque M, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$;
- un point, le barycentre de la famille (A_i, λ_i), si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.

Définition D.2. *Soit X un espace affine de dimension n. Un* repère barycentrique *de X est la donnée de $(n+1)$ points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n}$ forment une base de $\vec{X}$.*

On dit que $p+1$ points $b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont affinement indépendants *si les vecteurs $\overrightarrow{b_0b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_0b_p}$ sont linéairement indépendants.*

Exemple D.3. Un repère barcyentrique d'une droite est la donnée de deux points distincts. Un repère barycentrique d'un plan est la donnée de trois points non alignés.

Remarque D.4. Si $(\omega \mid \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est un repère cartésien de X, alors $\{\omega, \omega + \vec{e_1}, \ldots, \omega + \vec{e_n}\}$ est un repère barycentrique de X.

Remarque D.5. Si $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ est un repère barycentrique de X alors $(a_0 \mid \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n})$ est un repère cartésien de X.

Soit $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un repère barycentrique de X et $x \in X$. On note $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ les coordonnées de x dans le repère cartésien $(a_0 \mid \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n})$. Alors $\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{a_0a_i}$. Donc $\overrightarrow{xa_0} - \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{xa_0} + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{xa_i} = \vec{0}$, et $(1 - \sum_{i=1}^n x_i)\overrightarrow{xa_0} + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{xa_i} = \vec{0}$. Donc x est le barycentre de $\{(a_0, 1 - \sum_{i=1}^n x_i); (a_1, x_1), \ldots, (a_n, x_n)\}$.

L'écriture de x comme barycentre de $a_0, \ldots, a_n$ est unique. En effet, si $\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i} = \sum_{i=0}^n \mu_i \overrightarrow{a_0a_i}$ (avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{i=0}^n \mu_i = 1$), on a $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)\overrightarrow{a_0a_i} = \vec{0}$. Or $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$ est libre, donc $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et donc $\lambda_0 = \mu_0$. D'où :

Définition-Proposition D.6. Soit X un espace affine et soit $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un repère barycentrique de X. Soit $x \in X$. Il existe un unique $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

(i) $\sum_{i=0}^n x_i = 1$.

(ii) $\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{a_0a_i}$.

$x_0, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées barycentriques* de x dans le repère barycentrique $\{a_0, \ldots, a_n\}$.

Proposition D.7. Soit X un espace affine de dimension n et soit $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un repère barycentrique de X. Alors :

(i) Etant donnés $(n+1)$ nombres réels $\beta_0, \ldots, \beta_n$ non tous égaux, l'ensemble des points de X dont les coordonnées barycentriques $(x_0, \ldots, x_n)$ vérifient la relation $\sum_{i=0}^n \beta_i x_i = 0$ est un hyperplan affine.

(ii) Etant donné un hyperplan affine Y de X, il existe $(n+1)$ nombres réels $\beta_0, \ldots, \beta_n$ non tous égaux tels que Y soit l'ensemble des points $x \in X$ dont les coordonnées barycentriques $(x_0, \ldots, x_n)$ vérifient $\sum_{i=0}^n \beta_i x_i = 0$.

Démonstration. Puisque $\{a_0, \ldots, a_n\}$ est un repère barycentrique de X, $(a_0 \mid \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n})$ est un repère cartésien de X. Le point x a pour coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ dans le repère $\{a_0, \ldots, a_n\}$ si et seulement si x a pour coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans le repère cartésien $(a_0 \mid \overrightarrow{a_0a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0a_n})$ (rappelons que $\sum_{i=0}^n x_i = 1$).

(i) On a
$$\sum_{i=0}^{n} x_i\beta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i + x_0\beta_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\beta_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i(\beta_i - \beta_0) + \beta_0.$$
Donc $\sum_{i=0}^{n} x_i\beta_i = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} x_i(\beta_i - \beta_0) = -\beta_0$, et ceci est l'équation cartésienne d'un hyperplan affine (notons que les $\beta_i - \beta_0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ ne sont pas tous nuls ici).

(ii) Réciproquement, soit Y un hyperplan affine de X. On sait qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls et α_0 tels que $Y = \left\{x \in X \mid \overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{a_0a_i} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_0\right\}$. Soit $x \in Y$: puisque $\overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{a_0a_i}$, les coordonnées barycentriques de x sont $(x_0, \dots, x_n)$ avec $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$, et donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_0$ équivaut à $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_0 \sum_{i=0}^{n} x_i$, soit encore $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_0)x_i - \alpha_0 x_0 = 0$. En posant $\beta_0 = -\alpha_0$, $\beta_i = \alpha_i - \alpha_0$, $i = 1, \dots, n$, on a alors $Y = \left\{x \in X \mid \overrightarrow{a_0x} = \sum_{i=0}^{n} x_i\overrightarrow{a_0a_i} \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i = 0\right\}$, en remarquant au passage que les β_i ne sont pas tous égaux (sinon on a $\alpha_i - \alpha_0 = -\alpha_0$ et donc $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$). □

Définition D.8. *La relation* $\sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i = 0$ *est l'*équation barycentrique *de l'hyperplan affine.*

Proposition D.9. Soit X un espace affine de dimension n et soit $\{a_0, \dots, a_n\}$ un repère barycentrique de X. Soient p_j, $j = 0, \dots, n$, une famille de $n+1$ points de X. Notons $(q_{ij})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées barycentriques de p_j (on note les lignes et les colonnes à partir de 0). Alors les p_j sont dans un même hyperplan si et seulement si
$$\begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Ce résultat provient du résultat analogue avec les coordonnées cartésiennes. En effet, dans le repère cartésien $(a_0 \mid \overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$, le point p_j a pour coordonnées cartésiennes $(p_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $p_{ij} = q_{ij}$. Donc les p_j sont dans un même hyperplan si et seulement si
$$\begin{vmatrix} q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $\sum_{i=0}^{n} q_{ij} = 1$, ceci équivaut à la condition de l'énoncé. □

III Applications affines et exemples d'applications affines

Dans ce chapitre, nous allons étudier les applications affines (qui préservent la structure d'espace affine), et voir quelques grandes familles d'applications affines.

A Applications affines

A.1 Définitions et propriétés

Définition A.1. *Soient X et Y deux espaces affines et soit f une application de X dans Y. On dit que f est* affine *s'il existe $a \in X$ tel que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \vec{X} & \to & \vec{Y} \\ \vec{u} & \mapsto & \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{u})} \end{array}$$

soit linéaire.

Propriété A.2. Soit f une application affine de l'espace affine X dans l'espace affine Y. Alors pour tout point $b \in X$, l'application $\vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(b)f(b+\vec{u})}$ est linéaire et indépendante du point b.

Démonstration. Soit $b \in X$. D'après la définition d'une application affine, il existe $a \in X$ tel que l'application

$$\begin{array}{rcl} \vec{f}_a : \vec{X} & \to & \vec{Y} \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{f}_a(\vec{u}) = \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{u})} \end{array}$$

soit linéaire. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{f(b)f(b+\vec{u})} & = & \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b+\vec{u})} \\ & = & -\overrightarrow{f(a)f(b)} + \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{ab}+\vec{u})} \\ & = & -\overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{ab})} + \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{ab}+\vec{u})} \\ & = & -\vec{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}_a(\overrightarrow{ab}+\vec{u}) \\ & = & -\vec{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}_a(\vec{u}) \ \text{(puisque } \vec{f}_a \text{ est linéaire)} \\ & = & \vec{f}_a(\vec{u}), \end{array}$$

d'où le résultat. □

Définition A.3. *Soit f une application affine de l'espace affine X dans l'espace affine Y. Soit $a \in X$. Alors l'application linéaire qui à $\vec{u} \in \vec{X}$ associe $\overrightarrow{f(a)f(a+\vec{u})}$ est appelée* application linéaire associée à f *(elle ne dépend pas de a d'après la propriété A.2) et elle est notée $\vec{f}$. On l'appelle également* partie linéaire *de f.*

Remarque A.4. Pour tout $a \in X$, pour tout $\vec{u} \in \vec{X}$, on a $f(a+\vec{u}) = f(a) + \vec{f}(\vec{u})$.

Remarque A.5. Pour tous $a, b \in X$, $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \vec{f}(\overrightarrow{ab})$.

Propriétés A.6. (i) Soient X, Y, Z trois espaces affines, et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications affines. Alors $g \circ f$ est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

(ii) Une application affine est injective (respectivement surjective) si et seulement si son application linéaire associée est injective (respectivement surjective).

(iii) Si une application affine f est bijective, l'application réciproque est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.

(iv) L'image d'un sous-espace A de l'espace affine X par une application affine f est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f(A)} = \vec{f}(\vec{A})$.

(v) L'image réciproque d'un sous-espace affine B par une application affine f est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{B})$.

(vi) Deux applications affines coïncident si et seulement si elles ont même application linéaire associée et coïncident en un point.

(vii) Le rapport de deux vecteurs colinéaires est conservé par une application affine : c'est un invariant affine.

Démonstration. (TD) □

Remarque A.7. Si X est un espace affine, on note $GA(X)$ l'ensemble des bijections affines bijectives de X dans lui-même. Si $\mathcal{F}(X,X)$ est l'ensemble de toutes les applications bijectives de X dans X, les propriétés (i), (iii) et le fait que id_X soit affine montrent que $GA(X)$ est un sous-groupe de $\mathcal{F}(X,X)$ pour la composition des applications affines. On l'appelle le *groupe des transformations affines* de X.

A.2 Ecriture matricielle des applications affines

Soient E, F deux espaces affines de dimensions respectives n et p, munis de repères cartésiens $\mathcal{R} = (\omega \mid \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{R}' = \left(\sigma \mid \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p\right)$. Soit $f : E \to F$ une application affine. Notons :

- M la matrice de $\vec{f}$ dans les bases $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ et $\left\{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p\right\}$.
- X la matrice colonne des coordonnées d'un point $x \in E$ dans le repère $\mathcal{R}$.
- Y la matrice colonne des coordonnées du point $f(x) \in F$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
- T la matrice colonne des coordonnées de $f(\omega)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

On a alors $f(x) = f(\omega) + \overrightarrow{f(\omega)f(x)} = f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega x})$. D'où, en prenant les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$, l'écriture matricielle :

$$Y = T + MX.$$

A.3 Barycentre et applications affines

Proposition A.8. (Caractérisation des applications affines). Soient X, Y deux espaces affines et f une application de X dans Y. Alors f est affine si et seulement si pour tout couple (x,λ), (y,μ) de points pondérés de X, l'image du barycentre de (x,λ), (y,μ) est le barycentre de $(f(x),\lambda)$ et $(f(y),\mu)$.

Démonstration. • On suppose f affine. Soient (x,λ), (y,μ) deux points pondérés de X avec $\lambda + \mu = 1$. Soit g le barycentre de (x,λ) et (y,μ). Si $\omega \in X$, alors $\overrightarrow{\omega g} = \lambda\overrightarrow{\omega x} + \mu\overrightarrow{\omega y}$, donc $\overrightarrow{f(\omega)f(g)} = \vec{f}(\overrightarrow{\omega g}) = \lambda\vec{f}(\overrightarrow{\omega x}) + \mu\vec{f}(\overrightarrow{\omega y}) = \lambda\overrightarrow{f(\omega)f(x)} + \mu\overrightarrow{f(\omega)f(y)}$. Donc $f(g)$ est le barycentre de $(f(x),\lambda)$ et $(f(y),\mu)$.

- On suppose maintenant que l'image par f du barycentre de tout couple de points pondérés est le barycentre des images. Soit $x \in X$, on étudie l'application $\vec{u} \mapsto \overrightarrow{f(x)f(x+\vec{u})}$ de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$. On la note f_x.
  - ◇ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $f_x(\alpha\vec{u}) = \overrightarrow{f(x)f(x+\alpha\vec{u})}$. Soit $y \in X$ tel que $\overrightarrow{xy} = \vec{u}$, et soit g le barycentre de $(x, 1-\alpha)$ et (y,α) : $g = x + (1-\alpha)\overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xy} = x + \alpha\vec{u}$. D'où

$$\begin{aligned} f_x(\alpha\vec{u}) &= \overrightarrow{f(x)f(g)} \\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{f(x)f(x)} + \alpha\overrightarrow{f(x)f(y)} \\ &= \alpha\overrightarrow{f(x)f(x+\vec{u})} \\ &= \alpha f_x(\vec{u}) \end{aligned}$$

◇ Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}$. Soit $y \in X$ tel que $\overrightarrow{xy} = \vec{u}$ et soit $z \in X$ tel que $\overrightarrow{xz} = \vec{v}$. Soit g le milieu de y et z (i.e. l'isobarycentre). Alors par hypothèse, $f(g)$ est le milieu de $f(y)$ et $f(z)$. Donc on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(x)f(g)} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{f(x)f(y)} + \overrightarrow{f(x)f(z)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{f(x)f(x+\vec{u})} + \overrightarrow{f(x)f(x+\vec{v})}\right)\\ &= \frac{1}{2}f_x(\vec{u}) + \frac{1}{2}f_x(\vec{v})\end{aligned}$$

Mais on a $\overrightarrow{xg} = \frac{1}{2}\overrightarrow{xy} + \frac{1}{2}\overrightarrow{xz} = \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$ donc $\overrightarrow{f(x)f(g)} = f_x\left(\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})\right) = \frac{1}{2}f_x(\vec{u}+\vec{v})$ d'après le calcul précédent. D'où $f_x(\vec{u}+\vec{v}) = f_x(\vec{u}) + f_x(\vec{v})$.
Ainsi f_x est linéaire et f est affine. □

Remarque A.9. On voit facilement (par récurrence) que si $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$ est une famille de points pondérés de X et si $f : X \to Y$ une application affine, alors l'image du barycentre de $\{(A_i, \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$ par f est le barycentre de $\{(f(A_i), \lambda_i); i = 1, \ldots, n\}$. On dit que les applications affines *conservent le barycentre*.

B Homothéties, translations et dilatations

Définition B.1. *Une* dilatation *est une application affine dont la partie linéaire est* $\alpha\,\mathrm{id}_{\vec{X}}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Le réel* α *est appelé* rapport *de la dilatation.*

On remarque en particulier qu'une dilatation est toujours bijective.

B.1 Les translations

Définition B.2. *Soit X un espace affine et soit $\vec{v} \in \vec{X}$. La* translation de vecteur $\vec{v}$ *est l'application de X dans X qui à $x \in X$ associe $t_{\vec{v}}(x) = x + \vec{v}$.*

Propriété B.3. Une translation est une application affine, dont la partie linéaire est l'identité. C'est donc une dilatation de rapport 1.

Démonstration. Soient $a \in X$ et $\vec{v} \in \vec{X}$. L'application

$$\vec{u} \mapsto \overrightarrow{t_{\vec{v}}(a)t_{\vec{v}}(a+\vec{u})} = \overrightarrow{(a+\vec{v})((a+\vec{u})+\vec{v})} = \vec{u}$$

est l'identité de $\vec{X}$, qui est bien linéaire. □

Propriété B.4. Soit X un espace affine. Soit f une application affine de X dans X telle que $\vec{f} = \mathrm{id}_{\vec{X}}$. Alors f est une translation.

Démonstration. Soit $a \in X$. Posons $\vec{v} = \overrightarrow{af(a)}$. On a alors pour $x \in X$:

$$f(x) = f(a + \overrightarrow{ax}) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax}) = f(a) + \overrightarrow{ax} = a + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{ax} = x + \overrightarrow{af(a)} = x + \vec{v}$$

avec $\vec{v} = \overrightarrow{af(a)}$. □

Exemple B.5. On considère $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure naturelle d'espace affine. Alors l'application

$$\begin{aligned} t_{(1,-1)} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto (x+1, y-1)\end{aligned}$$

est la translation de vecteur $(1, -1)$.

Propriétés B.6. (i) La composée de translations est une translation : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

(ii) La composition de translations est commutative : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

(iii) Une translation est inversible et son inverse est une translation, puisque sa partie linéaire est $\mathrm{id}_{\vec{X}}$. On peut remarquer que $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

B.2 Les homothéties

Définition B.7. *Soient X un espace affine, $\omega \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'*homothétie *de* centre ω, *de* rapport α *est l'application de X dans X qui à $x \in X$ associe $h_{\omega,\alpha}(x) = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega x}$.*

Propriété B.8. Une homothétie (de centre ω et) de rapport α est une application affine, dont l'application linéaire associée est $\alpha \operatorname{id}_{\vec{X}}$. C'est donc une dilatation de rapport α.

Démonstration. Soit $\vec{u} \in \vec{X}$. Alors

$$\overrightarrow{h(\omega)h(\omega+\vec{u})} = \overrightarrow{\omega h(\omega+\vec{u})} = \alpha\overrightarrow{\omega(\omega+\vec{u})} = \alpha\vec{u}.$$

□

Propriété B.9. Soit f une application affine de X dans X, telle que $\vec{f} = \alpha \operatorname{id}_{\vec{X}}$, avec $\alpha \neq 1$. Alors f est une homothétie de centre $\omega = a + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)}$ et de rapport α, où a est un point quelconque de X.

Démonstration. Soit $a \in X$, et h l'homothétie de rapport α, de centre $\omega := a + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)}$. Montrons que $f = h$. On sait que $\vec{h} = \alpha \operatorname{id}_{\vec{X}} = \vec{f}$, donc il suffit de montrer que f et h coïncident en un point. Or $f(\omega) = f(a + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)}) = f(a) + \vec{f}\left(\frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)}\right) = f(a) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)} = a + \overrightarrow{af(a)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)} = a + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{af(a)} = \omega = h(\omega)$. □

Remarque B.10. On déduit des propriétés **B.4** et **B.9** que toute dilatation est soit une translation, soit une homothétie.

Propriété B.11. Soit X un espace affine. Soient h_{ω_1,α_1}, h_{ω_2,α_2} deux homothéties de centres respectifs ω_1 et ω_2 et de rapports respectifs α_1 et α_2. On a :

(i) si $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, alors $h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}$ est une homothétie de rapport $\alpha_1\alpha_2$ et de centre $\omega = \omega_1 + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$,

(ii) si $\alpha_1\alpha_2 = 1$, alors $h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}$ est une translation de vecteur $(\alpha_1 - 1)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$.

Démonstration. On a $\overrightarrow{h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}} = \vec{h}_{\omega_1,\alpha_1} \circ \vec{h}_{\omega_2,\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 \operatorname{id}_{\vec{X}}$.

(i) D'après la propriété B.11, si $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, alors $h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}$ est une homothétie. Pour en déterminer le centre, il suffit de trouver son point fixe : $h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}(\omega) = \omega$, *i.e.*

$$\begin{aligned}
\omega &= h_1(\omega_2 + \alpha_2\overrightarrow{\omega_2\omega}) \\
&= h_1(\omega_2) + \alpha_2\alpha_1\overrightarrow{\omega_2\omega} \text{ car } \vec{h_1} = \alpha_1 \operatorname{id}_{\vec{X}} \\
&= \omega_1 + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_2\omega} \\
&= \omega_1 + \alpha_1(1-\alpha_2)\overrightarrow{\omega_1\omega_2} + \alpha_1\alpha_2\overrightarrow{\omega_1\omega}
\end{aligned}$$

donc $(1 - \alpha\alpha_2)\overrightarrow{\omega_1\omega} = \alpha_1(1-\alpha_2)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ et ainsi $\overrightarrow{\omega_1\omega} = \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$, d'où le résultat.

(ii) Si $\alpha_1\alpha_2 = 1$, alors $h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}$ est une translation de vecteur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\omega_2(h_{\omega_1,\alpha_1} \circ h_{\omega_2,\alpha_2}(\omega_2))} &= \overrightarrow{\omega_2 h_{\omega_1,\alpha_1}(\omega_2)} \\
&= \overrightarrow{\omega_2(\omega_1 + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2})} \\
&= \overrightarrow{\omega_2(\omega_2 + \overrightarrow{\omega_2\omega_1} + \alpha_1\overrightarrow{\omega_1\omega_2})} \\
&= (\alpha_1 - 1)\overrightarrow{\omega_1\omega_2} \quad \square
\end{aligned}$$

Remarque B.12. (i) Dans le cas $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, le centre de la composée est aligné avec les centres ω_1 et ω_2.

(ii) Dans le cas $\alpha_1\alpha_2 = 1$, le vecteur de la translation est colinéaire à $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$.

Propriété B.13. Soient $\vec{v} \in \vec{X}$, $\omega \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ avec $\alpha \neq 1$. Alors $h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}$ sont des homothéties, de rapport α, de centres respectifs $\omega_1 = \omega + \frac{\alpha}{1-\alpha}\vec{v}$ et $\omega_2 = \omega + \frac{1}{1-\alpha}\vec{v}$. Par ailleurs, $h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}} = t_{\alpha\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}$.

Démonstration. Puisque $\overrightarrow{h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}}} = \vec{h}_{\omega,\alpha} \circ \vec{t}_{\vec{v}} = \alpha \operatorname{id}_{\vec{X}} = \vec{t}_{\vec{v}} \circ \vec{h}_{\omega,\alpha} = \overrightarrow{t_{\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}}$, ces deux applications sont des homothéties de rapport α ($\alpha \neq 1$). Précisons leurs centres respectifs.

On a $h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}}(x) = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega(x+\vec{v})} = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega x} + \alpha\vec{v}$ et $t_{\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}(y) = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega y} + \vec{v}$.
Si ω_1 est le point fixe de $h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}}$, alors $\overrightarrow{\omega\omega_1} = \alpha\overrightarrow{\omega\omega_1} + \alpha\vec{v}$ et $\overrightarrow{\omega\omega_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\vec{v}$.
Si ω_2 est le point fixe de $t_{\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}$, alors $\overrightarrow{\omega\omega_2} = \alpha\overrightarrow{\omega\omega_2} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{\omega\omega_2} = \frac{1}{1-\alpha}\vec{v}$.
Enfin, on a $t_{\alpha\vec{v}} \circ h_{\omega,\alpha}(x) = \omega + \alpha\overrightarrow{\omega x} + \alpha\vec{v} = h_{\omega,\alpha} \circ t_{\vec{v}}(x)$ pour tout $x \in X$. □

Corollaire B.14. L'ensemble constitué des translations et des homothéties d'un espace affine X, muni de la composition des applications, est un sous-groupe du groupe affine $GA(X)$. Il est appelé *groupe des homothéties-translations* ou *groupe des dilatations* de X, et noté $\mathcal{D}(X)$.
De plus, les ensembles $\mathcal{H}_\omega(X)$ constitué des homothéties de centre ω fixé et $\mathcal{T}(X)$ constitué des translations de X sont des sous-groupes commutatifs de $\mathcal{D}(X)$.

Démonstration. Elle découle des propriétés (B.6) et (B.11). □

Propriété B.15. Une dilatation transforme une droite affine en une droite affine qui lui est parallèle.

En effet, une dilatation f est une application affine bijective, donc l'image d'une droite Δ est une droite Δ'. De plus, la direction de Δ' est $\vec{\Delta}' = \vec{f}(\vec{\Delta}) = (\alpha \operatorname{id}_{\vec{X}})(\vec{\Delta}) = \vec{\Delta}$, donc Δ' est parallèle à Δ.

Propriété B.16. Soit X un espace affine.

(i) Une homothétie h est déterminée par la donnée de deux couples distincts de points homologues (c'est-à-dire (x,y) et (x',y') avec $x' = h(x)$ et $y' = h(y)$).

(ii) Soient x, y, x', y' quatre points de X avec $x \neq y$ et $x \neq x'$. Pour qu'il existe une homothétie h de X telle que $h(x) = x'$ et $h(y) = y'$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ et 1, tel que $\overrightarrow{x'y'} = \alpha\overrightarrow{xy}$.

Démonstration. (i) Soit h une homothétie (de rapport α) telle que $h(x) = x'$, $h(y) = y'$. Soit h_1 une seconde homothétie (de rapport α_1), telle que $h_1(x) = x'$, $h_1(y) = y'$. On a $\alpha\overrightarrow{xy} = \vec{h}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{h(x)h(y)} = \overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{h_1(x)h_1(y)} = \vec{h}_1(\overrightarrow{xy}) = \alpha_1\overrightarrow{xy}$. Donc $\alpha = \alpha_1$ et $\vec{h} = \vec{h}_1$. Comme $h(x) = h_1(x)$, on a $h = h_1$.

(ii) D'après (i), si une telle homothétie existe, elle est unique et de rapport α tel que $\overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{h(x)h(y)} = \alpha\overrightarrow{xy}$. De plus, $\alpha \neq 1$ car sinon $h = \operatorname{id}_X$ et $x' = h(x) = x$. La condition est donc bien nécessaire.

On suppose maintenant l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ et 1, tel que $\overrightarrow{x'y'} = \alpha\overrightarrow{xy}$. Soit h l'homothétie telle que $\vec{h} = \alpha \operatorname{id}_{\vec{X}}$ et $h(x) = x'$. On a alors : $h(y) = h(x + \overrightarrow{xy}) = h(x) + \alpha\overrightarrow{xy} = x' + \overrightarrow{x'y'} = y'$. □

Avant de passer aux projections et aux symétries, il est commode d'introduire la notion de mesure algébrique.

Définition B.17. *Soit D une droite affine et soit $\vec{u} \in \vec{D}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ ($\vec{u}$ est un vecteur directeur de D). Etant donnés deux points x et y de D, la mesure algébrique de $\overrightarrow{xy}$ relativement à $\vec{u}$ est l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda\vec{u}$. On le note $\overline{xy}$ (ou $\overline{xy}^{\vec{u}}$).*

Propriété B.18. Soit X un espace affine et x, y, x', y' quatre points de X avec $x \neq y$, tels que $\overrightarrow{x'y'} = \lambda\overrightarrow{xy}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite vectorielle $\vec{D} = \overrightarrow{(xy)}$. Alors $\frac{\overline{x'y'}}{\overline{xy}}$ est indépendant de $\vec{u}$ et vaut λ.

Démonstration. On a $\overline{x'y'}\vec{u} = \overrightarrow{x'y'}\lambda\overrightarrow{xy} = \lambda\overline{xy}\vec{u}$, donc $\overline{x'y'} = \lambda\overline{xy}$. □

Remarque B.19. Soient x et y deux points distincts de l'espace affine X et h une homothétie de X de rapport α. D'après ce que l'on a vu plus haut, $\overrightarrow{h(x)h(y)}$ est lié à $\overrightarrow{xy}$, et $\alpha = \frac{\overline{h(x)h(y)}}{\overline{xy}}$.

C Projections et symétries

C.1 Les projections

Proposition C.1. Soit X un espace affine, soit E un sous-espace affine de X et soit $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{E}$ dans $\vec{X}$. Soit $x \in X$. Alors $E \cap (x + \vec{F})$ est un singleton.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème D.3 du chapitre I, car $\vec{E} \oplus \overrightarrow{(x+F)} = \vec{E} \oplus \vec{F} = \vec{X}$ donc $E \cap (x + \vec{F})$ est un singleton. □

Définition C.2. *Soient X un espace affine, E un sous-espace de X et $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{E}$ dans $\vec{X}$. La* projection sur E, parallèlement à $\vec{F}$, *est l'application π qui à $x \in X$ associe l'unique élément de $E \cap (x + \vec{F})$.*

Remarque C.3. Si $x \in E$, alors $\pi(x) = x$ car $x \in E \cap (x + \vec{F})$.

Proposition C.4. (i) Les projections sont des applications affines idempotentes dont la partie linéaire est la projection vectorielle correspondante.

(ii) Toute application affine idempotente est une projection. Plus précisément, c'est la projection sur son image parallèlement au noyau de sa partie linéaire.

Démonstration. (i) Nous voulons montrer que $\vec{w} \mapsto \overrightarrow{\pi(x)\pi(x+\vec{w})}$ est linéaire. Calculons donc $\pi(x + \vec{w})$.

Tout d'abord, remarquons que si π est la projection sur E parallèlement à $\vec{F}$ (donc $\vec{E} \oplus \vec{F} = \vec{X}$), pour $\vec{v} \in \vec{F}$ et $x \in X$, on a $x + \vec{F} = (x + \vec{v}) + \vec{F}$, donc $\pi(x) = \pi(x + \vec{v})$.

Par ailleurs, si $\vec{u} \in \vec{E}$ et $x \in X$, alors $\pi(x) + \vec{u} \in E$, et comme $\pi(x) \in x + \vec{F}$, on a $\pi(x) + \vec{u} \in (x + \vec{u} + \vec{F}) \cap E$, donc $\pi(x + \vec{u}) = \pi(x) + \vec{u}$.

Dans le cas général, soit $\vec{w} \in \vec{X}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, avec $\vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{v} \in \vec{F}$. Alors $\pi(x + \vec{w}) = \pi(x) + \vec{u}$, et donc $\overrightarrow{\pi(x)\pi(x+\vec{w})} = \vec{u}$. C'est-à-dire que l'application $\vec{w} \mapsto \overrightarrow{\pi(x)\pi(x+\vec{w})}$ est égale à la projection vectorielle sur $\vec{E}$ parallèlement à $\vec{F}$. Notons p cette application. Alors π est affine et $\vec{\pi} = p$.

Montrons enfin que π est idempotente. Comme $\pi(x) \in E \cap (x + \vec{F})$, $\pi(x) \in (\pi(x) + \vec{F}) \cap E$, donc $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.

(ii) Soit f une application affine de X dans X telle que $f \circ f = f$. On a donc $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$. On pose $E = f(X)$ et $\vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{f})$. On sait que E est un sous-espace affine de X de direction $\vec{E} = \vec{f}(\vec{X})$.

Montrons que $\vec{E} \oplus \vec{F} = \vec{X}$: soit $\vec{u} \in \vec{E} \cap \vec{F}$. Alors $\vec{u} = \vec{f}(\vec{v})$ et $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$. D'où $\vec{u} = \vec{f}(\vec{v}) = \vec{f} \circ \vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}$. Donc $\vec{u} = \vec{0}$. Par ailleurs, si $\vec{w} \in \vec{X}$, $\vec{w} = \vec{f}(\vec{w}) + \vec{w} - \vec{f}(\vec{w})$. Or $\vec{f}(\vec{w} - \vec{f}(\vec{w})) = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{f} \circ \vec{f}(\vec{w}) = \vec{0}$. Donc $\vec{w} \in \vec{E} + \vec{F}$. Ainsi $\vec{X} = \vec{E} \oplus \vec{F}$.

Maintenant, si $x \in X$, alors $f(x) \in E$ (par définition de E) et $f(x) \in x + \vec{F}$ car $\vec{f}(\overrightarrow{xf(x)}) = \overrightarrow{f(x)f \circ f(x)} = \overrightarrow{f(x)f(x)} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{xf(x)} \in \mathrm{Ker}\,\vec{f} = \vec{F}$. Donc $f(x) \in E \cap (x + \vec{F})$ qui est un singleton, et donc $f(x) = E \cap (x + \vec{F})$. f est donc bien la projection sur E parallèlement à $\vec{F}$.

□

Théorème C.5. Application : Théorème de Thalès : Soient H, H', H'' trois hyperplans parallèles et distincts d'un espace affine X et D_1, D_2 deux droites de X dont aucune n'est faiblement parallèle à H. On suppose que H coupe D_i au point A_i, H' coupe D_i en A_i', H'' coupe D_i en A_i'', pour $i = 1, 2$. On a alors $\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$.

Démonstration. Soit π la projection sur D_2 parallèlement à $\vec{H}$ ($= \vec{H'} = \vec{H''}$). On a de façon évidente $\pi(A_1) = A_2$, $\pi(A_1') = A_2'$, $\pi(A_1'') = A_2''$. D'après la propriété (vii) des applications affines (conservation des rapports de vecteurs colinéaires), $\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$. □

Ce théorème n'a pas de réciproque. Cependant, il possède la réciproque partielle suivante.

Théorème C.6. (Réciproque partielle du théorème de Thalès) : Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$ trois droites distinctes d'un plan affine X. Soit D_1 et D_2 deux droites de X telles que $\Delta \cap D_i = A_i$, $\Delta' \cap D_i = A'_i$ et $\Delta'' \cap D_i = A''_i$, pour $i = 1, 2$. On suppose que :

(i) Δ et Δ' sont parallèles.

(ii) $\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

Alors Δ'' est parallèle à Δ et Δ'.

Démonstration. Par A''_1, on fait passer une droite Δ''_1 parallèle à Δ et Δ' ($\Delta''_1 = A''_1 + \vec{\Delta}$). Cette droite coupe D_2 en B''_2, et d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2B''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$, d'où $\frac{\overline{A_2B''_2}}{\overline{A_2A'_2}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$ et ainsi $B''_2 = A''_2$. Donc $\Delta''_1 = \Delta''$ (car $A''_1, A''_2 \in \Delta''_1 \cap \Delta''$). □

Dans le plan, on a le corollaire suivant du théorème de Thalès :

Corollaire C.7. Soient X un plan affine, D_1 et D_2 deux droites de X concourantes en un point O, et soient Δ et Δ' deux droites parallèles de X. On suppose que D_i coupe Δ en A_i et Δ' en A'_i pour $i = 1, 2$. Alors $\frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA'_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A_1A_2}}$.

Démonstration. La première égalité est donnée par le théorème de Thalès (avec Δ'' la droite parallèle à Δ passant par O).

Soit maintenant h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA'_2}}{\overline{OA_2}}$. Alors $h(O) = O$, $h(A_1) = O + \frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{OA_1} = O + \overrightarrow{OA'_1} = A'_1$. De même, $h(A_2) = A'_2$. Donc $\overrightarrow{A'_1A'_2} = \overrightarrow{h(A_1)h(A'_2)} = \vec{h}(\overrightarrow{A_1A_2}) = \frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{A_1A_2}$, d'où le résultat. □

C.2 Affinités, symétries

Définition C.8. *Soit X un espace affine, E un sous-espace affine de X, $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{E}$ dans $\vec{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'*affinité *de* base *E, de* direction *$\vec{F}$ et de* rapport *α est l'application f de X dans X définie par $x \mapsto \pi(x) + \alpha\overrightarrow{\pi(x)x}$, où π est la projection sur E parallèlement à $\vec{F}$.*

Définition C.9. *Soit X un espace affine, E un sous-espace affine de X et $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{E}$ dans $\vec{X}$. La* symétrie *par rapport à E parallèlement à $\vec{F}$ est l'affinité de base E, de direction $\vec{F}$ et de rapport -1.*

Propriété C.10. Une affinité f est une application affine et $\vec{f} = (1-\alpha)\vec{\pi} + \alpha\,\mathrm{id}_{\vec{X}}$ (avec les notations de la définition).

Démonstration. Soit f l'affinité de base E, de direction $\vec{F}$ et de rapport α. Pour $\vec{u} \in \vec{X}$,

$$\begin{aligned}
f(x+\vec{u}) &= \pi(x+\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{\pi(x+\vec{u})(x+\vec{u})} \\
&= \pi(x) + \vec{\pi}(\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{(\pi(x)+\vec{\pi}(\vec{u}))(x+\vec{u})} \\
&= \pi(x) + \vec{\pi}(\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{(\pi(x)+\vec{\pi}(\vec{u}))\pi(x)} + \alpha\overrightarrow{\pi(x)x} + \alpha\overrightarrow{x(x+\vec{u})} \\
&= \pi(x) + \vec{\pi}(\vec{u}) - \alpha\vec{\pi}(\vec{u}) + \alpha\overrightarrow{\pi(x)x} + \alpha\vec{u} \\
&= f(x) + (1-\alpha)\vec{\pi}(\vec{u}) + \alpha\vec{u}
\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{f(x)f(x+\vec{u})} = (1-\alpha)\vec{\pi}(\vec{u}) + \alpha\vec{u}$. Donc f est affine, de partie linéaire $\vec{f} = (1-\alpha)\vec{\pi} + \alpha\,\mathrm{id}_{\vec{X}}$. □

Remarque C.11. (i) Si $\alpha = 1$, $f = \mathrm{id}_X$.

(ii) Si $\alpha = 0$, $f = \pi$.

(iii) Si $E = X$, $f = \mathrm{id}_X$.

(iv) Si $E = \{\omega\}$, $f = h_{\omega,\alpha}$.

Corollaire C.12. Une symétrie σ est une application affine et $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \mathrm{id}_{\vec{X}}$.

Avec les notations des définitions, pour $\vec{w} \in \vec{X}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{v} \in \vec{F}$, on a $\vec{\sigma}(\vec{w}) = \vec{u} - \vec{v}$: $\vec{\sigma}$ est la symétrie vectorielle suivant $\vec{F}$ par rapport à $\vec{E}$.

Proposition C.13. Pour qu'une application affine de X soit une symétrie, il faut et il suffit qu'elle soit involutive. Dans ce cas il s'agit de la symétrie σ par rapport à l'ensemble de ses points fixes parallèlement au noyau de $\vec{\sigma} + \mathrm{id}_{\vec{X}}$.

Démonstration. • Soit σ une symétrie. On a $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \mathrm{id}_{\vec{X}}$, donc $\vec{\sigma} \circ \vec{\sigma} = (2\vec{\pi} - \mathrm{id}_{\vec{X}}) \circ (2\vec{\pi} - \mathrm{id}_{\vec{X}}) = 4\vec{\pi} \circ \vec{\pi} - 2\vec{\pi} - 2\vec{\pi} + \mathrm{id}_{\vec{X}} = \mathrm{id}_{\vec{X}}$. Donc $\sigma \circ \sigma$ est une translation. Comme $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in E$, on a $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_X$.

• Réciproquement, soit f une application affine involutive de X. Pour montrer que f est une symétrie, considérons $g : X \to X$ définie par $g(x) = x + \frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)}$. On a $f(x) = x + \overrightarrow{xf(x)} = x + 2\overrightarrow{xg(x)} = g(x) + \overrightarrow{xg(x)} = g(x) - \overrightarrow{g(x)x}$, donc il suffit de montrer que g est une projection.
Tout d'abord, g est affine :

$$\begin{aligned}
g(x+\vec{u}) &= x + \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{(x+\vec{u})f(x+\vec{u})} \\
&= x + \vec{u} + \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{(x+\vec{u})x} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f(x)f(x+\vec{u})}\right] \\
&= x + \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \overrightarrow{xf(x)} + \vec{f}(\vec{u})) \\
&= g(x) + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{f}(\vec{u}).
\end{aligned}$$

Donc g est affine et $\vec{g} = \frac{1}{2}(\vec{f} + \mathrm{id}_{\vec{X}})$.
Montrons maintenant que g est idempotente :

$$\begin{aligned}
g \circ g(x) = g(x + \frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)}) &= g(x) + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(x)g(f(x))} \\
&= g(x) + \frac{1}{2}\overrightarrow{g(x)f(x)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(x)g(f(x))}.
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{g(x)f(x)} = \overrightarrow{g(x)x} + \overrightarrow{xf(x)} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{xf(x)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)}$ et $\overrightarrow{f(x)g(f(x))} = \overrightarrow{f(x)\left[f(x) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(x)f^2(x)}\right]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(x)f^2(x)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(x)x}$, donc la somme est $\vec{0}$ et donc $g \circ g(x) = g(x)$.
Donc g est une projection.
Puisque $f(x) = x + \overrightarrow{xf(x)} = x + 2\overrightarrow{xg(x)} = g(x) + \overrightarrow{xg(x)} = g(x) - \overrightarrow{g(x)x}$, f est la symétrie associée à g.
Précisons sa base et sa direction. Sa base est $g(X)$ et sa direction $\mathrm{Ker}(\vec{g})$. Donc $\vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{g}) = \mathrm{Ker}(\vec{f} + \mathrm{id}_{\vec{X}}) = \left\{\vec{u} \in \vec{X} \mid \vec{f}(\vec{u}) = -\vec{u}\right\}$.
Enfin, montrons que $g(X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$. On a $f(g(x)) = g(x) + 2\overrightarrow{g(x)g \circ g(x)} = g(x)$ d'après ce qui précède. Donc $g(X) \subseteq \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Pour l'autre inclusion, soit $x \in X$ tel que $f(x) = x$. Alors $2\overrightarrow{xg(x)} = \vec{0}$ donc $x = g(x) \in g(X)$, donc $g(X) \supseteq \{x \in X \mid f(x) = x\}$.
Donc f est la symétrie par rapport à l'ensemble de ses points fixes $\{x \in X \mid f(x) = x\}$, parallèlement à $\left\{\vec{u} \in \vec{X} \mid \vec{f}(\vec{u}) = -\vec{u}\right\}$. □

IV Théorèmes classiques de géométrie affine

Dans ce chapitre, nous présentons les grands théorèmes de géométrie affine : les théorèmes de Thalès, Ménélaüs, Céva, Pappus et Desargues. Le théorème de Thalès a déjà été démontré, nous nous contenterons de l'énoncer.

A Le théorème de Thalès

Théorème A.1. Soient H, H', H'' trois hyperplans parallèles et distincts d'un espace affine X et D_1 et D_2 deux droites de X dont aucune n'est faiblement parallèle à H. Les hyperplans H, H', H'' coupent respectivement D_i en A_i, A'_i, A''_i pour $i = 1, 2$. On a alors $\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

Ce théorème admet une réciproque partielle :

Théorème A.2. Soient Δ, Δ', Δ'' trois droites distinctes d'un plan affine X. Soient D_1, D_2 deux droites de X telles que $D_i \cap \Delta = A_i$, $D_i \cap \Delta' = A'_i$, $D_i \cap \Delta'' = A''_i$, pour $i = 1, 2$. On suppose que

(i) Δ et Δ' sont parallèles.

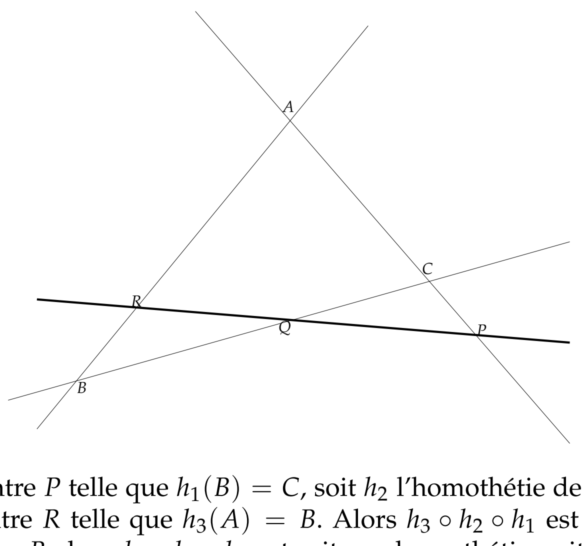
(ii) $\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

Alors Δ'' est parallèle à Δ et Δ'.

B Le théorème de Ménélaüs

Théorème B.1. Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine X. Soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points, distincts des sommets A, B, C. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

Démonstration. On verra une démonstration utilisant les barycentres en TD. Il existe de nombreuses autres démonstrations. Celle que nous présentons ici utilise les homothéties.



Soit h_1 l'homothétie de centre P telle que $h_1(B) = C$, soit h_2 l'homothétie de centre Q telle que $h_2(C) = A$ et soit h_3 l'homothétie de centre R telle que $h_3(A) = B$. Alors $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est soit une homothétie soit une translation. Or $h_3 \circ h_2 \circ h_1(B) = B$, donc $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est soit une homothétie, soit l'identité.

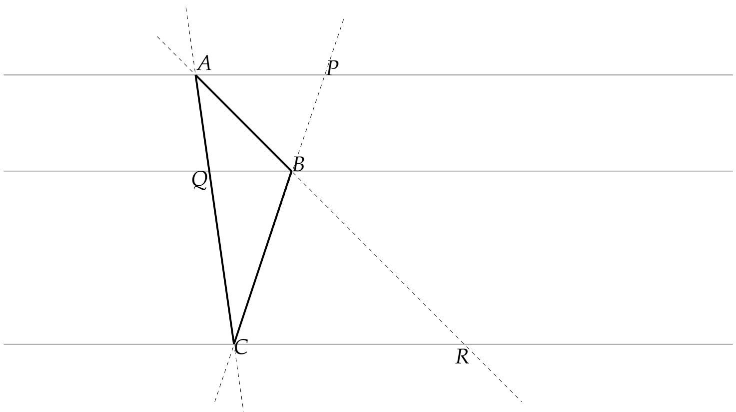
- Supposons P, Q, R alignés. Alors si $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est une homothétie, son centre est sur la droite $\operatorname{aff}\{P, Q, R\}$. Ceci est impossible car B n'appartient pas à cette droite (le triangle n'est pas aplati). Donc $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_X$. Mais h_1 est de rapport $k_1 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, h_2 est de rapport $k_2 = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$ et h_3 est de rapport $k_3 = \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$. Puisque $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_X$, on a $k_1 k_2 k_3 = 1$, donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.
- Réciproquement, si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$, alors $k_1 k_2 k_3 = 1$ donc $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \mathrm{id}_X$, et $h_3 \circ h_2 = h_1^{-1}$. Donc le centre de h_1^{-1}, qui est P, est aligné avec les centres de h_2 et h_3 qui sont Q et R. □

C Le théorème de Céva

Théorème C.1. Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine X. Soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts des sommets A, B, C. Alors les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

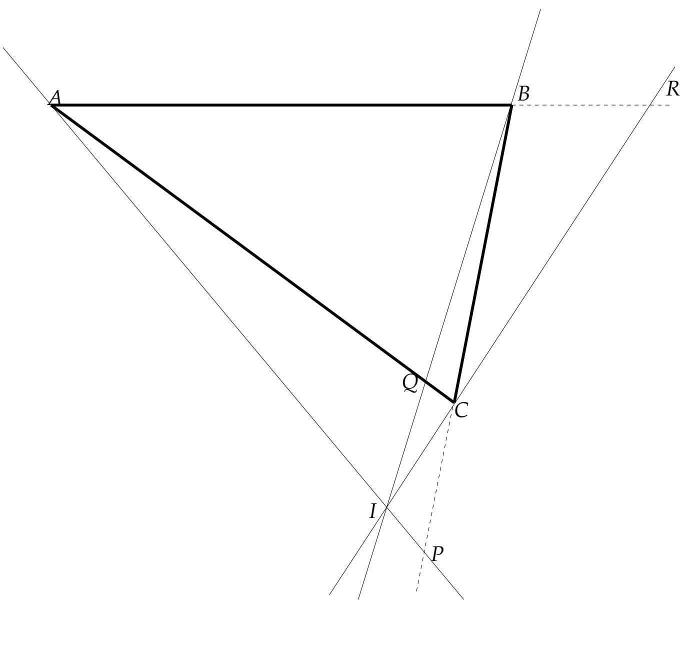
Démonstration. Nous démontrerons ce théorème en TD en utilisant les barycentres. Nous le voyons ici comme corollaire du théorème de Ménélaüs :

- Sens direct.
  - ◇ Supposons (AP), (BQ), (CR) parallèles.



D'après le théorème de Thalès, $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$ et $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}$. Donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = -1$.

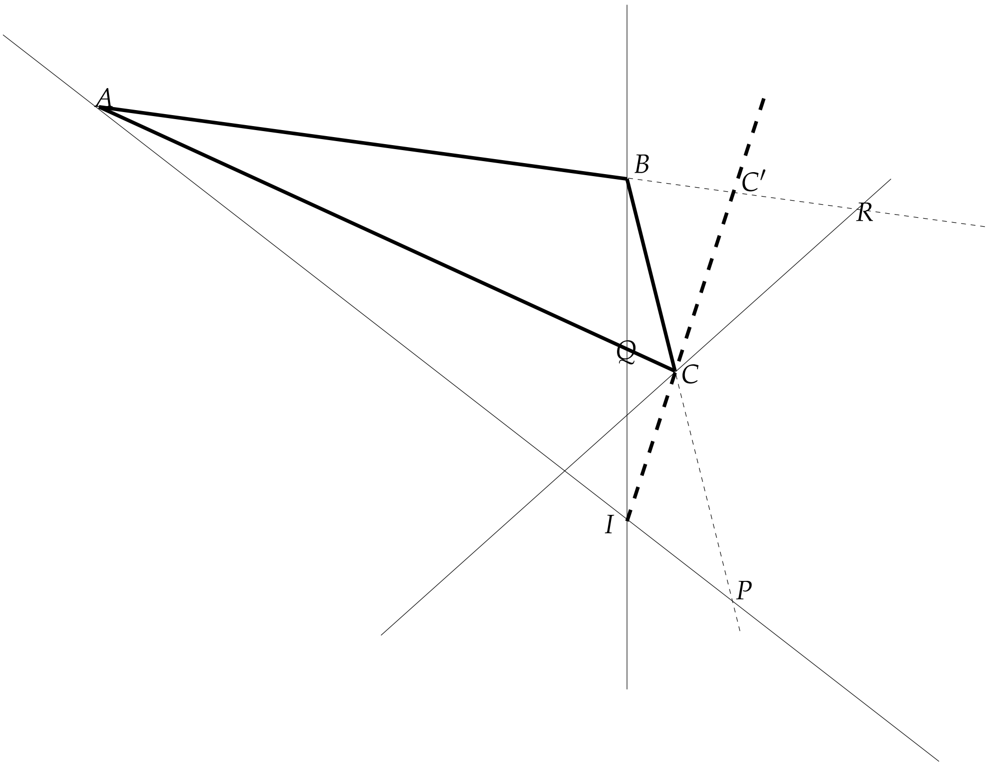
  - ◇ Supposons (AP), (BQ), (CR) concourantes en un point I.



Si on applique le théorème de Ménélaüs au triangle ABP et aux points alignés R, I, C, on obtient $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \frac{\overline{IP}}{\overline{IA}} = 1$. Si on applique le théorème de Ménélaüs au triangle APC et aux points alignés Q, I, B, on obtient $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{IA}}{\overline{IP}} \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = 1$. En multipliant ces deux identités on obtient $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

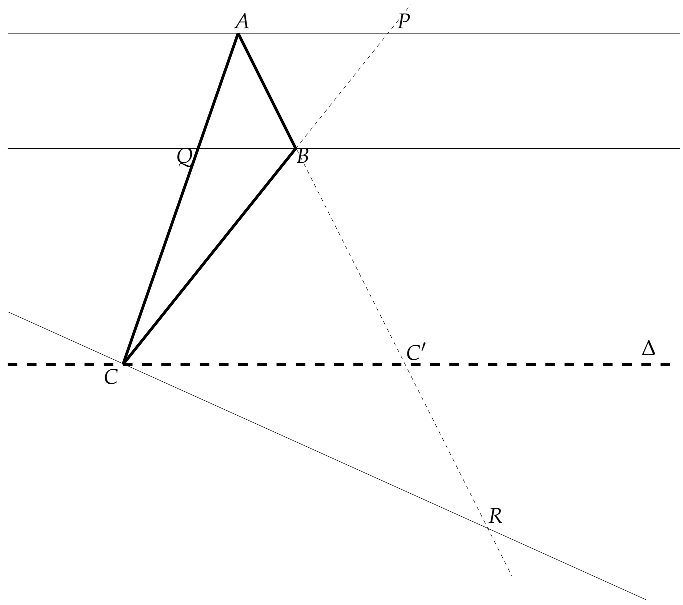
- Réciproquement, on suppose que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

  ◇ Premier cas : (AP) et (BQ) sont concourantes en un point I.



Vérifions que (CI) n'est pas parallèle à (AB) : si elles étaient parallèles, on aurait $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{IC}}$ et $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AB}}$ grâce au théorème de Thalès, et donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -1$. En utilisant l'hypothèse, on aurait donc $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ d'où $A = B$, ce qui est une contradiction.
(AB) et (CI) sont donc concourantes, en C'. On applique le théorème de Céva dans le sens que l'on a déjà démontré, avec $P = P$, $Q = Q$ et $R = C'$. Alors $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. On en déduit que $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ grâce à l'hypothèse. On a donc $1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C'B}+\overline{BA}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{RB}+\overline{BA}}{\overline{RB}} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{RB}}$, et on obtient donc $C' = R$. Donc les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes.

  ◇ Deuxième cas : (AP) et (BQ) sont parallèles.

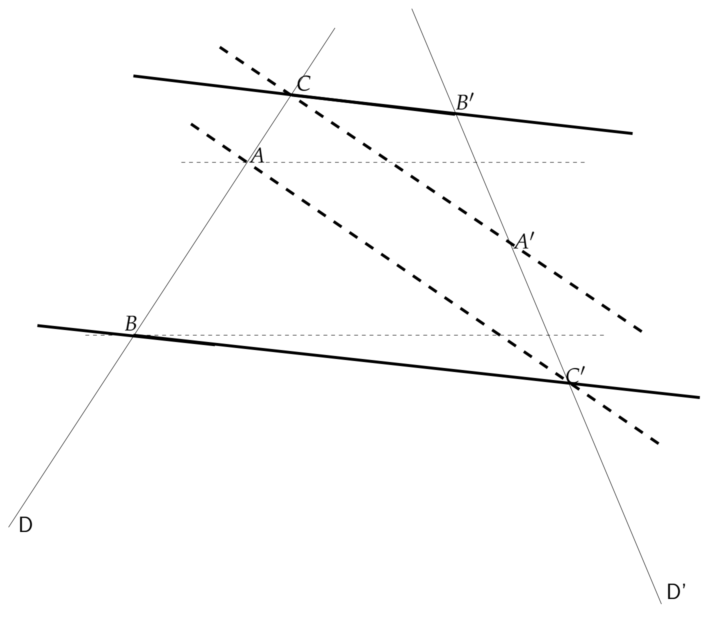


Menons par C la parallèle Δ à (AP). Elle coupe (AB) en C' (en effet, si (AB) et Δ étaient parallèles, alors (AP) et (AB) seraient parallèles, ainsi que (AB) et (BQ), donc A, B, P, Q seraient alignés, et comme $P \in (BC)$ on aurait A, B et C alignés). Grâce au sens du théorème de Céva que nous avons démontré, on obtient $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. On conclut comme dans le premier cas. □

D Le théorème de Pappus

Théorème D.1. Soient Δ, Δ' deux droites distinctes d'un plan affine X. Soient $A, B, C \in \Delta$ et $A', B', C' \in \Delta'$ des points distincts n'appartenant pas à $\Delta \cap \Delta'$. On suppose que$(AB') \mathbin{/\!/} (A'B)$ et $(BC') \mathbin{/\!/} (B'C)$. Alors on a $(AC') \mathbin{/\!/} (A'C)$.

Démonstration.



- On suppose que Δ et Δ' sont concourantes en O. Soit h_1 l'homothétie de centre O qui envoie A sur B et h_2 l'homothétie de centre O qui envoie B sur C. On a $h_2 \circ h_1(A) = C$. Mais h_1 et h_2 ont même centre, donc $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$. En utilisant le théorème de Thalès, on a $h_1(B') = O + \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \overrightarrow{OB'} = O + \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \overrightarrow{OB'} = O + \overrightarrow{OA'} =$

A'. De même, $h_2(C') = B'$. Ainsi $h_2 \circ h_1(C') = h_1 \circ h_2(C') = h_1(B') = A'$, d'où $(A'C) = h_1 \circ h_2((C'A))$ et donc $(AC') /\!/ (A'C)$.

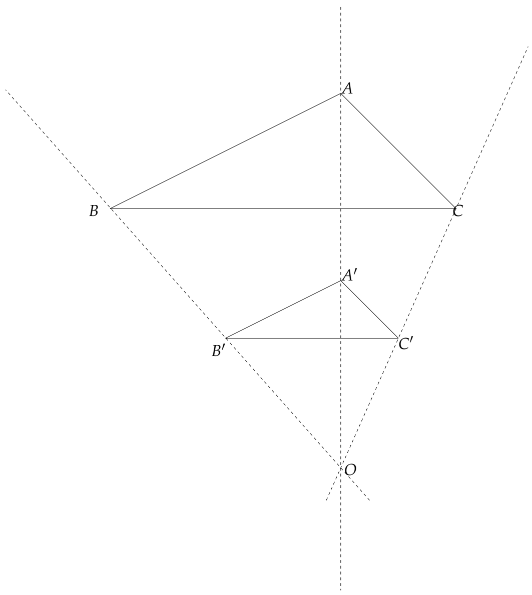
- On suppose que Δ et Δ' sont parallèles. Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Soit t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Remarquons que grâce aux hypothèses, (A, B, A', B') est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$, et que (B, C, B', C') est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$. On a donc $t_2 \circ t_1(A) = t_2(B) = C$ et $t_2 \circ t_1(C') = t_1 \circ t_2(C') = t_1(B') = A'$. Donc $(AC') /\!/ (A'C)$. □

E Le théorème de Desargues

Théorème E.1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles distincts non aplatis d'un plan affine X, tels que $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$ et $(CA) /\!/ (C'A')$. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Démonstration. Deux des points A, B, C au moins sont distincts des points correspondants A', B', C' (sinon, avec les hypothèses de parallélisme de l'énoncé, les triangles seraient égaux). Par exemple $A \neq A'$ et $B \neq B'$.

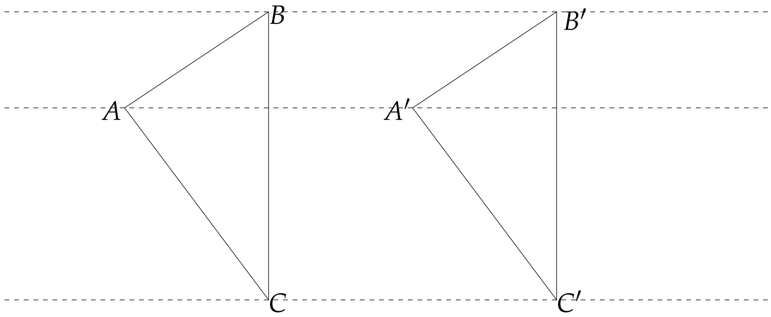
- Si $(AA') = (BB')$, il est clair que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes (puisqu'il n'y en a que deux, dans un plan). Supposons donc que $(AA') \neq (BB')$.
- On suppose que (AA') et (BB') sont concourantes ; notons O leur point d'intersection.



On a $A \neq B$ et $A \neq A'$; de plus, $\overrightarrow{A'B'} \in \text{vect}\left\{\overrightarrow{A'B'}\right\} = \text{vect}\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ (puisque $(A'B')$ et (AB) sont parallèles), donc $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (si $\alpha = 0$, alors $A' = B'$, et si $\alpha = 1$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, donc $(AA') /\!/ (BB')$ ce qui contredit le fait que ces droites sont concourantes). On sait donc qu'il existe une homothétie h qui envoie A sur A' et B sur B'. Son centre est sur (AA') et sur (BB'), c'est donc O.

L'image $h((AC))$ est une droite qui est parallèle à (AC) (puisque h est une homothétie) et qui passe par $h(A) = A'$, donc $h((AC)) = (A'C')$. De même, $h((BC)) = (B'C')$. Donc $h(C) \in (A'C') \cap (B'C')$, donc $h(C) = C'$ (car A', B', C' ne sont pas alignés). Ainsi (CC') passe par O (on peut d'ailleurs avoir la situation $C = C' = O$).

- On suppose que (AA') et (BB') sont parallèles.



Soit t la translation qui envoie A sur A'. Comme $(AA') \neq (BB')$ et que $(AA') /\!/ (BB')$ d'une part, $(AB) /\!/ (A'B')$ d'autre part, (A, B, B', A') est un parallélogramme et $t(B) = B + \overrightarrow{AA'} = B + \overrightarrow{BB'} = B'$. Donc $t((AC)) = (A'C')$ et $t((BC)) = (B'C')$. Donc $t(C) = C'$ et ainsi $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$, donc (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles. $\square$

V Convexité

A Définitions, propriétés

Définition A.1. *Soit X un espace affine et soient x, y deux points de X. Le* segment d'extrémités *x et y, noté $[x,y]$, est l'ensemble des barycentres de (x,λ), $(y,1-\lambda)$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

Remarque A.2. $[x,y]$ est aussi l'ensemble des barycentres de (x,λ) et (y,μ) avec $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$.
En effet, il est clair que si $z \in [x,y]$, c'est bien un barycentre de (x,λ) et (y,μ) avec $\lambda \geqslant 0$ et $\mu = 1-\lambda \geqslant 0$.
Réciproquement, si g est le barycentre de (x,λ) et (y,μ) avec $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$, alors g est le barycentre de $\left(x, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ et de $\left(y, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$. De plus, si on pose $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, on a $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $1-\alpha = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1-\alpha$, donc $g \in [x,y]$.

Exemple A.3. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Définition A.4. *Une partie C d'un espace affine X est dite* convexe *(ou est un convexe) lorsque pour tout couple $(x,y) \in C \times C$, on a $[x,y] \subseteq C$.*

Exemple A.5. Un segment, une droite, un plan, un disque, les polygones "usuels" (carré, parallélogramme, trapèze, triangle, pentagone régulier,...), les polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, dodécaèdre...) sont des exemples de convexes.

Proposition A.6. Une partie C de X est convexe si et seulement si elle contient le barycentre de toute famille finie de points de C pondérés par des coefficients positifs.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante : si $x, y \in C$, alors $[x,y]$ est l'ensemble des barycentres de x et y pondérés par des poids positifs, donc $[x,y] \subseteq C$. Donc il nous reste à démontrer la condition nécessaire. Nous supposons donc C convexe. Nous allons montrer que le barycentre d'une famille finie de points de C affectés de poids positifs est dans C par récurrence sur le nombre de points de la famille. L'hypothèse de récurrence est :

(H_n) : les barycentres des familles d'au plus n points de C pondérés par des coefficients positifs sont dans C.

(H_2) est vraie puisque C est convexe. Supposons (H_n) vraie. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille de $(n+1)$ points de C et soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille de $(n+1)$ coefficients positifs avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Soit g le barycentre des $\{(x_i,\lambda_i); i = 1,\ldots,n+1\}$. Tous les λ_i ne sont pas nuls (puisque leur somme n'est pas nulle), donc par exemple $\lambda_{n+1} \neq 0$. Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $g = x_{n+1}$ est dans C. Sinon, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, donc on peut considérer le barycentre y de $\{(x_i,\lambda_i); i = 1,\ldots,n\}$. Alors, par associativité, g est le barycentre de $(y, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$ et de (x_{n+1}, λ_{n+1}). L'hypothèse (H_n) dit que $y \in C$. On a aussi $x_{n+1} \in C$. Les poids associés sont positifs, donc grâce à (H_2) on a $g \in C$. □

Propriété A.7. Soit X un espace affine. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de convexes de X. Alors $\cap_{i\in I} C_i$ est un convexe de X.

Démonstration. Si $\cap_{i\in I} C_i \neq \varnothing$, soient x, $y \in \cap_{i\in I} C_i$. Alors pour tout $i \in I$, on a x, $y \in C_i$ et puisque C_i est convexe, $[x,y] \subseteq C_i$. Donc $[x,y] \subseteq \cap_{i\in I} C_i$. On en déduit que $\cap_{i\in I} C_i$ est un convexe de X □

B Enveloppe convexe - Théorèmes de Carathéodory et de Helly

Définition B.1. *Soit A une partie d'un espace affine réel X. On appelle* enveloppe convexe *de A, notée $\mathcal{E}(A)$, le plus petit convexe qui contienne A.*

Propriété B.2. L'enveloppe convexe $\mathcal{E}(A)$ existe toujours : c'est l'intersection de tous les convexes contenant A.

Proposition B.3. L'enveloppe convexe d'une partie A de X est l'ensemble des barycentres de toutes les familles finies de points de A pondérés par des coefficients positifs.

Démonstration. On note $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des barycentres de toutes les familles finies de points de A pondérés par des coefficients positifs. D'après la proposition A.6, $\mathcal{B}(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(A)$. Donc comme $A \subseteq \mathcal{E}(A)$, on a $\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(A)$. Par ailleurs $A \subseteq \mathcal{B}(A)$ par définition.

Montrons, pour conclure, que $\mathcal{B}(A)$ est convexe. Soient $x, y \in \mathcal{B}(A)$. Fixons $\omega \in X$. Par définition, $\overrightarrow{\omega x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{\omega x_i}$, où $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\overrightarrow{\omega y} = \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{\omega y_i}$, où $y_i \in A$, $\mu_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ (on peut prendre le même n, quitte à rajouter des zéros). Soit $z \in [x,y]$, montrons que $z \in \mathcal{B}(A)$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{\omega z} = \lambda \overrightarrow{\omega x} + (1-\lambda)\overrightarrow{\omega y} = \sum_{i=1}^n \lambda\lambda_i \overrightarrow{\omega x_i} + \sum_{i=1}^n (1-\lambda)\mu_i \overrightarrow{\omega y_i}$. Alors z est le barycentre des $2n$ points $(x_i, \lambda\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i, (1-\lambda)\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Comme $\lambda\lambda_i \geqslant 0$, $(1-\lambda)\mu_i \geqslant 0$ pour tout i, on a $z \in \mathcal{B}(A)$. Donc $\mathcal{B}(A)$ est convexe, et $A \subseteq \mathcal{B}(A)$ donne $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{B}(A)$. $\square$

Exemple B.4. L'enveloppe convexe de $A = \{x, y\}$ est le segment $[x, y]$. L'enveloppe convexe de $A = \{x, y, z\}$ où x, y, z sont trois points non alignés est le triangle (x, y, z). Etc.

Nous pouvons être plus précis lorsque nous décrivons l'enveloppe convexe :

Théorème B.5. (Théorème de Carathéodory). Soit X un espace affine de dimension n. Alors l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres des familles finies de $(n+1)$ points au plus de A pondérés par des coefficients positifs.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{E}(A)$. Fixons $\omega \in X$. Alors d'après la proposition B.3, x est le barycentre de k points de A pondérés par des coefficients positifs, soit $\overrightarrow{\omega x} = t_1 \overrightarrow{\omega x_1} + \cdots + t_k \overrightarrow{\omega x_k}$ avec $t_i \geqslant 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Supposons $k > n+1$.

Le système de vecteurs $\{\overrightarrow{x_1 x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_1 x_k}\}$ est lié. Il existe donc $\lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_2 \overrightarrow{x_1 x_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{x_1 x_k} = \overrightarrow{0}.$$

Posons $\mu_1 = \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ et $\mu_i = -\lambda_i$ pour $2 \leqslant i \leqslant k$. Les μ_j sont de somme nulle et non tous nuls. Alors $\sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{\omega x_i} = \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{\omega x_1} + \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{x_1 x_i} = \vec{0} - \sum_{i=2}^n \lambda_i \overrightarrow{x_1 x_i} = \vec{0}$.

Il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\mu_j > 0$. Posons :

$$\lambda = \min\left\{\frac{t_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0\right\} \text{ et } \nu_i = t_i - \lambda\mu_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

Si $\mu_i > 0$, on a $\frac{t_i}{\mu_i} \geqslant \lambda$ d'où $\nu_i \geqslant 0$, et si $\mu_i \leqslant 0$ il est clair que $\nu_i \geqslant 0$. Donc $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{R}_+$. De plus $\sum_{i=1}^k \nu_i = \sum_{i=1}^k t_i - \lambda \sum_{i=1}^k \mu_i = 1 - 0 = 1$. D'autre part, par définition de λ, il existe un indice q tel que $\nu_q = 0$, et on a :

$$\overrightarrow{\omega x} = \sum_{i=1}^k t_i \overrightarrow{\omega x_i} = \sum_{i=1}^k \nu_i \overrightarrow{\omega x_i} + \lambda \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{\omega x_i} = \sum_{i \neq q} \nu_i \overrightarrow{\omega x_i}.$$

Ainsi on a écrit x comme barycentre de $k-1$ points de A pondérés par des coefficients positifs.

En itérant ce processus $k-n-1$ fois, on peut écrire x comme barycentre de $n+1$ points. $\square$

Théorème B.6. (Théorème de Helly) Soit X un espace affine réel de dimension n. Soit $(C_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de convexes de X telle que toute intersection de $(n+1)$ de ces parties soit non vide. Alors $C = \cap_{i=0}^{n+1} C_i \neq \varnothing$.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout i avec $0 \leqslant i \leqslant n+1$, il existe $a_i \in \cap_{j=0, j\neq i}^{n+1} C_j$. Les $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_{n+1}}$ sont liés puisque $\dim X = n$, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} = \vec{0}$.

Posons $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$. On a alors $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} = \vec{0}$ avec $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 0$. Ces conditions impliquent que les ensembles

$I = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1 \text{ et } \lambda_i > 0\}$ et $J = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1 \text{ et } \lambda_i \leqslant 0\}$ sont non vides.

On pose $\alpha = \sum_{i \in I} \lambda_i > 0$ et $\beta = \sum_{i \in J} \lambda_i = -\alpha < 0$. Soit g le barycentre des points $(a_i, \frac{\lambda_i}{\alpha})$ où i parcourt I et soit h le barycentre des points $(a_j, \frac{\lambda_j}{\beta})$ où j parcourt J.

On a $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} = \alpha \overrightarrow{a_0 g} + \beta \overrightarrow{a_0 h} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{a_0 h} + \alpha \overrightarrow{hg} = \alpha \overrightarrow{hg}$, donc $h = g$.

Soit $j \in J$. Comme $I \cap J = \varnothing$, pour tout $i \in I$, on a $a_i \in C_j$ par définition de a_i. Donc C_j étant convexe, $g \in C_j$ pour tout $j \in J$.

De même, pour $i \in I$, comme $I \cap J = \varnothing$, pour tout $j \in J$ on a $a_j \in C_i$. Donc, C_i étant convexe, $h \in C_i$ pour tout $i \in I$.

Donc $g = h \in C_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n+1\}$. $\square$