Analyse

R. Taillefer

I Etudes de fonctions

A Introduction

L'interprétation d'un phénomène expérimental conduit souvent à étudier les variations d'une grandeur “en fonction” d'une autre, la “variable”. Ceci est modélisé en mathématiques par une fonction, par exemple d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'étude de cette fonction aide à comprendre la réalité expérimentale.

B Plan d'étude d'une fonction

B.1 Recherche de l'ensemble de définition $\mathscr{D}$.

Soit f une fonction définie d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il est commode pour étudier f de suivre le plan suivant :

$\mathscr{D}$ est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

On peut éventuellement choisir un domaine d'étude plus petit que le domaine de définition si f est périodique (c'est-à-dire qu'il existe un réel p, appelé **période**, tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, on ait $f(x+p) = f(x)$; un intervalle de longueur la période suffit pour étudier f), ou paire (c'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$) ou impaire (c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$) (dans ces deux derniers cas, l'ensemble des réels positifs du domaine de définition suffit).

Ces propriétés de f se traduisent par des propriétés géométriques sur le graphe (périodicité si f est périodique, symétries si f est paire ou impaire).

Notons $\mathscr{E}$ ce domaine d'étude (qui peut être $\mathscr{D}$ si le domaine de définition ne peut pas être réduit ou si on a choisi de ne pas le réduire).

On détermine ensuite des intervalles contenus dans $\mathscr{E}$ sur lesquels f est continue, dérivable, grâce à des théorèmes généraux (somme de fonctions continues, ou produit de fonctions dérivables par exemple).

On étudie également d'éventuelles particularités locales (continuité, dérivabilité en certains points particuliers, tangentes horizontales...).

B.2 Etude aux bornes de $\mathscr{E}$.

On cherche les limites de f aux bornes de $\mathscr{E}$, et on examine les éventuelles branches infinies, on recherche les asymptotes éventuelles...

Soit x_0 une borne de $\mathscr{E}$. On recherche la limite de f en x_0.

— Si x_0 est un réel et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

— Si $x_0 = \pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ est finie égale à b, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

— Si $x_0 = \pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$: alors on regarde $\dfrac{f(x)}{x}$:

  ◇ Si $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite finie lorsque $x \to x_0$, alors il n'y a pas d'asymptote.

  ◇ Si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie a lorsque $x \to x_0$, alors on étudie $f(x) - ax$; si $f(x) - ax$ a une limite finie b lorsque x tend vers x_0, alors il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$. Sinon il n'y a pas d'asymptote.

Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à une asymptote en $x_0 = \pm\infty$ d'équation $y = \alpha x + \beta$, on étudie le signe de $f(x) - \alpha x - \beta$ lorsque x tend vers x_0 : s'il est positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote, s'il est négatif elle est en-dessous de l'asymptote.

B.3 Etude du sens de variation.

Sur un intervalle I contenu dans $\mathscr{E}$, f est **croissante** si $f(x) \leqslant f(y)$ pour tous $x < y$ dans I, et **strictement croissante** si $f(x) < f(y)$ pour tous $x < y$ dans I. On a de même les notions de f décroissante et strictement décroissante.

Le critère le plus utilisé pour étudier le sens de variation est le signe de la dérivée f' lorsque f est dérivable : si f' est (strictement) positive sur un intervalle I, alors f est (strictement) croissante sur I, etc.

B.4 Tableau de variations.

Le tableau de variations résume toute l'étude de la fonction.

Il doit être complet et permettre d'avoir rapidement tous les renseignements sur les variations de la fonction et de vérifier leur cohérence.

B.5 Tangente en un point.

La courbe représentative (ou le graphe) de f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in \mathscr{D}$.

Lorsque f est dérivable, la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (elle passe par $(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f'(x_0)$). Il peut être intéressant, pour tracer le graphe de f, de connaître les tangentes en certains points.

De plus, il est utile de connaître le comportement du graphe par rapport à la tangente en un point au voisinage de ce point :

Définition B.1. *Fixons un point $M_0 = (x_0, f(x_0))$ sur le graphe de f.*

- *Si le graphe de f reste au-dessus de la tangente en M_0 au voisinage de M_0, alors on dit que f est* ***convexe*** *au voisinage de x_0.*
- *Si le graphe de f reste en-dessous de la tangente en M_0 au voisinage de M_0, alors on dit que f est* ***concave*** *au voisinage de x_0.*
- *Si le graphe de f change de position par rapport à la tangente en M_0 au voisinage de M_0, alors on dit que M_0 est un* ***point d'inflexion*** *du graphe de f.*

Proposition B.2. Supposons que f soit deux fois dérivable sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$ et soit $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Alors :

(i) f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

(ii) f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

(iii) M_0 est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.

B.6 Extrema

Définition B.3. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. On dit que f atteint un* ***maximum*** *(local) en $x_0 \in D$ s'il existe a et b dans D avec $a < b$ tels que $x_0 \in]a,b[$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout x dans $]a,b[$. Le maximum est dit* ***global*** *si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout x dans D.*

On a une définition similaire pour un ***minimum****, local ou global.*

Théorème B.4. Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$, et soit $x_0 \in]a,b[$. Si f atteint un maximum ou un minimum en $x_0 \in]a,b[$, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention, la réciproque est fausse ! Dire que $f'(x_0) = 0$ signifie que la tangente à la courbe représentative de f est horizontale, mais $f(x_0)$ n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum (le point $(x_0, f(x_0))$ peut être un point d'inflexion). Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais il n'y a pas d'extremum (maximum ou minimum) en 0.

B.7 Courbe représentative.

Il reste maintenant à donner l'allure du graphe en utilisant toutes les informations que l'on a déterminées ci-dessus. On ne demande pas en général un graphe précis, mais seulement l'allure, qui donne une idée claire sur la fontion.

C Exemple

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$.

$f(x)$ est défini si et seulement si $x^4 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 0$. Donc le domaine de définition de f est $\mathscr{D} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

f est paire $(f(-x) = f(x))$, donc le graphe est symétrique par rapport à l'axe des y.

Donc il suffit d'étudier f sur $\mathscr{E} =]0, +\infty[$.

— Etude aux bornes : Lorsque $x \to +\infty$, on regarde les termes de plus haut degré, et on obtient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.
Lorsque $x \to 0^+$, le numérateur tend vers -1, et le dénominateur vers 0^+, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

— Sens de variations et tableau de variations : f est dérivable sur $\mathscr{E}$, on calcule la dérivée : $f'(x) = -2\dfrac{x^2 - 2}{x^5}$.
Pour $x \in \mathscr{E}$, on en déduit que
  - ◇ $f'(x) > 0$ si et seulement si $x \in]0; \sqrt{2}[$.
  - ◇ $f'(x) < 0$ si et seulement si $x \in]\sqrt{2}; +\infty[$.
  - ◇ $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{2}$.

Donc f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{2}[$, et strictement décroissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.
On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0^+

On constate que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale (en 0). La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale (en $+\infty$), et le graphe est au-dessus de l'asymptote.
De plus, $f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{4}$ est un maximum global de f.

— Convexité, concavité et points d'inflexion : f' est dérivable sur $\mathscr{D}$, on calcule sa dérivée : $f''(x) = 2\dfrac{3x^2 - 10}{x^6}$. On étudie le signe de f'', et on en déduit que f est strictement convexe sur $\left]\sqrt{\dfrac{10}{3}}; +\infty\right[$, concave sur $\left]0, \sqrt{\dfrac{10}{3}}\right[$ et que le point $\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}; f\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)\right) = \left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}; \dfrac{21}{100}\right)$ est un point d'inflexion.

Avec les valeurs approchées $\sqrt{2} \cong 1,4$ et $\sqrt{\frac{10}{3}} \cong 2,1$, on peut tracer l'allure du graphe.

D Fonctions réciproques

Définition-Proposition D.1. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. Posons $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Alors il existe une fonction $f^{-1} :]c,d[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout x dans $]a,b[$ on ait $f^{-1}(f(x)) = x$ et pour tout y dans $]c,d[$ on ait $f(f^{-1}(y)) = y$. On dit que f est *bijective* de *fonction réciproque* f^{-1}.

Définition-Proposition D.2. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante. Posons $c = f(b)$ et $d = f(a)$. Alors il existe une fonction $f^{-1} :]c,d[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout x dans $]a,b[$ on ait $f^{-1}(f(x)) = x$ et pour tout y dans $]c,d[$ on ait $f(f^{-1}(y)) = y$. On dit que f est *bijective* de *fonction réciproque* f^{-1}.

Proposition D.3. Si f est dérivable et si f' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors f^{-1} est dérivable, et on a, pour tout y de $]c,d[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. Cela se voit en dérivant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout y de $]c,d[$, à l'aide de la formule de dérivation d'une fonction composée. □

Exemples D.4. Ces exemples sont classiques et importants.

(a) La fonction $\cos :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ est strictement décroissante, car elle est dérivable de dérivée < 0. Donc elle a une réciproque :

$$\text{Arccos} :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

qui vérifie

$$\text{Arccos} \cos x = x \text{ pour tout } x \text{ dans }]0,\pi[$$
$$\cos \text{Arccos}\, y = y \text{ pour tout } y \text{ dans }]-1,1[.$$

De plus, la dérivée de Arccos est donnée par

$$\text{Arccos}'\, y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(b) La fonction $\sin :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante, car elle est dérivable de dérivée > 0. Donc elle a une réciproque :

$$\text{Arcsin} :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

qui vérifie

$$\text{Arcsin} \sin x = x \text{ pour tout } x \text{ dans }]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$
$$\sin \text{Arcsin}\, y = y \text{ pour tout } y \text{ dans }]-1,1[.$$

De plus, la dérivée de Arcsin est donnée par

$$\text{Arcsin}'\, y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(c) La fonction tan $:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ est strictement croissante, car elle est dérivable de dérivée >0. Donc elle a une réciproque :

$$\text{Arctan} :]-1,1[\to\mathbb{R}$$

qui vérifie

$$\begin{aligned}&\text{Arctan}\tan x = x \text{ pour tout } x \text{ dans }]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\ &\tan\text{Arctan}\, y = y \text{ pour tout } y \text{ dans }]-1,1[.\end{aligned}$$

De plus, la dérivée de Arctan est donnée par

$$\text{Arctan}' y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Exemple D.5. Vous avez déjà rencontré cet exemple : les fonctions ln $:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ et exp $:\mathbb{R}\to]0;+\infty[$ sont des fonctions strictement croissantes réciproques l'une de l'autre.

II Intégration

Introduction

L'intégrale a été introduite afin de calculer des aires et des volumes. A l'origine on faisait une approximation de l'aire à l'aide de rectangles de plus en plus fins (ou du volume à l'aide de parallélépipèdes), mais le calcul des primitives a facilité le calcul des intégrales.

Toutes les intégrales ne se calculent pas à l'aide d'une primitive, et nous allons présenter deux méthodes qui permettent de s'y ramener.

A Primitives et intégrales

A.1 Primitives

Définition A.1. *Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive F de f sur $\mathscr{D}$ est une fonction $F : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est f :*

$$\textit{pour tout } x \in \mathscr{D}, F'(x) = f(x).$$

Propriété A.2. Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$ où C est une constante réelle.

Remarque A.3. On peut montrer que pour que f admette une primitive sur $\mathscr{D}$, il suffit qu'elle soit continue sur $\mathscr{D}$. Dans les situations que vous rencontrerez, cette hypothèse est satisfaite.

A.2 Intégrale

Définition A.4. *Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soient a et b deux réels de $\mathscr{D}$ tels que $[a,b] \subseteq \mathscr{D}$. Si f admet une primitive F sur $[a,b]$, alors le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b, et on note*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

a et b sont appelées les bornes de l'intégrale. Lorsque l'intégrale ci-dessus existe, on dit que f est intégrable sur $[a,b]$.

<u>**Attention**</u> : Il ne faut pas confondre une *primitive* (qui est une fonction) avec une *intégrale* (qui est un nombre réel).

Notation A.5. On notera parfois $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de f (on ne met pas de bornes au symbole $\int$).

Remarque A.6.
- L'intégrale de f de a à b ne dépend pas du choix de la primitive F.
- Sous le signe $\int$ la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. C'est la *variable d'intégration*, elle est "muette".
- L'application qui à x associe $\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriétés A.7. **(i)** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(iii) Relation de Chasles : Soient a, b et c trois réels quelconques d'un intervalle I sur lequel f est intégrable. Alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(iv) Linéarité : si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, et si λ est un réel, alors
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

(v) Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et si $a \leqslant b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

De même, si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ et si $a \leqslant b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

B Méthodes d'intégration

B.1 Utilisation de primitives

Exemple B.1. On utilise le tableau des primitives usuelles pour calculer
$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos x\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 0\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

B.2 Intégration par parties

Théorème B.2. Soit f et g deux fonctions dérivables telles que f' et g' soient continues. Alors
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exemple B.3.
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx &= [-x\cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)\,dx \\ &= [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

B.3 Changement de variable

L'objectif est de se ramener à un calcul de primitives en changeant la variable d'intégration.

Théorème B.4. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Soit φ une fonction définie sur un intervalle $[\alpha,\beta]$, qui est dérivable avec une dérivée continue sur $[\alpha,\beta]$, et telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Dans cette égalité, on remplace x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)\,dt$ et les bornes a et b par α et β.

Exemple B.5. Soit à calculer $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On veut poser $x = \sin t$ par exemple.

On a $\frac{dx}{dt} = \cos t$ (dérivée de x par rapport à la variable t), donc $dx = \cos t\, dt$.

De plus, lorsque x vaut 0, on a $\sin t = 0$, d'où $t = 0$, et lorsque x vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on a $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $t = \frac{\pi}{4}$.

Donc l'intégrale devient :

$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Dans cet exemple, on a pris en fait $\varphi : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \sin t$, qui est dérivable de dérivée continue.

Exemple B.6. Parfois, le changement de variable est plus naturel dans l'autre sens, c'est-à-dire en posant t en fonction de x (dans le cas où φ admet une réciproque, $t = \varphi^{-1}(x)$).

Soit à calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$. On pose $t = \sin x$. Alors $\frac{dt}{dx} = \cos x$, donc $dt = \cos x\, dx$. De plus, lorsque $x = 0$ on a $t = 0$ et lorsque $x = \frac{\pi}{2}$ on a $t = 1$. Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Remarque B.7. Soit f une fonction périodique de période p. Alors

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_a^0 f(x)\, dx + \int_0^p f(x)\, dx + \int_p^{a+p} f(x)\, dx.$$

Faisons sur la dernière intégrale le changement de variable $x = t + p$. On a $dx = dt$. On obtient :

$$\int_p^{a+p} f(x)\, dx = \int_0^a f(t+p)\, dt = \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a f(x)\, dx$$

en utilisant la périodicité de f. En remplaçant dans le premier calcul on obtient :

$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_a^0 f(x)\, dx + \int_0^p f(x)\, dx - \int_a^0 f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx.$$

On a donc montré que

Propriété B.8. L'intégrale de f sur un intervalle dont la longueur est la période de f ne dépend pas des extrémités de cet intervalle.

Notation B.9. On note aussi $\frac{df}{dx} = f'$ la dérivée de f, d'où la notation $df = f'dx$.

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} df = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. (C'est en fait un changement de variable : on passe de la variable f à la variable x).

Exemple B.10. On considère un gaz parfait qui évolue d'un état A à un état B par une transformation isobare (à pression constante). On a donc $P_A = P_B$.

On en déduit que $\delta W_{A\to B} = -PdV$ (car la pression est constante).

Donc $W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} -PdV = -P\int_{V_A}^{V_B} dV = -P[V]_{V_A}^{V_B} = -P(V_B - V_A)$.

Application Calcul d'aires : Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a,b]$. L'aire de la surface délimitée par la courbe, l'axe des x, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par $\int_a^b |f(x)|dx$.

Exemple B.11. Calculons l'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $y=2-x$, $y=-2+x$, $x=0$ et $x=2$.

— L'aire comprise entre la droite d'équation $y=2-x$ et les deux droites verticales est $\int_0^2 |2-x|\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx = [2x-\frac{x^2}{2}]_0^2 = 2$.
— L'aire comprise entre la droite d'équation $y=-2+x$ et les deux droites verticales est $\int_0^2 |-2+x|\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx = 2$.

Donc l'aire totale recherchée est 4.

B.4 Intégration des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

On cherche à trouver les primitives d'une *fraction rationnelle*, c'est-à-dire d'une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des fonctions polynômes. Pour cela on va faire une *décomposition en éléments simples* de $f(x)$, c'est-à-dire l'écrire comme une somme de fonctions dont on connaît les primitives.

Etape 1. Si $\deg P < \deg Q$, on ne fait rien. Si $\deg P \geqslant \deg Q$, on fait la **division euclidienne** de P par Q. Donc on peut écrire $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < \deg Q$, et on a $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$. On sait intégrer S (c'est un polynôme), donc il reste à intégrer $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Dans les deux cas, on s'est donc ramenés à une fraction rationnelle telle que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. A partir de maintenant, on suppose donc que $\deg P < \deg Q$.

Exemple B.12. Division de x^3+2 par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-(x^3-x^2) & x^2+x+1 \\ \hline
x^2+2 & \\
-(x^2-x) & \\ \hline
x+2 & \\
-(x-1) & \\ \hline
3 &
\end{array}$$

ce qui donne $x^3+2 = (x-1)(x^2+x+1)+3$ et donc $\dfrac{x^3+2}{x-1} = x^2+x+1+\dfrac{3}{x-1}$.

Etape 2. On factorise le dénominateur Q. On cherche les racines réelles, qui vont donner des facteurs de la forme $(x-a)$ avec $a \in \mathbb{R}$, et les racines complexes, qui sont deux à deux conjuguées. Si z est une racine complexe, alors $\bar{z}$ est aussi racine de Q, et on a un facteur de la forme $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z} = x^2-2\Re(z)x+|z|^2$ qui est un polynôme de degré 2 à coefficients réels. Donc la factorisation de Q est de la forme

$$Q(x) = r(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}(x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}$$

avec $r \in \mathbb{R}$, $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ et les polynômes $x^2+b_jx+c_j$ n'ayant pas de racine réelle.

Exemple B.13. On vetu factoriser $x^4+x^3-x^2+x-2$. On voit facilement que 1 est racine, donc $x-1$ est en facteur. On fait la division de $x^4+x^3-x^2+x-2$ par $x-1$ et on trouve $x^4+x^3-x^2+x-2 = (x-1)(x^3+2x^2+x+2)$. On voit que -2 est racine de x^3+2x^2+x+2, on fait la division de x^3+2x^2+x+2 par $x+2$ et on trouve $x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1)$. De plus, x^2+1 est de degré 2 sans racine réelle donc on ne peut plus factoriser. Finalement, $x^4+x^3-x^2+x-2 = (x-1)(x+2)(x^2+1)$.

Etape 3. Décomposition de f.

Théorème B.14. **(1)** Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x-a)^\alpha T(x)}$ et a n'est pas racine du polynôme T, alors

$$f(x) = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{G(x)}{T(x)}$$

où G est un autre polynôme avec $\deg G < \deg T$ et $A_1, \ldots, A_\alpha$ sont des constantes réelles.

(2) Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+bx+c)^\beta U(x)}$ et x^2+bx+c sans racine réelle n'est pas un facteur du polynôme U, alors

$$f(x) = \frac{B_\beta x + C_\beta}{(x^2+bx+c)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}x + C_{\beta-1}}{(x^2+bx+c)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{G(x)}{U(x)}$$

où G est un autre polynôme avec $\deg G < \deg U$ et $B_1, \ldots, B_\beta, C_1, \ldots, C_\beta$ sont des constantes réelles.

(3) La décomposition que l'on obtient lorsqu'on a appliqué **(1)** ou **(2)** à tous les facteurs de Q est unique.

Etape 4. Il reste à **trouver les constantes** du théorème. Pour cela, on peut tout réduire au même dénominateur et identifier, mais il est souvent plus rapide d'appliquer quelques astuces, que je vais expliquer sur des exemples.

Exemple B.15. Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2(x+1)}$. Les étapes 1 et 2 sont déjà faites. Le théorème nous dit qu'il existe des constantes A, B, C telles que $f(x) = \dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{(x-2)} + \dfrac{C}{x+1}$. Alors, en multipliant l'égalité par $(x-2)^2$ puis en faisant tendre x vers 2 on obtient : $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to 2} A + \lim_{x\to 2} B(x-2) + \lim_{x\to 2} \dfrac{C(x-2)^2}{x+1}$ soit $\dfrac{1}{3} = A$.

En multipliant l'égalité par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1 on obtient $-\dfrac{2}{9} = C$.

Remarque : on multiplie toujours par le facteur de plus haut degré qui apparaît ($(x-a)^\alpha$ dans le théorème).

Pour déterminer B, on peut utiliser une autre astuce : on multiplie par x puis on fait tendre x vers $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x(x-1)}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{Ax}{(x-2)^2} + \lim_{x\to+\infty} \dfrac{Bx}{x-2} + \lim_{x\to+\infty} \dfrac{Cx}{x+1}$, donc $0 = B + C$ et donc $B = -C = \dfrac{2}{9}$.

Donc $f(x) = \dfrac{1}{3(x-2)^2} + \dfrac{2}{9(x-2)} - \dfrac{2}{9(x+1)}$ dont on connaît les primitives :

$$-\frac{1}{3(x-2)} + \frac{2}{9}\ln|x-2| - \frac{2}{9}\ln|x+1| + K$$

(définie sur les intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 2[$ et $]2; +\infty[$; la constante K dépend de l'intervalle que l'on choisit).

Exemple B.16. Un exemple où le dénominateur a des racines complexes.

$f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$. L'étape 1 est déjà faite. Le dénominateur admet 1 pour racine, donc on peut le factoriser par $x-1$. En effectuant la division on obtient $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Le polynôme x^2+1 n'admet pas de racines réelles, donc l'étape 2 est terminée. Donc d'après le théorème, $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ pour des constantes A, B et C.

On va appliquer les astuces de l'exemple précédent pour déterminer A et B. Si on multiplie par $x-1$ puis on fait tendre x vers 1, on obtient $\frac{1}{2} = A$. Si on multiplie par x puis qu'on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = A + B$ donc $B = -A = -\frac{1}{2}$.

Pour déterminer C, on peut par exemple donner des valeurs particulières à x (qui ne sont pas racines du dénominateur !). Par exemple, pour $x=0$ on a $-1=-A+C$ donc $C=A-1=-\frac{1}{2}$. Donc

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\right].$$

Cherchons maintenant les primitives de f. On connaît celles de $\dfrac{1}{x-1}$ qui sont $\ln|x-1|+\text{cste}$.

On va réecrire $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$ dont on connaît les primitives : $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{Arctan}x+\text{cste}$.

Donc les primitives de f sont données par $\dfrac{1}{2}\left[\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{Arctan}x\right]+K$ pour une constante K qui dépend de l'intervalle sur lequel on définit la primitive ($]-\infty;1[$ ou $]1;+\infty[$).

Remarque B.17. Dans tous les cas, on va se ramener à déterminer les primitives de fonctions de la forme

- $\dfrac{u'}{u^n}$ qui sont $\ln|u|+K$ si $n=1$ et $-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ si $n>1$;
- $\dfrac{1}{x^2+bx+c}$ où x^2+bx+c n'a pas de racine réelle (on a donc $\Delta=b^2-4c<0$). On écrit alors x^2+bx+c comme le début du développement d'un carré ($x^2+bx+c=(x+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c$) et on se ramène par un changement de variable à une fonction du type $\frac{1}{t^2+1}$ dont les primitives sont $\operatorname{Arctan}t+K$.

Exemple B.18. Recherchons les primitives de $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+13}$. On a $x^2+4x+13=(x+2)^2-4+13=(x+2)^2+9=9\left(\dfrac{(x+2)^2}{3^2}+1\right)$. On pose $t=\dfrac{x+2}{3}$, d'où $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}x$.

Donc $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{9(t^2+1)}3\,\mathrm{d}t=\frac{3}{9}\operatorname{Arctan}t+K=\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+2}{3}\right)+K$.

Exemple B.19. Recherchons les primitives de $\dfrac{x}{x^2+2x+5}$. On a

$$\frac{x}{x^2+2x+5}=\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)}-\frac{2}{2(x^2+2x+5)}.$$

Le premier terme est de la forme $\frac{u'}{u}$, ses primitives sont $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\text{cste}$.

Pour le deuxième terme, on écrit le dénominateur comme le début du développement d'un carré puis on factorise par le terme constant : $x^2+2x+5=(x+1)^2-1+5=(x+1)^2+4=4\left(\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$. On va faire le changement de variable $t=\dfrac{x+1}{2}$ d'où $\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$, donc on a

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4(t^2+1)}2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}t+\text{cste}=\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\text{cste}.$$

Donc finalement les primitives de $\dfrac{x}{x^2+2x+5}$ sur $\mathbb{R}$ sont

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)+K.$$

III Equations différentielles

Introduction

Les équations différentielles apparaissent naturellement dès que l'on a une relation entre une fonction et ses dérivées successives (par exemple si la position d'un objet dans le temps dépend de sa vitesse).

Le problème général de la résolution des équations différentielles est très difficile, et nous ne savons pas résoudre toutes les équations différentielles. Nous allons en voir quelques unes ici que l'on sait résoudre.

A Equations différentielles linéaires du premier ordre

On considère l'équation

$$(E) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

où y est la fonction que l'on cherche, qui dépend de la variable x et qui est dérivable, et a et b sont des fonctions données.

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions dérivables f qui vérifient (E), *ie.* $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$ pour tout x.

Pour résoudre (E) on considère d'abord l'équation suivante :

$$(E') \quad y' = a(x)y,$$

dite *équation homogène* ou *équation sans second membre* associée.

Résolvons (E') : $(y' = a(x)y)$

Pour tout x tel que $y(x) \neq 0$, on a $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$.

Soit A une primitive de a. Alors $\ln|y| = A(x) + C$ où C est une constante. Donc $|y| = e^C e^{A(x)}$ et donc $y = Ke^{A(x)}$ où K est une constante telle que $|K| = e^C$. (Notons que 0 est aussi solution de (E'), donc $K = 0$ convient aussi). On en déduit :

Proposition A.1. Les solutions de l'équation $(E') \quad y' = a(x)y$ sont les fonctions de la forme $y = Ke^A$ où K est une constante réelle quelconque et où A est une primitive de a.

Maintenant nous voulons résoudre (E).

- ✦ Soit on connaît une solution particulière f de (E). Les solutions générales de (E) sont alors les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) + Ke^{A(x)}$.
- ✦ Soit on applique la méthode de la variation de la constante : la méthode consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme $y(x) = K(x)e^{A(x)}$ (maintenant K est une fonction).
  On a alors $y'(x) = K'(x)e^{A(x)} + K(x)e^{A(x)}A'(x) = K'(x)e^{A(x)} + K(x)e^{A(x)}a(x)$.
  Ensuite, on reporte dans (E) :
  $K'(x)e^{A(x)} + K(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x)$ donc $K'(x)e^{A(x)} = b(x)$ et donc $K'(x) = b(x)e^{-A(x)}$.
  Notons φ une primitive de be^{-A}. Alors $K(x) = \varphi(x) + \lambda$ où λ est une constante.

Les solutions de (E) sont alors $K(x)e^{A(x)} = (\varphi(x) + \lambda)e^{A(x)}$.

Exemple A.2. Soit à résoudre $(E) \quad x^2y' + (2+x)y = \dfrac{1}{x}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}^*$. On se ramène à l'équation

$$(E_1) \quad y' = \frac{2+x}{x^2}y + \frac{1}{x^3}$$

en divisant par x^2 (car x est non nul sur I). L'équation sans second membre associée est $(E') \quad y' = \dfrac{2+x}{x^2}y$, ce qui donne $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{2+x}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, d'où $\ln|y| = \dfrac{2}{x} - \ln|x| + C = \dfrac{2}{x} + \ln\dfrac{1}{|x|} + C$, donc $|y| = e^C e^{\frac{2}{x}} \frac{1}{|x|}$.

Donc finalement les solutions de (E') sont les fonctions de la forme

$$y(x) = K\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x}$$

définies sur I, avec $K \in \mathbb{R}$ constante.

On applique maintenant la méthode de la variation de la constante pour trouver les solutions de (E_1) : on cherche les solutions sous la forme $y(x) = \dfrac{K(x)e^{\frac{2}{x}}}{x}$. Cela conduit à

$$y'(x) = \frac{\left(K'(x)e^{\frac{2}{x}} - \frac{2}{x^2}K(x)e^{\frac{2}{x}}\right)x - K(x)e^{\frac{2}{x}}}{x^2}.$$

En reportant dans (E), on obtient $xK'(x)e^{\frac{2}{x}} - \dfrac{2}{x}K(x)e^{\frac{2}{x}} - K(x)e^{\frac{2}{x}} + (2+x)\dfrac{K(x)e^{\frac{2}{x}}}{x} = \dfrac{1}{x}$. Après réduction on a $xK'(x)e^{\frac{2}{x}} = \dfrac{1}{x}$ et donc $K'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$ (qui est du type $v'e^v$), d'où $K(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}} + \lambda$ avec λ dans $\mathbb{R}$.

Finalement, $y(x) = \dfrac{1}{2x} + \lambda\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x}$ pour $x \in I$ avec λ constante réelle donne l'ensemble des solutions de (E).

Proposition A.3. Soit (E') une équation différentielle linéaire *homogène* du premier ordre. Soient y_1 et y_2 des solutions de (E') et soient λ_1 et λ_2 des réels.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solution de (E').

Démonstration. Notons (E') : $y' + ay = 0$, on a donc $y_1' + ay_1 = 0$ et $y_2' + ay_2 = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + a(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\
&= \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a\lambda_1 y_1 + a\lambda_2 y_2 \\
&= \lambda_1(y_1' + ay_1) + \lambda_2(y_2' + ay_2) \\
&= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque A.4. En particulier, la somme de deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est encore solution, et les multiples d'une solution d'une équation différentielle linéaire homogène sont encore solutions.

B Equations différentielles linéaires du second ordre

On ne considérera ici que des équations de la forme suivante :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = d(x),$$

où a, b et c sont des *constantes* avec $a \neq 0$ et d est une fonction.

Résoudre l'équation (E) signifie trouver toutes les fonctions deux fois dérivables f qui vérifient (E), *ie.* $af''(x)+bf'(x)+cf(x)=d(x)$ pour tout x.

On résout d'abord l'équation sans second membre associée : $(E') \quad ay''+by'+cy=0$.

La méthode consiste à chercher les solutions de la forme $y(x)=e^{rx}$, ce qui mène à l'équation $ar^2+br+c=0$, appelée *équation caractéristique* de (E') (ou de (E)).

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta=b^2-4ac$. On obtient :

- Si $\Delta>0$: l'équation caractéristique a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $r_1\neq r_2$.
  Les solutions de (E') sont alors définies par $y(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ pour des constantes A et B.
- Si $\Delta=0$: l'équation caractéristique a une racine double : $r_1=r_2=-\frac{b}{2a}$.
  Les solutions de (E') sont alors définies par $y(x)=(Ax+B)e^{r_1x}$.
- Si $\Delta<0$: l'équation caractéristique n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais elle a deux racines complexes conjuguées : notons-les $u\pm iv$ (avec $u=-\frac{b}{2a}$ et $v=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$).
  Les solutions de (E') sont alors définies par $y(x)=(A\cos(vx)+B\sin(vx))e^{ux}$.

Proposition B.1. Les solutions générales de l'équation (E) sont données par la somme des solutions de (E') ci-dessus et d'une solution particulière de (E).

Il nous faut donc savoir trouver une solution particulière.

Nous ne considérerons dans ce cours que quelques possibilités pour le second membre $d(x)$:

- $d(x)$ est un polynôme de degré n : on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme
  - de degré n si $c\neq 0$,
  - de degré $n+1$ si $c=0$ et $b\neq 0$,
  - de degré $n+2$ si $c=0$ et $b=0$.
- $d(x)=P(x)e^{\omega x}$ avec $P(x)$ un polynôme et $\omega\neq 0$: on cherche une solution particulière sous la forme $f(x)=z(x)e^{\omega x}$ où z est un polynôme, et on se ramène au cas précédent.
- $d(x)=\lambda\cos\omega x+\mu\sin\omega x$ où λ,μ,ω sont des réels : on cherche une solution particulière de la forme $f(x)=\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ d'abord, et s'il n'en existe pas on la cherche de la forme $f(x)=x(\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x)$.

Résumé On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre, en faisant attention au degré des polynômes qui interviennent, et en multipliant éventuellement (si nécessaire) par x dans le dernier cas.

Exemple B.2. Soit à résoudre $y''-y=x^3+x^2$.

- On résout d'abord l'équation homogène : $y''-y=0$. L'équation caractéristique est $r^2-1=0$, qui a pour discriminant $\Delta=4>0$ et pour solutions $r_1=1$ et $r_2=-1$. Donc les solutions de l'équation homogène sont $y(x)=Ae^x+Be^{-x}$.
- On cherche une solution particulière de la forme $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ (polynôme de degré 3). On a

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$$
$$f''(x)=6\alpha x+2\beta$$

donc

$$x^3+x^2=f''(x)-f(x)=-\alpha x^3-\beta x^2+(6\alpha-\gamma)x+(2\beta-\delta).$$

En identifiant :

$$\begin{cases} -\alpha=1 \\ -\beta=1 \\ 6\alpha-\gamma=0 \\ 2\beta-\delta=0 \end{cases}$$

donc $\alpha=-1$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$ et $\delta=-2$.

✦ Finalement, les solutions générales de l'équation différentielle complète sont

$$Ae^x + Be^{-x} + f(x) = Ae^x + Be^{-x} - x^3 - x^2 - 6x - 2.$$

Exemple B.3. Soit à résoudre $y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$.

✦ On résout d'abord l'équation homogène : $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 > 0$ et pour racines 1 et 2. Donc les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$.

✦ On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = z(x)e^{-x}$ où z est un polynôme. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} \\ f''(x) &= z''(x)e^{-x} - 2z'(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} \end{aligned}$$

donc

$$xe^{-x} = f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \left[z''(x) - 5z'(x) + 6z(x)\right]e^{-x}$$

d'où $x = [z''(x) - 5z'(x) + 6z(x)]$: on s'est ramenés à une équation différentielle en z dont le second membre est maintenant un polynôme.

On cherche maintenant z sous forme d'un polynôme, de degré 1 : $z(x) = \alpha x + \beta$. On a

$$\begin{aligned} z'(x) &= \alpha \\ z''(x) &= 0 \end{aligned}$$

donc $x = z''(x) - 5z'(x) + 6z(x) = -5\alpha + 6\beta + 6\alpha x$. Donc $\alpha = \frac{1}{6}$ et $\beta = \frac{5}{36}$.

✦ Finalement, les solutions générales de l'équation différentielle complète sont

$$Ae^x + Be^{2x} + z(x)e^{-x} = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{36}(6x+5)e^{-x}.$$

Exemple B.4. Soit à résoudre $y'' + 4y = \cos \omega x$ avec $\omega > 0$.

✦ On résout d'abord l'équation homogène : $y'' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = -16 < 0$ et qui n'a pas de solution réelle. Ses racines complexes sont $\pm 2i = 0 \pm 2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{0x} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

✦ On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\alpha\omega \sin \omega x + \beta\omega \cos \omega x \\ f''(x) &= -\alpha\omega^2 \cos \omega x - \beta\omega^2 \sin \omega x \end{aligned}$$

donc $\cos \omega x = f''(x) + 4f(x) = (4-\omega^2)\alpha \cos \omega x + (4-\omega^2)\beta \sin \omega x$.

✧ $\omega^2 \neq 4$ (*i.e.* $\omega \neq 2$), alors $\alpha = \dfrac{1}{4-\omega^2}$ et $\beta = 0$, et $f(x) = \dfrac{1}{4-\omega^2}\cos \omega x$.

✧ $\omega^2 = 4$ (*i.e.* $\omega = 2$), il n'y a pas de valeurs possibles pour α et β (on ne peut pas avoir $\cos 2x = 0$ pour tout x). On cherche donc une solution particulière de la forme $f(x) = x(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$ (rappelons que $\omega = 2$ ici). On obtient alors $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{4}$, donc $f(x) = \dfrac{x}{4}\sin 2x$.

✦ Finalement, les solutions générales de l'équation complète sont $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \dfrac{1}{4-\omega^2}\cos \omega x$ si $\omega \neq 2$ et $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \dfrac{x}{4}\sin 2x$ si $\omega = 2$.

Proposition B.5. Soit (E') une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Soient y_1 et y_2 des solutions de (E') et soient λ_1 et λ_2 des réels.
Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solution de (E').

Démonstration. (E') est de la forme $y''+ay'+by=0$, on a $y_1''+ay_1'+by_1=0$ et $y_2''+ay_2'+by_2=0$. Donc

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)''+a(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)'+b(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)\\
&\quad=\lambda_1 y_1''+\lambda_2 y_2''+a(\lambda_1 y_1'+\lambda_2 y_2')+b(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)\\
&\quad=\lambda_1(y_1''+ay_1'+by_1)+\lambda_2(y_2''+ay_2'+by_2)\\
&\quad=0+0=0.
\end{aligned}$$

□

Remarque B.6. En particulier, la somme de deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est encore solution, et les multiples d'une solution d'une équation différentielle linéaire homogène sont encore solutions.