Actions propres de produits en couronne

Yves Stalder

Université Blaise Pascal

Vannes, le 18 avril 2008

Contexte

Dans la suite :

- G, H, Γ, N, Q désigneront des groupes dénombrables (discrets) ;
- $\mathcal{E}$ désignera un espace de Hilbert (réel ou complexe) ;

Soit (X, d) un espace (pseudo-)métrique sur lequel Γ agit par isométries. Soit $x_0 \in X$.

Définition

L'action est (métriquement) propre si pour tout $R > 0$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : d(x_0, \gamma x_0) \leq R\}$ est fini. On écrit $\lim_{\gamma \to \infty} d(x_0, \gamma x_0) = +\infty$.

Cette propriété ne dépend pas de x_0.

Exemple

1. lorsque les orbites sont bornées (et que Γ est infini), l'action n'est pas propre ;
2. un groupe de type fini agit proprement sur son graphe de Cayley.

Propriété de Haagerup

Définition

S'il existe une action isométrique métriquement propre de Γ sur un espace de Hilbert, on dit que Γ possède la propriété de Haagerup.

Remarque

Une telle action est automatiquement affine (sur $\mathbb{R}$).

Remarque

Si Γ est infini et possède la prorpiété (T) de Kazhdan, alors il ne possède pas la propriété de Haagerup.

Intérêt de la propriété de Haagerup

Théorème (Tu, 1999)

Si Γ possède la propriété de Haagerup, alors il est K-moyennable. En particulier, le morphisme $\lambda_\Gamma : C^*_{\mathrm{max}}\Gamma \to C^*_{\mathrm{red}}\Gamma$ induit des isomorphismes en K-théorie.

Théorème (Higson-Kasparov, 2001)

Si Γ possède la propriété de Haagerup, alors il satisfait à la conjecture de Baum-Connes, c'est-à-dire que les applications d'assemblage

$$\mu_i^\Gamma : RK_i^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \to K_i(C^*_{\mathrm{red}}\Gamma)$$

sont des isomorphismes, pour $i = 0, 1$.

Exemples de groupes discrets possédant la propriété de Haagerup

- les groupes finis ;
- les réseaux dans $SO(n, 1)$ et $SU(n, 1)$ (Vershik-Gel'fand-Graev) ;
- les groupes libres et les groupes agissant métriquement proprement sur des arbres (Haagerup, Watatani, Alperin, Julg-Valette, Margulis) ;
- les groupes de Coxeter (Bożejko-Januszkiewicz-Spatzier) ;
- les groupes moyennables (Bekka-Cherix-Valette) ;
- le groupe F de Thompson et les groupes de diagramme (Farley).

Démontrons le troisième point…

Arbre propre $\Longrightarrow$ Haagerup (1)

Soit $T = (V, E)$ un arbre, où E est l'ensemble des arêtes orientées, muni d'une action propre de Γ. On définit $c : V \times V \to \ell^2 E$ par

$$c(v,w)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin \text{ géodésique } v \leftrightarrow w \\ +1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \rightarrow w \\ -1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \leftarrow w \end{cases}$$

Remarque

1. $\|c(v,w)\|^2 = 2 \cdot d(v,w)$;
2. $c(u,v) + c(v,w) = c(u,w)$;
3. $c(\gamma v, \gamma w) = \lambda_E(\gamma) \cdot c(v,w)$.

Ici, λ_E est la représentation de permutation sur $\ell^2 E$, définie par

$$\lambda_E(\gamma)(\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x) \ \text{ ou } \ \lambda(\gamma)\delta_x = \delta_{\gamma x} \ .$$

Arbre propre $\Longrightarrow$ Haagerup (2)

On définit alors $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Isom}(\ell^2 E)$ par :

$$\alpha(\gamma)\xi := \lambda_E(\gamma)\xi + c(v_0, \gamma v_0)$$

où v_0 est un sommet fixé de T.

Remarque

C'est une **action** isométrique telle que $\|\alpha(\gamma)0\| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d(v_0, \gamma v_0)}$.
(Ceci tend vers $+\infty$ pour $\gamma \to \infty$ car l'action sur l'arbre est propre.)

$$\begin{aligned}
\alpha(gh)\xi &= \lambda_E(gh)\xi + c(v_0, ghv_0) \\
\alpha(g)\alpha(h)\xi &= \lambda_E(gh)\xi + c(v_0, gv_0) + \lambda_E(g)c(v_0, hv_0) \\
&= \lambda_E(gh)\xi + c(v_0, gv_0) + c(gv_0, ghv_0)
\end{aligned}$$

Produits en couronne (1)

Rappel (Produit semi-direct)

Soit une action $\beta : H \to \mathrm{Aut}(N)$. Alors $N \rtimes H := N \times H$ avec multiplication donnée par

$$(nh) \cdot (n'h') = n(hn'h^{-1})hh' := (n\beta_h(n'))(hh') \; .$$

Définition

Le ***produit en couronne*** *de G et H est le groupe $H \wr G := H^{(G)} \rtimes G$, où $H^{(G)}$ est l'ensemble des fonctions $G \to H$ à support fini et G agit par décalage d'indices : $(g \cdot \lambda)(s) = \lambda(g^{-1}s)$ pour $g \in G$ et $\lambda \in H^{(G)}$.*

Posons $\Gamma = H \wr G$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ s'écrit de manière unique $\gamma = \lambda g$ avec $g \in G$ et $\lambda \in H^{(G)}$.

Produits en couronne (2)

Exemple

Si $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $H \wr G$ est un groupe d'«allumeur de réverbères». Si $\gamma = \lambda g$, alors $\lambda \in \{0,1\}^{(G)}$ donne la position des lampes allumées et $g \in G$ donne la position de l'allumeur. Le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ allume ou éteint la lampe ; ceux de G déplacent l'allumeur.

En effet, si δ_x désigne la masse de Dirac en $x \in G$:

- $\lambda g \cdot \delta_1 = \lambda(g\delta_1 g^{-1})g = (\lambda + \delta_g)g$;
- $\lambda g \cdot g' = \lambda(gg')$

Extensions et propriété de Haagerup (1)

Remarque

La propriété de Haagerup passe aux sous-groupes, mais pas aux quotients.

Proposition (Jolissaint, 2000, Jolissaint-Julg-Valette, 2001)

Soit $1 \to N \to \Gamma \to Q \to 1$ *une suite exacte de groupes. Si* N *possède la propriété de Haagerup et si* Q *est* ***moyennable****, alors* Γ *possède la propriété de Haagerup.*

Extensions et propriété de Haagerup (2)

Conséquence (pour les produits en couronne)

Si H a la propriété de Haagerup et si G est ***moyennable****, alors $H \wr G$ a la propriété de Haagerup.*

Remarque

La propriété de Haagerup n'est pas stable par produit semi-direct :

- $\mathbb{Z}^2$ possède la propriété de Haagerup ;
- $SL_2(\mathbb{Z})$ possède la propriété de Haagerup ;
- $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété de Haagerup (Margulis).

Une contribution de l'orateur

Supposons G, H non triviaux.

Théorème (Cornulier-S.-Valette)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $H \wr G$ *a la propriété de Haagerup ;*
- G *et* H *ont la propriété de Haagerup.*

En particulier, si H *est fini, alors le produit en couronne* $H \wr \mathbb{F}_2$ *possède la propriété de Haagerup.*

Pour comparaison :

Théorème (Neuhauser, Cherix-Martin-Valette)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $H \wr G$ *a la propriété (T) ;*
- H *a la propriété (T) et* G *est fini.*

Conséquences en analyse harmonique (1)

Définition

La *constante de Cowling-Haagerup* *de* Γ *est*

$$\Lambda(\Gamma) := \inf \Big\{ t \geq 1 : \textit{ il existe une suite } \varphi_n : \Gamma \to \mathbb{R} \ \textit{t.q.} \ |\mathrm{supp}(\varphi_n)| < +\infty, \ \|\varphi_n\|_{cb} \leq t \textit{ et } \varphi_n \to 1 \Big\} .$$

Si $\Lambda(\Gamma) < +\infty$, *on dit que* Γ *est* *faiblement moyennable*.

Conjecture (Cowling)

On a $\Lambda(\Gamma) = 1$ ssi Γ possède la propriété de Haagerup.

Conséquences en analyse harmonique (2)

Théorème (Ozawa-Popa)

1. $\Lambda\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2\big) > 1$;
2. $\Lambda\big(((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2) \wr \mathbb{Z}\big) = +\infty$.

Donc, il existe des groupes avec propriété de Haagerup qui ne sont pas faiblement moyennables.

Théorème (Guentner-Higson)

La constante de Cowling-Haagerup d'un groupe agissant proprement sur un complexe cubique CAT(0) ***de dimension finie*** *est égale à* 1.

Notre résultat (ou sa preuve…) montre que l'hypothèse de dimension finie est nécessaire.

Une généralisation des arbres (1)

Définition (Haglund-Paulin)

Un espace à murs est un couple $(X, \mathcal{W})$ *où*

- X *est un ensemble ;*
- $\mathcal{W}$ *est un ensemble de partitions de* X *en deux classes, appelées murs ;*

tel que pour tous $x, y \in X$*, le nombre* $w(x, y)$ *de murs séparant* x *et* y *soit fini.*

L'ensemble des demi-espaces est $\mathcal{H} = \{a \subseteq X : \{a, a^c\} \text{ est un mur }\}$.

Remarque

w est une (pseudo-)distance sur X.

Une généralisation des arbres (2)

Exemple

Un arbre est un espace à murs.

$$\text{arêtes} \rightleftharpoons \text{murs}$$
$$\text{arêtes orientées} \rightleftharpoons \text{demi-espaces}$$
$$\ell^2 E \rightleftharpoons \ell^2 \mathcal{H}$$

Exemple

1. $\mathbb{Z}^d$ est un espace à murs
2. tout complexe cubique CAT(0) est un espace à murs (Sageev)

Une généralisation des arbres (3)

Remarque (Haglund-Paulin-Valette)

Si un groupe agit métriquement proprement sur un espace à murs, alors il possède la propriété de Haagerup.

Si Γ agit sur un espace à murs, on peut construire une action affine α sur $\ell^2\mathcal{H}$ comme avant.

$$\begin{aligned} e \in \text{géodésique } x \rightarrow y &\rightleftharpoons y \in a \text{ alors que } x \notin a \\ e \in \text{géodésique } x \leftarrow y &\rightleftharpoons x \in a \text{ alors que } y \notin a \\ e \notin \text{géodésique } x \leftrightarrow y &\rightleftharpoons \{a, a^c\} \text{ ne sépare pas } x \text{ et } y \end{aligned}$$

On a encore $\|\alpha(\gamma)0\| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{w(x_0, \gamma x_0)}$.

Idée de preuve : $\Gamma := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2$ a Haagerup

On identifie $\mathbb{F}_2$ à son arbre de Cayley. Si A est un demi-espace et si $\mu : A^c \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est à support fini, on pose :

$$E(A, \mu) := \{\gamma = \lambda g \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2 : g \in A \text{ et } \lambda|_{A^c} = \mu\} .$$

et on note $\mathcal{W}$ l'ensemble des $\{E(A, \mu), E(A, \mu)^c\}$.
On montre alors :

1. $(\Gamma, \mathcal{W})$ est un espace à murs ;
2. $\mathcal{W}$ est invariant par translations à gauche ;
3. l'action de Γ sur $(\Gamma, \mathcal{W})$ est propre.