Algèbre Linéaire

S2 Mathématiques-Informatique

R. Taillefer

4 novembre 2013

Table des matières

Corps

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ est un *corps* ; en général il s'agira de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$, mais nous allons en redonner la définition générale pour que vous ayiez précisément les axiomes.

Définition. *Un* ***corps*** *est un ensemble non vide* $\mathbb{K}$*, muni de deux applications, dites* lois *: la* somme *ou* addition $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *et la* multiplication $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*, qui vérifient :*

(1) *pour tous a, b, c dans $\mathbb{K}$, on a $(a+b)+c = a+(b+c)$ (associativité),*

(2) *il existe un élément $0 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{K}$ on ait $0 + a = a = a + 0$; cet élément 0 est unique et il est appelé* ***élément neutre*** *ou* ***nul*** *(pour l'addition) de $\mathbb{K}$,*

(3) *pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe un élément $a' \in \mathbb{K}$ tel que $a + a' = 0 = a' + a$; pour chaque a, l'élément a' est unique, il est appelé* ***opposé*** *de a et il est noté $-a$.*

(4) *pour tous a, b dans $\mathbb{K}$, on a $a + b = b + a$. On dit que l'addition est commutative.*

(5) *pour tous a, b, c dans $\mathbb{K}$ on a $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) a \cdot c$ (associativité),*

(6) *il existe un élément $1 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{K}$ on ait $1 \cdot a = a = a \cdot 1$; cet élément 1 est unique et il est appelé* ***élément unité*** *de $\mathbb{K}$,*

(7) *pour tous a, b, c dans $\mathbb{K}$ on a $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ et $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivité),*

(8) *pour tous a, b dans $\mathbb{K}$, on a $a \cdot b = b \cdot a$.*

(9) *pour tout $a \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, il existe $a'' \in \mathbb{K}$ tel que $a \cdot a'' = 1 = a'' \cdot a$; pour chaque a, l'élément a'' est unique, il est appelé* ***inverse*** *de a et il est noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$,*

Exemple. Les exemples avec lesquels nous travaillerons sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$. Mais nous pouvons citer d'autres exemples de corps : si p est un nombre premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps ; l'ensemble de toutes les fractions rationnelles (quotients de fonctions polynômes) à coefficients réels $\mathbb{R}(X)$ est un corps.

I Matrices

A Définitions et règles de calcul

Définition A.1. *Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$. Une **matrice** $n \times p$ **à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$, que l'on note*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

*ou (a_{ij}) en abrégé (ou encore $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$). Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont **les coefficients** de la matrice : le premier indice est celui de la ligne et le deuxième est celui de la colonne. On dit que a_{ij} est le coefficient (i, j) de la matrice.*

*Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée**.*

Si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une matrice $n \times p$ et si $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s}$ est une matrice $r \times s$, alors $A = B$ si et seulement si $n = r$, $p = s$ et $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i et j.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dans les notations ci-dessus, $a_{11} = 1 = a_{22} = a_{23}$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = -2$ et $a_{21} = 2$.

La matrice 2×2 $B = (b_{ij})$ définie par $b_{ij} = i + 2j$ pour tous i et j est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Notation A.2. L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $n = p$.

Définition A.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les coefficients **diagonaux** de A sont les coefficients a_{ii} pour $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

- ***diagonale** si seuls les coefficients diagonaux de A sont éventuellement non nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$. La matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.*
- ***triangulaire supérieure** si les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. La matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.*
- ***triangulaire inférieure** si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$. La matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.*

Exemple. Les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont

- diagonales sont les $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,
- triangulaires supérieures sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$,

➢ triangulaires inférieures sont les $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

avec a, b, c dans $\mathbb{R}$.

Définition A.4. *Les matrices de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ sont appelées* ***matrices ligne****. Elles ont une seule ligne.*
Les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées ***matrices colonne****. Elles ont une seule colonne.*

Notation A.5. La **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux placés sur la diagonale, qui valent 1.

Par exemple $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, etc.

La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée 0, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

A.1 Opérations sur les matrices

Définition A.6.

➢ ***Addition*** *ou* ***somme*** *de matrices.*
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La ***somme des matrices*** *A* ***et*** *B, notée $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, est la matrice dont le coefficient (i, j) est $a_{ij} + b_{ij}$. [Attention : pour pouvoir additionner deux matrices il faut qu'elles aient même taille !]*

➢ *Multiplication d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$.*
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice λA est la matrice dont le coefficient (i, j) est λa_{ij}.

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $-B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriétés A.7. Soient A, B, C trois matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ et on note cette matrice $A + B + C$. On dit que la somme est **associative**.

(ii) $A + B = B + A$. On dit que la somme est **commutative**.

(iii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$. On dit que la multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ est **distributive** par rapport à la somme de matrices.

(iv) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(v) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ et on note cette matrice $\lambda\mu A$.

Démonstration. Nous allons démontrer **(i)**, les autres sont similaires et sont laissées en exercice.

Posons donc $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. Alors le coefficient (i, j) de $A + B$ est $a_{ij} + b_{ij}$ donc le coefficient (i, j) de $(A + B) + C$ est $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$. Le coefficient (i, j) de $B + C$ est $b_{ij} + c_{ij}$ donc le coefficient (i, j) de $A + (B + C)$ est $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Mais l'addition dans $\mathbb{K}$ est associative, donc $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. C'est vrai pour tous les (i, j), donc $(A + B) + C = A + (B + C)$. □

Nous allons maintenant définir le produit de deux matrices. Nous commencerons par le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne (dans cet ordre !).

Définition A.8. *Soit* $A = (a_1 \cdots a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *une matrice ligne et soit* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *une matrice colonne. Le produit de* A *par* B*, noté* AB*, est la matrice* 1×1 *dont le coefficient est* $a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p = \sum_{j=1}^{p} a_j b_j$. *[Attention. C'est le même* p *dans les deux matrices.]*

Exemple. $(2 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (2 \times 1 + (-1) \times (-3) + 0 \times 7) = (5).$

On fait une première généralisation, qui interviendra aussi dans la suite.

Définition A.9. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et soit* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *une matrice colonne. Le produit de* A *par* B*, noté* AB*, est la matrice colonne* $n \times 1$ *dont la* $i^{\text{ème}}$ *ligne est le produit de la* $i^{\text{ème}}$ *ligne de* A *par* B*, comme défini précédemment. [Attention. Ici aussi, c'est le même* p *dans les deux matrices.]*

Remarque. Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est donc $a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + \cdots + a_{ip} b_p = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_j$.

Exemple.

➢ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Alors $(2 \quad 3 \quad -1)\, B = (32)$ et $(1 \quad -4 \quad 5)\, B = (5)$ donc $AB = \begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$.

➢ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$.

Venons-en à la définition générale du produit de matrices.

Définition A.10. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. ***Le produit des matrices*** A ***et*** B*, noté* $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$*, est la matrice* $n \times q$ *dont la* $j^{\text{ème}}$ *colonne est le produit de* A *par la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* B.

Attention. Ce produit n'est défini que si le nombre p *de colonnes de* A *est égal au nombre* p *de lignes de* B.

Remarque A.11. Si on note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant k \leqslant q}$, alors le coefficient (i, k), $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant q$, est $\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 9 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$. On a déjà $A \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$. On calcule $A \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -52 \end{pmatrix}$. On a donc $AB = \begin{pmatrix} 32 & 17 \\ 5 & -52 \end{pmatrix}$.

Remarque. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices diagonales, alors le calcul du produit est facile :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Lemme A.12. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $E_k \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne dont le $k^{\text{ème}}$ coefficient est 1 et les autres sont nuls. Pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on note $F_\ell \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ la matrice ligne dont le $\ell^{\text{ème}}$ coefficient est 1 et les autres sont nuls.
Alors AE_k est la $k^{\text{ème}}$ colonne de A et $F_\ell A$ est la $\ell^{\text{ème}}$ ligne de A.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})$ et $F_\ell = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{pmatrix}$. On a donc $f_\ell = 1$ et $f_r = 0$ pour $r \neq \ell$. Par définition du produit de matrices, $F_\ell A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne à p colonnes, dont le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\sum_{i=1}^n f_i a_{ij} = f_\ell a_{\ell j} = a_{\ell j}$. C'est bien le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la $\ell^{\text{ème}}$ ligne de A.

Posons $E_k = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}$. On a donc $e_k = 1$ et $e_r = 0$ pour $r \neq k$. Par définition du produit de matrices, AE_k est une matrice colonne à n lignes, dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\sum_{j=1}^p a_{ij} e_j = a_{ik} e_k = a_{ik}$. C'est bien le $i^{\text{ème}}$ coefficient de la $k^{\text{ème}}$ colonne de A. □

Propriétés A.13. Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- **(i)** $(A + A')B = AB + A'B$ et $A(B + B') = AB + AB'$. On dit que le produit de matrices est **distributif** par rapport à la somme de matrices.
- **(ii)** $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ et on note cette matrice λAB.
- **(iii)** $I_n A = A$ et $AI_p = A$.
- **(iv)** $(AB)C = A(BC)$ et on note cette matrice ABC. On dit que le produit de matrices est **associatif**.

Démonstration. Les premières propriétés résultent des propriétés correspondantes pour les éléments de $\mathbb{K}$. Démontrons **(ii)** et **(iv)**.

(iii) Avec les notations du lemme **A.12**), on peut écrire $I_n = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ (ligne par ligne). La $i^{\text{ème}}$ ligne de $I_n A$ est alors le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de I_n par A, c'est-à-dire $F_i A$. Mais d'après le lemme **A.12**), c'est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. On en déduit que $I_n A = A$.
Pour l'autre égalité, on procède de manière similaire, en notant $I_p = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & E_p \end{pmatrix}$ (colonne par colonne).

(iv) Notons C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice C, avec $1 \leqslant j \leqslant r$.
Par définition du produit de matrices, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $(AB)C$ est $(AB)C_j$. Toujours par définition du produit de matrices, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $A(BC)$ est AD_j où D_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de BC. Or celle-ci est $D_j = BC_j$. Donc la $j^{\text{ème}}$ colonne de $A(BC)$ est $A(BC_j)$. Pour démontrer que $(AB)C = A(BC)$, il suffit donc de démontrer que $(AB)C_j = A(BC_j)$ pour tout j. Il suffit donc de démontrer la propriété lorsque C est une matrice colonne $q \times 1$. On suppose donc dans la suite que C est une matrice colonne (*ie.* $r = 1$).
Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$. Alors $C = c_1 E_1 + \cdots + c_q E_q$ (notations du lemme **A.12**). On veut donc comparer
$$(AB)C = (AB)(c_1 E_1 + \cdots + c_q E_q) = c_1 (AB) E_1 + \cdots + c_q (AB) E_q$$
et
$$A(BC) = A(B(c_1 E_1 + \cdots + c_q E_q)) = A(c_1 BE_1 + \cdots + c_q BE_q) = c_1 A(BE_1) + \cdots + c_q A(BE_q).$$
Soit $1 \leqslant j \leqslant q$. Alors $(AB)E_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB d'après le lemme **A.12**. De même, BE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de B donc par définition du produit de matrices, $A(BE_j)$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB. Donc $(AB)E_j = A(BE_j)$. On en déduit le résultat. □

Remarque. Attention. Le produit de matrices n'est **pas** commutatif.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Notation A.14. Soit A une matrice carrée $n \times n$. On pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ puis, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^k = AA^{k-1}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^0 = I_2$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $A^3 = AA^2 = A^2A = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$ (c'est l'associativité du produit qui permet de calculer A^3 par l'une quelconque de ces formules. Pour calculer A^4 on peut calculer l'une quelconque des expressions suivantes : $AA^3 = A^3A = AA^2A = (A^2)^2$ et on obtient $A^4 = \begin{pmatrix} 55 & 26 \\ 39 & 42 \end{pmatrix}$).

Autre exemple, $B = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B^2 = 0$ et donc $B^k = B^{k-2}B^2 = 0$ pour tout $k \geqslant 2$.

Définition-Proposition A.15. On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Une telle matrice B est alors unique, on dit que c'est **l'inverse de** A et on la note A^{-1}.
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

- **(i)** $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
- **(ii)** Pour toutes $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Plus généralement, un produit $A_1 \cdots A_k$ de matrices inversibles est inversible et $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.
- **(iii)** Pour toute $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ on a $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, avec $(A^{-1})^{-1} = A$.

Nous verrons une méthode pratique pour déterminer l'inverse d'une matrice inversible plus loin.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux matrices B et C telle que $AB = I_n = BA$ et $AC = I_n = CA$. Alors

$$\begin{aligned} & BAC = B(AC) = BI_n = B \\ \text{et} \quad & BAC = (BA)C = I_nC = C \end{aligned}$$

donc $B = C$. La matrice B, si elle existe, est donc bien unique.

- **(i)** $I_nI_n = I_n$ donc I_n est inversible d'inverse I_n.
- **(ii)** Supposons A et B inversibles. On a $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ en utilisant l'associativité du produit, et de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
- **(iii)** Par définition de A^{-1}, on a $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces identités nous donnent aussi que A^{-1} est inversible d'inverse A. □

Définition A.16. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. La **matrice transposée de** A est la matrice ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ dont le coefficient (j,i), $1 \leqslant j \leqslant p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est a_{ij}. [On échange lignes et colonnes.]*

Exemple.

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \qquad {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}, \qquad {}^t\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \end{pmatrix}$$

Propriétés A.17. ➢ Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On a ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t({}^tA) = A$.

➢ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On a ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.

➢ Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On a ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

➢ Si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration. ➢ Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Le coefficient (i,j) de ${}^t(A+B)$ est $a_{ji} + b_{ji}$ et celui de ${}^tA + {}^tB$ aussi.

➢ Dans les deux matrices, le coefficient (i,j) est λa_{ji}.

➢ Posons $AB = (c_{ik})$. Le coefficient (i,k) de ${}^tB\, {}^tA$ est $\sum_{j=1}^{p} b_{ji} a_{kj} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} b_{ji} = c_{ki}$, c'est bien celui de ${}^t(AB)$.

➢ On a ${}^t(A^{-1})\, {}^tA = {}^tA A^{-1} = {}^tI_n = I_n$ et ${}^tA\, {}^t(A^{-1}) = {}^tA^{-1}A = {}^tI_n = I_n$.

□

B Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

Définition B.1. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On considère les opérations suivantes, dites **opérations élémentaires sur les lignes** de la matrice A :*

(L1) *Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul (où $1 \leqslant i \leqslant n$).*

(L2) *Ajouter à $i^{\text{ème}}$ ligne de A un multiple de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A, où $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$.*

Nous allons interpréter ces opérations autrement.

Définition B.2. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2.*

➢ *Pour tout entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul, on note $D_i(\alpha)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 sauf le $i^{\text{ème}}$ qui est égal à α.*

➢ *Pour tous entiers i et j avec $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $T_{ij}(\lambda)$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, dont le coefficient (i,j) est égal à λ et dont les autres coefficients sont nuls.*

*Ces matrices sont appelées **matrices élémentaires**.*

Exemple. ➢ Si $n = 2$, on a $D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $T_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

➢ Si $n = 4$, on a par exemple $D_3(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_{24}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés B.3. ➢ ${}^t(D_i(\alpha)) = D_i(\alpha)$ puisque $D_i(\alpha)$ est diagonale et ${}^t(T_{ij}(\lambda)) = T_{ji}(\lambda)$.

➢ Les matrices élémentaires sont inversibles, avec $(D_i(\alpha))^{-1} = D_i(\alpha^{-1})$ et $(T_{ij}(\lambda))^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.

➢ Tout produit de matrices élémentaires est inversible et son inverse est aussi produit de matrices élémentaires.

Démonstration. Les deux premières propriétés sont faciles à vérifier. Pour la troisième, soit $A = U_1 \cdots U_k$ avec les U_i élémentaires. D'après la deuxième propriété, chaque U_i est inversible et son inverse est une matrice élémentaire. Donc d'après le lemme **A.15**, A est inversible d'inverse $A^{-1} = U_k^{-1} \cdots U_1^{-1}$ qui est un produit de matrices élémentaires. $\square$

Proposition B.4. On reprend les hypothèses de la définition **B.2**.

- ➢ La matrice A' obtenue à partir de A par l'opération **(L1)** est $A' = D_i(\alpha)A$.
- ➢ La matrice A' obtenue à partir de A par l'opération **(L2)** est $A'' = T_{ij}(\lambda)A$.

Démonstration de la proposition. Posons $A = (a_{kl})$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant p$). On reprend les matrices F_k du lemme **A.12**.

La $k^{\text{ème}}$ ligne de $D_i(\alpha)A$ est obtenue en faisant le produit de la $k^{\text{ème}}$ ligne de $D_i(\alpha)$ par A. Si $k \neq i$, la $k^{\text{ème}}$ ligne de $D_i(\alpha)$ est F_k et d'après le lemme on sait que F_kA est égale à la $k^{\text{ème}}$ ligne de A, qui reste donc inchangée. Si $k = i$, la $k^{\text{ème}}$ ligne de $D_i(\alpha)$ est égale à αF_i, et le produit $\alpha F_i A$ est égal à α fois la $i^{\text{ème}}$ ligne de A. Finalement, la $k^{\text{ème}}$ ligne de A' est égale à celle de A si $k \neq i$ et est égale à α fois la $i^{\text{ème}}$ ligne de A si $k = i$. C'est ce que l'on voulait.

La $k^{\text{ème}}$ ligne de $T_{ij}(\lambda)A$ est obtenue en faisant le produit de la $k^{\text{ème}}$ ligne de $T_{ij}(\lambda)$ par A. Si $k \neq i$, la $k^{\text{ème}}$ ligne de $T_{ij}(\lambda)$ est F_k et d'après le lemme on sait que F_kA est égale à la $k^{\text{ème}}$ ligne de A, qui reste donc inchangée. Si $k = i$, la $k^{\text{ème}}$ ligne de $T_{ij}(\lambda)$ est égale à $F_i + \lambda F_j$, et le produit $(F_i + \lambda F_j)A = F_iA + \lambda F_jA$ est égal à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A plus λ fois la $j^{\text{ème}}$ ligne de A. Finalement, la matrice A'' est bien obtenue à partir de A en ajoutant λ fois la $j^{\text{ème}}$ ligne de A à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A sans changer le reste. C'est ce que l'on voulait. $\square$

Définition-Proposition B.5. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en posant

$$A \sim B \iff \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ produit de matrices élémentaires telle que } B = PA.$$

On dit alors que A et B sont **ligne-equivalentes**.

Démonstration.

- ➢ (Réflexive) On a $A \sim A$ en prenant $P = I_n = D_1(1)$.
- ➢ (Symétrique) Si $A \sim B$, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que $B = PA$. On a donc $A = P^{-1}B$ et P^{-1} est un produit de matrices élémentaires d'après les propriétés **B.3** donc on a bien $B \sim A$.
- ➢ (Transitive) Si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors il existe $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, produits de matrices élémentaires, telles que $B = PA$ et $C = QB$. Alors $C = QPB$ et QP est bien un produit de matrices élémentaires donc $A \sim C$. $\square$

Remarque B.6. Soit A une matrice. La matrice obtenue en permutant deux lignes de A est ligne-équivalente à A.

En effet, la matrice $D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$ est obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et j.

C Matrices échelonnées, méthode de Gauss et applications.

Définition C.1. *On appelle **élément de tête** d'une ligne non nulle d'une matrice l'élément non nul situé le plus à gauche de la ligne.*

Définition C.2. ➢ *Une matrice est dite **échelonnée** si elle remplit les deux conditions suivantes :*

(E1) *Toutes ses lignes non nulles sont situées au-dessus de ses lignes nulles.*

(E2) *Chaque élément de tête d'une ligne se trouve dans une colonne strictement à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.*

On remarque que dans une matrice échelonnée, tous les éléments d'une colonne qui sont sous un élément de tête sont nuls.

➢ *Une matrice est dite* ***réduite*** *si elle remplit les deux conditions suivantes :*

(R1) *L'élément de tête de chaque ligne (non nulle) vaut* 1.

(R2) *Chaque* 1 *de tête d'une ligne est le seul élément non nul de sa colonne.*

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} {\color{red}*} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}*} & * \end{pmatrix}$ est échelonnée (les ${\color{red}*}$ représentent les éléments de tête, qui sont quelconques (non nuls), et les $*$ sont des réels quelconques) mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & {\color{green}-2} & 1 \\ 0 & {\color{blue}3} & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée car l'élément de tête de la troisième ligne $({\color{blue}3})$ n'est pas à droite ce celui de la deuxième ligne $({\color{green}-2})$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite, mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & {\color{blue}3} & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & {\color{green}1} & * \end{pmatrix}$ est échelonnée mais pas réduite (à cause du ${\color{blue}3}$ situé au-dessus du ${\color{green}1}$ de tête de la troisième ligne).

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont réduites mais pas échelonnées.

Remarque C.3. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Si A est échelonnée, alors elle est triangulaire supérieure. La réciproque est fausse.

Si A est échelonnée réduite sans ligne nulle, alors $A = I_p$.

Vérifions cela. Notons $A = (a_{ij})$ et $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Supposons que A est échelonnée. L'élément de tête de chaque ligne L_i est en position (i, j) avec $j \geqslant i$ (car strictement à droite de celui de L_{i-1}). Donc A est triangulaire supérieure.

Si de plus A est réduite, les éléments de tête sont des 1. Supposons que A n'ait pas de ligne nulle. Si $A \neq I_p$, alors il existe une ligne L_k dont l'élément de tête est en position (k, j) avec $j > k$. Donc, pour tout $i \geqslant k$, l'élément de tête de L_i (qui existe puisque $L_i \neq 0$) est en position (i, j) avec $j > i$. Ceci est impossible dans la ligne L_p : contradiction. Donc $A = I_p$.

Théorème C.4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice quelconque. Alors

(i) A est ligne-équivalente à une matrice échelonnée.

(ii) A est ligne-équivalente à une matrice réduite.

(iii) A est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite.

Démonstration. Il est clair que les résultats **(i)** et **(ii)** se déduisent de **(iii)**. Démontrons donc **(iii)**.

Si la matrice A est nulle il n'y a rien à faire.

Supposons donc que A n'est pas nulle. On raisonne par récurrence sur le nombre de colonnes de A. On considère donc la propriété suivante, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathscr{P}_k$ Pour toute matrice non nulle A à k colonnes, il existe une matrice P, qui est un produit de matrices élémentaires, telle que PA soit échelonnée réduite.

➢ $\underline{k = 1}$. Soit A une matrice colonne, $A = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Comme A n'est pas nulle, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_i \neq 0$. On sait qu'il existe une matrice P_1, produit de matrices élémentaires, telle que $P_1 A = {}^t\begin{pmatrix} a_i & \cdots & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (où a_1 est maintenant en $i^{\text{ème}}$ position). On multiplie $P_1 A$ sur la gauche par $D_1(a_i^{-1})$ pour obtenir $A' = {}^t\begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. On multiplie ensuite A' sur la gauche par le produit des $T_{k1}(-a_k)$ pour $k \neq i$ et par $T_{i1}(-a_1)$ pour obtenir une matrice P, produit de matrices élémentaires, telle que $PA = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite. Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

➢ $\underline{k \geqslant 2}$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à k colonnes. Posons $A = \begin{pmatrix} C & B \end{pmatrix}$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la première colonne de A et $B \in \mathcal{M}_{n,k-1}(\mathbb{K})$ est la matrice formée des $k-1$ autres colonnes de A.
On suppose $\mathscr{P}_{k-1}$ vraie.
Si $C = 0$, alors B est non nulle et d'après $\mathscr{P}_{k-1}$ il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que PB est échelonnée réduite. Donc $PA = \begin{pmatrix} 0 & PB \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.
Si $C \neq 0$, d'après $\mathscr{P}_1$ il existe $P_1 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que P_1C est une matrice colonne échelonnée réduite non nulle, c'est-à-dire $P_1C = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Alors $P_1A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ où $* \in \mathcal{M}_{1,k-1}(\mathbb{K})$ est quelconque et $A' \in \mathcal{M}_{n-1,k-1}(\mathbb{K})$. Si $A' = 0$ alors P_1A est échelonnée réduite. Supposons donc que $A' \neq 0$.
Si $n = 2$, la matrice A' n'a qu'une ligne. Si a' est l'élément de tête de cette ligne, on multiplie la deuxième ligne de P_1A par $\frac{1}{a'}$ pour que l'élément de tête devienne 1, puis on ajoute un multiple approprié de cette deuxième ligne à la première ligne pour que la matrice obtenue soit échelonnée réduite.
Si $n \geqslant 3$, alors A' a au moins 2 lignes et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_{k-1}$ à A' : il existe une matrice $Q \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, telle que QA' soit échelonnée réduite. Posons $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, alors $P_2P_1A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & QA' \end{pmatrix}$ est échelonnée.
Vérifions que P_2 est bien un produit de matrices élémentaires. Posons $Q = R_1 \cdots R_s$ avec les $R_i \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ matrices élémentaires. Alors $P_2 = \tilde{R}_1 \cdots \tilde{R}_s$ où $\tilde{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_i \end{pmatrix}$. De plus, si $R_i = D_j(\alpha)$, alors $\tilde{R}_i = D_{j+1}(\alpha)$ et si $R_i = T_{jl}(\lambda)$ alors $\tilde{R}_i = T_{j+1,l+1}(\lambda)$, donc les $\tilde{R}_i$ sont des matrices élémentaires dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Donc P_2 est un produit de matrices élémentaires.
Enfin, pour avoir une matrice échelonnée réduite, on ajoute à la première ligne de P_2P_1A des multiples appropriés des autres lignes de façon à ce que les 1 de tête soient les seuls éléments non nuls de leurs colonnes. □

En pratique. Soit A une matrice.

(1) On identifie la colonne C la plus à gauche contenant au moins un coefficient non nul, celui de la ligne L.

(2) On ajoute des multiples adéquats de L aux autres lignes pour faire apparaître des 0 dans le reste de la colonne C.

(3) On recommence les étapes (1) et (2) en ignorant la ligne L de la matrice.

Ensuite,

➢ pour échelonner, on permute des lignes de la matrice,

➢ pour réduire, on multiplie les lignes de la matrice par des scalaires non nuls pour que les éléments de tête soient des 1, puis on refait l'étape (2) avec chaque ligne non nulle, cette fois en allant des colonnes de droite vers les colonnes de gauche.

Ces deux opérations peuvent être faites à tout moment, en particulier si cela permet de simplifier les calculs. On les combine pour obtenir une matrice échelonnée réduite.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{pmatrix}$. On recherche une matrice échelonnée réduite qui lui est ligne-équivalente.

On échange (éventuellement) des lignes pour que l'élément de tête de la première ligne soit le plus simple possible ; ici $L_1 \leftrightarrow L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{pmatrix}$.

On fixe maintenant la première ligne, et on s'en sert pour faire apparaître des 0 sous l'élément de tête de la première ligne ; ici, $L_2 \to L_2 - 2L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{pmatrix}$, puis $L_3 \to L_3 + L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{pmatrix}$ et enfin $L_4 \to L_4 - 3L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$.

On recommence avec l'élément de tête de la deuxième ligne. L'opération $L_3 \to L_3 - \dfrac{2}{5}L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & \\ 0 & 0 & 0 & 16 & \\ 0 & 0 & 0 & -40 & \end{pmatrix}$.

On recommence enfin avec la troisième ligne : l'opération $L_4 \to L_4 + \dfrac{5}{2}L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est échelonnée.

Maintenant, pour réduire la matrice, nous partons de droite à gauche.

La dernière colonne contient bien un élément de tête, 16. On divise la troisième ligne par 16 pour que l'élément de tête soit 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, il nous faut faire apparaître des 0 au-dessus du 1.

Les opérations $L_2 \to L_2 + 15L_3$ puis $L_1 \to L_1 - 6L_3$ donnent successivement $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On recommence avec la troisième colonne, qui contient l'élément de tête (5) de la deuxième ligne. On divise L_2 par 5 : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis on fait apparaître des 0 au-dessus de l'élément de tête de la deuxième ligne : $L_1 \to L_1 + 2L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice obtenue est échelonnée réduite. Cette matrice est égale à PA où P est un produit de matrices élémentaires.

Attention, elle n'est pas égale à A !

C.1 Application : systèmes linéaires

Définition C.5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit p un entier, $p \geqslant 2$. Un **système d'équations linéaires** à n équations et p inconnues est une équation de la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont données et où la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est inconnue.*

*La matrice A s'appelle la **matrice du système**.*

Résoudre le système $AX = B$ consiste à trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = B$, s'il en existe.

Remarque. Si $A = (a_{ij})$, $B = {}^t\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$, le système $AX = B$ s'écrit également

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Proposition C.6. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si la matrice A est inversible, alors le système $AX = B$ a une unique solution qui est $A^{-1}B$.

Démonstration. Tout d'abord, $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_nB = B$ donc $A^{-1}B$ est solution.

D'autre part, si X est solution, alors $AX = B$ donc $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ soit $I_nX = A^{-1}B$ et donc $X = A^{-1}B$, d'où l'unicité. $\square$

Proposition C.7. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors le système $AX = B$ a les mêmes solutions que le système $PAX = PB$.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Si $AX = B$ alors en multipliant par P on a bien $PAX = PB$. Si $PAX = PB$, alors en multipliant par P^{-1} on a bien $AX = B$. □

Définition C.8. *On dit qu'un système est* **homogène** *si $B = 0$, c'est-à-dire s'il est de la forme $AX = 0$.*

Remarque. Un système homogène a toujours au moins une solution : 0.

Proposition C.9. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que le système $AX = B$ a au moins une solution, notée X_0. Alors les solutions du système $AX = B$ sont les matrices de la forme $X_0 + Y$ où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène $AY = 0$.

Démonstration. Si $AX = B$ alors $A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0$ donc $Y = X - X_0$ est solution de $AY = 0$.

Si $AY = 0$, alors $A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + 0 = B$ donc $X_0 + Y$ est solution de $AX = B$. □

Théorème C.10. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si le système $AX = 0$ a une unique solution qui est 0.

Lemme C.11. Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure dont la dernière ligne est nulle. Alors le système $TX = 0$ a au moins une solution non nulle.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p. Si $p = 1$ alors $T = 0$ et donc (1) est une solution non nulle. Si $p = 2$ alors T est de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b dans $\mathbb{K}$. Si $a = 0$ alors ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une solution non nulle. Si $a \neq 0$ alors ${}^t\begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix}$ est une solution non nulle.

Supposons maintenant que $p \geqslant 3$ et que le résultat est vrai au rang $p - 1$. La matrice T est de la forme $T = \begin{pmatrix} a & L \\ 0 & T' \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}$, $L \in \mathcal{M}_{1,p-1}(\mathbb{K})$ et $T' \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure dont la dernière ligne est nulle. Si $a = 0$ alors ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est une solution non nulle. Si $a \neq 0$, par hypothèse de récurrence il existe $X' \in \mathcal{M}_{p-1,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $T'X' = 0$. De plus, $LX' \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ donc $LX' = (b)$ avec $b \in \mathbb{K}$. Alors si $X = {}^t\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & X' \end{pmatrix}$ on a $TX = \begin{pmatrix} -a\frac{b}{a} + b \\ T'Y \end{pmatrix} = 0$ donc X est une solution non nulle de $TX = 0$. □

Démonstration du théorème. Supposons que A soit inversible. Alors le système $AX = 0$ a une unique solution, qui est $A^{-1}0 = 0$, d'après la proposition **C.6**.

Supposons maintenant que 0 soit l'unique solution du système $AX = 0$. Alors la matrice A n'est pas nulle (sinon toutes les matrices colonne X seraient solution de $AX = 0$). On sait donc qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ (qui est un produit de matrices élémentaires et) telle que $A' = PA$ soit échelonnée réduite. On sait de plus que les solutions de $A'X = 0$, soit $PAX = P0$, sont les mêmes que celles de $AX = 0$, c'est-à-dire que le système $A'X = 0$ a une unique solution qui est 0. Comme A' est échelonnée réduite, elle est triangulaire supérieure donc d'après le lemme elle ne contient pas de ligne nulle. Donc d'après la remarque **C.3** on a $A' = I_p$ et donc $PA = I_p$. Comme P est inversible, on peut multiplier par P^{-1} donc $A = P^{-1}$. Donc A est inversible (d'inverse P). □

Remarque. Si $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont la dernière ligne est nulle, alors T n'est pas inversible.

Corollaire C.12. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour toute $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le système $AX = B$ a une unique solution.

Démonstration. Fixons B.

On a déjà vu que si A est inversible, alors $AX = B$ a une unique solution.

Supposons donc que $AX = B$ a une unique solution, notée X_0. Les solutions de $AX = B$ sont les $X_0 + Y$ avec Y solution de $AY = 0$. Donc le système $AY = 0$ a une unique solution (qui est nécessairement 0), donc d'après le théorème, A est inversible. □

Corollaire C.13. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n < p$ alors le système $AX = 0$ a au moins une solution non nulle.
Autrement dit, un système linéaire homogène qui a strictement plus d'inconnues que d'équations a des solutions non nulles.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice carrée dont les n premières lignes sont celles de A et les $p - n$ autres lignes sont nulles. En particulier la dernière ligne de B est nulle. Donc pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la dernière ligne de BC est nulle aussi. Donc pour toute $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a $BC \neq I_p$. La matrice B n'est donc pas inversible. D'après le théorème, il existe donc une matrice non nulle $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telle que $BX = 0$. Mais alors $AX = 0$. □

Méthode de Gauss

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On sait que A est ligne-équivalente à une matrice (échelonnée) réduite, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, telle que PA soit (échelonnée) réduite. On sait aussi que le système $AX = B$ a les mêmes solutions que le système $PAX = PB$. Ce dernier système donne explicitement toutes les solutions de $AX = B$.

En pratique, pour résoudre le système $AX = B$, on considère la matrice $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ (également notée $(A \mid B)$ si on veut séparer le second membre) et on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir une matrice (échelonnée) réduite $\begin{pmatrix} PA & PB \end{pmatrix}$ et donc se ramener au système $PAX = PB$.

Exemple. Soit à résoudre $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \\ -22 \end{pmatrix}$, *ie.*

$$\begin{cases} 2x + 6y + z = -3 \\ x + 3y - 2z = 6 \\ -x - 3y + 4z = 4 \\ 3x + 9y - 6z = -22. \end{cases}$$

On a

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & -22 \end{array}\right)$$

et on a déjà vu qu'elle est ligne-équivalente à la matrice échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

qui correspond au système $A'X = B'$ avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$

La troisième ligne/équation, $0 = 1$, est absurde, donc le système n'a pas de solution.

Exemple. Soit à résoudre $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$, où a et b sont des paramètres réels, *ie.* $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + (a+1)y = b. \end{cases}$

On écrit la matrice $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & b \end{pmatrix}$, qui est ligne-équivalente à la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b-1 \end{pmatrix}$ en soustrayant la première ligne à la deuxième.

Premier cas : $a = 0$. Cette matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$ et le système s'écrit $\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = b - 1. \end{cases}$ Donc si $b \neq 1$, le système n'a pas de solution (car $b - 1 \neq 0$), mais si $b = 1$ le système devient l'équation réelle $x + y = 1$ qui a une infinité de solutions $x = 1 - y$, $y \in \mathbb{R}$.

Deuxième cas : $a \neq 0$. Alors on poursuit la réduction, en divisant L_2 par a puis en soustrayant L_2 à L_1, ce qui donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{a} \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a-b+1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b-1}{a} \end{pmatrix}$ soit une unique solution $\begin{cases} x = \frac{a-b+1}{a} \\ y = \frac{b-1}{a}. \end{cases}$

C.2 Application : calcul de l'inverse d'une matrice carrée

La méthode précédente peut aussi être utilisée pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.

Théorème C.14. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) A est ligne-équivalente à I_p.

(iii) A est un produit de matrices élémentaires.

Démonstration. ➢ **(i)⇒(ii)** Supposons que A est inversible. On sait que A est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite A'. On a donc $A' = PA$ avec P inversible. De plus, A' est un produit de matrices inversibles donc elle est inversible. Soit r le nombre de lignes non nulles de A' et soit $p - r$ le nombre de lignes nulles de A'. Alors pour toute matrice B, les $p - r$ dernières lignes de $A'B$ sont nulles, donc $A'B \neq I_p$, ce qui contredit l'inversibilité de A'. Donc A' n'a pas de ligne nulle. D'après la remarque **C.3**, on a $A' = I_p$ et donc $A \sim I_p$.

➢ **(ii)⇒(iii)** Supposons que $A \sim I_p$. Alors il existe une matrice P qui est un produit de matrices élémentaires telle que $PA = I_p$. On a donc $A = P^{-1}$, qui est aussi un produit de matrices élémentaires.

➢ **(iii)⇒(i)** Supposons que A est un produit de matrices élémentaires. Comme les matrices élémentaires sont inversibles et que tout produit de matrices inversibles est inversible, A est inversible. □

Corollaire C.15. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Si on applique à I_p la suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A qui conduisent à I_p, on obtient A^{-1}.

Démonstration. Ceci découle de la démonstration du théorème. □

Dans la démonstration de **(i)** implique **(ii)** du théorème, on n'a utilisé que le fait qu'il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_p$. On a donc :

Corollaire C.16. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_p$.

(iii) Il existe $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_p$.

Démonstration. Les implications **(i)⇒(ii)** et **(i)⇒(iii)** sont évidentes par définition de A inversible. L'implication **(ii)⇒(i)** découle de la démonstration du théorème, donc **(i)** et **(ii)** sont équivalentes.

Supposons que **(iii)** est vraie et démontrons **(i)**. Il existe donc $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_p$. On a alors ${}^tA\,{}^tC = {}^t(CA) = {}^tI_p = I_p$ donc l'hypothèse **(ii)** est vérifiée pour ${}^tA$, donc ${}^tA$ est inversible. Il existe donc $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M\,{}^tA = I_p$. Alors, en transposant à nouveau, on obtient $A\,{}^tM = I_p$. Donc on a à la fois $CA = I_p$ et $A\,{}^tM = I_p$, donc A est inversible. □

En pratique Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On considère la matrice $\begin{pmatrix} A & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,2p}(\mathbb{K})$ (où on écrit A et I_p côte à côte). On lui applique des opérations élémentaires sur les lignes pour se ramener à une matrice échelonnée réduite $P\begin{pmatrix} A & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & P \end{pmatrix}$.

Si la matrice A est inversible, alors $A \sim I_p = PA$, donc on obtient une matrice $\begin{pmatrix} I_p & P \end{pmatrix}$ et $P = A^{-1}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$ pour un réel m. On cherche à inverser A si c'est possible.

$$\begin{aligned}(A \mid I_2) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & m & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -m & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -m & 0 & -1 \\ 0 & 1+2m & 1 & 2 \end{array}\right) =: M\end{aligned}$$

grâce aux opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_1 \to -L_1$ puis $L_2 \to L_2 - 2L_1$.

Premier cas : $m = -\frac{1}{2}$. Alors les calculs précédents montrent que $A \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$ donc A n'est pas ligne-équivalente à I_2 et donc A n'est pas inversible.

Deuxième cas : $m \neq -\frac{1}{2}$. Alors $M \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+2m} & \frac{2}{1+2m} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{1+2m} & -\frac{1}{1+2m} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+2m} & \frac{2}{1+2m} \end{array}\right)$ grâce aux opérations $L_2 \to \frac{1}{1+2m}L_2$ puis $L_1 \to L_1 + mL_2$. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{1+2m} & -\frac{1}{1+2m} \\ \frac{1}{1+2m} & \frac{2}{1+2m} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+2m}\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II Espaces vectoriels

A Définitions

Vous connaissez déjà des espaces vectoriels, par exemple le plan $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^2$, on sait ajouter des vecteurs et les multiplier par des réels. Ces deux opérations vérifient certaines propriétés. Nous allons formaliser tout cela.

Définition A.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni de deux opérations, la **somme** $+ : E \times E \to E$, qui à deux éléments x et y de E associe un élément $x+y$ de E, et la multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, qui à un $\lambda \in \mathbb{K}$ et un élément x de E associe un élément λx de E, et qui vérifient les axiomes suivants :*

(EV1) *pour tous x, y, z dans E on a $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité).*

(EV2) *il existe un élément $0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $0 + x = x = x + 0$.*

(EV3) *pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = 0 = x' + x$.*

(EV4) *pour tous x, y dans E, on a $x + y = y + x$ (commutativité).*

(EV5) *pour tout $x \in E$, on a $1x = x$.*

(EV6) *pour tout $x \in E$ et pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$, on a $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributivité).*

(EV7) *pour tous x, y dans E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ (distributivité).*

(EV8) *pour tout $x \in E$ et pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$, on a $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.*

*Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.*

Remarque A.2.
- ➢ L'élément 0 tel que pour tout $x \in E$, on ait $0 + x = x$ est unique ; il est appelé **vecteur nul** (c'est l'élément neutre pour l'addition de E).
  En effet, si $e \in E$ est un autre élément tel que $e + x = x$ pour tout $x \in E$, alors $0 = 0 + e = e$.
- ➢ Pour tout $x \in E$, l'élément x' tel que $x + x' = 0$ est unique ; il est noté $-x$ et appelé **opposé** de x.
  En effet, si $x'' \in E$ est un autre vecteur tel que $x + x'' = 0$, alors $x' + x + x'' = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$ et $x' + x + x'' = x' + (x + x'') = x' + 0 = x'$ donc $x'' = x'$.

Exemple.
- ➢ $\mathbb{K}$ muni de la somme et de la multiplication de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ➢ $\{0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ➢ $\mathbb{C}$ muni de la somme et de la multiplication des nombre réels par les nombres complexes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ➢ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la somme des matrices et de la multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ➢ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Si f et g sont dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, alors $f + g : I \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in I$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in I$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
  On peut remplacer $\mathbb{R}$ par un espace vectoriel E quelconque et I par un ensemble X quelconque et considérer $\mathcal{F}(X, E)$ qui est aussi un espace vectoriel. C'est le cas par exemple de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ➢ L'ensemble des suites réelles (ou complexes ou d'éléments de $\mathbb{K}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{\in\mathbb{N}}$ sont deux suites et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit en fait de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Propriétés A.3. (Règles de calcul)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors

- ➢ Pour tous x, y, z dans E, si $x + z = y + z$ alors $x = y$.
- ➢ Pour tout $x \in E$, on a $0_{\mathbb{K}} x = 0_E$.
- ➢ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda 0_E = 0_E$ (ici, 0 est le vecteur nul de E).
- ➢ Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, si $\lambda x = 0$ alors $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

Démonstration.

- ➢ Si $x + z = y + z$ alors $x + z + (-z) = y + z + (-z)$, donc $x + 0 = y + 0$ et donc $x = y$.
- ➢ On a $0 + 0x = 0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ et donc d'après la propriété précédente, $0x = 0$.
- ➢ On a $0 + \lambda 0 = \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ donc de même $\lambda 0 = 0$.
- ➢ Supposons que $\lambda x = 0$ avec $\lambda \neq 0$, il nous faut donc démontrer que $x = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, son inverse λ^{-1} existe et on a $x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0 = 0$. □

Conséquence A.4.

- ➢ Pour tous x, y dans E on a $x + y = 0$ si et seulement si $y = -x$, si et seulement si $x = -y$. En effet, si $x + y = 0$ on a par exemple $-x + x + y = -x + 0 = -x$ donc $0 + y = -x$ et donc $y = -x$.
- ➢ Pour tous x, y dans E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x = y$ si et seulement $x = \frac{1}{\lambda} y$. En effet, si $\lambda x = y$ alors $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} y$ donc $(\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1} y$ et donc $x = 1x = \lambda^{-1} y$; la réciproque se fait de même.

Définition-Proposition A.5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble $E \times F$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont les lois sont :

- ➢ pour $(x, y) \in E \times F$ et $(x', y') \in E \times F$, on pose $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ (addition composante à composante),
- ➢ pour $(x, y) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Démonstration. Soient $u = (x, y)$, $u' = (x', y')$ et $u'' = (x'', y'')$ des vecteurs de $E \times F$ et soient λ et μ deux scalaires.

(EV1) $(u + u') + u'' = (x + x', y + y') + (x'', y'') = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') = (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') = u + (u' + u'')$.

(EV2) $u + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = u$ donc $(0, 0)$ est un élément neutre pour l'addition.

(EV3) $u + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$ donc u a un opposé, $-u = (-x, -y)$.

(EV4) $u + u' = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = u' + u$.

(EV5) $1u = (1x, 1y) = (x, y) = u$.

(EV6) $\lambda(u + u') = \lambda(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y')) = (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = \lambda u + \lambda u'$.

(EV7) $(\lambda + \mu)u = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) = \lambda u + \mu u$.

(EV8) $(\lambda\mu)u = ((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) = (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = \lambda(\mu u)$. □

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On note $E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \cdots \times E_n$ le produit cartésien des ensembles E_i.

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (ou directement) que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où les lois sont données par

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \qquad u_i \in E_i, v_i \in E_i,$$
$$\lambda(u_1, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

En particulier, en reprenant le premier exemple ci-dessus, on constate que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition A.6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E. Une* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est un vecteur de la forme*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires. Ces scalaires sont appelés les ***coefficients*** *de la combinaison linéaire.*

Exemple. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(2, -1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, 1)$ et $u_3 = (0, 2)$ car $(2, -1) = 2u_1 - \frac{1}{2}u_3$ ou $(2, -1) = u_1 + u_2 - u_3$ par exemple. On a aussi $(0, 4) = 2u_3$ donc $(0, 4)$ est combinaison linéaire de u_3.

B Sous-espaces vectoriels

On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition B.1. *Soit F une partie de E. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si :*

(SEV1) *F est non vide*

(SEV2) *pour tous x, y dans F, $x + y \in F$*

(SEV3) *pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$.*

Remarque B.2. En raisonnant par récurrence, on démontre que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors toute combinaison linéaire de vecteurs de F est dans F.

Proposition B.3. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont les lois sont les restrictions à F de celles de E.

Démonstration. F n'est pas vide par hypothèse. On restreint l'addition et la multiplication par les scalaires dans E aux vecteurs de F ce qui donne des applications $+ : F \times F \to E$ et $\cdot : \mathbb{K} \times F \to E$. Par définition d'un sous-espace vectoriel, cela définit en fait deux applications : $F \times F \to \underline{F}$ et $\mathbb{K} \times F \to \underline{F}$.

Maintenant, la vérification des axiomes **(EV1)** à **(EV8)** est immédiate : ce sont les mêmes mais appliqués uniquement aux vecteurs de F. □

Remarque B.4. En particulier, le vecteur nul de E est dans F.

Exemple.

- $\{0\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (axe des abscisses).
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues (dérivables, etc.) de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ainsi que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les suites réelles.

Remarque. Les assertions suivantes sont faciles à vérifier.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors G est un sous-espace vectoriel de E.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G \subset F$. Alors G est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition B.5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Puisque $0 \in F$ et $0 \in G$, on a $0 \in F \cap G$ et donc $F \cap G \neq \varnothing$.

Soient x et y dans $F \cap G$. Alors $x + y$ est dans F et $x + y$ est dans G donc $x + y \in F \cap G$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$ et $\lambda x \in G$ donc $\lambda x \in F \cap G$. □

Proposition B.6. Plus généralement, soit $\{F_i \mid i \in I\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On note $\cap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in F_i\}$ leur intersection.
Alors $\cap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Semblable à la précédente. □

Exemple B.7.

- ➢ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant
$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- ➢ On déduit de l'exemple précédent et de la proposition que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est fixée (c'est-à-dire np scalaires), l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant les p relations
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, c'est l'intersection des p sous-espaces vectoriels
$$F_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0\} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p.$$
Autrement dit, l'ensemble des solutions d'un système homogène $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Remarque B.8. Attention ! Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Définition-Proposition B.9. Soit $\mathcal{F}$ une famille non vide de vecteurs de E. Soit F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de vecteurs de $\mathcal{F}$.
Alors F est un sous-espace vectoriel de E, dit sous-espace vectoriel **engendré** par $\mathcal{F}$ et on note $F = \operatorname{vect}\{\mathcal{F}\}$. On dit aussi que $\mathcal{F}$ est une famille ou partie **génératrice** de F. Si $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ on note $F = \operatorname{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Lorsque F a une partie génératrice finie, c'est-à-dire que $F = \operatorname{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$ pour un nombre fini de vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E, on dit que F est de **dimension finie**.

Démonstration. F n'est pas vide car $0 \in F$: en effet, si $u \in \mathcal{F}$ on a $0 = 0u$ qui est une combinaison linéaire de $u \in \mathcal{F}$.

Soient u et v dans F. On peut donc écrire $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ et $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$ pour des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p$ et des vecteurs $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p$ de $\mathcal{F}$. Alors $u + v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_p \in F$.

Soit $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in F$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\alpha u = (\alpha\lambda_1)u_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n)u_n \in F$. □

Proposition B.10. Soit $\mathcal{F}$ une famille non vide de vecteurs de E. Alors $\operatorname{vect}\{\mathcal{F}\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{F}$. Il est égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$. De plus, il est clair que G contient $\mathcal{F}$.

Démonstration. Notons $F = \text{vect}\{\mathcal{F}\}$ et G l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$. On sait d'après la proposition **B.6** que G est un sous-espace vectoriel de E.

Par définition de l'intersection, G est inclus dans tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$. Comme F en est un, on a $G \subset F$.

Réciproquement, soit $u \in F$, il faut démontrer que $u \in G$. On peut écrire $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ pour des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{F}$. Mais par définition de G, on a $u_i \in G$ pour tout G. Donc, comme G est un sous-espace vectoriel de E, on a $u \in G$ (remarque **B.2**).

On a donc démontré que $F = G$.

On a déjà dit que G est inclus dans tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$. C'est donc le plus petit. □

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,0,2)$.

$\text{vect}\{u_1, u_2\} = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$. C'est le "plan horizontal".

$\text{vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{(\mu_1, \mu_2, 0) \in \mathbb{R}^3\right\} = \text{vect}\{u_1, u_2\}$.

$\text{vect}\{u_1, u_2, u_4\} \left\{(\lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2, 2\lambda_4) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathbb{R}^3$.

Remarque B.11. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\text{vect}\{F\} = F$.

Définition-Proposition B.12. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $F + G$ l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme** de F et de G.

Démonstration. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils ne sont pas vides et donc $F + G$ n'est pas vide. De plus, $F + G \subset E$ puisque la somme de deux vecteurs de E est encore dans E.

Soient $u, u' \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut écrire $u = x + y$ et $u' = x' + y'$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$.

Alors $u + u' = (x + x') + (y + y')$ avec $x + x' \in F$ et $y + y' \in G$ (sous-espaces vectoriels), donc $u + u' \in F + G$, et $\lambda u = (\lambda x) + (\lambda x')$ avec $\lambda x \in F$ et $\lambda x' \in G$ (sous-espaces vectoriels), donc $\lambda u \in F + G$. □

Remarque. F et G sont des sous-espaces vectoriels de $F + G$.

Démonstration. Si $x \in F$ alors $x = x + 0 \in F + G$ donc $F \subset F + G$. Donc F et $F + G$ sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset F + G$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $F + G$. □

Proposition B.13. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de E et posons $F = \text{vect}\{\mathcal{F}\}$ et $G = \text{vect}\{\mathcal{G}\}$. Alors $F + G = \text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$.
En particulier, soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, soient $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E, soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_n$ et soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par $v_1, \ldots, v_p$. Alors $F + G$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p$.

Démonstration. Soit $u \in F + G$. Alors $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Il existe donc des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ dans $\mathcal{F}$ et $w_1, \ldots, w_q$ dans $\mathcal{G}$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ tels que $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ et $w = \sum_{j=1}^{q} \mu_j w_j$. On a donc $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j w_j$ avec $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q$ dans $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, donc $u \in \text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$. On a donc démontré que $F + G \subset \text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$.

D'autre part, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{F} \subset F \subset F + G$ et $\mathcal{G} \subset G \subset F + G$, donc il contient le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, qui est $\text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$. On a donc $F + G \supset \text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$.

Finalement, $F + G = \text{vect}\{\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$. □

Exemple. On reprend l'exemple 18. On a $\text{vect}\{u_1\} + \text{vect}\{u_2\} = \text{vect}\{u_1; u_2\}$ et $\text{vect}\{u_1, u_2\} + \text{vect}\{u_3\} = \text{vect}\{u_1; u_2; u_3\} = \text{vect}\{u_1; u_2\}$ car u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2 donc $u_3 \in \text{vect}\{u_1; u_2\}$ et donc $\text{vect}\{u_3\} \subset \text{vect}\{u_1; u_2\}$.

Remarque. On a dit précédemment que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E en général. Cependant, $F + G = \text{vect}\{F\} + \text{vect}\{G\} = \text{vect}\{F \cup G\}$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Proposition B.14. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
Si on multiplie un vecteur de $\mathcal{F}$ par un scalaire non nul, on ne change pas $\text{vect}\{\mathcal{F}\}$.
Si on ajoute à un vecteur de $\mathcal{F}$ un multiple d'un autre vecteur de $\mathcal{F}$, on ne change pas $\text{vect}\{\mathcal{F}\}$.

Démonstration. Soit v un vecteur fixé dans $\mathcal{F}$. On a donc $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \{v\}$ où $\mathcal{G} = \mathcal{F} \setminus \{v\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. On veut démontrer que $\text{vect}\{\mathcal{F}\} = \text{vect}\{\mathcal{G} \cup \{\alpha v\}\}$.

Or $\text{vect}\{\mathcal{G} \cup \{\alpha v\}\} = \text{vect}\{\mathcal{G}\} + \text{vect}\{\alpha v\}$ et $\text{vect}\{\mathcal{F}\} = \text{vect}\{\mathcal{G}\} + \text{vect}\{v\}$. Il suffit donc de démontrer que $\text{vect}\{\alpha v\} = \text{vect}\{v\}$. Mais $\text{vect}\{v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ et $\text{vect}\{\alpha v\} = \{\mu(\alpha v) \mid \mu \in \mathbb{K}\} = \text{vect}\{v\}$.

Soient maintenant v et w deux vecteurs distincts de $\mathcal{F}$ et soit $\beta \in \mathbb{K}$ quelconque. On a donc $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \{v, w\}$ où $\mathcal{H} = \mathcal{F} \setminus \{v, w\}$. On veut démontrer que $\text{vect}\{\mathcal{F}\} = \text{vect}\{\mathcal{H} \cup \{v + \beta w, w\}\}$. Comme dans le cas précédent, il suffit de démontrer que $\text{vect}\{v, w\} = \text{vect}\{v + \beta w, w\}$.

Soit $u \in \text{vect}\{v, w\}$. Alors $u = \lambda v + \mu w$ pour des scalaires λ et μ. Mais alors $u = \lambda(v + \beta w) + (\mu - \lambda\beta)w \in \text{vect}\{v + \beta w, w\}$. Donc $\text{vect}\{v, w\} \subset \text{vect}\{v + \beta w, w\}$. Réciproquement, si $u \in \text{vect}\{v + \beta w, w\}$, on a $u = \lambda(v + \beta w) + \mu w = \lambda v + (\lambda\beta + \mu)w \in \text{vect}\{v, w\}$ donc $\text{vect}\{v + \beta w, w\} \subset \text{vect}\{v, w\}$. Finalement on a l'égalité recherchée. □

Définition B.15. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

La somme $F + G$ est dite ***directe*** *si $F \cap G = \{0\}$. On note alors $F + G = F \oplus G$ la somme directe de F et de G.*

Si de plus $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont ***supplémentaires*** *dans E.*

Proposition B.16. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit de manière *unique* sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

Démonstration.

- Supposons que F et G sont supplémentaires dans E. Donc $E = F \oplus G$ c'est-à-dire que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

  Soit $x \in E$. Puisque $E = F + G$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

  Supposons que $x = y' + z'$ avec $y' \in F$ et $z' \in G$. Alors $y + z = x = y' + z'$ donc $y - y' = z' - z$. Mais $y - y' \in F$ et $z' - z \in G$ (sous-espaces vectoriels), donc $y - y' = z' - z \in F \cap G$. Or $F \cap G = \{0\}$ donc $y - y' = z' - z = 0$ et donc $y = y'$ et $z = z'$. On a bien unicité de l'écriture.

- Supposons que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. En particulier, tout vecteur de E est dans $F + G$ donc $E \subset F + G$. On sait déjà que $F + G \subset E$ (sous-espace vectoriel) donc $E = F + G$.

  Il reste à démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit donc $x \in F \cap G$. On peut alors écrire $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$ et $x = 0 + x$ avec $0 \in F$ et $x \in G$. Par unicité de l'écriture, en identifiant, on obtient $x = 0$ donc $F \cap G \subset \{0\}$. Comme on a toujours $\{0\} \subset F \cap G$, on a l'égalité recherchée.

  Finalement, $E = F \oplus G$. □

Exemple.

- Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Soient $F = \text{vect}\{e_1\}$ et $G = \text{vect}\{e_2\}$. Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ (à vérifier), donc tout $v \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme $v = xe_1 + ye_2 = (x, y)$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, exemple de la page 18, si $F = \text{vect}\{u_1; u_2\}$ et $G = \text{vect}\{u_3\}$, alors F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ($G \subset F$), et on a effectivement par exemple $u_1 + u_3 = u_2 + \frac{1}{2}u_3$ (deux écritures).

C Indépendance linéaire

On fixe toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition C.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. Les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont dits* ***linéairement indépendants*** *(on dit aussi que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est* ***libre****) si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ on a l'implication*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants s'il n'y a qu'une façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

Dans le cas contraire on dit que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est ***liée*** *ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont* ***linéairement dépendants****. S'il n'y a que deux vecteurs linéairement dépendants, on dit qu'ils sont* ***colinéaires*** *(si u et v sont colinéaires, il existe soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$, soit $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $v = \mu u$ – attention au cas où l'un des vecteurs est nul).*

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ sont linéairement indépendants (à vérifier), mais la famille $\{u_1; u_2; u_3\}$ de l'exemple précédent est liée pusique $u_1 + u_2 - u_3 = 0$.

Proposition C.2. Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille libre de E. Alors

- $\mathcal{F}$ ne contient pas le vecteur nul.
- Les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont deux à deux distincts.
- Toute sous-famille non vide de $\mathcal{F}$ est libre.

Démonstration.
- Si l'un des vecteurs est nul, par exemple (quitte à réordonner) $u_1 = 0$, alors $1u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n = 0$ est une combinaison linéaire égale au vecteur nul et dont tous les coefficients ne sont pas tous nuls ($\lambda_1 = 1 \neq 0$).
- Si deux des vecteurs sont égaux, par exemple (quitte à réordonner) $u_1 = u_2$, alors $u_1 - u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n = 0$ est une combinaison linéaire égale au vecteur nul et dont tous les coefficients ne sont pas tous nuls ($\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$).
- Soit $\mathcal{G}$ une sous-famille de $\mathcal{F}$. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{F}$, on peut supposer que $\mathcal{G} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ (avec $1 \leqslant p \leqslant n$). Si $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$, alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + 0u_{p+1} + \cdots + 0u_n = 0$, donc puisque $\mathcal{F}$ est libre on a bien $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Donc $\mathcal{G}$ est libre. □

Lemme C.3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n, v$ des vecteurs de E. Si v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, alors $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est liée.

Démonstration. Notons $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$. On a donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n - 1v = 0$, qui est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n, v$ égale au vecteur nul et dont tous les coefficients ne sont pas nuls (coefficient de v). Donc $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est liée. □

Proposition C.4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs linéairement indépendants de E et soit $v \in E$. Alors v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ si et seulement si $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est liée.

Démonstration. Supposons que v soit combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, alors on sait que $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est liée d'après le lemme précédent.

Réciproquement, si $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est liée il existe des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} v = 0$. Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$ avec au moins un λ_i non nul, donc $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est liée, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\lambda_{n+1} = 0$. On a donc $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} u_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} u_n \in \operatorname{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$. □

D Bases et dimension

On fixe toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et on suppose que $E \neq \{0\}$.

Définition D.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E. On dit que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une **base** de E si la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre et si E est égal au sous-espace vectoriel engendré par $e_1, \ldots, e_n$.*

Exemple.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$, alors $\{\lambda\}$ est une base de $\mathbb{K}$.
- $\{1, i\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet, tout élément de $\mathbb{C}$ sécrit $a + ib$ avec a, b dans $\mathbb{R}$ donc elle est génératrice, et si $\lambda 1 + \mu i = 0$ avec λ, μ réels, alors $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.
- Dans $\mathbb{K}^n$, soit e_i le vecteurs dont la $i^{\text{ème}}$ composante est 1 et les autres sont nulles. Alors $\{e_1; \ldots; e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, dite **base canonique** de $\mathbb{K}^n$. En effet, tout $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ s'écrit $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc elle est génératrice, et si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ alors le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est nul donc tous les λ_i sont nuls, donc elle est libre.
  De même, les matrices colonne E_i dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est 1 et les autres sont nuls permettent de définir la base canonique $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et les matrices ligne $F_i = {}^tE_i$ permettent de définir la base canonique $\{F_1, \ldots, F_n\}$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
- Ex de base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, soient $u_1 = (1, 3)$ et $u_2 = (2, -1)$. Alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème D.2. (Théorème de la base incomplète.)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs linéairement indépendants de E. Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et soient $v_1, \ldots, v_q$ des vecteurs de E tels que $E = \text{vect}\{v_1, \ldots, v_q\}$.
Alors il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que $\begin{cases} e_i = u_i \text{ si } i \leqslant p \\ e_i \text{ est l'un des } v_j \text{ si } p < i \leqslant n. \end{cases}$

Démonstration. Premier cas. Supposons que pour tout j, le vecteur v_j est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Alors $E = \text{vect}\{v_1, \ldots, v_q\} \subset \text{vect}\{u_1, \ldots, u_p\} \subset E$ donc les inclusions sont des égalités. On a donc $E = \text{vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$ et donc $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une famille à la fois libre et génératrice dans E, c'est-à-dire une base de E.

Deuxième cas. Supposons qu'il existe k tel que v_k ne soit pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$. Alors d'après la proposition **C.4**, on sait que $\{u_1, \ldots, u_p, v_k\}$ est libre.

Considérons donc le plus grand entier n, avec $p + 1 \leqslant n \leqslant p + q$, tel qu'il existe une famille libre $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avec $e_i = u_i$ si $i \leqslant p$ et $e_i \in \{v_1, \ldots, v_q\}$ si $i > p$. Nous allons démontrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E.

On sait déjà que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre (par construction), il suffit donc de démontrer qu'elle engendre E. Mais par définition de l'entier n, pour tout j on sait que $\{e_1, \ldots, e_n, v_j\}$ est liée, donc v_j est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$ d'après la proposition **C.4**. On a donc $E = \text{vect}\{v_1, \ldots, v_q\} \subset \text{vect}\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$, donc les inclusions sont des égalités et $E = \text{vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$. □

Corollaire D.3. Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Démonstration. Par définition d'un espace vectoriel de dimension finie, il contient une famille génératrice finie. On peut alors appliquer le théorème de la base incomplète. □

Corollaire D.4. De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel non nul de dimension finie on peut extraire une base.

Démonstration. On choisit un des vecteurs non nuls de la famille génératrice, il forme une famille libre, qui peut être complétée avec des vecteurs de la famille génératrice en une base d'après le théorème de la base incomplète. □

Théorème D.5. Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors E possède une base.

Démonstration. Soit v un vecteur non nul de E. Alors $\{v\}$ est une famille libre, qui peut donc être complétée en une base de E. □

Proposition D.6. Supposons que E ait une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.
Autrement dit, pour tout $u \in E$, il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_n$ uniques tels que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ s'appellent les **coordonnées** de u dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Démonstration. Soit $u \in E$. Puisque $E = \operatorname{vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$, on sait qu'il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_n$ tels que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Supposons qu'il existe d'autres scalaires $y_1, \ldots, y_n$ tels que $u = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. Alors

$$0 = u - u = (x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n$$

donc puisqe $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre on doit avoir $x_i - y_i = 0$ pour tout i et donc $x_i = y_i$ pour tout i. On a donc bien unicité de l'écriture. □

Exemple.
- ➢ Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base sont x, y, z.
- ➢ Dans $\mathbb{R}^2$, soit $u_1 = (1, 3)$ et soit $u_2 = (2, -1)$. On a dit que $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans cette base sont $\frac{x+2y}{7}$ et $\frac{3x-y}{7}$.

Proposition D.7. Supposons que E ait une famille génératrice formée de $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs. Alors si $p > n$, toute famille de p vecteurs de E est liée.

Démonstration. Soit $\{g_1, \ldots, g_n\}$ une famille génératrice de E. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de E avec $p > n$; nous devons démontrer qu'elle est liée. Si l'un des vecteurs u_j est nul on sait déjà qu'elle est liée, donc on peut supposer que tous les u_j sont non nuls.

On peut écrire $u_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$. De plus, le vecteur u_1 n'est pas nul, donc il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

Quitte à réordonner les g_i, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Mais alors $g_1 = \lambda_1^{-1}\left(u_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i g_i\right)$, donc $E = \operatorname{vect}\{g_1, \ldots, g_n\} = \operatorname{vect}\{u_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

On peut écrire $u_2 = \mu_1 u_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i g_i$. Si $\mu_i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, alors $u_2 = \mu_1 u_2$, donc la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est liée et on a terminé. Sinon, quitte à réordonner $\{g_2, \ldots, g_n\}$, on a $\mu_2 \neq 0$. On en déduit que $g_2 = \mu_2^{-1}\left(u_1 - \mu_1 u_2 - \sum_{i=3}^n \mu_i g_i\right)$, donc $E = \operatorname{vect}\{g_1, \ldots, g_n\} = \operatorname{vect}\{u_1, u_2, g_3 \ldots, g_n\}$.

On continue le procédé. Comme $p > n$, au bout de n opérations on obtient $E = \operatorname{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$. En particulier, u_{n+1} (qui existe puisque $p > n$) est dans $\operatorname{vect}\{u_1, \ldots, u_n\}$, donc la famille $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ est liée. □

Remarque. On peut reformuler la proposition ainsi : si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une famille libre de E et si $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une famille génératrice de E, alors $p \leqslant n$.

Théorème D.8. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \left\{e'_1, \ldots, e'_p\right\}$ deux bases de E. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, on a $n \leqslant p$. Comme $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, on a $p \leqslant n$. Donc $n = p$. □

Définition D.9. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, le nombre de vecteurs d'une base est appelé la **dimension** de E. On la note* $\dim E$ *(ou* $\dim_{\mathbb{K}} E$ *lorsqu'il peut y avoir confusion).*

Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

Enfin, si $v_1, \ldots, v_p$ sont des vecteurs de E, la dimension de $\operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est appelée le **rang** de la famille de vecteurs* $\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Remarque. La définition de dimension est cohérente avec notre définition de *dimension finie*.

Exemple.
- ➢ On connaît une base de $\mathbb{K}^n$: la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- ➢ On connaît une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ d'où on déduit que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = 4$.
- ➢ On a $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (une base est $\{1; i\}$).

Définition D.10. *Un sous-espace vectoriel de dimension* 1 *de E est appelé une **droite (vectorielle).***

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 *de E est appelé un **plan (vectoriel).***

Si $\dim E = n$*, un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E est appelé un **hyperplan (vectoriel).***

Proposition D.11. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors le rang de $\mathcal{F}$ ne change pas si multiplie un vecteur de $\mathcal{F}$ par un scalaire non nul ou si on ajoute à un vecteur de $\mathcal{F}$ un multiple d'un autre vecteur de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition **B.14**. □

Proposition D.12. Si F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $F \times G$ est de dimension finie et
$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une base de F et soit $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ une base de G, où $p = \dim F$ et $q = \dim G$. On doit démontrer que $\dim(F \times G) = p + q$, c'est-à-dire démontrer que $F \times G$ possède une base à $p + q$ éléments. Posons $n = p + q$.

Posons $e_i = \begin{cases} (u_i, 0) \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ (0, v_{i-p}) \text{ si } p+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$ Démontrons que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $F \times G$.

Elle est libre : si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, alors on a $\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^q \lambda_{p+j} v_j\right) = (0,0)$; on regarde chaque composante de ce vecteur, donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0$ et $\sum_{j=1}^q \lambda_{p+j} v_j = 0$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont libres, on a $\lambda_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

Elle engendre $F \times G$: si $(u, v) \in F \times G$, on a $u \in F$ et $v \in G$ donc on peut écrire $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ et $v = \sum_{j=1}^q \mu_j v_j$ donc $(u, v) = (u, 0) + (0, v) = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j e_{p+j} \in \operatorname{vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$. □

Exemple. On sait que $\{1\}$ est une base de $\mathbb{K}$ donc $\mathbb{K}$ est de dimension 1. On en déduit que $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.

Théorème D.13. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
- ➢ Une famille libre de E a au plus n éléments. De plus, toute famille libre à n éléments de E est une base de E.
- ➢ Une famille génératrice de E a au moins n éléments. De plus, tout famille génératrice à n éléments de E est une base de E.

Démonstration. Nous avons déjà vu qu'une famille libre a au plus n éléments et qu'une famille génératrice a au moins n éléments.

Soit maintenant $\mathcal{L} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille libre de E à n éléments. On sait que l'on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E, qui contiendra donc $p \geqslant n$ vecteurs. Mais toutes les bases de E ont n vecteurs, donc $p = n$. Donc $\mathcal{L}$ est une base de E.

Soit enfin $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ une famille génératrice de E à n éléments. On sait que l'on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E, qui contiendra donc $q \leqslant n$ vecteurs. Mais toutes les bases de E ont n vecteurs, donc $q = n$. Donc $\mathcal{G}$ est une base de E. □

Corollaire D.14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Alors $\dim F \leqslant \dim G$ et si de plus $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Démonstration. Si $F = \{0\}$ il n'y a rien à faire. Supposons donc que $F \neq \{0\}$. Donc F contient au moins un vecteur non nul, qui forme donc une famille libre à un élément. On sait qu'une famille de $n+1$ vecteurs de E est toujours liée, donc toute famille de $n+1$ vecteurs de F est liée. Il existe donc un plus grand entier p, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, pour lequel on peut trouver p vecteurs linéairement indépendants $v_1, \ldots, v_p$ de F.

Soit maintenant $u \in F$ distinct des v_i. Alors $\{v_1, \ldots, v_p, u\}$ contient $p+1$ vecteurs de F donc elle est liée par définition de p. Comme $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est libre, on a $u \in \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$. On en déduit donc que $F \subset \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} \subset F$ donc $F = \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$ est de dimension finie.

De même pour G.

De plus, $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de G qui peut être complétée en une base de G dont le nombre q d'éléments est au moins p. Donc $\dim F = p \leqslant q = \dim G$.

Si de plus $\dim F = \dim G$, alors $\operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre à $p = \dim G$ éléments de G donc c'est une base de G. Donc $F = \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} = G$. □

Corollaire D.15. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E. Alors

- $\mathcal{F}$ engendre E si et seulement si $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim E$.
- $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = p$.

Démonstration. Soit $F = \operatorname{vect}\{\mathcal{F}\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $\operatorname{rang}(\mathcal{F})$.

- Si $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim E$ alors $F = E$ d'après le corollaire précédent et donc $\mathcal{F}$ engendre E.
  Si $F = E$ alors $\dim F = \dim E$ donc $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim E$.
- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est une base de F (puisqu'elle engendre F par définition). Donc $\dim F = p$ et donc $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = p$.
  Si $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = p$ alors $\dim F = p$. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F à $p = \dim F$ éléments, donc c'est une base de F et en particulier c'est une famille libre.

□

D.1 Rang d'une matrice ; calcul du rang d'une famille de vecteurs

Définition D.16. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Le* ***rang*** *de A est le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ formée des lignes de A.*

Remarque D.17. Si A est ligne-équivalente à B, alors $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

En effet, cela découle de la proposition **B.14** (les nouvelles familles de la proposition correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de A).

Proposition D.18. Si A est échelonnée ou réduite ou échelonnée réduite, alors le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A.

Démonstration. Dans tous les cas, il est clair que le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de A est égal au sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes non nulles de A. Donc le rang de A est inférieur ou égal au nombre de lignes non nulles de A. Il suffit donc, pour conclure, que les lignes non nulles forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$ (car elles formeront alors une base de F). Soit r le nombre de lignes non nulles de A et notons $L_1, \ldots, L_r$ ces lignes. On a donc $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$.

➢ Premier cas : A est échelonnée. Pour tout i, soit a_{i,j_i} l'élément de tête de L_i (donc $a_{ik} = 0$ pour tout $k < j_i$). Par définition d'une matrice échelonnée, on a $j_{i'} > j_i$ si $i' > i$.
Supposons que $\sum_{i=1}^r \lambda_i L_i = 0$. Alors pour tout k on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ik} = 0$ (on regarde l'identité colonne par colonne). En particulier, $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ij_1} = 0$. Mais $a_{1j_1} \neq 0$ et $a_{ij_1} = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, donc l'identité s'écrit $\lambda_1 a_{1j_1} = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
On a donc $\sum_{i=2}^r \lambda_i L_i = 0$ et on démontre de même que $\lambda_2 = 0$. Par récurrence sur i on démontre que $\lambda_i = 0$ pour tout i.

➢ Deuxième cas : A est réduite. Pour tout i, soit a_{i,j_i} l'élément de tête de L_i (donc $a_{ik} = 0$ pour tout $k < j_i$). Par définition d'une matrice réduite, on a $a_{ij_i} = 1$ et $a_{\ell j_i} = 0$ pour tout $\ell \neq i$.
Supposons que $\sum_{i=1}^r \lambda_i L_i = 0$. Alors pour tout k on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ik} = 0$. En particulier, pour tout ℓ, on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ij_\ell} = 0$, donc $\lambda_\ell = 0$. □

Remarque D.19. Ce qui précède montre que pour déterminer le rang d'une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de vecteurs de E on peut procéder comme suit :

✦ On fixe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E;

✦ On écrit chaque vecteur v_i dans la base $\mathcal{B}$: $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ pour des scalaires a_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant p$.

✦ On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (ses lignes sont formées des coordonnées des v_i dans $\mathcal{B}$).

✦ On échelonne et/ou on réduit A pour obtenir A'.

✦ Le rang de $\{v_1, \ldots, v_p\}$ (et le rang de A) est égal au nombre de lignes non nulles de A'.

De plus, si on note $w_1, \ldots, w_r$ les vecteurs dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont les lignes non nulles de A', on a $\operatorname{vect}\{w_1, \ldots, w_r\} = \operatorname{vect}\{v_1, \ldots, v_p\} =: F$ d'après la proposition **B.14**. D'après ce qui précède, r est le rang de $\{v_1, \ldots, v_p\}$, c'est-à-dire la dimension de F. Donc $\{w_1, \ldots, w_r\}$ est une famille génératrice de F à $r = \dim F$ éléments, c'est donc une base de F d'après le théorème **D.13**. La méthode ci-dessus permet donc également d'extraire une base d'une famille génératrice.

D.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

On fixe un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Proposition D.20. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et de base $\{f_1, \ldots, f_p\}$. Soit G un sous-espace vectoriel de E de dimension q et de base $\{g_1, \ldots, g_q\}$.
Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ est une base de E.

Démonstration. ➢ Supposons que F et G sont supplémentaires dans E. On a donc $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
Alors $E = F + G = \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_p\} + \operatorname{vect}\{g_1, \ldots, g_q\} = \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ donc $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ engendre E.
De plus, cette famille est libre. En effet, si $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^q \mu_j g_j = 0$, alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = \sum_{j=1}^q (-\mu_j) g_j \in F \cap G = \{0\}$ donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0$ et $\sum_{j=1}^q (-\mu_j) g_j = 0$. Comme les deux familles sont libres on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout i et $\mu_j = 0$ pour tout j.

➢ Supposons que $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ est une base de E.
Alors $E = \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\} = \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_p\} + \operatorname{vect}\{g_1, \ldots, g_q\} = F + G$.
De plus, soit $v \in F \cap G$. Alors on peut écrire $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$ et $v = \sum_{j=1}^q \mu_j g_j$, donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^q (-\mu_j) g_j = 0$. Mais comme $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ est libre, tous les coefficients λ_i et μ_j sont nuls, donc $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0$. On a donc $F \cap G = \{0\}$ et donc $E = F \oplus G$. □

Corollaire D.21. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Corollaire D.22. Tout sous-espace vectoriel F de E a un supplémentaire.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F = \{0\}$, alors E est un supplémentaire de F. Supposons donc que $F \neq \{0\}$ et posons $\dim F = p \geqslant 1$.

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de F. C'est une famille libre de E, que l'on complète en une base $\{e_1, \dots, e_p, \dots, e_n\}$ de E. Posons $G = \operatorname{vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$. Alors $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ engendre G par définition, et c'est une famille libre, donc une base de G. D'après la proposition précédente, F et G sont supplémentaires dans E. □

Proposition D.23. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. Posons $H = F \cap G$. C'est un sous-espace vectoriel de F, de G, de $F + G$ et de E.

On sait que H admet un supplémentaire H' dans G : $G = H \oplus H'$. Comme H' est un sous-espace vectoriel de G qui est un sous-espace vectoriel de $F + G$, H' est un sous-espace vectoriel de $F + G$. Démontrons que H' et F sont supplémentaires dans $F + G$.

Soit $u \in F + G$, on peut écrire $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Or $G = H \oplus H'$ donc $w = x + y$ avec $x \in H$ et $y \in H'$. On a alors $u = v + x + y = (v + x) + y$ avec $v \in F$ et $y \in H'$. Donc $F + G = F + H'$.

Soit maintenant $u \in F \cap H'$. Comme $H' \subset G$, on a $u \in F \cap G = H$. Donc $u \in H \cap H' = \{0\}$ et donc $u = 0$. Donc $F \cap H' = \{0\}$.

On a bien $F + G = F \oplus H'$.

On en déduit que $\dim(F + G) = \dim F + \dim H'$. Or $\dim G = \dim(H \oplus H') = \dim H + \dim H'$ donc $\dim H' = \dim G - \dim H = \dim G - \dim(F \cap G)$. Finalement, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. □

Corollaire D.24. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$.

(ii) $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

(iii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

(iv) La réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E.

Démonstration. ➢ **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)**. C'est la proposition **D.20**.

➢ **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)**. Dans les deux assertions, on suppose que $E = F + G$. De plus, $\dim F + \dim G = \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = \dim E - \dim(F \cap G)$. Par conséquent :

- ✧ Si $E = F \oplus G$ on a $F \cap G = \{0\}$ donc $\dim(F \cap G) = \{0\}$ et donc $\dim E = \dim F + \dim G$.
- ✧ Si $\dim E = \dim F + \dim G$ alors $\dim(F \cap G) = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$ et donc $E = F \oplus G$.

➢ **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(iii)**. Dans les deux assertions, on suppose que $F \cap G = \{0\}$ et donc que $\dim(F \cap G) = 0$. De plus, $\dim F + \dim G = \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = \dim(F + G)$. Par conséquent :

- ✧ Si $E = F \oplus G$ on a $E = F + G$ donc $\dim F + \dim G = \dim E$.
- ✧ Si $\dim F + \dim G = \dim E$ alors $\dim(F + G) = \dim E$ donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E et donc $F + G = E$. Finalement $E = F \oplus G$. □

Exercice D.25. Démontrer directement que **(ii)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)** et que **(iii)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)**.

III Applications linéaires

A Définitions

On fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Définition A.1. *Une **application linéaire** de E dans F est une application $f : E \to F$ telle que*

- *pour tous u, v dans E, on ait $f(u+v) = f(u) + f(v)$*
- *pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on ait $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

*Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme linéaire** sur E.*
*Si $F = E$, on dit que f est un **endomorphisme** de E.*
On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Propriétés A.2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a

- $f(0) = 0$, (en effet, on a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $0 = f(0)$.)
- $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n), \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall u_1, \ldots, u_n \in E.$

Exemple.

- L'application nulle $0 : E \to F$ est une application linéaire.
- L'application identité $\mathrm{id}_E : E \to E$ est une application linéaire.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$ est une application linéaire.
- $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y, 3x + y + 2z)$ est une application linéaire.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé. L'application $f : E \to E$ définie par $f(u) = \lambda u$ pour tout $u \in E$ est une application linéaire, appelée **homothétie**.
- Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé des fonctions dérivables *[vérifier que c'est bien un sous-espace vectoriel...]*. On considère l'application $D : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$. Alors D est une application linéaire.

Définition A.3. *Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective $f : E \longrightarrow F$.*
*On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.*

Proposition A.4. Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors la bijection réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit de démontrer que f^{-1} est une application linéaire. Soient donc u et v dans F et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $u' = f^{-1}(u)$ et $v' = f^{-1}(v)$.

On sait que $f(u' + v') = f(u') + f(v') = u + v$ puisque f est linéaire. On applique f^{-1} à cette égalité : $f^{-1}(f(u' + v')) = f^{-1}(u + v)$, donc $u' + v' = f^{-1}(u + v)$, c'est-à-dire $f^{-1}(u) + f^{-1}(v) = f^{-1}(u + v)$.

On sait que $f(\lambda u') = \lambda f(u') = \lambda u$ puisque f est linéaire. On applique f^{-1} à cette égalité : $f^{-1}(f(\lambda u')) = f^{-1}(\lambda u)$, donc $\lambda u' = f^{-1}(\lambda u)$, c'est-à-dire $\lambda f^{-1}(u) = f^{-1}(\lambda u)$. □

Exemple.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-x, x + y)$ est un isomorphisme (de réciproque $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (-x, x + y)$).
- $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d)$ est un isomorphisme.

Définition A.5. *Le **groupe linéaire de** E, noté $\mathcal{GL}(E)$ est l'ensemble des isomorphismes de E dans E.*

Proposition A.6. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors les applications $f+g : E \to F$ et $\lambda f : E \to F$ sont linéaires.
On en déduit que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F.

Démonstration. Rappelons les définitions de $f+g$ et λf : pour tout $u \in E$ on a $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$ et $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.

Soient u et v dans E, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}(f+g)(u+\mu v) &= f(u+\mu v) + g(u+\mu v) = f(u) + \mu f(v) + g(u) + \mu g(v)\\ &= f(u) + g(u) + \mu\left(f(v) + g(v)\right) = (f+g)(u) + \mu(f+g)(v)\\ (\lambda f)(u+\mu v) &= \lambda\left(f(u+\mu v)\right) = \lambda\left(f(u) + \mu f(v)\right) = \lambda f(u) + \mu\left(\lambda f(v)\right) = (\lambda f)(u) + \mu(\lambda f)(v)\end{aligned}$$

donc $f+g$ et λf sont linéaires. □

Proposition A.7. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux appplications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.

Démonstration. Soient u et v dans E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$g \circ f(u+\lambda v) = g(f(u+\lambda v)) = g(f(u) + \lambda f(v)) = g(f(u)) + \lambda g(f(v)) = g \circ f(u) + \lambda g \circ f(v).$$ □

Proposition A.8. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soient $f_1 : E \to F_1$, ..., $f_p : E \to F_p$ des applications et soit $f : E \to F_1 \times \cdots \times F_p$ l'application définie par $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_p(u))$ pour tout $u \in E$.
Alors f est linéaire si et seulement si f_i est linéaire pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Démonstration. Soient u et v dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f(u+\lambda v) = (f_1(u+\lambda v), \ldots, f_p(u+\lambda v))$ et $f(u) + \lambda f(v) = (f_1(u), \ldots, f_p(u)) + \lambda(f_1(v), \ldots, f_p(v)) = (f_1(u) + \lambda f_1(v), \ldots, f_p(u) + \lambda f_p(v))$. Donc $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ si et seulement si, pour tout i, on a $f_i(u+\lambda v) = f_i(u) + \lambda f_i(v)$. □

Théorème A.9. On suppose que E est de dimension finie n. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad f(e_i) = u_i$.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.

Remarque. Ce théorème permet de construire des applications linéaires.

Démonstration. Soit $v \in E$. Comme $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, on peut écrire $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ pour des scalaires λ_i uniques. On pose $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. Démontrons que f est linéaire.

Soient v et v' dans E et $\mu \in \mathbb{K}$. On écrit $v' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_i$, donc $f(v') = \sum_{i=1}^n \lambda'_i u_i$. Alors

$$\begin{aligned} f(v+\mu v') &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \mu \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu\lambda'_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu\lambda'_i) u_i \text{ (définition de } f) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \mu \sum_{i=1}^n \lambda'_i u_i \\ &= f(v) + \mu f(v'). \end{aligned}$$

On a donc l'existence de f. Démontrons maintenant l'unicité : soit $g : E \to F$ une autre application linéaire telle que $g(e_i) = u_i$ pour tout i. Soit $v \in E$ quelconque, que l'on écrit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Comme f et g sont linéaires, on a

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = g(v).$$

C'est vrai pour tout $v \in E$ donc $f = g$. □

Corollaire A.10. Si E est de dimension finie, deux applications linéaires de E dans F sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.

Proposition A.11. Supposons que $\dim E = n$ et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F.

Démonstration. Posons $u_i = f(e_i)$ pour tout i.

- ➢ Supposons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ soit une base de F. D'après le théorème ci-dessus, il existe une unique application linéaire $g : F \to E$ telle que $g(u_i) = e_i$ pour tout i. On a alors, pour tout i, $g \circ f(e_i) = g(u_i) = e_i$ donc $g \circ f$ et id_E sont deux applications linéaires qui coïncident sur la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E donc elles sont égales : $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même, comme $f \circ g(u_i) = u_i$ pour tout i et que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de F, on a $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Donc f est un isomorphisme de réciproque g.
- ➢ Supposons que f soit un isomorphisme.
  Démontrons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$ on a donc $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right)$. On applique f^{-1}, qui est linéaire, donc $0 = f^{-1}(0) = f^{-1}\left(f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre, on a $\lambda_i = 0$ pour tout i.
  Démontrons que $\{u_1, \dots, u_n\}$ engendre F. Soit $v \in F$, alors comme f est surjective il existe $w \in E$ tel que $f(w) = v$. On peut écrire $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, donc $v = f(w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in \mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_n\}$.
  Donc $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de F. □

Corollaire A.12. Deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, notons $f : E \to F$ un isomorphisme et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On sait donc que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F et donc $\dim F = n = \dim E$.

Si $\dim E = \dim F = n$, fixons des bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E et $\{u_1, \dots, u_n\}$ de F. On sait qu'il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = u_i$ pour tout i. De plus f est un isomorphisme puisque $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F. Donc E et F sont isomorphes. □

Corollaire A.13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. C'est clair car $\dim E = n = \dim \mathbb{K}^n$. □

Remarque A.14. Cet isomorphisme n'est pas intrinsèque, il dépend des bases que l'on choisit.

B Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Proposition B.1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- ➢ Pour tout sous-espace vectoriel E' de E, $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F. *(Rappel.* $f(E') = \{f(u) \mid u \in E'\}$.*)*
- ➢ Pour tout sous-espace vectoriel F' de F, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. *(Rappel.* $f^{-1}(F') = \{u \in E \mid f(u) \in F'\}$.*)*

Démonstration.

- ➢ Soient v et v' dans $f(E')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe u et u' dans E' tels que $v = f(u)$ et $v' = f(u')$. Par hypothèse, E' est un sous-espace vectoriel de E donc $u + \lambda u' \in E'$. On a donc $f(u + \lambda u') \in f(E')$. Mais $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u') = v + \lambda v'$ donc $v + \lambda v' \in f(E')$, ce que l'on voulait.
- ➢ Soient u et u' dans $f^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f(u)$ et $f(u')$ dans F'. Par hypothèse, F' est un sous-espace vectoriel de F donc $f(u) + \lambda f(u') \in F'$. Mais $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u') \in F'$ donc $u + \lambda u' \in f^{-1}(F')$, ce que l'on voulait. □

Définition B.2. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

- ➢ *Le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\})$ *de E est appelé **noyau** de f.*
- ➢ *Le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im} f := f(E)$ *de F est appelé **image** de f.*

Proposition B.3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- ➢ Soit E' un sous-espace vectoriel de E engendré par des vecteurs $u_1, \dots, u_p$. Alors $f(E')$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $f(u_1), \dots, f(u_p)$. Autrement dit, $f(\operatorname{vect}\{u_1, \dots, u_p\}) = \operatorname{vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$.
- ➢ f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
- ➢ f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.

- ➢ Chaque u_i est dans E' donc $f(u_i) \in f(E')$ pour tout i. Il est donc clair que $\operatorname{vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$ est un sous-espace vectoriel de $f(E')$. D'autre part, soit $v \in f(E')$, il s'écrit $f(u)$ pour un $u \in E'$. On a donc $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ pour des scalaires λ_i. On en déduit que $v = f(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(u_i) \in \operatorname{vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$, donc $f(E') \subset \operatorname{vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$. Finalement on a bien $f(E') = \operatorname{vect}\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$.
- ➢ Supposons que f soit injective et soit $u \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(u) = 0 = f(0)$ donc $u = 0$ et donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

  Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et soient u, v dans E tels que $f(u) = f(v)$. Alors $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$ donc $u - v \in \operatorname{Ker} f$ donc $u - v = 0$ et donc $u = v$. On a démontré que f est injective.
- ➢ Comme $\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F \mid \exists u \in E \text{ tq } v = f(u)\}$, le résultat est clair. □

Définition B.4. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle* ***rang*** *de f la dimension de* $\operatorname{Im} f$. *On note* $\operatorname{rang} f = \dim(\operatorname{Im} f)$.

Théorème B.5. (Théorème du rang)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Démonstration. Puisque E est de dimension finie, son sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire : il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = \operatorname{Ker} f \oplus H$. Soit $g : H \to \operatorname{Im} f$ l'application définie par $g(u) = f(u)$ pour tout $u \in H$. L'application g est linéaire car f l'est. Nous allons démontrer que g est un isomorphisme.

Soit $u \in \operatorname{Ker} g$. Par définition de g, on a $u \in H$. De plus, $0 = g(u) = f(u)$ donc $u \in \operatorname{Ker} f$. Donc $u \in H \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc $u = 0$. Finalement, $\operatorname{Ker} g = \{0\}$ donc g est injective.

Soit $v \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. De plus, comme $E = \operatorname{Ker} f \oplus H$, on peut écrire $u = z + w$ avec $z \in \operatorname{Ker} f$ et $w \in H$. On a alors $v = f(u) = f(z+w) = f(z) + f(w) = 0 + g(w) = g(w)$, donc $v \in \operatorname{Im} g$. Donc $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et donc g est surjective.

On en déduit donc que $\dim H = \dim(\operatorname{Im} f)$.

Finalement, $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f \oplus H) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim H = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$. □

Corollaire B.6. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E et F sont de même dimension finie, n.

- Si f est injective alors c'est un isomorphisme.
- Si f est surjective alors c'est un isomorphisme.

Démonstration.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$. Donc $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim F - 0 = \dim F$ donc il est égal à F. Donc f est aussi surjective et c'est donc un isomorphisme.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Im} f = F$. On a donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim F = 0$ donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Donc f est aussi injective et c'est donc un isomorphisme. □

Remarque B.7. Le noyau d'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ non nulle est un hyperplan de E.

C Matrice d'une application linéaire

On fixe deux espaces vectoriels E et E' de dimensions finies. On note $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de E. On note $n = \dim E'$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ une base de E'.

Définition C.1. *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. La* ***matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*** *est la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{ème}$ colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

Si $E' = E$ et si $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ s'appelle la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

On note souvent $A = \mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, ou $A = \mathscr{M}_{\mathcal{B}}(f)$ dans le cas $E' = E$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

Remarque C.2. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice d'une application linéaire $f : E \to E'$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (2x - 3y, -x + y, 7x)$. Alors sa matrice dans les bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Notons $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $f(e_1) = (2,-1,7) = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 7\varepsilon_3$ donc la première colonne de la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. On a $f(e_2) = (-3,1,0) = -3\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ donc la deuxième colonne de la matrice de f est $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient bien A.

Proposition C.3. Soient f et g deux applications linéaires de E dans E'. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors la matrice de $f+g$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $A+B$ et la matrice de λf dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est λA.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Par définition des matrices de f et g, cela signifie que pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i$ et $g(e_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} e'_i$.

On a donc $(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) e'_i$ donc le coefficient (i,j) de la matrice de $f+g$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $a_{ij} + b_{ij}$, égal à celui de $A+B$. Donc la matrice de $f+g$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $A+B$.

De même, $(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ij}) e'_i$ donc le coefficient (i,j) de la matrice de λg dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est λa_{ij}, égal à celui de λA. Donc la matrice de λf dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est λA. $\square$

Proposition C.4. Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $u \in E$. Notons $x_1, \ldots, x_p$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et notons $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Posons $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$.
Alors $Y = AX$.

Démonstration. On a par hypothèse $u = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ et $f(u) = \sum_{i=1}^n y_i e'_i$. De plus, si on pose $A = (a_{ij})$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i$.

Donc

$$\sum_{i=1}^n y_i e'_i = f(u) = f\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p x_j a_{ij}\right) e'_i.$$

Mais l'écriture d'un vecteur dans une base est unique, donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a $y_i = \sum_{j=1}^p x_j a_{ij}$.

D'autre part, le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX est $\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j$, il est donc égal à y_i. Finalement, $AX = Y$. $\square$

Exemple. On reprend l'exemple de la page 33. On a bien $AX = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y \\ 7x \end{pmatrix}$.

Proposition C.5. Soient $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$ deux applications linéaires avec E'' de dimension finie q, de base $\mathcal{B}'' = \left\{e''_1, \ldots, e''_q\right\}$. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit B la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ est BA.
Autrement dit, $\mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ki})$ et $BA = (c_{kj})$. Par définition de A et B on a, pour tous $1 \leqslant j \leqslant p$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i \quad \text{et} \quad g(e'_i) = \sum_{k=1}^q b_{ki} e''_k.$$

On a donc

$$g\circ f(e_j)=g(f(e_j))=g\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^n a_{ij}g(e'_i)=\sum_{i=1}^n a_{ij}\sum_{k=1}^q b_{ki}e''_k=\sum_{k=1}^q\left(\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ij}\right)e''_k=\sum_{k=1}^q c_{kj}e''_k.$$

Donc les coordonnées de $g\circ f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}''$ forment la $j^{\text{ème}}$ colonne de BA. Donc BA est bien la matrice de $g\circ f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$. □

Proposition C.6. Soit $f : E \to E'$ une application linéaire avec $\dim E = \dim E' = n$. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
De plus, si f est un isomorphisme, la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est A^{-1}.

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme et notons B la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. On a $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_E$ donc $\mathscr{M}_{\mathcal{B}}(f\circ f^{-1})=\mathscr{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. Or la matrice de $f^{-1}\circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est BA et la matrice de id_E dans la base $\mathcal{B}$ est I_n donc $BA=I_n$ et donc A est inversible d'inverse $A^{-1}=B$. De plus, la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est $B=A^{-1}$.

Réciproquement, supposons que A est inversible et notons $B=(b_{ij})$ son inverse. Pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, posons $u_j=\sum_{i=1}^n b_{ij}e_i$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $g : E'\to E$ telle que $g(e'_j)=u_j$ pour tout j. Alors la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $b_{1j},\dots,b_{nj}$. Donc la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est B.

On a donc $\mathscr{M}_{\mathcal{B}}(g\circ f)=\mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)\mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=BA=I_n$. Donc pour tout i on a $g\circ f(e_i)=e_i$ et donc $g\circ f=\mathrm{id}_E$. On démontre de même que $f\circ g=\mathrm{id}_{E'}$ et donc que f est un isomorphisme. □

C.1 Changement de base

Définition C.7. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La* ***matrice de passage*** *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'application id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. [Attention à l'ordre dans lequel on écrit les bases !]*

Concrètement, les colonnes de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ sont formées des coordonnées des vecteurs de la "nouvelle base" $\mathcal{B}'$ dans l'"ancienne base" $\mathcal{B}$.

Corollaire C.8. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors P est inversible et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Démonstration. L'application id_E est un isomorphisme, donc sa matrice P dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ est inversible. L'inverse de P la matrice de $\mathrm{id}_E^{-1}=\mathrm{id}_E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. □

Remarque C.9. Soit $u\in E$. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et soit $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors $X=PX'$.

Cela découle de la proposition **C.4** et de la définition de P.

Proposition C.10. Soit $f : E\to F$ une application linéaire avec E et F de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.
Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est $A'=Q^{-1}AP$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}"', "\mathrm{id}_F"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "\mathrm{id}_E", "P"'] \arrow[r, "A'", "f"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On a $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$. On en déduit que

$$A' = \mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E) = \mathscr{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)\mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$

Or $\mathscr{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire P; $\mathscr{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice A; enfin, $\mathscr{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire Q^{-1}.

Donc $A' = Q^{-1}AP$. □

Corollaire C.11. Soit $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = P^{-1}AP$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x, \frac{1}{2}(5y - z), \frac{1}{2}(5z - y))$. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = e_1$, $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_2 + e_3)$ et $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_2 + e_3)$. *[Vérifier que c'est bien une base...].*

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (cf TD 3).

Donc pour tout vecteur $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in \mathbb{R}^3$ on a $f(u) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) = \lambda_1 v_1 + 2\lambda_2 v_2 + 3\lambda_3 v_3$.

C.2 Rang d'une application linéaire et rang d'une matrice

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Fixons une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et une base $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ de F. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Alors $\mathrm{Im}\, f = f(E) = f(\mathrm{vect}\,\{e_1, \ldots, e_n\}) = \mathrm{vect}\,\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Donc le rang de f est le rang de la famille de vecteurs $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ de F. Si on exprime ces vecteurs dans la base $\mathcal{C}$, on obtient les colonnes de A par définition de A.

Donc le rang de f est égal au rang de la famille des vecteurs dont les coordonnées sont les colonnes de A. Mais nous avons également défini le rang de la matrice A : il s'agit du rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dont les coordonnées sont les lignes de A. Nous allons démontrer que ces deux notions de rang sont les mêmes.

Proposition C.12. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et soit $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F. Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Alors le rang de f est égal au rang de A.
De plus, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$.

Démonstration. On garde les notations ci-dessus. On fixe également une deuxième base $\mathcal{C}' = \left\{v'_1, \ldots, v'_p\right\}$ de F.

Soient A' la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$ (*ie.* la matrice de id_F dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$). On a donc $A' = QA$. De plus, on sait que Q est inversible, c'est donc un produit de matrices élémentaires, donc A' est ligne-équivalente à A. Choisissons donc Q (c'est-à-dire $\mathcal{C}'$) de sorte que A' soit échelonnée réduite.

Notons $r = \mathrm{rang}(A)$, donc r est le nombre de lignes non nulles de A' (Chapitre **II**, paragraphe **D1**). Nous devons donc démontrer que le rang de f, qui est $\dim(\mathrm{Im}\, f)$, est égal à r.

Soit $u \in E$. On peut écrire $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (dans la base $\mathcal{B}$). Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et soit $A'X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$. On sait alors que $f(u) = \sum_{j=1}^p x'_j v'_j$. Mais les $p - r$ dernières lignes de A' sont nulles, donc $x'_{r+1} = 0 = \cdots = x'_p$ et donc $f(u) = \sum_{j=1}^r x'_j v'_j \in \mathrm{vect}\{v'_1, \ldots, v'_r\}$. Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{vect}\{v'_1, \ldots, v'_r\}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}\, f) \leqslant \dim \mathrm{vect}\{v'_1, \ldots, v'_r\} \leqslant r$. Donc le rang de f est inférieur ou égal à r.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, soit k_i l'indice de la colonne contenant l'élément de tête de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A'. Les coordonnées de $f(e_{k_i})$ dans $\mathcal{C}'$ sont données par les coefficients de la matrice $A'E_{k_i}$ (où E_k est la matrice colonne à p lignes dont les coefficients sont nuls sauf celui de la $k^{\text{ème}}$ ligne qui est 1). Mais $A'E_{k_i}$ est la $k_i{}^{\text{ème}}$ colonne de A' (Chapitre **I**, Lemme **A.12**) elle est donc égale à E_i (puisque A' est échelonnée réduite). On vérifie facilement que $\{E_1, \ldots, E_r\}$ est libre, donc $\{f(e_{k_1}), \ldots, f(e_{k_r})\}$ est libre. Comme $\{f(e_{k_1}), \ldots, f(e_{k_r})\} \subset \mathrm{Im}\, f$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}\, f) \geqslant r$, c'est-à-dire que le rang de f est supérieur ou égal à r.

Finalement, $\mathrm{rang}(f) = r = \mathrm{rang}(A)$.

Pour la dernière affirmation, d'après ce que l'on a dit avant la proposition, le rang de f est égal au rang des vecteurs colonne de A, c'est-à-dire au rang des vecteurs ligne de ${}^tA$, c'est-à-dire que $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}({}^tA)$. Mais on vient de démontrer que $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(A)$, donc $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$. □

Corollaire C.13. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors le rang de f est égal au rang de sa matrice dans des bases quelconques de E et F.

Corollaire C.14. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, soit $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et soit $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rang}(PAQ) = \mathrm{rang}(A)$.

Démonstration.

- ➢ Première méthode. On sait que A est la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ (dans les bases canoniques). Donc PAQ est la matrice de f dans de nouvelles bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, les matrices P et Q étant alors les matrices de passage. Comme le rang de f ne dépend pas de la base choisie, on a le résultat.
- ➢ Deuxième méthode.

$$\mathrm{rang}(PAQ) = \mathrm{rang}(AQ) = \mathrm{rang}({}^t(AQ)) = \mathrm{rang}({}^tQ\,{}^tA) = \mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A).$$

En effet, PAQ et AQ sont ligne-équivalentes, ainsi que ${}^tQ\,{}^tA$ et ${}^tA$ puisque P et ${}^tQ$ sont inversibles donc produits de matrices élémentaires, donc PAQ et AQ ont même rang. □

IV Déterminant d'une matrice

Définition IV.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **déterminant** de A, noté $\det(A)$, est un élément de $\mathbb{K}$ que l'on définit par récurrence de la manière suivante :*

- ➢ *Si $n = 1$ et si $A = (a)$, on pose $\det(A) = a$.*
- ➢ *Si $n \geqslant 2$ et $A = (a_{ij})$, on pose*

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\Delta_{n1}$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Notation IV.2. Si $A = (a_{ij})$, on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple IV.3. Le cas $n = 2$. On a d'après la définition

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\det(d) - c\det(b) = ad - bc.$$

C'est une formule à retenir.

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(8-21) + (12-35) = -49.$$

Théorème IV.4. Le déterminant satisfait les propriétés suivantes.

(i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \det(A) \neq 0$.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de A.

Démonstration. Admis. □

Proposition IV.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

- ➢ Si on multiplie une ligne de A par $\alpha \in \mathbb{K}$, alors on multiplie $\det(A)$ par α.
- ➢ Si on permute deux lignes de A, alors le déterminant change de signe.
- ➢ Si on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne, alors le déterminant ne change pas.
- ➢ $\det({}^tA) = \det A$. En particulier, les propriétés précédentes sont encore vraies lorsqu'on remplace "ligne" par "colonne".

Démonstration. Admis. $\square$

Exemple. **(1)** Soit à calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad L_2 \to L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \to L_3 + L_1 \\
&= 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{en mettant 6 en facteur dans } L_2 \\
&= 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{formule de la définition } \textbf{IV.1} \\
&= 6((-1)\cdot(-2) - 5\cdot 1) = -18.
\end{aligned}$$

On peut en particulier en déduire que la matrice A est inversible.
On peut aussi en déduire que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F} := \{(1,3,-2); (2,0,2); (-1,2,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
En effet, A est la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans les bases canoniques. Comme A est inversible, f est un isomorphisme, donc f est surjective, donc $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Donc les lignes de A forment une base de $\mathbb{R}^3$; il s'agit justement de $\mathcal{F}$.

(2) Soit à calculer le déterminant de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad C_2 \to C_2 + C_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_3 \to C_3 + \frac{3}{2}C_2 \\
&= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= 0 \qquad \text{formule de la définition } \textbf{IV.1}.
\end{aligned}$$

On peut en particulier en déduire que la matrice B n'est pas inversible, et que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\{(1,-1,0); (3,-5,3); (5,-7,3)\}$ n'est pas libre (remarque : $(5,-7,3) = (3,-5,3) - 2(1,-1,0)$).

Corollaire IV.6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a

$$\det(A) = (-1)^{j+1}\left(a_{1j}\Delta_{1j} - a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}\Delta_{nj}\right).$$

On dit que l'on **développe** $\det(A)$ **suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne.**
De plus, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\left(a_{i1}\Delta_{i1} - a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{in}\Delta_{in}\right).$$

On dit que l'on **développe** $\det(A)$ **suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne.**

Démonstration. Admis.
La deuxième formule est obtenue à partir de la première grâce au fait que $\det({}^tA) = \det(A)$. □

Exemple. Soit à calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} && \text{en développant suivant la } 3^{\text{ème}} \text{ colonne} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} && C_2 \to C_2 - 2C_3 \\
&= (-1)^3 5 \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{en développant suivant la } 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \\
&= -5(2 \cdot 5 - 3 \cdot (-7)) = -5 \cdot 31 = -155.
\end{aligned}$$

Remarque IV.7. Attention ! Bien qu'il semblerait que l'on puisse faire les mêmes opérations sur les lignes que lorsque l'on transformait une matrice en une matrice ligne-équivalente, ces opérations peuvent avoir des conséquences sur le déterminant : multiplier une ligne par un scalaire revient à multiplier tout le déterminant par ce scalaire, et permuter deux lignes change le signe du déterminant.

De plus, dans les déterminants, des opérations sur les colonnes sont autorisées (mais ne le sont pas sur les matrices).

V Application : équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

L'objectif de ce chapitre est de résoudre l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ y'' + ay' + by = 0$$

où a et b sont des constantes réelles, c'est-à-dire trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$.

On remarque tout d'abord que si y est solution de $(\mathcal{E})$, alors $y'' = -ay' - by$ est dérivable (puisque y et y' le sont). On peut alors démontrer par récurrence que y est indéfiniment dérivable.

On recherche donc les fonctions y indéfiniment dérivables satisfaisant $(\mathcal{E})$.

Pour des raisons techniques, nous allons travailler dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note $D : E \to E$ l'application linéaire définie par $D(f) = f'$.

Lemme V.1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons $\varphi_\alpha \in E$ la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par $\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha x}$.
Alors $\operatorname{Ker}(D - \alpha \operatorname{id}_E) = \operatorname{vect}\{\varphi_\alpha\}$ est de dimension 1 et $D - \alpha \operatorname{id}_E$ est surjective.

Démonstration. Pour tout $y \in E$, on pose $z = y\varphi_{-\alpha} : x \mapsto y(x)e^{-\alpha x}$. On a $z' = y'\varphi_{-\alpha} - \alpha y \varphi_{-\alpha} = (y' - \alpha y)\varphi_{-\alpha}$.

Soit maintenant $y \in \operatorname{Ker}(D - \alpha \operatorname{id}_E)$, donc $y' - \alpha y = 0$. Alors $z' = 0$ donc z est constante, égale à $C \in \mathbb{C}$. Donc $y = C\varphi_\alpha$. Réciproquement, si $y = C\varphi_\alpha$ pour une constante C, on vérifie facilement que $y' = \alpha y$ et donc que $y \in \operatorname{Ker}(D - \alpha \operatorname{id}_E)$.

On a donc démontré que $\operatorname{Ker}(D - \alpha \operatorname{id}_E) = \{C\varphi_\alpha \mid C \in \mathbb{C}\} = \operatorname{vect}\{\varphi_\alpha\}$. Il est bien de dimension 1 car $\varphi_\alpha \neq 0$ (et donc $\{\varphi_\alpha\}$ est libre).

Il faut maintenant démontrer que $D - \alpha \operatorname{id}_E$ est surjective. Soit donc $f \in E$ et démontrons qu'il existe $y \in E$ telle que $f = (D - \alpha \operatorname{id}_E)(y)$, *ie.* $f = y' - \alpha y$. Avec les notations ci-dessus, il suffit donc de démontrer qu'il existe $z \in E$ telle que $z' = f\varphi_{-\alpha}$. Or cette dernière fonction est $\mathcal{C}^\infty$ donc continue, elle admet donc une primitive, donc z existe. □

Lemme V.2. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Alors $\dim_\mathbb{C} \operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E)) = 2$.

Démonstration. Soit $f \in \operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E))$. Alors $(D - \alpha \operatorname{id}_E)((D - \beta \operatorname{id}_E)(f)) = 0$ et donc $(D - \beta \operatorname{id}_E)(f) \in \operatorname{Ker}(D - \alpha \operatorname{id}_E)$. D'après le lemme précédent cést équivalent à $(D - \beta \operatorname{id}_E)(f) = \lambda\varphi_\alpha$ pour une constante $\lambda \in \mathbb{C}$.

De plus, toujours d'après le lemme précédent, on sait que $D - \beta \operatorname{id}_E$ est surjective, donc il existe $\psi \in E$ telle que $(D - \beta \operatorname{id}_E)(\psi) = \varphi_\alpha$.

On considère alors $f - \lambda\psi$. On a $(D - \beta \operatorname{id}_E)(f - \lambda\psi) = \lambda\varphi_\alpha - \lambda\varphi_\alpha = 0$, donc $f - \lambda\psi \in \operatorname{Ker}(D - \beta \operatorname{id}_E) = \operatorname{vect}\{\varphi_\beta\}$ grâce au lemme précédent.

On a donc démontré que si $f \in \operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E))$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $f - \lambda\psi = \mu\varphi_\beta$, soit $f = \lambda\psi + \mu\varphi_\beta$. Autrement dit, $\operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E)) \subset \operatorname{vect}\{\psi, \varphi_\beta\}$. On vérifie facilement l'autre inclusion, donc $\operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E)) = \operatorname{vect}\{\psi, \varphi_\beta\}$. Donc $\dim_\mathbb{C} \operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E)) \leqslant 2$.

Pour conclure il nous faut donc démontrer que $\{\psi, \varphi_\beta\}$ est libre (et ça sera alors une base de $\operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E))$).

Soient donc λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que $\lambda\psi + \mu\varphi_\beta = 0$. Alors $(D - \beta \operatorname{id}_E)(\lambda\psi + \mu\varphi_\beta) = (D - \beta \operatorname{id}_E)(0) = 0$ et $(D - \beta \operatorname{id}_E)(\lambda\psi + \mu\varphi_\beta) = \lambda\varphi_\alpha$. Donc $\lambda\varphi_\alpha = 0$. On en déduit que $\lambda = 0$. On revient à la relation du début, donc $\mu\varphi_\beta = 0$ et donc $\mu = 0$. □

Remarque V.3. Calculons $(D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E)(y) = (D - \alpha \operatorname{id}_E)(y' - \beta y) = y'' - \beta y' - \alpha(y' - \beta y) = y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y$.

Donc $\operatorname{Ker}((D - \alpha \operatorname{id}_E) \circ (D - \beta \operatorname{id}_E))$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(\star) \quad y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0.$$

De même, $\operatorname{Ker}((D - \beta \operatorname{id}_E) \circ (D - \alpha \operatorname{id}_E))$ est l'ensemble des solutions de la même équation différentielle.

On considère l'équation polynomiale $r^2 + ar + b = 0$. Notons α et β ses deux racines dans $\mathbb{C}$. Alors $r^2 + ar + b = (r - \alpha)(r - \beta) = r^2 - (\alpha + \beta)r + \alpha\beta$ donc $a = -(\alpha + \beta)$ et $b = \alpha\beta$. Donc l'équation $(\mathcal{E})$ est bien de la forme $(\star)$.

Notons également $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de cette équation polynomiale.

Nous avons démontré :

Proposition V.4. Les solutions complexes de l'équation $(\mathcal{E})$ $y'' + ay' + by = 0$ forment un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

Remarque V.5. Pour résoudre $(\mathcal{E})$, il suffit donc de trouver deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathcal{E})$, qui fourniront une base de l'espace des solutions.

- Premier cas : $\alpha \neq \beta$.
  Les fonctions φ_α et φ_β sont deux solutions de $(\mathcal{E})$, qui sont linéairement indépendantes. En effet, si $\lambda\varphi_\alpha + \mu\varphi_\beta = 0$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

  $$0 = \lambda\varphi_\alpha(x) + \mu\varphi_\beta(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}.$$

  On dérive :

  $$\lambda\alpha e^{\alpha x} + \mu\beta e^{\beta x} = 0.$$

  On évalue ces deux relations en $x = 0$, ce qui donne le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.
  D'après ce qui précède, $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$. Les solutions sont donc les fonctions $\lambda\varphi_\alpha + \mu\varphi_\beta$ pour des constantes λ, μ dans $\mathbb{C}$.
- Deuxième cas : $\alpha = \beta$.
  Dans ce cas, les fonctions φ_α et $\chi : x \mapsto xe^{\alpha x}$ sont deux solutions de $(\mathcal{E})$ qui sont linéairement indépendantes (exercice), donc les solutions sont les fonctions $\lambda\varphi_\alpha + \mu\chi$ pour des constantes λ, μ dans $\mathbb{C}$.

Revenons à notre problème de départ : trouver les $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient $(\mathcal{E})$.

- Premier cas : $\Delta > 0$. Alors α et β sont deux réels distincts. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$. Alors $f = \lambda\varphi_\alpha + \mu\varphi_\beta$ avec λ, μ dans $\mathbb{C}$. De plus, comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $f(0) \in \mathbb{R}$ et $f(1) \in \mathbb{R}$, donc $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda e^\alpha + \mu e^\beta \in \mathbb{R}$. On en déduit que λ et μ sont réels. Réciproquement, si λ et μ sont réels, on a bien $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  Donc les solutions réelles de $(\mathcal{E})$ sont les $\lambda\varphi_\alpha + \mu\varphi_\beta$ avec λ, μ dans $\mathbb{R}$.
- Deuxième cas : $\Delta = 0$. Alors $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$. On démontre de même que les solutions réelles de $(\mathcal{E})$ sont les $\lambda\varphi_\alpha + \mu\chi$ avec λ, μ dans $\mathbb{R}$.
- Troisième cas : $\Delta < 0$. Alors α et β sont des nombres complexes distincts, qui ne sont pas réels, et qui sont conjugués. Posons $\alpha = s + it$ et $\beta = s - it$ avec s et t réelsm $t \neq 0$.

D'après ce qui précède, comme $\alpha \neq \beta$, on sait que les solutions complexes sont les $\lambda\varphi_\alpha + \mu\varphi_\beta$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Soit f une telle solution ; alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \\ &= \lambda e^{sx+itx} + \mu e^{sx-itx} \\ &= e^{sx}(\lambda e^{itx} + \mu e^{-itx}) \\ &= e^{sx}\left(\lambda(\cos(tx) + i\sin(tx)) + \mu(\cos(tx) - i\sin(tx))\right) \\ &= e^{sx}\left((\lambda+\mu)\cos(tx) + i(\lambda-\mu)\sin(tx)\right). \end{aligned}$$

Si f est réelle, alors $f(0) = \lambda + \mu$ et $f\left(\frac{\pi}{2t}\right) = i(\lambda - \mu)e^{\frac{s\pi}{2t}}$ sont réels, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = e^{sx}(p\cos(tx) + q\sin(tx))$ avec $p = \lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $q = i(\lambda - \mu) \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si p et q sont réels, $x \mapsto e^{sx}(p\cos(tx) + q\sin(tx))$ est une solution réelle de $(\mathcal{E})$ (à vérifier...)

Finalement, les solutions réelles de $(\mathcal{E})$ dans ce cas sont les $x \mapsto e^{sx}(p\cos(tx) + q\sin(tx))$ avec p et q constantes réelles.

Référence

F. LIRET et D. MARTINAIS, *Algèbre 1re année*, Dunod.