Plongements bruts dans des espaces de Hilbert

Yves Stalder

Université Blaise Pascal

Orléans, le 31 mars 2009

Plan de l'exposé

Motivations

Théorème (Yu, 2000)

Si un groupe admet un plongement brut dans un espace de Hilbert, alors il satisfait à la ***conjecture des hautes signatures de Novikov****.*

Théorème (Guentner-Kaminker, 2004)

Si la compression hilbertienne d'un groupe G dépasse strictement $1/2$, alors $C^*_{red}G$ est ***exacte****.*

Plongements bruts d'espaces métriques

Contexte

Dans la suite :

- G, H, Γ, N, Q désigneront des groupes de type fini ;
- $\mathcal{E}$ désignera un espace de Hilbert (réel ou complexe) ;
- X, Y, Z désigneront des espaces (pseudo-)métriques.

Définition (Gromov)

Une application $f : X \to Y$ est un plongement brut s'il existe des fonctions $\rho_-, \rho_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{t \to +\infty} \rho_-(t) = +\infty$ et

$$\rho_-(d(x,x')) \leq d(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d(x,x'))$$

pour tous $x, x' \in X$.

Exemples

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; n \mapsto n$ est un plongement brut (avec $\rho_-(t) = t = \rho_+(t)$). De même, tout plongement isométrique est un plongement brut.
2. La fonction «partie entière» $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; x \mapsto [x]$ est un plongement brut (avec $\rho_-(t) = t - 1$ et $\rho_+(t) = t + 1$).

Remarque

On a $g \circ f = \mathrm{id}$ et $d(x, f \circ g(x)) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont brut équivalents.

Exemple : plongement d'un arbre (1)

Soit un arbre $T = (V, E)$, où E est l'ensemble des arêtes orientées. Construisons un plongement brut de V dans l'espace de Hilbert $\ell^2 E$.

On définit $c : V \times V \to \ell^2 E$ par

$$c(v,w)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin \text{ géodésique } v \leftrightarrow w \\ +1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \to w \\ -1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \leftarrow w \end{cases}$$

Remarque

1. $\|c(v,w)\|^2 = 2 \cdot d(v,w)$;
2. $c(v,w) = -c(w,v)$
3. $c(u,v) + c(v,w) = c(u,w)$.

Exemple : plongement d'un arbre (2)

On fixe alors un sommet $u \in V$ et on définit $f : V \to \ell^2 E$ par :

$$f(v) := c(u, v) \ .$$

On constate que

$$f(v) - f(w) = c(u, v) - c(u, w) = c(w, u) + c(u, v) = c(w, v)$$

et donc

$$\|f(v) - f(w)\| = \|c(w, v)\| = \sqrt{2 \cdot d(v, w)} \ .$$

Par conséquent, f est un plongement brut (avec $\rho_-(t) = \sqrt{2t} = \rho_+(t)$).

Autres exemples

Les espaces suivants admettent un plongement brut dans un espace de Hilbert :

1. les arbres réels ;
2. les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$;
3. les complexes cubiques $CAT(0)$, les espaces à murs et les espaces à murs mesurés.

Qui ne se plonge pas dans un Hilbert ?

Théorème (Gromov, 2000)

Une suite de graphes expanseurs n'admet aucun plongement brut dans un espace de Hilbert.

Théorème (Tessera, 2009)

*Un espace X n'admet aucun plongement brut dans un espace de Hilbert si et seulemet si X contient, au sens brut, une suite d'**expanseurs généralisés**.*

Un résultat analogue a été obtenu par Ostrovskii (2009).

Plongement brut d'une suite d'espaces

Définition

Un plongement brut d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces (pseudo-)métriques dans Y est une famille de fonctions $f_n : X_n \to Y$ telle qu'il existe deux fonctions $\rho_-, \rho_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions $\lim_{t\to+\infty} \rho_\pm(t) = +\infty$ et

$$\rho_-\big(d(x,x')\big) \leq d\big(f_n(x), f_n(x')\big) \leq \rho_+\big(d(x,x')\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, x' \in X_n$.

Plongements bruts de groupes dans des espaces de Hilbert

Comment métriser un groupe (1)

Soit G un groupe de type fini et S une partie génératrice finie de G.

Définition

La longueur des mots *sur G associée à S est définie par*

$$|g|_S = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}, g = s_1 \cdots s_n\}$$

pour tout $g \in G$. La métrique des mots *sur G associée à S est définie par*

$$d_S(g, h) = |g^{-1}h|_S$$

pour tous $g, h \in G$.

Invariance par translation : $d_S(gh, gh') = d_S(h, h')$ pour tous g, h, h'.

Comment métriser un groupe (2)

Exemples

1. Si $G = \mathbb{Z}^n$ et S est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d_S est la distance ℓ^1.
2. Si $G = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n)$ et $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, alors d_S est la distance usuelle de l'arbre de valence $2n$.

Remarque

Si S et T sont deux parties génératrices finies de G, alors (G, d_S) et (G, d_T) sont brut équivalents.

En effet, on a

$$|g|_S \leq \left(\max_{t \in T} |t|_S\right) \cdot |g|_T \quad \text{et} \quad |g|_T \leq \left(\max_{s \in S} |s|_T\right) \cdot |g|_S$$

Groupes avec plongement brut dans un Hilbert (1)

Voici quelques exemples de groupes admettant un plongement brut dans un espace de Hilbert :

1. $\mathbb{Z}^n$;
2. les groupes finis ;
3. les groupes libres $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n)$;
4. les groupes possédant la propriété de Haagerup (voir plus loin).

Exemple

Tout groupe hyperbolique au sens de Gromov admet un plongement brut dans un espace de Hilbert. En effet, Bonk et Schramm (2000) ont prouvé qu'un tel groupe admet un plongement brut dans un espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$.

Groupes avec plongement brut dans un Hilbert (2)

L'existence d'un plongement brut dans un espace hilbertien est stable par les opérations suivantes :

- passage aux sous-groupes ;
- produit direct $G \times H$;
- produit amalgamé (Dadarlat-Guentner, 2003) ;
- limite directe, avec flèches injectives (Dadarlat-Guentner, 2003) ;
- extension, **si le quotient est exact** (Dadarlat-Guentner, 2003) ;
- produit en couronne (Cornulier-S.-Valette).

Une question ouverte

Question

Existe-t-il un groupe non exact, mais qui admet un plongement brut dans un espace de Hilbert ?

Produits en couronne (1)

Définition (produit semi-direct)

Soit une action $\beta : H \to \mathrm{Aut}(N)$*. Alors* $N \rtimes H := N \times H$ *avec multiplication donnée par*

$$(nh) \cdot (n'h') = n(hn'h^{-1})hh' := (n\beta_h(n'))(hh') \; .$$

Exemples

1. $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$;
2. $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \rtimes \mathcal{O}(\mathcal{H})$;
3. Groupe diédral : $D_m \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rtimes \{\pm 1\}$.

Produits en couronne (2)

Définition

Le produit en couronne de G et H est le groupe $H \wr G := H^{(G)} \rtimes G$, où $H^{(G)}$ est l'ensemble des fonctions $G \to H$ à support fini et G agit par décalage d'indices : $\beta_g(\lambda)(s) = \lambda(g^{-1}s)$ pour $g \in G$ et $\lambda \in H^{(G)}$.

Exemple

Si $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $H \wr G$ est un groupe d'«allumeur de réverbères». Si $\gamma = \lambda g$, alors $\lambda \in \{0,1\}^{(G)}$ donne la position des lampes allumées et $g \in G$ donne la position de l'allumeur. Le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ allume ou éteint la lampe ; ceux de G déplacent l'allumeur.

Qui ne se plonge pas dans un Hilbert ? — Le retour

Théorème (Gromov, 2000)

Une suite de graphes expanseurs n'admet aucun plongement brut dans un espace de Hilbert.

Théorème (Gromov, 2003)

Il existe un plongement brut d'une famille de graphes expanseurs dans un groupe de type fini.

Voir aussi la présentation récente d'Arzhantseva-Delzant.

Un groupe comme dans ce théorème n'admet aucun plongement brut dans un espace de Hilbert.

Compression hilbertienne

Définition de la compression hilbertienne (1)

Rappel

Une application $f : X \to Y$ est un plongement brut s'il existe des fonctions $\rho_-, \rho_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{t\to+\infty} \rho_-(t) = +\infty$ et

$$\rho_-\big(d(x,x')\big) \leq d\big(f(x),f(x')\big) \leq \rho_+\big(d(x,x')\big)$$

pour tous $x, x' \in X$.

Si X est géodésique, ou si c'est un groupe de type fini, il est aisé de vérifier que

$$d(x,x') \geq r_0 \implies d\big(f(x),f(x')\big) \leq C \cdot d(x,x')$$

pour certaines constantes $C, r_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition de la compression hilbertienne (2)

Définition

Soit $f : X \to Y$ un plongement brut. La compression de f, notée R_f est le suprémum des $\alpha \in [0,1]$ tels qu'il existe $C, r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$d(x,x') \geq r_0 \implies C \cdot d(x,x')^\alpha \leq d(f(x), f(x'))$$

pour tous $x, x' \in X$.

Remarque

Il existe un tel α, puisque $\rho_-(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$.

Définition de la compression hilbertienne (3)

Définition

La compression hilbertienne de X, notée $R(X)$ est le suprémum des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un plongment brut de X dans un espace de Hilbert dont la compression est α.

Si X n'admet pas de plongment brut dans un espace de Hilbert, on convient de poser $R(X) = 0$.

Remarque

Si G est un groupe de type fini, $R(G)$ ne dépend pas du système de générateurs choisi pour construire la métrique des mots.

Exemples

1. $R(\mathbb{Z}^n) = 1$ (le plongement $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$ est quasi-isométrique) ;
2. $R(\mathbb{F}(a,b)) = 1$; $R(\mathbb{F}(a_1,\ldots,a_n)) \geq 1$ (Guentner-Kaminker, 2004) ;
3. Si X est un complexe cubique $CAT(0)$ (non borné) de dimension finie et localement fini, alors $R(X) = 1$ (Campbell-Niblo, 2005) ;
4. Si G est un groupe hyperbolique, alors $R(G) = 1$ (Brodskiy-Sonkin, 2008) ;
5. $R(F) = 1/2$ (Arzhantseva-Guba-Sapir, 2006) ;
6. Si G est à croissance super-polynomiale, alors $R(\mathbb{Z} \wr G) \leq 1/2$ (Arzhantseva-Guba-Sapir, 2006) ;
7. $R(H \wr \mathbb{Z}) \geq \frac{R(H)}{R(H)+1}$ (S.-Valette, 2007) ;
8. Si $R(H) \geq 1/2$, alors $R(H \wr \mathbb{Z}) \geq \frac{2R(H)}{2R(H)+1}$;
   si $R(H) \leq 1/2$, alors $R(H \wr \mathbb{Z}) = R(H)$ (Naor-Peres) ;
9. $R(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) = 2/3$ (Austin-Naor-Peres, 2009).

Resultats sur la compression hilbertienne

Théorème (Guentner-Kaminker, 2004)

Si $R(G) > 1/2$, alors G est exact.

Théorème (Arzhantseva-Drutu-Sapir)

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, il existe un groupe de type fini dont la compression hilbertienne est α.

Cas équivariant

Propriété de Haagerup

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *le groupe Γ possède la **propriété de Haagerup** ;*
2. *il existe une action de Γ par isométries sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un plongement brut Γ-équivariant de Γ dans $\mathcal{H}$.*

Remarque

Si Γ est infini et possède la propriété (T) de Kazhdan, alors il ne possède pas la propriété de Haagerup.

Intérêt de la propriété de Haagerup

Théorème (Tu, 1999)

Si Γ possède la propriété de Haagerup, alors il est K-moyennable. En particulier, le morphisme $\lambda_\Gamma : C^*_{\mathrm{max}}\Gamma \to C^*_{\mathrm{red}}\Gamma$ induit des isomorphismes en K-théorie.

Théorème (Higson-Kasparov, 2001)

Si Γ possède la propriété de Haagerup, alors il satisfait à la conjecture de Baum-Connes, c'est-à-dire que les applications d'assemblage

$$\mu_i^\Gamma : RK_i^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \to K_i(C^*_{\mathrm{red}}\Gamma)$$

sont des isomorphismes, pour $i = 0, 1$.

Exemples de groupes discrets possédant la propriété de Haagerup

- les groupes finis ;
- les réseaux dans $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$ (Vershik-Gel'fand-Graev, 1973) ;
- les groupes libres et les groupes agissant métriquement proprement sur des arbres (Haagerup, 1979, Watatani, Alperin, Julg-Valette, Margulis) ;
- les groupes de Coxeter (Bożejko-Januszkiewicz-Spatzier, 1988) ;
- les groupes moyennables (Bekka-Cherix-Valette, 1995) ;
- le groupe F de Thompson et les groupes de diagramme (Farley, 2003).

Démontrons le troisième point. . .

Haagerup pour les groupes libres (1)

Soit $T = (V, E)$ un arbre. On avait défini $c : V \times V \to \ell^2 E$ par

$$c(v,w)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin \text{ géodésique } v \leftrightarrow w \\ +1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \rightarrow w \\ -1 & \text{si } e \in \text{ géodésique } v \leftarrow w \end{cases}$$

et $f : V \to \ell^2 E$ par $f(v) = c(u, v)$, où u est un sommet fixé.

Rappel

1. f est un plongement brut ;
2. $c(u,v) + c(v,w) = c(u,w)$;

Remarque

Si Γ opère sur T (par automorphismes), on a de plus $c(\gamma v, \gamma w) = \lambda_E(\gamma)[c(v,w)]$, où λ_E est la représentation de permutation sur $\ell^2 E$, définie par $\lambda(\gamma)\delta_e = \delta_{\gamma e}$.

Haagerup pour les groupes libres (2)

On définit alors $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Isom}(\ell^2 E)$ par :

$$\alpha(\gamma)\xi := \lambda_E(\gamma)\xi + f(\gamma u)$$

C'est une **action** isométrique :

$$\begin{array}{rcl} \alpha(gh)\xi & = & \lambda_E(gh)\xi + c(u, ghu) \\ \alpha(g)\alpha(h)\xi & = & \lambda_E(gh)\xi + c(u, gu) + \lambda_E(g)c(u, hu) \\ & = & \lambda_E(gh)\xi + c(u, gu) + c(gu, ghu) \end{array}$$

Remarque

Le plongement $f : V \to \ell^2 E$ est Γ-équivariant.

$$\begin{array}{rcl} f(\gamma v) & = & c(u, \gamma v) = c(u, \gamma u) + c(\gamma u, \gamma v) = f(\gamma u) + \lambda_E(\gamma)[c(u, v)] \\ & = & f(\gamma u) + \lambda_E(\gamma)[f(v)] = \alpha(\gamma) f(v) \end{array}$$

Extensions et propriété de Haagerup

Proposition (Jolissaint, 2000, Jolissaint-Julg-Valette, 2001)

Soit $1 \to N \to \Gamma \to Q \to 1$ *une suite exacte de groupes. Si* N *possède la propriété de Haagerup et si* Q *est* ***moyennable****, alors* Γ *possède la propriété de Haagerup.*

Remarque

La propriété de Haagerup n'est pas stable par produit semi-direct :

- $\mathbb{Z}^2$ possède la propriété de Haagerup ;
- $SL_2(\mathbb{Z})$ possède la propriété de Haagerup ;
- $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété de Haagerup (Margulis).

Propriété de Haagerup et produits en couronne

Supposons G, H non triviaux.

Théorème (Cornulier-S.-Valette)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *$H \wr G$ a la propriété de Haagerup ;*
- *G et H ont la propriété de Haagerup.*

En particulier, si H est fini, alors le produit en couronne $H \wr \mathbb{F}_2$ possède la propriété de Haagerup.

Pour comparaison :

Théorème (Neuhauser, Cherix-Martin-Valette)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *$H \wr G$ a la propriété (T) ;*
- *H a la propriété (T) et G est fini.*

Conséquences en analyse harmonique (1)

Définition

La constante de Cowling-Haagerup de Γ *est*

$$\Lambda(\Gamma) := \inf \; \{t \geq 1 : \textit{ il existe une suite } \varphi_n : \Gamma \to \mathbb{R} \\ \textit{t.q. } |\operatorname{supp}(\varphi_n)| < +\infty, \; \|\varphi_n\|_{cb} \leq t \textit{ et } \varphi_n \to 1\} \,.$$

Si $\Lambda(\Gamma) < +\infty$*, on dit que* Γ *est faiblement moyennable.*

Conjecture (Cowling)

On a $\Lambda(\Gamma) = 1$ ssi Γ possède la propriété de Haagerup.

Conséquences en analyse harmonique (2)

Théorème (Ozawa-Popa)

1. $\Lambda\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2\big) > 1$;
2. $\Lambda\big(((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2) \wr \mathbb{Z}\big) = +\infty$.

Donc, il existe des groupes avec propriété de Haagerup qui ne sont pas faiblement moyennables.

Théorème (Guentner-Higson)

La constante de Cowling-Haagerup d'un groupe agissant proprement sur un complexe cubique CAT(0) ***de dimension finie*** *est égale à* 1.

Notre résultat (ou sa preuve. . .) montre que l'hypothèse de dimension finie est nécessaire.

Une généralisation des arbres (1)

Définition (Haglund-Paulin)

Un *espace à murs* *est un couple* $(X, \mathcal{W})$ *où*

- X *est un ensemble ;*
- $\mathcal{W}$ *est un ensemble de partitions de* X *en deux classes, appelées* *murs* *;*

tel que pour tous $x, y \in X$*, le nombre* $w(x, y)$ *de murs séparant* x *et* y *soit fini.*

L'ensemble des demi-espaces est $\mathcal{H} = \{a \subseteq X : \{a, a^c\} \text{ est un mur }\}$.

Remarque

w est une (pseudo-)distance sur X.

Une généralisation des arbres (2)

Exemple

Un arbre est un espace à murs.

$$\text{arêtes} \rightleftharpoons \text{murs}$$
$$\text{arêtes orientées} \rightleftharpoons \text{demi-espaces}$$
$$\ell^2 E \rightleftharpoons \ell^2 \mathcal{H}$$

Exemple

1. $\mathbb{Z}^d$ est un espace à murs
2. tout complexe cubique CAT(0) est un espace à murs (Sageev)

Une généralisation des arbres (3)

Remarque (Haglund-Paulin-Valette)

Si un groupe (de type fini) G admet un plongement brut G-équivariant dans un espace à murs $(X, \mathcal{W})$, alors il possède la propriété de Haagerup.

On peut construire $c, f : X \to \ell^2\mathcal{H}$ et α “comme avant”.

$$
\begin{aligned}
e &\in \text{géodésique } x \to y \rightleftharpoons y \in a \text{ alors que } x \notin a \\
e &\in \text{géodésique } x \leftarrow y \rightleftharpoons x \in a \text{ alors que } y \notin a \\
e &\notin \text{géodésique } x \leftrightarrow y \rightleftharpoons \{a, a^c\} \text{ ne sépare pas } x \text{ et } y
\end{aligned}
$$

Alors, f est un plogement brut G-équivariant de X dans $\ell^2\mathcal{H}$.

On identifie $\mathbb{F}_2$ à son arbre de Cayley. Si A est un demi-espace et si $\mu : A^c \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est à support fini, on pose :

$$E(A, \mu) := \{\gamma = \lambda g \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{F}_2 : g \in A \text{ et } \lambda|_{A^c} = \mu\} .$$

et on note $\mathcal{W}$ l'ensemble des $\{E(A, \mu), E(A, \mu)^c\}$.
On montre alors :

1. $(\Gamma, \mathcal{W})$ est un espace à murs ;
2. $\mathcal{W}$ est invariant par translations à gauche ;
3. l'application identité de (Γ, mots) dans $(\Gamma, \mathcal{W})$ est un plongement brut (Γ-équivariant).