Remerciements

Ce travail de thèse de doctorat a été effectué entre septembre 1994 et janvier 1998, au laboratoire de mathématiques appliquées de Clermont-Ferrand. Merci donc à ses deux directeurs successifs Messieurs Jacques Simon et Pierre Bernard, pour m'y avoir accueilli avec tant de bonne grâce.

Merci à Jean Picard, pour avoir accepté de m'encadrer, et avoir dirigé mes premiers pas dans la recherche mathématique. Sa disponibilité constante, ainsi que ses conseils éclairés, sont pour beaucoup dans l'accomplissement de ce travail.

Merci à Messieurs Etienne Pardoux et David Nualart, pour avoir bien voulu donner leur avis sur ce manuscrit. La forme définitive de ce travail doit beaucoup aussi à leurs questions et à leurs remarques.

Merci à Madame Annie Millet, à Monsieur Pierre Bernard et à Monsieur Liming Wu pour avoir consenti à participer à ce jury.

Ces quatres années de travail doivent beaucoup à l'ambiance agréable du laboratoire de mathématiques appliquées de l'Université Blaise Pascal. À celle du bureau que nous partagions avec Séverine, Anne-Valérie, David et Didier, bien sûr, mais aussi à la sympathique camaraderie de Jérôme, Pierre, Philippe, Rachad, Razak, Mostepha, Franck, Abdessamad et bien d'autres, à la bonne humeur de Marie-Josée, Monique, Thierry, François J., François D.. Un merci tout particulier à Monsieur Pierre Bernard (encore!) et à Madame Simone Chevet, pour m'avoir aidé dans mes activités d'enseignement.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans quelques pensées pour la famille et les amis.

- À mes parents et à mes frères et sœurs, Pierre (donc aussi à Laure, Constance, Corentin), Bénédicte, François, Claire, Paul et Anne-Marie, une attention spéciale est réservée dans ce travail.

- Aux professeurs qui m'ont fait découvrir les joies des études et des mathématiques, en particulier à Madame Leclercq, Monsieur L'Hour, Monsieur Téroitin, Monsieur et Madame Bourasseau, Madame Browaeys, Madame Potée, Monsieur Bonraisin, Monsieur Albert Lechat ('HAA), Madame Davalan et Monsieur Fraboul. Merci à eux tous.

- Aux étudiants, qui ont dû me supporter lorsque je suis passé de l'autre côté de l'estrade, et qui ne s'en sont peut-être pas encore complètement remis. J'espère qu'il y en aura tout de même beaucoup d'autres.

- À Anne-Francoise pour sa douceur et sa délicatesse, son imagination idioleptique et son dynamisme. Merci. BdBBV.

- À Monsieur le Docteur Pierre Yeoshua Lorenzon Pollock Nageoire Grünfiddler, que les faisceaux, logarithmiques ou non, des fils de la barbe du Prophète l'accompagnent toujours.

- À Monsieur mon cousin Emmanuel Kowalski, principal récipiendaire et diffuseur de la grande révélation whistique qui, de Andy Warhol à Woody Allen, de André Weil à Andrew Wiles, de Antoine Watteau à Andrzej Wajda, de Alfred Whitehead à Alfred Wegener, a fourni à l'humanité les plus beaux fleurons de sa culture.

- Evit an Aotrou Mogn, hag all Brezhoneg ; Breizh Atav !

- À Monsieur Walter Appel, qui trouve un huitième moyen de s'élever, mais par ruse, et non par force :

Certes, je ne crois pas que jamais il nous peigne,
Le solennel Monsieur Philippe de Champaigne.
Mais bizarre, excessif, extravagant, fallot,
Il eût fournit, je pense, à feu Jacques Callot,
Le plus fol normalien à mettre entre ses masques.

- À Robert Le Gall, Xavier Perrin, Gaston le Nezet, et une grosse trentaine d'autres qui se reconnaîtront. A bientôt.

- À Vincent Breton, Pat, Franck, Régis et Pascal, Jean-Marc, et les autres pour les parties de football du mardi, puis du jeudi midi.

- À Marc et Yolaine, Jean-Baptiste, Blandine, Marie-Reine, Francois, et , en témoignage d'amitié.

- À Joseph et Anne, Benoît, Vincent et Vianney, mon meilleur souvenir.

- À Laure et Wolfgang Wernsdorfer, en attendant de se retrouver sur quelque pente glissante...

- À Mississime Catherine Pépin, l'enflammée, la polémique, l'enjouée, la randonneuse, la moqueuse, la russophile, la passionnée, l'amie.

- À Georges Brassens, pour sa musique et ses textes.

- À ceux des lecteurs qui écriront la suite...

Table des matières

Introduction et Présentation des résultats

Introduction

Cette thèse de doctorat d'Université a été élaborée sous la direction de Jean Picard au sein du Laboratoire de Mathématiques appliquées de l'Université Blaise Pascal (Clermont II). Elle est consacrée à l'étude d'une équation aux dérivées partielles stochastique (E.D.P.S. dans la suite du texte) de type parabolique, posée sur $\mathbb{R}^d$, et conduite par une mesure aléatoire de Poisson. Le premier chapitre montre l'existence et l'unicité de la solution d'une telle E.D.P.S. dans certains espaces, et le second élabore un calcul variationnel stochastique sur l'espace des mesures aléatoires de Poisson, afin d'étudier l'existence d'une densité pour la loi du processus solution. On présente à la fin de cette introduction l'ensemble des résultats obtenus.

L'étude d'E.D.P.S. conduites par des mesures aléatoires de Poisson a été présentée, par exemple par Kallianpur, Xiong, et Ramasubramanian dans [10]. On considère alors ces équations comme des équations différentielles stochastiques posées dans un espace vectoriel de dimension infinie, espace nucléaire dénombrablement hilbertien en l'occurence. Pour les E.D.P.S. analogues, mais conduites par un bruit blanc gaussien, Walsh dans [20] cherche une solution comme un processus $V(t,x)$ tel que :

$$\|V\|_E = \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|V(t,x)|^p\}^{1/p} < +\infty. \tag{0.0.1}$$

C'est cette dernière approche qui est retenue ici, et adaptée aux E.D.P.S. conduites par une mesure aléatoire de Poisson. Nous distinguons deux manières de poser une telle équation, soit qu'elle soit conduite par une mesure aléatoire de Poisson non compensée (on parle alors d'équation non compensée), soit qu'elle soit conduite par une mesure aléatoire de Poisson compensée (on parle d'équation compensée.) Dans le premier cas, l'écriture de l'E.D.P.S. fait intervenir une intégrale qui prolonge l'intégrale de Stieltjes par rapport à une mesure aléatoire de Poisson non compensée, dans le second, elle fait intervenir une intégrale stochastique compensée. Ces deux intégrales

sont définies pour des processus prévisibles. Il importe donc d'abord de bien définir ces différents objets. On montre ensuite, dans chacun de ces deux cas, l'existence et l'unicité d'une solution dans des espaces du type de ceux définis dans (0.0.1). Dans ce chapitre, on note par V la solution de l'équation non compensée, et par W la solution de l'équation compensée.
On étudie ensuite la régularité des processus V et W. On s'intéresse d'abord aux régularités partielles de V. On ne peut en effet obtenir de régularité globale conjointement en t et en x, le processus V étant non borné au voisinage de chaque atome de la mesure aléatoire de Poisson considérée. On exhibe des conditions sur l'intensité de la mesure aléatoire de Poisson, sous lesquelles on montre des continuités ou des dérivabilités pour les fonctions $V(t,\cdot)$, et $V(\cdot,x)$. Pour étudier la régularité du processus W, on considère $W(t,\cdot)$ comme une distribution à valeurs sur $\mathbb{R}^d$, et on montre son appartenance à l'espace de Sobolev d'ordre 1 : $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Afin de comparer la régularité de W avec celle d'une équation analogue conduite par un bruit blanc gaussien, on étudie à part le cas où $d=1$, et la continuité de W dans ce cas.

Dans le second chapitre, nous notons V la solution de l'équation compensée et nous étudions l'existence d'une densité pour la loi de $V(t,x)$, le couple (t,x) étant fixé. Pour cela, nous élaborons un calcul variationnel stochastique pour des mesures aléatoires de Poisson, en nous inspirant notamment des idées de [1] et de [12]. On utilise ensuite ce calcul variationnel pour étudier l'absolue continuité de la loi des solutions de certaines E.D.S. conduites par une mesure aléatoire de Poisson. Les résultats qu'on obtient ainsi sont analogues à ceux présentés dans [1] ou dans [11]. Enfin, nous appliquons le calcul de Malliavin ainsi construit à l'étude de l'absolue continuité de la loi de V. Le fait que le processus V soit non borné au voisinage de chaque atome de la mesure aléatoire de Poisson empêche de trouver un critère d'absolue continuité aussi général que celui présenté par Etienne Pardoux et Tusheng Zhang dans [15] pour le problème analogue dans le cas d'une E.D.P.S. conduite par un bruit blanc gaussien. On montre en fait que le processus V possède une loi absolument continue sous des hypothèses de monotonie pour les coefficients de l'E.D.P.S.

0.1 Présentation des résultats

Nous présentons maintenant les principaux résultats obtenus dans ce travail. Pour chaque théorème cité, nous indiquons, entre parenthèses, le numéro qu'il occupe dans le texte.

0.1.1 Résultats du premier chapitre

On désigne par $(U, \mathcal{U}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, muni d'une application

$$|\cdot| \,:\, U \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

et par λ^- une mesure sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$. On note par Ω l'ensemble des mesures à valeurs entières sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, et par λ^+ le processus défini pour un ensemble mesurable A, par :

$$\lambda^+(A, \omega) = \omega(A)\,.$$

On appelle $\mathbb{P}$ la probabilité sur Ω pour laquelle λ^+ définit une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, d'intensité λ^-. On note par λ la mesure aléatoire compensée $\lambda^+ - \lambda^-$, et on suppose, dans ce chapitre, que $d\lambda^- = ds \otimes d\tilde{\lambda}^-(y, h)$, la mesure $\tilde{\lambda}^-$ vérifiant une des deux hypothèses suivantes.

$(\mathrm{H}_{0.1})$. Il existe un M positif tel que $d\tilde{\lambda}^- \leq M\, dy \otimes d\mu(h)$, avec :

$$\int_U |h|\, d\mu(h) < \infty\,,$$

ou bien :

$(\mathrm{H}_{0.2})(p)$. Il existe un M positif tel que $d\tilde{\lambda}^- \leq M\, dy \otimes d\mu(h)$, avec :

$$\int_U |h|^p\, d\mu(h) < \infty\;.$$

On s'intéresse à l'E.D.P.S. qui s'écrit sous forme intégrale, selon :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= u_0(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\Delta V(s,x)\, ds + \int_0^t g(V(s,x), s, x)\, ds \\ &\qquad + \int_0^t \int_{h\in U} f(V_-(s,x), s, x, h)\, d\lambda^\kappa(s,x,h)\,, \end{aligned} \tag{0.1.1}$$

avec $\lambda^\kappa = \lambda^+$, ou $\lambda^\kappa = \lambda$. On va chercher une solution de (0.1.1) qui sera progressivement mesurable. Le processus V_- ci-dessus est alors un processus prévisible égal à V presque partout pour la mesure $dsdy \otimes d\mathbb{P}$.

Si $\lambda^\kappa = \lambda^+$, on cherche la solution V de (0.1.1) dans l'espace E des processus progressivement mesurables pour lesquels :

$$\sup_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} e^{-\alpha t}\mathbb{E}(|X(t,x)|) = \|X\|_E < \infty\,,$$

avec un α positif bien choisi. Pour de tels processus, l'équation (0.1.1) se réécrit comme :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int\limits_{\mathbf{R}^d} u_o(y)G_t(x,y)\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} g(V(s,y),s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds \\ &\quad + \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} \int\limits_{h\in U} f(V_-(s,y),s,y,h)\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda^+(s,y,h)\;, \end{aligned} \tag{0.1.2}$$

avec :

$$G_t(x,y) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{d/2}}\;.$$

Si $\lambda^\kappa = \lambda$, on cherche la solution W de (0.1.1) dans l'espace E_p, des processus progressivement mesurables pour lesquels, pour un $T > 0$ fixé arbitrairement :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|^p)^{1/p} = \|X\|_{E_p} < \infty\,.$$

et l'équation (0.1.1) se réécrit selon :

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \int\limits_{\mathbf{R}^d} u_o(y)G_t(x,y)\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} g(W(s,y),s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds \\ &\quad + \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} \int\limits_{h\in U} f(W_-(s,y),s,y,h)\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda(s,y,h)\;. \end{aligned} \tag{0.1.3}$$

Dans la suite de cette présentation, on écrira souvent $f(V_-,h)$ pour $f(V_-(s,y),s,y,h)$, et $g(V)$ au lieu de $g(V(s,y),s,y)$ de manière à alléger les écritures. On fait les hypothèses suivantes sur f et g.

($\mathrm{H}_{0.3}$). Il existe une constante positive K, telle que, pour tous v et v' réels, pour tout $(s,y,h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$:

(1) $|f(v,s,y,h)| \leq K(1+|v|)|h|$
(2) $|f(v,s,y,h) - f(v',s,y,h)| \leq K|v-v'||h|$

$(\mathrm{H}_{0.4})$. Il existe une constante positive K, telle que, pour tous v et v' réels, pour tout $(s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ll} (1) & |g(v,s,y)| \leq K(1+|v|) \\ (2) & |g(v,s,y) - g(v',s,y)| \leq K|v-v'| \end{array}$$

On a alors les deux théorèmes suivants, respectivement pour (0.1.2) et pour (0.1.3).

Théorème 0.1.1.1 (1.1.2.1) *Si la mesure λ^- vérifie $(\mathrm{H}_{0.1})$, que les fonctions f et g vérifient respectivement $(\mathrm{H}_{0.3})$, et $(\mathrm{H}_{0.4})$, et que la fonction u_0 est bornée sur $\mathbb{R}^d$, alors, en choisissant*

$$\alpha > KM\Big(\int_U |h| d\mu(h)\Big) + K\,,$$

dans la définition de E, l'équation (0.1.2) admet une unique solution dans E.

Lorsque l'hypothèse $(\mathrm{H}_{0.1})$ n'est plus vérifiée, mais que l'hypothèse $(\mathrm{H}_{0.2})$ est satisfaite, l'équation (0.1.1) se résout grâce à une intégrale stochastique par rapport à la mesure compensée λ. Ona alors le théorème suivant.

Théorème 0.1.1.2 (1.1.3.1) *Si la mesure λ^- vérifie $(\mathrm{H}_{0.2})(p)$, pour un $1 < p < 1 + 2/d$, $p \leq 2$, que les fonctions f et g vérifient respectivement $(\mathrm{H}_{0.3})$ et $(\mathrm{H}_{0.4})$, alors l'équation (0.1.3) admet une solution unique W dans l'espace E_p.*

On étudie ensuite la régularité de V et celle de W. On s'intéresse d'abord au processus V, dont on étudie les régularités partielles. Pour cela, on pose, pour tout processus X de E :

$$\Phi_1(X)(t,x) = \int_{s=0}^{t} \int_{\mathrm{R}^d} g(X(s,y),s,y) G_{t-s}(x,y)\, dyds\,. \tag{0.1.4}$$

et

$$\Phi_2(X)(t,x) = \int_{s=0}^{t} \int_{\mathrm{R}^d} \int_U f(X_-(s,y),s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h)\,. \tag{0.1.5}$$

qui sont les deux termes différents intervenant dans l'équation (0.1.2). On étudie d'abord $\Phi_2(V)(t,x)$, qui est aussi la solution de (0.1.2) lorsque $g = 0$. On note pour cela π_a la fonction définie sur U, si a est un nombre positif, par :

$$\begin{array}{rcll} \pi_a(h) & = & |h|^a & \text{si} \quad 0 < a < 1 \\ \pi_a(h) & = & |h||\log(|h|)| & \text{si} \quad a = 1 \\ \pi_a(h) & = & |h| & \text{si} \quad a > 1\,. \end{array}$$

On note $(\mathrm{H}_{0.5})(a)$, l'hypothèse :

$(\mathrm{H}_{0.5})(a)$. La mesure μ vérifie : $\int_{\{} |h| \leq 1\} \pi_a(h)\, d\mu(h) < \infty$

On montre alors les deux théorèmes suivants, portant respectivement sur la régularité de $\Phi_2(V)(t,\cdot)$ et de $\Phi_2(V)(\cdot,x)$.

Théorème 0.1.1.3 (1.2.1.1) *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$, *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$. *Alors, si, pour un entier* $l \in \mathbb{N}$, *la mesure* μ *satisfait à l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.5})(\frac{2}{d+l})$, *il existe un sous-ensemble* N_t *de* Ω, $\mathbb{P}$*-négligeable, tel que : pour tout* $\omega \in \Omega - N_t$, *l'application* $\Phi_2(V)(t,\cdot,\omega)$ *est de classe* C^l *sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 0.1.1.4 (1.2.1.2) *On suppose que les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$, *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$ *sont vérifiées, et que la mesure* μ *vérifie* $(\mathrm{H}_{0.5})(\frac{d}{d+2l})$, *pour un entier positif* l. *Alors, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$, *il existe un sous-ensemble* N_x *de* Ω, *qui est* $\mathbb{P}$*-négligeable, et tel que : pour tout* $\omega \notin N_x$, *la fonction* $\Phi_2(V)(\cdot,x)$ *est de classe* C^l *sur* $\mathbb{R}^+$.

On étudie ensuite les ensembles de points irréguliers de $\Phi_2(V)$ c'est-à-dire les ensembles E_l et F_l définis par :

$$\begin{cases} E_l &= \{ t \in [0,T] \;:\; \Phi_2(V)(t,\cdot) \text{ n'est pas de classe } C^l \text{ sur } \mathbb{R}^d \} \\ \\ F_l &= \{ x \in \mathbb{R}^d \;:\; \Phi_2(V)(\cdot,x) \text{ n'est pas de classe } C^l \text{ sur } [0,T] \}\,. \end{cases} \tag{0.1.6}$$

Pour cela, on note par β l'indice de Blumenthal-Getoor défini par ;

$$\beta = \inf\{a \geq 0 \;:\; \int_{|h|\leq 1} |h|^a\, d\mu(h) \;<\; \infty\}\,, \tag{0.1.7}$$

et on suppose que $\beta < 1$. On a alors les théorèmes suivants qui majorent les dimensions de Hausdorff de E_l et de F_l.

Théorème 0.1.1.5 (1.2.1.3) *On suppose que* $\beta < 1$, *et que la fonction* f *vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.6})$ *ci-dessous.*
$(\mathrm{H}_{0.6})$. *Il existe une constante positive* C, *telle que, pour tout* (v,s,y,h) :

$$|f(v,s,y,h)| \leq C|h|$$

Si les hypothèses du théorème 0.1.1.1 sont vérifiées, et qu'on a, pour un $l \in \mathbb{N}$, $\beta < \frac{2}{d+l}$, *alors avec une probabilité égale à* 1 :

$$\dim_{\mathrm{H}} E_l \leq \frac{(d+l)\beta}{2}\,. \tag{0.1.8}$$

Théorème 0.1.1.6 (1.2.1.4) *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$ *sont vérifiées, et que* $\beta < \frac{d}{2(d+l)}$, *alors, presque sûrement :*

$$\dim_{\mathrm{H}} F_l \leq \frac{\beta(d+2l)}{(1-\beta)} . \tag{0.1.9}$$

Pour étudier ensuite les régularités de $\Phi_1(V)$, on utilise le critère de Kolmogoroff, ainsi que des évaluations sur $G_t(x,y)$ qui sont montrées dans l'appendice de ce premier chapitre. On obtient ainsi les quatre théorèmes suivants. Les deux premiers donnent la régularité de $\Phi_1(V)(t,\cdot)$, les deux derniers celle de $\Phi_1(V)(\cdot,x)$.

Théorème 0.1.1.7 (1.2.2.1) *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$ *sont vérifiées, et que la fonction* g *est bornée, alors pour tout instant* t *fixé, la fonction* $\Phi_1(V)(t,\cdot,\omega)$ *est presque sûrement continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 0.1.1.8 (1.2.2.2) *On suppose ici que* $d \leq 2$, *que la mesure* λ^- *satisfait les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.2})(p)$, *pour tout* $1 \leq p < 1+2/d$, *et que les fonctions* f *et* g *vérifient respectivement,* $(\mathrm{H}_{0.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$. *Alors la fonction* $\Phi_1(V)(t,\cdot,\omega)$ *est presque sûrement continue sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 0.1.1.9 (1.2.2.3) *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$, *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$ *sont vérifiées, et que la fonction* g *est bornée, alors la fonction* $\Phi_1(V)(\cdot,x,\omega)$ *est presque sûrement continue,* $\forall x \in \mathbb{R}^d$, *et, si* $\delta \leq 1/2$,

$$|\Phi_1(V)(t,x,\omega) - \Phi_1(V)(t+\delta,x,\omega)| \leq C|\delta \log(|\delta|)|.$$

Théorème 0.1.1.10 (1.2.2.4) *Supposons que les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.1})$, $(\mathrm{H}_{0.3})$, $(\mathrm{H}_{0.4})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.2})(p)$, *pour un* $1 < p < 1+2/d$, *soient vérifiées. Alors, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$, *il existe un ensemble* $\mathbb{P}$*-négligeable* N_x, *tel que si* $\omega \notin N_x$ *la fonction* $\Phi_1(V)(\cdot,x,\omega)$ *soit continue sur* $\mathbb{R}^+$.

On s'intéresse ensuite à l'équation (0.1.1) posée avec une intégrale compensée, donc avec $\lambda^\kappa = \lambda$. On considère la solution W de cette équation comme une fonction de $[0,T]$ à valeurs dans l'espace des mesures de Radon localement finies sur $\mathbb{R}^d$. On note par $\mathrm{W}^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d$ qui sont dans L^p localement, ainsi que leurs dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}$. On écrit dans la suite ∇_x pour le gradient d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$, par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.1.1.11 (1.2.3.1) *Si les fonctions* f *et* g *vérifient les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.4})$, *et que l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.2})$ *est vérifiée, pour un* $1 < p < 1 + \frac{1}{d+1}$, *alors, pour tout* t *positif :*

$$\mathbb{P}\{W_t \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}\} = 1 .$$

Plus précisément, pour tout $T \geq 0$, $W(t,x)$ est dans l'espace $F_{1,p}$ des processus progressivement mesurables pour lesquels :

$$\|W\|_{F_{1,p}} = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|W(t,x)|^p\}^{1/p} + \mathbb{E}\{|\nabla_x W(t,x)|^p\}^{1/p} \ < \ \infty \ . \tag{0.1.10}$$

Si $d = 1$, et que les hypothèses de ce théorème sont vérifiées, on a donc pour un $0 \leq t \leq T$ arbitraire, avec probabilité 1, $W(t,\cdot)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Ce résultat est complété par le suivant.

Théorème 0.1.1.12 (1.2.4.1) *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.3})$*,* $(\mathrm{H}_{0.4})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.2})(p)$ *sont vérifiées, pour un $1 < p < 2$, alors, pour tout $t \geq 0$, il existe un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable N_t tel que, si $\omega \notin N_t$, la fonction $W(t,\cdot,\omega)$ soit continue sur $\mathbb{R}^d$.*

0.1.2 Résultats du deuxième chapitre

Dans ce deuxième chapitre, nous présentons un calcul variationnel stochastique, que nous utilisons pour étudier l'absolue continuité de la loi de l'équation (0.1.1), posée avec $\lambda^\kappa = \lambda$. Dans ce chapitre, on suppose que l'espace U est égal à $\mathbb{R}^r$, et on note par V la solution de l'E.D.P.S. compensée (0.1.3). On écrit alors $(\!(h \,|\, h')\!)$, pour le produit scalaire de deux vecteurs h et h' de $\mathbb{R}^r$, et ∇_U (resp. Hess_U), pour le gradient (resp. la Hessienne), d'une application de $\mathbb{R}^r$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\bar{d}_h$, (resp. $\bar{d}_h^2$), pour la différentielle en h (resp.la différentielle seconde en h), d'une fonction de $\mathbb{R}^r$ à valeurs dans $\mathbb{R}^r$.
Dans une première partie, nous rappelons le théorème de Girsanov pour des mesures aléatoires, tel qu'il est présenté dans [8], puis nous montrons comment il permet de calculer la densité de certains changements de probabiliés sur Ω. Le cadre que nous présentons ainsi est plus général que ce dont nous avons besoin dans la suite. Dans ce résumé, nous citons seulement le principal résultat utile de cette partie.

Nous supposons que l'espace Ω est muni de deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$, la probabilité $\mathbb{P}$ étant définie dans le premier chapitre. On appelle ν^- le compensateur de la mesure aléatoire λ^+ pour la probabilité $\mathbb{Q}$, et on fait l'hypothèse que $\nu^- \ll \lambda^-$, en notant Y le processus densité :

$$Y(\omega,s,y,h) = \frac{d\nu^-}{d\lambda^-}(\omega,s,y,h) \ . \tag{0.1.11}$$

On suppose que Y vérifie l'hypothèse ci-dessous, pour un $p \in]1,2]$.

$(\mathrm{H}_{0.7})(p)$. Le processus Y est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable, et tel que :

(1) $\quad (\omega, s) \longmapsto \int\limits_y \int\limits_h |Y(\omega, s, y, h) - 1|^p d\tilde{\lambda}^-(y, h) \; ; \in \; L^\infty(d(\mathbb{P} + \mathbb{Q}) \otimes ds)$

(2) $\quad Y > 0$, $d\lambda^- \otimes d(\mathbb{P} + \mathbb{Q})$-presque partout.

On appelle $\mathbf{F}_p$ l'espace vectoriel des processus X adaptés càdlàg, et tels que :

$$\|X\|_{\mathbf{F}_p} = \mathbb{E}\left\{ \sup_{s \in [0,T]} |X(s)|^p \right\}^{1/p} < \infty \,, \tag{0.1.12}$$

le symbole $\mathbb{E}$ ci-dessus représentant une espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$. On considère alors l'équation différentielle stochastique (E.D.S.) :

$$X(t, \omega) = 1 + \int\limits_0^t \int\limits_y \int\limits_h X(s^-, \omega)(Y(\omega, s, y, h) - 1)\, d\lambda(s, y, h) \,, \tag{0.1.13}$$

et on a le théorème suivant, dans lequel $\mathrm{M}_{\mathbb{Q} \otimes \nu^+}(W/\tilde{\mathcal{P}})$ représente l'espérance conditionnelle du processus optionnel W par rapport à la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ ($\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ étant la tribu prévisible sur $\Omega \times [0, T]$.)

Théorème 0.1.2.1 (2.1.2.1) *Si le processus Y vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.7})(p)$*, pour un* $p \in]1, 2]$*, on a :*

(1) L'E.D.S. (0.1.13) possède une solution unique $\delta(t, \omega)$ dans l'espace $\mathbf{F}_p$, et on a :

$$\mathrm{M}_{\mathbf{P} \otimes \lambda^+}\left(\frac{\delta_t}{\delta_{t^-}} \mathbf{1}_{\{\delta_{t^-} > 0\}} \Big/ \tilde{\mathcal{P}} \right) = Y \tag{0.1.14}$$

(2) Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, et $d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t, \omega)\, d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$. On a donc :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t, \omega) = \exp\left\{ \int\limits_0^t\!\!\int\!\!\int \ln(Y) d\lambda + \int\limits_0^t\!\!\int\!\!\int (\ln(Y) - Y + 1) d\lambda^- \right\}. \tag{0.1.15}$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous construisons une dérivation de Malliavin pour des variables aléatoires définies sur Ω. Pour cela, nous avons besoin que la mesure λ^- soit suffisamment régulière. On suppose donc que $d\lambda^-(s, y, h) = l(y, h)\, dsdydh$, et on fait l'hypothèse suivante sur la fonction l.

$(\mathrm{H}_{0.8})(p)$. La fonction l vérifie :

(1) $\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^r} l(y,h)\,|h|^p\,dh \;<\; \infty$

(2) la fonction $l(y,\cdot)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$

(3) pour tout $A\subset\mathbb{R}^d$, borné, il existe deux constantes positives C_A et h'_A telles que, si $y\in A$, et $|h|\le h'_A$:

$$\frac{|\nabla_U\, l(y,h)|}{l(y,h)}|h| \;\le\; C_A \quad\text{et}\quad \frac{|\mathrm{Hess}_U\, l(y,h)|}{l(y,h)}|h|^2 \;\le\; C_A\,.$$

On va utiliser, pour perturber la mesure aléatoire λ^+, le groupe de difféomorphismes à un paramètre induit par une famille $\psi_{s,y}$, indexée par $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$. On fait sur $\psi_{s,y}$ les hypothèses suivantes.

$(\mathrm{H}_{0.9})$. La famille $\psi_{s,y}(h)$, est une famille de champs de vecteurs qui sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$, telle que :

(1) $\psi(0)=0,\ \bar{d}_0\psi=0$;
(2) Il existe une constante C, indépendante de s et y, et telle que, pour tout $h\in\mathbb{R}^r$:

$$|\bar{d}_h^2\psi_{s,y}|\le C\ ;$$

(3) Il existe un compact K inclus dans $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$, et tel que :

$$\mathrm{supp}\,\psi_{s,y}\subset K\subset[0,T]\times\mathrm{supp}\,l\,.$$

On note par $X^{\psi_{s,y}}$ le groupe de difféomorphismes à un paramètre sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$, induit par le champ de vecteurs ψ. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X^{\psi_{s,y}}(h,0) &=& h\\[2ex] \dfrac{dX^{\psi_{s,y}}(h,\theta)}{d\theta} &=& \psi_{s,y}(X^{\psi_{s,y}}(h,\theta))\ . \end{array}\right. \tag{0.1.16}$$

Pour alléger les écritures, on écrira simplement ψ pour $\psi_{s,y}$, quand aucune ambiguïté ne sera possible. Si ϕ est une application mesurable sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$, on pose :

$$\lambda^\kappa(\phi)=\iiint\phi(s,y,h)\,d\lambda^\kappa(s,y,h)\,,$$

pour $\lambda^\kappa = \lambda^+$ ou λ.On dit que la variable aléatoire Y est lisse si elle s'écrit :

$$Y(\omega) = F(\lambda^\kappa(\phi_1), \cdots, \lambda^\kappa(\phi_n)) ,$$

avec :
– la fonction F est de classe C^∞ et à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^n$;
– les fonctions ϕ_i sont à support compact dans $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r-\{0\}$, elles sont de classe C^∞ en h sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et à dérivées uniformément bornées sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r - \{0\}$.
On définit alors la dérivée D_ψ d'une telle variable aléatoire par :

$$D_\psi Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\lambda^\kappa(\phi_1), \cdots, \lambda^\kappa(\phi_n)) \iiint (\!(\nabla_U \phi_i \| \psi_{s,y}(h))\!)\, d\lambda^+(s,y,h) \ . \qquad (0.1.17)$$

Le théorème suivant donne une formule d'intégration par parties pour la dérivée directionnelle D_ψ.

Théorème 0.1.2.2 (2.2.2.1) *Si la mesure λ^- vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.8})(p)$*, pour un* $p \in]1,2]$*, et que la famille de champs de vecteurs $\psi_{s,y}$ vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{0.9})$*, alors, pour toute variable aléatoire lisse Y, on a la formule d'intégration par parties suivante :*

$$\mathbb{E}\left\{D_\psi Y\right\} = \mathbb{E}\left\{-Y \iiint \left(\frac{(\!(\nabla_U l \| \psi)\!)}{l} + \mathrm{div}(\psi)\right) d\lambda\right\} \qquad (0.1.18)$$

Ce théorème permet de montrer la propriété de fermabilité ci-dessous, pour l'opérateur D_ψ.

Propriété 0.1.2.1 (2.2.3.1) *Nous supposons que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{0.8})(p)$*, pour un* $p \in]1,2]$*. Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^r - \{0\}$ *satisfaisant* $(\mathrm{H}_{0.9})$*. Alors l'opérateur D_ψ est fermable dans $L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p' > 1$.*

On note alors $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires Y telles que Y et $D_\psi Y$ sont dans $L^p(\Omega)$. On munit cet espace de la norme :

$$\|Y\|_{\mathbb{D}_\psi^{1,p}} = \mathbb{E}\{|Y|^p + |D_\psi Y|^p\}^{1/p} \ . \qquad (0.1.19)$$

Grâce à la propriété de fermabilité, on peut dériver des variables aléatoires définies par des intégrales, stochastiques ou non, de certains processus. Il est donc possible de dériver, dans la direction d'un champ de vecteurs ψ vérifiant $(\mathrm{H}_{0.9})$, un processus défini comme la solution d'une E.D.S. ou d'une E.D.P.S. C'est l'objet de la troisième et dernière partie de ce chapitre.

Nous étudions d'abord l'existence d'une densité pour la loi de $X(t)$, si X est le processus solution d'une E.D.S. conduite par une mesure de Poisson. On retrouve ainsi des théorèmes analogues à ceux montrés dans [1]. Pour cette étude, on suppose que λ^+ est une mesure aléatoire de Poisson sur $[0,T]\times\mathbb{R}^r$, d'intensité :

$$d\lambda^-(s,h) = l(h)\,dsdh = ds\otimes d\mu(h)\,,$$

et on modifie en conséquence l'hypothèse ($\mathrm{H}_{0.8}$), pour l'écrire comme suit.

($\mathrm{H}_{0.10}$)(p). La fonction l vérifie :

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^r} l(h)\,|h|^p\,dh \,<\, \infty$;

(2) la fonction l est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$;

(3) il existe deux constantes positives C et h' telles que, si $|h|\leq h'$:

$$\frac{|\nabla_U\,l(h)|}{l(h)}|h| \,\leq\, C \quad \text{et} \quad \frac{|\mathrm{Hess}_U\,l(h)|}{l(h)}|h|^2 \,\leq\, C\,.$$

On considère alors l'E.D.S. :

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_{s^-},s)\,ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^r} b(X_{s^-},s,h)\,d\lambda(s,h)\,, \tag{0.1.20}$$

qu'on va résoudre dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$ des processus progressivement mesurables, tels que l'application :

$$\begin{array}{rcl} [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{D}^{1,p}_{\psi} \\ s & \longmapsto & X(s,\cdot) \end{array}$$

est continue. On munit cet espace de la norme :

$$\|X\|_{\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}} = \mathbb{E}\{\sup_{s\in[0,T]}|X(s)|^p\}^{1/p} + \mathbb{E}\{\sup_{s\in[0,T]}|D_\psi X(s)|^p\}^{1/p} < \infty\,.$$

On fait sur les fonctions a et b, qui apparaissent dans (0.1.20) les hypothèses suivantes.

($\mathrm{H}_{0.11}$). La fonction $a(\cdot,t)$ est de classe C^1, et il existe une constante k, indépendante de t, et telle que, pour tout couple $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$,

(1) $\displaystyle\left|\frac{da(x,t)}{dx}\right|\leq k\,;$

(2) $\displaystyle\left|\frac{da(x,t)}{dx}-\frac{da(x',t)}{dx}\right|\leq k|x-x'|$

$(\mathrm{H}_{0.12})$. Les fonctions $b(\cdot, s, h)$ et $b(x, s, \cdot)$ sont de classe C^1, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(s, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^r$:

(1) $\quad \dfrac{\partial b}{\partial x}(x, s, h) > -1$;

(2) $\quad \left|\dfrac{db(\cdot, s, h)}{dx}\right| \leq C|h|$;

(3) $\quad \left|\dfrac{db(x, s, h)}{dx} - \dfrac{db(x', s, h)}{dx}\right| \leq C|x' - x||h|$

(4) $\quad |\nabla_U b(x, s, h) - \nabla_U b(x', s, h)| \leq C|x - x'|$.

$(\mathrm{H}_{0.13})$. La mesure μ vérifie : $\displaystyle\int_0 d\mu(h) = \infty$.

$(\mathrm{H}_{0.14})$. Il existe un voisinage V de $(x_0, 0, 0)$, sur lequel la fonction $\nabla_U b$ est continue et ne s'annule pas.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.1.2.3 (2.3.2.1) *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{0.7})(p)$, pour tout $p \in]p_0, p_1[$, avec $1 \leq p_0 < p_1 \leq 2$. Si les hypothèses $(\mathrm{H}_{0.8})$ et $(\mathrm{H}_{0.9})$ sont vérifiées, alors l'équation (2.3.5) admet une solution unique X_t dans $\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$, pour tout $p \in]p_0, p_1[$.*
Si en outre, μ et b vérifient respectivement les hypothèses $(\mathrm{H}_{0.10})$ et $(\mathrm{H}_{0.11})$, alors, pour tout $t \in [0, T]$, la loi de la variable aléatoire X_t possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Nous présentons ensuite en détail l'étude du cas particulier d'une E.D.S. linéaire, afin de mieux discerner les cas dans lesquels le calcul de Malliavin que nous utilisons peut permettre de conclure à l'absolue continuité de la loi de la solution. On exhibe ainsi un exemple pour lequel la loi de X_t est susceptible d'être absolument continue bien que $\mathbb{P}\{D_\psi X(t) = 0\} > 0$.

Pour appliquer l'opérateur de dérivation directionnelle à la solution, cette fois notée V, de l'équation (0.1.3), on fait les hypothèses suivantes sur les fonctions f et g.

$(\mathrm{H}_{0.15})$. La fonction $f(v,s,y,h)$ est de classe C^1 en v, et il existe une constante k telle que, pour tout (v,s,y,h) :

(1) $|f(v,s,y,h)| \leq k\,(1+|v|)\,|h|$;

(2) $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) \right| \leq k|h|.$

(3) $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) - \dfrac{\partial f}{\partial v}(v',s,y,h) \right| \leq k|h||v-v'|.$

$(\mathrm{H}_{0.16})$. La fonction $g(v,s,y)$ est de classe C^1 en v, et il existe une constante k' telle que, pour tout (v,s,y) :

(1) $|g(v,s,y)| \leq k'\,(1+|v|)$;

(2) $\left| \dfrac{\partial g}{\partial v}(v,s,y) \right| \leq k'.$

(3) $\left| \dfrac{\partial g}{\partial v}(v,s,y) - \dfrac{\partial g}{\partial v}(v',s,y) \right| \leq k'|v-v'|.$

$(\mathrm{H}_{0.17})$. La fonction $f(v,s,y,h)$ est de classe C^1 en h sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et il existe une constante k", telle que, pour tout couple de réels (v,v'), et tout (s,y,h) de $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r - \{0\}$:

(1) $|\nabla_U f(v,s,y,h)| \leq k"(1+|v|)$;
(2) $|\nabla_U f(v,s,y,h) - \nabla_U f(v',s,y,h)| \leq k"|v'-v|$.

On travaille dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$ des processus X, progressivement mesurables, et tels que l'application :

$$X \ : \ \begin{array}{ccc} [0,T]\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{D}^{1,p}_{\psi} \\ (t,x) & \longmapsto & X(t,x,\omega) \end{array} \tag{0.1.21}$$

soit continue et bornée. Cet espace est muni de la norme :

$$\|X\|_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}} = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \|X(t,x)\|_{\mathbb{D}^{1,p}_{\psi}} . \tag{0.1.22}$$

On a alors le théorème suivant, qui permet de dériver le processus V et caractérise sa dérivée $D_\psi V(t,x)$.

Théorème 0.1.2.4 (2.3.3.1) *Nous supposons que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{0.2})(p)$, *pour tout $p \in]p_0,p_1[$, avec $1 \leq p_0 < p_1 \leq 1+2/d$. Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant* $(\mathrm{H}_{0.3})$. *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{0.13})$, $(\mathrm{H}_{0.14})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.15})$

sont vérifiées, alors l'équation (2.3.23) admet une solution unique V dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, pour tout $p \in]p_0, p_1[$. La dérivée directionnelle $D_\psi V$ de cette solution se calcule en dérivant formellement (2.3.23). Le processus $D_\psi V$ est la solution, dans E_p, de l'équation :

$$\begin{aligned} D_\psi V(t,x) &= \iint D_\psi V\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ &+ \iiint G_{t-s}(x,y) \Big((\!(\nabla_U f(V_-,h) \| \psi(h))\!)\, d\lambda^+ + D_\psi V_-\, f'(V_-,h)\, d\lambda \Big). \end{aligned} \tag{0.1.23}$$

Nous présentons ensuite des exemples de cas où le théorème 0.1.2.4 permet de montrer l'absolue continuité de la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$. On étudie d'abord le cas où f ne dépend pas de V. On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.1.2.5 (2.3.3.2) *Si les hypothèses du théorème 0.1.2.4 sont vérifiées, que la fonction f vérifie $f'(v) = 0$, et que :*

$$\lambda^-(\{\nabla_U f(s,y,h) \neq 0\} \cap \{[0,t]\}) = +\infty\,, \tag{0.1.24}$$

alors, la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Lorsque f dépend de V, on fait une hypothèse supplémentaire sur la fonction l.
($\mathrm{H}_{0.18}$). La fonction l vérifie : $\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{h \in \mathbb{R}^r} |h|\, l(y,h)\, dh < \infty$.

et on réécrit l'équation (0.1.3) avec une intégrale non compensée, et en changeant la valeur de g, selon :

$$\begin{aligned} V(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y)\, dy &+ \iiint f(V_-(s,y),s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \\ &+ \iint g(V(s,y),s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy\,. \end{aligned} \tag{0.1.25}$$

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes sur la fonction f.
($\mathrm{H}_{0.19}$). Pour tout (v,s,y,h) dans $\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) \geq 0$.

($\mathrm{H}_{0.20}$). Pour tout $A \geq 0$, il existe une famille de champs de vecteurs vérifiant ($\mathrm{H}_{0.9}$), telle que $\lambda^-(\operatorname{supp}\psi \cap [0,t]) \geq A$, et telle que, avec probabilité égale à 1 :

$$\lambda^- \Big(\operatorname{supp}\psi\ \cap\ \Big\{ (\!(\nabla_U f(V_-(s,y),s,y,h) \| \psi_{s,y}(h))\!)\ \leq 0 \Big\} \Big) = 0$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.1.2.6 (2.3.3.3) *Si les hypothèses du théorème 0.1.2.4 sont satisfaites, que la fonction l vérifie en outre* $(\mathrm{H}_{0.18})$*, et que la fonction f satisfait* $(\mathrm{H}_{0.19})$ *et* $(\mathrm{H}_{0.20})$*, alors la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

A la fin de cette étude, nous explicitons des cas où ce théorème permet de conclure à l'existence d'une densité pour la loi de $V(t,x)$. Ce résultat, l'ultime de ce travail, est cependant assez restreint, car l'hypothèse $(\mathrm{H}_{0.19})$ est contraignante.

Chapitre 1

Etude d'une E.D.P.S. conduite par un bruit poissonnien

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques (E.D.P.S.) paraboliques intervient dans des problèmes aussi variés que la théorie du filtrage, l'étude de l'évolution du potentiel électrique d'un réseau de neurones ou la description de modèles de pollution atmosphérique. La plupart des travaux effectués dans ce domaine concernent des E.D.P.S. avec bruit blanc. Ainsi, dans son cours à l'école de probabilités de St.-Flour en 1984 ([20]), Walsh présente-t-il une étude détaillée de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V + f(V,t,x)\dot{W} & t > 0, \quad 0 < x < L\,; \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(L,t) = 0 & t > 0, \qquad ; \\ V(x,0) = V_0(x), & t > 0, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc basé sur $[0,\infty) \times [0,L]$. Cette équation intervient en neurophysiologie, lors de l'étude de l'évolution d'un potentiel électrique neuronique. La résolution est basée sur la recherche d'une solution par une itération de Picard.
Plus généralement, il est possible d'étudier des E.D.P.S. conduites par une semi-martingale quelconque. Une méthode pour cela, consiste à rechercher une solution X_t comme une fonction du temps à valeurs dans un espace de distributions. Une E.D.P.S. se ramène alors à une E.D.S. à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie, généralement un espace de Hilbert ou de Banach (cf. par exemple Gyöngy-Krylov dans [7]). C'est cette idée qui est à la base de la résolution par Kallianpur et al., dans

[10] de l'E.D.P.S. :

$$X_t = X_0 + \int_0^t A(s, X_s)\, ds + \int_0^t \int_U G(s, X_{s^-}, u)\, \tilde{N}(du\, ds). \qquad (1.0.2)$$

Dans la relation ci-dessus, $(U, \mathcal{Y}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, $N(du\, ds)$ désigne une mesure de Poisson aléatoire sur $\mathbb{R}^+ \times U$, d'intensité $\mu(du)\, ds$, et $\tilde{N}(du\, ds)$ désigne la mesure aléatoire compensée : $d\tilde{N} = dN - \mu(du)\, ds$. L'équation (1.0.2) est alors posée dans le dual $\mathbf{\Phi}'$ d'un espace nucléaire dénombrablement hilbertien $\mathbf{\Phi}$. Les fonctions A et G sont des fonctions : $A : \ \mathbb{R}^+ \times \mathbf{\Phi}' \mapsto \mathbf{\Phi}'$ et $G : \ \mathbb{R}^+ \times \mathbf{\Phi}' \times U \mapsto \mathbf{\Phi}'$. Sous des hypothèses de continuité et de monotonie pour A et G, l'équation (1.0.2) possède une unique solution forte dans Φ'. Cette solution est une fonctionnelle à valeurs dans un espace de distributions. Les fonctions A et G ci-dessus doivent être définies et continues sur tous les Hilbert inclus dans Φ', ce qui est assez contraignant. En outre, les hypothèses utilisées semblent difficiles à vérifier pour un problème posé sur tout $\mathbb{R}^d$.

Nous considérons ici une équation aux dérivées partielles stochastiques paraboliques posée sur $\mathbb{R}^d$, et conduite par un bruit poissonnien sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, où U est un espace mesuré muni d'une fonction $|\cdot| : U \mapsto \mathbb{R}^+$, qui y jouera le rôle d'une norme. Soit donc l'équation :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= u_0(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\Delta V(s,x)\, ds + \int_0^t g(V(s,x), s, x)\, ds \\ &\qquad + \int_0^t \int_{h\in U} f(V_-(s,x), s, x, h)\, d\lambda^+(s,x,h), \end{aligned} \qquad (1.0.3)$$

où λ^+ est un bruit poissonnien d'intensité λ^-. On suppose, pour étudier (1.0.3), que $d\lambda^- \ll ds \otimes dy \otimes d\mu$, avec $\int_U |h| d\mu(h)$ finie. Les fonctions f et g sont des fonctions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ respectivement, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intégrales contre λ^+ peuvent alors s'écrire comme des intégrales de Stieltjes absolument convergentes, de processus prévisibles. Le processus V_- est alors une version prévisible du processus V. Une telle version existe pour tous les processus X progressivement mesurables, et tels que la norme :

$$\|X\|_E = \sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} e^{-\alpha t} \mathbb{E}(|X(t,x)|)$$

soit finie. On appelle E l'espace vectoriel de ces processus.
On appelle ω-particule de λ^+, ou simplement particule, tout point (s, y, h) tel que $\lambda^+(s, y, h) = 1$. Le cas le plus simple rentrant dans notre cadre d'étude est celui où $f = f(h)$, et $g \equiv 0$, et où il n'y a qu'un nombre fini $N_t(\omega)$ de particules (s_i, y_i, h_i) sur

$[0,t] \times \mathbb{R}^d$. La solution de (1.0.3) s'écrit alors :

$$V(t,x,\omega) = \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} f(h_i) \frac{e^{-\frac{\|x-y_i\|^2}{2(t-s_i)}}}{(2\pi(t-s_i))^{d/2}}. \tag{1.0.4}$$

Toutefois, il y aura en général une infinité de particules, et elles constitueront un ensemble dense dans $[0,t] \times \mathbb{R}^d$. Or, comme on le voit sur (1.0.4), la solution de (1.0.3) devient non bornée au voisinage de chaque particule. Il n'y aura donc pas, en général, de fonction dans $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie (1.0.3). Il faut envisager une solution au sens faible, à valeurs dans un espace de distributions sur $\mathbb{R}^d$. Pour définir $f(X_-(s,y),s,y,h))$ et $g(X(s,y),s,y)ds$, il faut que cette solution soit presque sûrement une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On assimile alors X_t à sa densité, notée $X(t,x,\omega)$ (ou $X(t,x)$ comme ci-dessus.)
Dans la première partie, nous montrons que, moyennant un bon choix de α dans la définition de E, l'équation (1.0.3) admet une solution unique dans cet espace. Il est encore possible de résoudre une équation analogue en remplaçant le bruit poissonnien λ^+ par le bruit compensé $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. L'intégrale stochastique devient alors une intégrale par rapport à une mesure martingale, définie dans un espace de variables aléatoires de puissance p-ième intégrable. On considère l'équation :

$$\begin{aligned} W(t,x) = u_0(x) \quad &+ \int_0^t \frac{\Delta}{2} W(s,x)\, ds + \int_0^t \bar{g}(W(s,x),s,x)\, ds \\ &+ \int_0^t \int_U f(W_-(s,x),s,x,h)\, d\lambda(s,x,h). \end{aligned} \tag{1.0.5}$$

Cette équation se résout de manière identique à (1.0.3), en remplaçant l'hypothèse $\int_U |h| d\mu(h)$ finie, par l'hypothèse $\int_U |h|^p d\mu(h)$ finie, qui autorise un plus grand nombre de particules avec $|h|$ petit. Les intégrales stochastiques compensées que l'on utilise alors ne peuvent plus être écrites comme des intégrales de Stieltjes.
Dans la seconde partie, nous étudions les régularités de la solution V de (1.0.3). Comme les particules du bruit poissonnien forment en général un ensemble dense dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, et que le processus solution est non borné au voisinage de chaque particule, il est exclu d'envisager des continuités ou des dérivabilités globales en temps et en espace. On étudie donc les régularités partielles : continuité et dérivabilité presque sûres en espace, à un instant t fixé, ou bien continuité et dérivabilité en temps, en un point x fixé dans $\mathbb{R}^d$. Toute cette étude se fait sous l'hypothèse que $\int_U |h| d\mu(h)$ est finie.
Nous considérons ensuite le processus W, solution de (1.0.5). Nous montrons l'appartenance presque sûre de $W(t,\cdot)$ à l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Puis nous étudions, lorsque d=1, la continuité sur $\mathbb{R}$ de $W(t,\cdot)$, afin d'établir une comparaison avec les

résultats existant pour les E.D.P.S. analogues conduites par un bruit blanc gaussien (*cf.* [20]).
Des lemmes techniques utiles dans les démonstrations sont présentés en appendice, à la fin de ce chapitre.

1.1 Résolution de l'équation

1.1.1 Présentation du problème

Le bruit poissonnien

Dans l'ensemble de ce travail, le triplet $(U, \mathcal{U}, \mu)$ désigne un espace mesuré σ-fini, pour lequel on dispose d'une application $|\cdot| : U \to \mathbb{R}^+$. Si U est un espace vectoriel normé, on prendra en général $|\cdot| = \|\cdot\|_U$.
On notera Ω l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, à valeurs entières, $\mathcal{G}$ la tribu $Bor(\mathbb{R}^+) \otimes Bor(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ (les notations $Bor(\mathbb{R}^+)$ et $Bor(\mathbb{R}^d)$ représentant respectivement les tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^d$.) L'application λ^+ sur $\mathcal{G} \times \Omega$ est définie, pour A quelconque dans $\mathcal{G}$, et ω quelconque dans Ω, par :

$$\lambda^+(A, \omega) = \omega(A).$$

Soit $d\tilde{\lambda}^-(s, y)$ une mesure sur $(\mathbb{R}^d \times U, Bor(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{U})$, et $\mathbb{P}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle la variable aléatoire $\lambda^+(A, \cdot)$ est une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\int_A ds d\tilde{\lambda}^-(y, h)$, les variables aléatoires $\lambda^+(A_i, \cdot)$; $1 \leq i \leq n$, étant indépendantes si les ensembles A_i sont disjoints deux à deux. L'application λ^+ détermine alors un bruit poissonnien sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, d'intensité λ^-, avec $d\lambda^- = ds \otimes d\tilde{\lambda}^-(y, h)$.
Si un point (s, y, h) est chargé par λ^+, c'est-à-dire si $\lambda^+(s, y, h) = 1$, on dira que (s, y, h) est une ω-particule, ou encore qu'on a, au point $(s, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ une particule d'amplitude h, (de masse $|h|$). Le point y est alors le point où apparaît cette particule, l'instant s est son instant d'apparition. En général, pour tout borélien B borné et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > \varepsilon$, on aura, $\mathbb{P}$-presque sûrement :

$$\lambda^+(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\times B \times U) = \infty.$$

C'est-à-dire qu'il apparaîtra presque sûrement une infinité de particules dans toute partie $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\times B$, si B est d'intérieur non vide. De plus, pour tout $a > 0$, on aura :

$$\lambda^+(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\times B \times \{|h| \geq a\}) < \infty.$$

C'est-à-dire qu'il n'apparaîtra, localement, qu'un nombre fini de particules de masse supérieure à un nombre strictement positif donné.

Nous ferons en général sur $\tilde{\lambda}^-$ l'une des deux hypothèses suivantes :

$(\mathrm{H}_{1.1})$. Il existe un M positif tel que $d\tilde{\lambda}^- \leq M\, dy \otimes d\mu(h)$, avec :

$$\int_U |h|\, d\mu(h) < \infty.$$

ou bien :

$(\mathrm{H}_{1.2})(p)$. Il existe un M positif tel que $d\tilde{\lambda}^- \leq M\, dy \otimes d\mu(h)$, avec :

$$\int_U |h|^p\, d\mu(h) < \infty.$$

pour un réel positif M.
Les hypothèses ci-dessus signifient que les particules de λ^+ apparaissent de manière uniforme en espace, et $(\mathrm{H}_{1.1})$ signifie que la masse totale des particules apparaissant dans un domaine borné pendant un temps fini, est finie presque-sûrement.

Définition de l'intégrale stochastique

On appelle $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée sur Ω par les variables aléatoires mesurables qui s'écrivent :

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U H(s,y,h)\, d\lambda^+(s,y,h).$$

pour $\mathrm{supp}(H) \subset [0,t] \times \mathbb{R}^d \times U$. Ceci nous donne donc une filtration sur Ω, et, par suite, une tribu prévisible $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Un processus $Y(s,y,\omega)$ dépendant de la variable d'espace x, sera alors dit prévisible s'il est mesurable pour la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes Bor(\mathbb{R}^d)$, $Bor(\mathbb{R}^d)$ désignant la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$. De la même façon, si Y dépend aussi de h, il sera dit prévisible s'il est mesurable pour $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes Bor(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{U}$. Enfin, on parlera de processus progressifs pour des processus mesurables par rapport, respectivement, à la tribu $\mathrm{Prog}(\mathcal{F}_t) \otimes Bor(\mathbb{R}^d)$, ou à la tribu $\mathrm{Prog}(\mathcal{F}_t) \otimes Bor(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{U}$. Ces définitions sont analogues à celles utilisées dans [8].
Pour les processus Y, positifs ou $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ intégrables, et qui sont $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes Bor(\mathbb{R}^d) \otimes$

$\mathcal{U}$-mesurables, on dispose d'une " formule d'intégration prévisible " :

$$\mathbb{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} Y(s,y,h,\omega)\,d\lambda^+(s,y,h)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} \mathbb{E}(Y(s,y,h))\,d\lambda^-(s,y,h).$$

(Voir par exemple à ce sujet [19], pp. 448 et suiv.) Si Y est un processus prévisible, et que $Y \in L^1(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$, on peut donc définir l'intégrale stochastique de Y par rapport à λ^+:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} Y(s,y,h,\omega)\,d\lambda^+(s,y,h) = \sum_{\substack{\mathbb{R}^+\times\\ \mathbb{R}^d\times U}} Y(s,y,h,\omega)\,\lambda^+(s,y,h).$$

Cette intégrale sera en effet presque sûrement finie, et définit donc une nouvelle variable aléatoire de $L^1(d\mathbb{P})$. Il est possible, grâce à cette formule, d'intégrer contre λ^+ des processus prévisibles et L^1, définis $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$-presque partout.
On peut encore définir cette intégrale si Y est un processus prévisible, défini $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ presque partout, et tel que $|Y| \wedge 1 \in L^1(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. En effet, on a alors:

$$\mathbb{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} (|Y|(s,y,h) \wedge 1)\,d\lambda^+(s,y,h)\right) = \||Y| \wedge 1\|_{L^1(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})} < \infty,$$

par suite, il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini de particules pour lesquelles $|Y(s,y,h,\omega)|$ est supérieur à 1, et l'intégrale:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} Y(s,y,h,\omega)\,d\lambda^+(s,y,h)$$

est finie presque sûrement.
Cette définition de l'intégrale stochastique par rapport à λ^+, ne permet d'intégrer que des processus prévisibles. Elle s'étend en fait aux processus $Y(t,x)$ de $L^1_{loc}(ds \otimes dy)$, et progressivement mesurables. En effet, si on note Y' le processus prévisible:

$$Y'(s,y,\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{(d/2)!n^{1+d/2}}{\pi^{d/2}} \int\limits_{s-1/n}^{s}\ \int\limits_{B[y,1/n]} Y(u,z,\omega)dudz, \tag{1.1.1}$$

alors, $\mathbb{P}$-presque sûrement, les processus Y et Y' sont égaux $ds \otimes dy$ presque partout. Il est donc possible, si $d\lambda^- \ll ds \otimes dy \otimes d\mu$, d'intégrer contre λ^+ des fonctionnelles $H(t,s,x,y,h,Y(s,y)) = H_{t,x,h}(Y)(s,y)$ mesurables, en posant simplement:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} H_{t,x,h}(Y)(s,y)d\lambda^+(s,y,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^+}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{U} H_{t,x,h}(Y')(s,y)d\lambda^+(s,y,h).$$

Notons $I(H(Y))_{t,x}$ l'intégrale ainsi définie. La formule d'intégration prévisible montre alors que, les processus $H_{t,x,h}(Y)$ et $H_{t,x,h}(Y')$ étant égaux $d\lambda^-(s,y,h) \otimes d\mathbb{P}(\omega)$ presque partout,

$$\mathbb{E}(I(H(Y))_{t,x}) \;=\; \int\limits_{\mathbf{R}^+}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\int\limits_{U} \mathbb{E}(H_{t,x,h}(Y)(s,y))\, d\lambda^-(s,y,h)\ .$$

Pour étudier l'équation (1.0.3), on considère l'espace vectoriel E des processus progressivement mesurables pour lesquels :

$$\sup_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} e^{-\alpha t}\mathbb{E}(|X(t,x)|) = \|X\|_E < \infty$$

pour une constante $\alpha > 0$. On aura besoin, dans la suite de ce travail, d'intégrer par rapport à $\lambda^+(s,y,h)$ des fonctionnelles : $H(t,s,x,y,h,X(s,y,\omega))$, mesurables, X étant un processus de E. Il faudra en outre que cette intégrale redonne un processus de E.

Soit maintenant $p \leq 2$, et $Y(s,y,h,\omega) \in L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$ un processus prévisible. Grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (cf. par exemple [4]), nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\Big|\int\limits_{\mathbf{R}^+}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\int\limits_{U} Y(s,y,h)\, d\lambda\Big|^p\right) \leq C_p\mathbb{E}\left(\{\sum_{\substack{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\\ \times U}} Y(s,y,h)^2\, d\lambda^+\}^{p/2}\right),$$

avec $d\lambda = d\lambda^+ - d\lambda^-$. Pour $p \leq 2$, l'exposant $p/2$ dans le terme de droite est inférieur à 1. En rentrant donc, par sous-additivité, cet exposant dans la somme et en utilisant la formule d'intégration prévisible, on voit que ce terme est majoré par :

$$\mathbb{E}\left(\Big|\int\limits_{\mathbf{R}^+}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\int\limits_{U} Y(s,y,h)\, d\lambda\Big|^p\right) \leq C_p \int\limits_{\mathbf{R}^+}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\int\limits_{U} \mathbb{E}(\,|\,Y(s,y,h)\,|^p\,)\, d\lambda^-. \tag{1.1.2}$$

La formule ainsi obtenue, qu'on appellera formule d'intégration prévisible L^p, permet de définir, de la même manière que ci-dessus, une intégration stochastique contre $d\lambda$ pour des processus de $L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. On appelle E_p l'espace vectoriel des processus progressivement mesurables pour lesquels, pour un $T > 0$ fixé arbitrairement :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|^p)^{1/p} = \|X\|_{E_p} < \infty.$$

On peut donc intégrer contre $d\lambda$, comme dans le cas L^1, des fonctionnelles H, à support dans $[0,T]$, d'un processus de E_p.

Dans la suite de ce travail, on parlera simplement de processus, sans préciser en général s'il s'agit de processus de E (resp. de E_p), et on notera X_- un processus prévisible égal $\mathbb{P}$-presque sûrement à X, $ds \otimes dy$-presque partout.

L'équation.

On considère l'équation (1.0.3) :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= u_0(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\Delta V(s,x)\,ds + \int_0^t g(V(s,x),s,x)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{h\in U} f(V_-(s,x),s,x,h))\,d\lambda^+(s,x,h). \end{aligned} \tag{1.0.3}$$

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, la fonction u_0 est prise mesurable et bornée sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles. Le processus V est cherché dans E, et la troisième intégrale ci-dessus est une intégrale stochastique par rapport à λ^+, au sens défini dans la partie précédente. Les fonctions $f(V_-(s,y,\omega),s,y,h)$ et $g(V(s,y),s,y)$ seront à présent notées $f(V_-)(s,y,h)$ et $g(V)(s,y)$ respectivement.
Pour donner un sens à cette équation, on en écrit une formulation faible pour la dualité entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, espace des distributions tempérées. Notre approche reprend point par point celle de Walsh dans [20].
Notons d'abord que si X est un processus de E, alors $X(t,\cdot)$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour tout t positif, et pour toute fonction ϕ régulière et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\Big(|\int_{\mathbb{R}^d} X(t,x)\phi(x)\,dx|\Big) \le e^{\alpha t}\|X\|_E \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|\,dx.$$

On définit alors une solution de (1.0.3), comme étant un processus tel que, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on ait, ω-presque sûrement :

$$\begin{aligned} < V_t - V_0, \phi > &= \int_0^t \frac{1}{2} < V_s, \Delta\phi > \,ds + \int_0^t < g(V)(y,s),\phi > \,ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(V_-)(s,y,h)\phi(y)\,d\lambda^+(s,y,h). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Un calcul classique permet de généraliser cette expression aux fonctions $\Psi(s,y)$ infiniment dérivables en s et en y, et telles, que pour tout $s \ge 0$, la fonction $\Psi(s,.)$ est dans

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On montre ainsi qu'un processus V est solution de (1.0.3) si, et seulement si , ω-presque sûrement:

$$\begin{aligned} < V_t, \Psi(t,.) > - < V_0, \Psi(0,.) >= \int_0^t < V_s, \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\partial}{\partial s}\right) \Psi(s,.) > \, ds \\ + \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(V_-)(s,y,h)\Psi(s,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \\ + \int_0^t < g(V)(s,.), \Psi(s,.) > ds. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Pour résoudre l'équation (1.0.3), on utilise alors une méthode classique (cf. [20]) : soit

$$G_t(x,y) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{d/2}},$$

la fonction de Green de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\Delta}{2}$. En faisant tendre, dans l'équation 1.1.4, la fonction $\psi(s,y)$ vers $G_{t-s}(x,y)$, on voit que, pour un processus V solution,

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_o(y) G_t(x,y)\, dy + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} g(V)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dy ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(V_-)(s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Cette égalité est alors vraie ω-presque sûrement, $dt\,dx$-presque partout. De la même manière, si on considère l'équation compensée (1.0.5), sa solution W dans l'espace E_p vérifie, ω-presque sûrement, $dt\,dx$-presque partout :

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_o(y) G_t(x,y)\, dy + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} g(W)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dy ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(W_-)(s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

On est ainsi amené à chercher une solution de (1.0.3) comme limite dans E, de l'itération:

$$\left\{\begin{array}{rcl} V^0(t,x) & = & \displaystyle\int_{y\in\mathbf{R}^d} u_0(y)G_t(x,y)\,dy\ ; \\ V^{n+1}(t,x) & = & V^0(t,x) + \displaystyle\int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} g(V^n)(s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds \\ & & \displaystyle + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U f(V^n_-)(s,y,h)\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda^+(s,y,h). \end{array}\right. \tag{1.1.7}$$

Une telle limite V, pour laquelle $\|V\|_E < \infty$ sera bien une distribution tempérée, puisque $\|V\|_E$ sera finie. On montrera aussi qu'elle vérifie (1.0.3).
Pour un processus X de E, on pose :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(X)(t,x) & = & \displaystyle\int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} \int_{h\in U} f(X_-)(s,y,h)G_{t-s}(x,y)\,d\lambda^+(s,y,h) \\ & & \displaystyle + \int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} g(X)(s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds, \end{array}$$

ce qui permet de réécrire (1.1.7) de façon plus synthétique selon:

$$\left\{\begin{array}{rcl} V^0(t,x) & = & \displaystyle\int_{y\in\mathbf{R}^d} u_0(y)G_t(x,y)\,dy\ ; \\ V^{n+1}(t,x) & = & V^0(t,x) + \Phi(V^n)(t,x). \end{array}\right. \tag{1.1.8}$$

Pour assurer l'existence des deux intégrales apparaissant dans la définition de Φ, et la convergence du système itératif défini par (1.1.7), on fait sur f et g les hypothèses suivantes :

($\mathrm{H}_{1.3}$). Il existe une constante positive K, telle que, pour tous v et v' réels, pour tout $(s,y,h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$:

(1) $|f(v,s,y,h)| \leq K(1+|v|)|h|$;
(2) $|f(v,s,y,h) - f(v',s,y,h)| \leq K|v-v'||h|$.

($\mathrm{H}_{1.4}$). Il existe une constante positive K, telle que, pour tous v et v' réels, pour tout $(s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$:

(1) $|g(v,s,y)| \leq K(1+|v|)$;
(2) $|g(v,s,y) - g(v',s,y)| \leq K|v-v'|$.

Sous ces hypothèses, et pour un bon choix de α dans la définition de E, l'application Φ est une contraction à valeurs dans E, ce qui permet d'exhiber une solution de (1.0.3) dans E. C'est l'objet de la partie suivante.
Dans l'ensemble des calculs, (t,x) désignera en général le point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ où sera calculée la valeur d'un processus, et le triplet $(s,y,h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ représentera le triplet des variables par rapport auxquelles seront effectuées les intégrations.

1.1.2 Calcul de la solution

Théorème 1.1.2.1 *Si la mesure λ^- vérifie* $(\mathrm{H}_{1.1})$*, que les fonctions f et g vérifient respectivement* $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$*, et que la fonction u_0 est bornée sur $\mathbb{R}^d$, alors, en choisissant*

$$\alpha > KM\Big(\int_U |h| d\mu(h)\Big) + K,$$

dans la définition de E, la fonction Φ est k'-contractante sur E, avec $k' < 1$, et la suite (V_n) converge dans E vers un processus V. Le processus V est l'unique processus de E tel que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, l'égalité (1.1.5) est satisfaite ω-presque sûrement. Enfin ce processus vérifie l'équation (1.1.3).

Démonstration du théorème 1.1.2.1
La démonstration de ce théorème comprend trois étapes. On montre d'abord que si X est un processus de E, alors $\Phi(X)$ est encore dans E. Puis on prouve que, si α est suffisamment grand, l'application Φ est une contraction. Ceci entraîne la convergence de la suite V^n, construite par l'itération (1.1.7), vers un processus de E, noté V. Enfin, la troisième partie montre que V est bien une solution de (1.0.3), au sens précisé ci-avant, dans l'égalité (1.1.3).
Afin de simplifier les écritures dans ce qui suit, on supprimera souvent les dépendances de f et g en s et y, pour ne garder que celles en X, et h, qui sont les plus importantes dans nos calculs.

Lemme 1.1.2.1 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$*,* $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$*, et soit X un processus de E, alors $\Phi(X) \in E$.*

Preuve du lemme 1.1.2.1
On pose pour montrer ce lemme $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, avec :

$$\Phi_1(X)(t,x) = \int_{s=0}^{t} \int_{\mathbb{R}^d} g(X)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, dyds. \tag{1.1.9}$$

et

$$\Phi_2(X)(t,x) = \int_{s=0}^{t} \int_{\mathbf{R}^d} \int_U f(X_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h). \qquad (1.1.10)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\Phi_1(X)(t,x)|) &\leq \int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} \mathbb{E}(|g(X)(s,y)|)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy, \\
&\leq K \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (1 + \mathbb{E}(|X(s,y)|))\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy.
\end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse de croissance linéaire sur g. Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\Phi_1(X)(t,x)|) &\leq K \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (1 + e^{\alpha s}\|X\|_E)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy, \\
&\leq K \left(t + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \|X\|_E \right),
\end{aligned}$$

donc

$$\|\Phi_1(X)\|_E \leq K \left(\frac{\|X\|_E}{\alpha} + \sup_{\mathbf{R}^+} t e^{-\alpha t} \right) < \infty.$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\Phi_2(X)(t,x)|) &\leq \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_{h\in U} \mathbb{E}(|f(X_-)(s,y,h)|)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdyd\mu(h), \\
&\leq K \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U (1 + \mathbb{E}(|X_-(s,y)|)\, G_{t-s}(x,y)\, |h|\, dsdyd\mu(h), \\
&\leq K e^{\alpha t} \left(\frac{\|X\|_E}{\alpha} + \sup_{\mathbf{R}^+} t e^{-\alpha t} \right) \left(\int_U |h| d\mu \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Regroupant les deux inégalités ci-dessus, il vient : $\|\Phi(X)\|_E < \infty$. De plus, le processus X étant progressivement mesurable, le processus $\Phi(X)$ est lui aussi progressivement mesurable. Si le processus X est dans E, le processus $\Phi(X)$ est donc aussi dans E, ce qui achève la preuve du lemme 1.1.2.1. □

Nous passons maintenant à la deuxième partie de cette démonstration. Le lemme ci-dessous permet de montrer que la suite V^n construite grâce à (1.1.7) converge pour la norme $\|\cdot\|_E$.

Lemme 1.1.2.2 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, alors, quels que soient* X *et* X'*, deux processus de* E *progressivement mesurables,*

$$\|\Phi_2(X) - \Phi_2(X')\|_E \leq \frac{KM \int_U |h| d\mu(h)}{\alpha} \|X - X'\|_E, \tag{1.1.11}$$

et

$$\|\Phi_1(X) - \Phi_1(X')\|_E \leq \frac{K}{\alpha} \|X - X'\|_E. \tag{1.1.12}$$

Preuve du lemme 1.1.2.2

Considérons, pour X et X' deux processus progressivement mesurables :

$$\begin{aligned} \Phi(X) - \Phi(X') &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U (f(X_-) - f(X'_-))\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (g(X) - g(X'))\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy. \end{aligned}$$

On note

$$D_2(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U (f(X_-) - f(X'_-))\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h),$$

et

$$D_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (g(X) - g(X'))\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy.$$

Or, les fonctions f et g étant lipschitziennes et à croissance linéaire, on obtient,

$$D_2(t,x) \leq \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U K|X - X'||h|\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h),$$

et

$$D_1(t,x) \leq \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} K|X - X'|\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy.$$

Nous majorons à présent l'espérance de $|D_1(t,x)|$, selon:

$$E(|D_1(t,x)|) \leq K \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} e^{\alpha s}\, G_{t-s}(x,y) \|X - X'\|_E\, dsdy,$$

comme $\|D_1\|_E = \sup\limits_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} e^{-\alpha t}\mathbb{E}(|D_1(t,x)|)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|D_1\|_E &\leq K \sup_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} e^{-\alpha t} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} G_{t-s}(x,y) e^{\alpha s} \|X - X'\|_E \, ds dy \;; \\
&\leq K e^{-\alpha t} \|X - X'\|_E \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \;; \\
&\leq \frac{K}{\alpha} \|X - X'\|_E.
\end{aligned}$$

De la même manière, on majore $\mathbb{E}(|D_2(t,x)|)$ selon :

$$\mathbb{E}(|D_2(t,x)|) \leq K \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U e^{\alpha s} G_{t-s}(x,y) \, \|X - X'\|_E |h| \, d\lambda^-(s,y,h),$$

donc, comme $d\lambda^-(s,y,h) \leq M ds \otimes dy \otimes d\mu(h)$ avec $\int_U |h| d\mu(h) < \infty$, on a :

$$\|D_2\|_E \leq \frac{KM}{\alpha} \left(\int_U |h| d\mu(h) \right) \|X - X'\|_E.$$

qui achève la démonstration du lemme. □
On en déduit donc que

$$\|\Phi(X) - \Phi(X')\|_E \leq \frac{1}{\alpha} \left(KM \left(\int_U |h| d\mu(h) \right) + K \right) \|X - X'\|_E.$$

En particulier, si l'on choisit

$$\alpha > \left(KM \left(\int_U |h| d\mu(h) \right) + K \right),$$

alors la fonction Φ est une contraction sur E, et la suite V^n construite grâce à (1.1.7) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_E$.
Notons V la limite de cette suite pour la norme $\|\cdot\|_E$. Pour tout (t,x) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, on a de plus :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |V^{n+1}(t,x) - V^n(t,x)| \right) < \infty,$$

et la suite $V^n(t,x)$ converge donc presque sûrement vers $V(t,x)$. Le processus V est donc progressivement mesurable, et est donc dans l'espace E. Il faut maintenant montrer que V vérifie bien (1.0.3). C'est l'objet de la dernière partie de cette démonstration.

Lemme 1.1.2.3 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$, *et soit* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *alors, on a l'égalité presque sûre :*

$$\begin{aligned} < V(t,\cdot) - V(0,\cdot), \phi >= \int_0^t < g(V)(y,s), \phi > ds \\ + \int_0^t < V(s,\cdot), \frac{\Delta}{2}\phi > ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_{h\in\mathbf{R}} f(V_-)(s,y,h)\phi(y)\, d\lambda^+(s,y,h), \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

c'est-à-dire que V *est bien une solution de (1.0.3), au sens précisé dans (1.1.3).*

<u>Preuve du lemme 1.1.2.3</u>
Par construction, le processus V vérifie :

$$\begin{aligned} V(t,x) &= V^0(t,x) + \int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} g(V)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} \int_{h\in\mathbf{R}} f(V_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h), \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

avec,

$$V^0(t,x) = \int_{y\in\mathbf{R}^d} u_0(y)\, G_{t-s}(x,y)\, dy,$$

ce qui permet donc d'écrire, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} < V(t,\cdot), \phi(\cdot) > &= < V^0(t,\cdot), \phi(\cdot) > \\ &\quad + \int_0^t \int_{y\in\mathbf{R}^d} g(V)(s,y) \ < G_{t-s}(\cdot,y), \phi(\cdot) > dyds \\ &\quad + \sum_{\substack{[0,t] \\ y\in\mathbf{R}^d, h\in\mathbf{R}}} f(V)(s,y,h) \ < G_{t-s}(\cdot,y), \phi(\cdot) > \lambda^+(s,y,h). \end{aligned}$$

Or, pour le processus V^0, on a :

$$< V^0, \phi >=< u_0, \phi > + \frac{1}{2} \int_{[0,t]} < V^0(s,\cdot), \Delta\phi(\cdot) > ds,$$

et, de la même façon :

$$\begin{aligned} < G_{t-s}(\cdot,y), \phi(\cdot) > &= \int_{x\in\mathbf{R}^d} G_{t-s}(x,y)\phi(x)\, dx \\ &= \phi(y) + \int_{u=s}^t \int_{x\in\mathbf{R}^d} G_{u-s}(x,y)\, \frac{\Delta\phi(x)}{2}\, dxdu. \end{aligned}$$

Reportons cette expression dans les deux dernières intégrales de l'égalité (1.1.14), nous obtenons respectivement :

$$\int_s^t \int_y g(V)(s,y)\,\phi(y)\,dsdy + \frac{1}{2}\int_{u=0}^{t}\int_{x\in\mathbf{R}^d} \Phi_1(V)(u,x)\,\Delta\phi(x)\,dudx,$$

et

$$\sum_{\substack{[0,t]\times\\ \mathbf{R}^d\times U}} f(V_-)(s,y,h)\,\phi(y)\,\lambda^+(s,y,h) + \frac{1}{2}\int_{u=0}^{t}\int_{x\in\mathbf{R}^d} \Phi_2(V)(u,x)\,\Delta\phi(x)\,dxdu,$$

où Φ_1 et Φ_2 sont définies dans (1.1.9) et (1.1.10), avec $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$. Nous utilisons alors l'égalité

$$V = V^0 + \Phi(V).$$

En sommant les deux expressions ci-dessus, et en les portant dans (1.1.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} (V(t,x) - u_0(x))\,\phi(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d} V(u,x)\,\Delta\phi(x)\,dudx \\ +\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d} g(V)(s,x)\,\phi(x)\,dxds &+ \sum_{\substack{[0,t]\times\\ \mathbf{R}^d\times U}} f(V_-)(s,y,h)\,\phi(y)\,\lambda^+(s,y,h).\end{aligned}$$

qui est exactement l'égalité (1.1.13). Le processus V est donc bien une solution de l'équation différentielle (1.0.3). La démonstration du théorème 1.2.1. est donc complète. □

Remarques *1) La démonstration reste valable en supposant simplement que :* $dm = \int |h| d\tilde{\lambda}^-(y,h) \leq M dy$, *$M$ étant choisi indépendamment de y.*
2) Il est encore possible de résoudre (1.0.3), en remplaçant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{1.1})$*, par la suivante.*
$(\mathrm{H}_{1.5})$. *La mesure $d\tilde{\lambda}^-$ s'écrit $d\tilde{\lambda}^- = d\tilde{\lambda}_1^- + d\tilde{\lambda}_2^-$, avec une mesure $\tilde{\lambda}_1^-$ qui vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{1.1})$*, et une mesure $\tilde{\lambda}_2^-$ telle que :*

$$\forall a > 0\ \exists M_a \text{ t.q. } \int_{|h|\leq a} |h| d\tilde{\lambda}_2^-(y,h) \leq M_a dy\ ;$$

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \int_{\mathbf{R}^d}\int_{|h|>b} d\tilde{\lambda}_2^-(y,h) < \infty.$$

Pour ce faire, on résout d'abord, par la même méthode que ci-dessus, l'équation (1.0.3) sous la probabilité $\mathbb{P}_m$, pour laquelle λ^+ est un bruit poissonnien d'intensité

$\mathbf{1}_{\{|h|\leq m\}} ds\, d\tilde{\lambda}(y,h)$, *et on fait ensuite tendre m vers ∞, pour obtenir un processus V qui soit une solution de (1.0.3), $\mathbb{P}$-presque sûrement.*
3) Le coefficient de Lipschitz K des fonctions f et g, doit être choisi indépendant de s et y. Cette méthode ne permet pas de traiter directement de cas f et g sont localement lipschitziennes.
4) On démontre ici la convergence de la suite construite grâce à (1.1.7), pour la norme:

$$\|X\|_E = \sup_{\mathrm{R}^+\times\mathrm{R}^d} e^{-\alpha t}\mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|).$$

Pour que l'itération soit bien définie dans cet espace, il faut en particulier que cette norme soit finie pour V_0, donc que u_0 soit borné. On peut toutefois faire une démonstration analogue en remplaçant $\|.\|_E$ par :

$$\|X\|_n = \sup_{[0,T]\times\mathrm{R}^d} \frac{\mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|)}{(1+\|x\|)^n},$$

pour un T positif arbitraire. La convergence de la suite V^n se montre alors en utilisant le lemme A1, dû à Walsh, et dont on trouvera une démonstration en appendice. Ceci permet d'envisager des données initiales à croissance polynômiales de degré $\leq n$.

1.1.3 Etude de l'équation compensée dans $L^p(\Omega)$

On suppose dans cette partie que la mesure λ^- satisfait à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$, pour un p fixé, $1 < p < 1 + 2/d$, $p \leq 2$, c'est-à dire que : $d\tilde{\lambda}^- \ll dy \otimes d\mu$, et qu'il existe $p < 2$, $p \in]1\,;\,1+2/d[$, tel que :

$$\int_U |h|^p d\mu(h) < \infty.$$

On considère alors l'équation (1.0.5) :

$$W(t,x) = u_0(x) \; + \int_0^t \left(\frac{\Delta}{2}W(s,x) + \bar{g}(W_s,s,x)\right) ds + \int_0^t\int_U f(W_-(s,x),s,x,h)\, d\lambda(s,y,h),$$

pour une fonction f vérifiant $(\mathrm{H}_{1.3})$, et une fonction $\bar{g}$ telle que :

$(\mathrm{H}_{1.6})$. Il existe une constante positive K, telle que, pour tous v et v' réels, pour tout $(s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$:

(1) $|\bar{g}(v,s,y)| \leq K(1+|v|)$;
(2) $|\bar{g}(v,s,y)-\bar{g}(v',s,y)| \leq K|v-v'|$.

On cherche alors une solution de (1.0.5) dans l'espace E_p des processus Y progressivement mesurables, et tels que :

$$\|Y\|_p = \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}(|Y(t,x,\omega)|^p)^{1/p} < \infty,$$

pour un T positif fixé.

Théorème 1.1.3.1 *Si la mesure λ^- vérifie* $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$, *pour un $1 < p < 1+2/d$, $p \leq 2$, que les fonctions f et $\bar{g}$ vérifient respectivement* $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.6})$, *alors il existe un unique processus de E_p satisfaisant (1.1.6). De plus, ce processus est une solution de l'équation (1.0.5).*

Démonstration du théorème 1.1.3.1
On cherche une solution de (1.0.5) grâce à l'itération :

$$\left\{\begin{array}{rcl} W^0(t,x) &=& \int\limits_{\mathbf{R}^d} u_0(y)G_t(x,y)\,dy\ ; \\ W^{n+1}(t,x) &=& W^0(t,x) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^d} \bar{g}(W^n)(s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds \\ &+& \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^d} \int\limits_U f(W^n_-)(s,y,h)\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda(s,y,h). \end{array}\right. \tag{1.1.15}$$

Posons donc, pour un processus $Y \in E_p$,

$$\Psi_1(Y) = \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} \bar{g}(Y)(s,y)\,G_{t-s}(x,y)\,dyds,$$

et

$$\Psi_2(Y) = \int\limits_0^t \int\limits_{y\in\mathbf{R}^d} \int\limits_{h\in U} f(Y_-)(s,y,h)\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda(s,y,h).$$

Soit H_n la fonction réelle croissante définie sur $[0,T]$, par :

$$H_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|W^{n+1}(s,y)-W^n(s,y)|^p\}.$$

Alors

$$H_n(t) \leq C(H_{n,1}(t)+H_{n,2}(t)),$$

avec :

$$H_{n,1}(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|\Psi_1(W^{n+1})(s,y) - \Psi_1(W^n)(s,y)|^p\},$$

la fonction $H_{n,2}$ étant définie de manière analogue avec Ψ_2 à la place de Ψ_1.
Alors, grâce à la lipschitzianité de $\bar{g}$:

$$|\Psi_1(W^{n+1})(t,x) - \Psi_1(W^n)(t,x)|^p \leq C\left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)| G_{t-s}(x,y) ds dy\right)^p,$$

donc, par l'inégalité de Hölder, en appelant q l'exposant conjugué de p :

$$|\Psi_1(W^{n+1})(t,x) - \Psi_1(W^n)(t,x)|^p \leq C \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)|^p}{(2\pi(t-s))^{dp/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}} ds dy \left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}} ds dy\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Pour $t \leq T$, il existe donc une constante C_T, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$H_{n,1}(t) \leq C_T \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)\, ds}{(t-s)^{(p-1)d/2}}.$$

Nous étudions maintenant $H_{n,2}(t)$. Grâce à la formule d'intégration prévisible L^p : (1.1.2), on a :

$$H_{n,2}(t) \leq C_T \left(\int_U |h|^p d\mu(h)\right) \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)\, ds}{(t-s)^{(p-1)d/2}},$$

pour une constante positive C_T éventuellement différente de la précédente, et pour tout entier n. On obtient donc, pour la fonction $H_n = H_{n,1} + H_{n,2}$:

$$H_n(t) \leq C_T \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)\, ds}{(t-s)^{(p-1)d/2}}.$$

Et il est alors possible d'appliquer à cette suite de fonctions le lemme suivant, qu'on peut trouver dans [20], et dont on trouvera la démonstration en appendice de ce chapitre.

Lemme A1 *Soit $h_n(t)$ une suite de fonctions définies sur $[0,T]$, pour un $T > 0$, telles que h_0 est bornée sur $[0,T]$, et qu'il existe une constante C indépendante de n, et un réel $a > -1$, pour lesquels :*

$$h_n(t) \leq C \int_0^t h_{n-1}(s)(t-s)^a\, ds.$$

Alors, il existe un entier k, tel que, pour tout n et tout m entiers :

$$h_{n+mk}(t) \leq C'^m \int_0^t h_n(s) \frac{(t-s)^m}{(m-1)!} \, ds. \tag{1.1.16}$$

En particulier, la série de fonctions de terme général $h_n(t)$ converge alors uniformément sur $[0,T]$, d'après le critère de Cauchy.

Ce lemme s'applique à notre suite de fonctions H_n, et, pour un entier k tel que dans (1.1.16), la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} H_{n+mk}^{1/p}(T)$$

converge donc dans $\mathbb{R}$, quel que soit $n \in \{0, \cdots, k-1\}$. Par suite,

$$\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} H_{n+mk}^{1/p}(T) < \infty,$$

et la suite W^n converge dans E_p vers un processus W qui sera une solution de (1.0.5). Sur ce dernier point, nous renvoyons à la démonstration analogue effectuée dans la partie précédente. Pour montrer l'unicité, notons que, si W et W' sont deux processus de E_p satisfaisant (1.0.5), alors, par le même raisonnement que ci-dessus, on aura, pour la fonction :

$$H(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|W(s,y) - W'(s,y)|^p\},$$

la majoration

$$H(t) \leq C \int_0^t \frac{H(s)}{(t-s)^{(p-1)d/2}} \, ds.$$

Donc, grâce au lemme de Walsh, on aura $H(t) = 0$, pour tout $t \leq T$. □
Ce théorème possède un corollaire permettant d'établir une relation entre les solutions des équations (1.0.3) et (1.0.5).

Corollaire 1.1.3.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$ *sont satisfaites simultanément, et que fonctions f et g vérifient respectivement les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$*, alors les équations (1.0.3) et (1.0.5) sont équivalentes. En particulier, la solution V de (1.0.3) construite dans le théorème 1.1.2.1 vérifie alors :*

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|V(t,x,\omega)|^p)^{1/p} < \infty.$$

Démonstration du corollaire 1.1.3.1.
D'après l'hypothèse ($\mathrm{H}_{1.1}$), on a : $d\tilde{\lambda}^- \ll dy \otimes d\mu$. Notons $l(y,h)$ la densité correspondante. Cette densité sera bornée par M. Soit alors $\bar{g}$ la fonction :

$$\bar{g}(v,t,x) = g(v,t,x) + \int_{h\in U} f(v,t,x,h)\, l(x,h)\, d\mu(h), \tag{1.1.17}$$

cette fonction est alors lipschitzienne et à croissance linéaire en v, puisque la densité l est bornée.
On réécrit alors l'équation (1.0.3) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V(t,x) = u_0(x) \quad &+ \int_0^t (\frac{\Delta}{2} V(s,x) + \bar{g}(V(s,x),s,x))ds \\ &\qquad + \int_0^t \int_U f(V_-(s,x),s,x,h) d\lambda(s,y,h). \end{aligned}$$

Si les hypothèses ($\mathrm{H}_{1.1}$) et ($\mathrm{H}_{1.2}$)(p) sont vérifiées, les deux équations (1.0.3) et (1.0.5) sont donc équivalentes. De plus, les suites de processus V^n et W^n, construites respectivement grâce à (1.1.7) et (1.1.15) sont alors égales, ce qui montre bien le corollaire.□

Remarque *Le résultat d'intégrabilité donné par le Corollaire 1.1.3.1, pour le processus V semble optimal: on ne peut avoir une puissance p-ième de V intégrable pour un p plus grand que $1 + 2/d$, car la fonction de Green $G_s(x,y)$ n'est plus dans $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, si $p \geq 1 + 2/d$.*

1.1.4 Etude du cas $d = 1$.

Dans ce cas, on montre que, si $\int_U |h|^p d\mu(h)$ et $\int_U |h|^2 d\mu(h)$ sont finies, pour un $2 < p < 3$, alors la solution $W(t,x)$ de (1.0.5) est dans $L^p(\Omega)$, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$.

Théorème 1.1.4.1 *Soit $d = 1$ et $2 < p < 3$; si les hypothèses ($\mathrm{H}_{1.2}$)(p) et ($\mathrm{H}_{1.2}$)(2), ($\mathrm{H}_{1.3}$) et ($\mathrm{H}_{1.6}$), sont vérifiées, alors la suite W^n construite grâce à (1.1.15) converge dans l'espace E_p des processus Y progressivement mesurables, et tels que :*

$$\|Y\|_{E_p} = \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}(|Y(t,x)|^p)^{1/p} < \infty.$$

Démonstration du théorème 1.1.4.1
Notons, pour $2 \leq p < 3$,

$$H_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|W^{n+1}(s,x) - W^n(s,x)|^p\}$$

avec $H_n(t) = H_{n,1}(t) + H_{n,2}(t)$, comme dans la partie précédente. La fonction $H_{n,1}$ vérifie, comme ci-dessus, pour $t \leq T$:

$$H_{n,1}(t) \leq C_T \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}} ds. \tag{1.1.18}$$

Pour $H_{n,2}$, on a, par l'inégalité de Burkholder-Davis Gundy :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\{|\Psi_2(W^{n+1})(t,x) - \Psi_2(W^n)(t,x)|^p\} \\ &\quad \leq C\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U |h|^2 G_{t-s}(x,y)^2 |W_-^n - W_-^{n-1}|^2(s,y) d\lambda^+(s,y,h)\right)^{\frac{p}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

Notons $S_n(t,x)$ la somme ci-dessus, sur les particules de λ^+. Ici $2 \leq p < 3$, donc $p/2 \geq 1$, et il n'est donc pas possible de rentrer, par sous-additivité, l'exposant $p/2$ dans la somme sur les particules de λ^+. On réécrit donc $S_n(t,x)$ comme :

$$\begin{aligned}S_n(t,x) = &\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U h^2 G_{t-s}(x,y)^2 \left(W_-^n(s,y) - W_-^{n-1}(s,y)\right)^2 d\lambda(s,y,h) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U h^2 G_{t-s}(x,y)^2 \left(W_-^n(s^-,y) - W_-^{n-1}(s^-,y)\right)^2 d\lambda^-(s,y,h).\end{aligned}$$

Notons alors $I_n(t,x)$ et $J_n(t,x)$ les deux termes du membre de droite. En appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy , on obtient, pour le premier terme :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(|I_n(t,x)|^{p/2}) \\ &\quad \leq C_p \mathbb{E}\left((\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U |h|^4 G_{t-s}(x,y)^4 |W_-^n - W_-^{n-1}|^4(s,y) d\lambda^+(s,y,h))^{p/4}\right).\end{aligned}$$

Or, l'exposant $p/4 \leq 1$, donc

$$\mathbb{E}(|I_n(t,x)|^{p/2}) \leq C_p \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U |h|^p G_{t-s}(x,y)^p |W_-^n - W_-^{n-1}|^p(s,y) d\lambda^+(s,y,h)\right).$$

Nous utilisons maintenant la formule d'intégration prévisible L^1, qui fournit :

$$\mathbb{E}(|I_n(t,x)|^{p/2}) \leq C_T \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}} ds. \tag{1.1.19}$$

Nous allons à présent majorer $\mathbb{E}(|J_n(t,x)|^{p/2})$ en utilisant l'inégalité de Hölder. Soit donc q' l'exposant conjugué de $p/2$, alors :

$$\mathbb{E}(|J_n(t,x)|^{p/2}) \leq C_T \int_0^t \int_{\mathrm{R}^d} \int_U |h|^2 \frac{\mathbb{E}(|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)|^p)}{(t-s)^{p/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}} \, dsdyd\mu(h)$$
$$\times \left(\int_0^t \int_{\mathrm{R}^d} \int_U |h|^2 e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}} \, dsdyd\mu(h) \right)^{p/2q'} .$$

Or, comme $\int_U |h|^2 d\mu(h)$ est finie, pour $t < T$, on a :

$$\mathbb{E}(|J_n(t,x)|^{p/2}) \leq C_{T,p} \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}} ds. \tag{1.1.20}$$

En additionnant les inégalités (1.1.18), (1.1.19), et (1.1.20), nous obtenons donc :

$$h_n(t) \leq C_{T,p} \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}} ds.$$

et il suffit d'appliquer de nouveau le lemme A1 pour conclure. □

1.2 Régularités partielles de la solution

Introduction

On étudie à présent les régularités partielles de la solution V de (1.0.3) construite dans la partie précédente. Les particules de λ^+ formant en général un ensemble dense dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, il est impossible d'obtenir des régularités presque sûres, globalement sur un ouvert de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. En effet, la solution est en général non bornée au voisinage d'une particule. On va donc chercher à établir des conditions presque sûres de régularité partielle. Par exemple, nous allons exhiber une condition sur $d\lambda^-$ permettant d'assurer, à un instant t fixé, la continuité de la fonction $V(t,\cdot)$ sur $\mathbb{R}^d$. De la même manière, une condition assurera, en un point x fixé dans $\mathbb{R}^d$ la continuité de la fonction $V(\cdot,x)$ sur $\mathbb{R}^+$. Les mêmes questions seront ensuite étudiées pour les dérivabilités.

Par construction, le processus V vérifie :

$$V = V^0 + \Phi_1(V) + \Phi_2(V),$$

avec $V^0(t,x) = \int_{\mathrm{R}^d} u_0(y) G_t(x,y) dy$, pour une fonction u_0 bornée. L'étude des régularités de V se ramène donc à celle des régularités, respectivement, de $\Phi_2(V)$, et $\Phi_1(V)$.

Nous allons donc étudier celles-ci dans les deux premiers paragraphes de cette partie respectivement.
Nous présenterons ensuite une étude succincte de la régularité pour la solution W de l'équation (1.0.5). Nous montrons l'appartenance presque sûre du processus $W(t,\cdot)$ à l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Puis nous étudions la continuité sur $\mathbb{R}^d$ de $W(t,\cdot)$, pour un t fixé, lorsque $d=1$, afin de comparer le résultat ainsi obtenu avec ceux montrés par Walsh pour l'équation 1.0.1.

1.2.1 Etude des régularités partielles de $\Phi_2(V)$.

Dans cette partie, on va s'intéresser à la régularité de $\Phi_2(V)$. Cette étude se fait en utilisant la définition de Φ_2 comme intégrale stochastique par rapport à λ^+. Ceci impose de supposer vraie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{1.1})$, afin de s'assurer de l'existence de cette intégrale. Les résultats ainsi trouvés s'appliqueront en particulier au cas où la fonction g est identiquement nulle.
Pour a un nombre réel positif strictement, on appelle π_a la fonction sur U définie par :

$$\begin{array}{rcll} \pi_a(h) & = & |h|^a & \text{si} \quad 0<a<1, \\ \pi_a(h) & = & |h||\log(|h|)| & \text{si} \quad a=1, \\ \pi_a(h) & = & |h| & \text{si} \quad a>1, \end{array}$$

et on note $(\mathrm{H}_{1.7})(a)$, l'hypothèse :

$(\mathrm{H}_{1.7})(a)$. La mesure μ vérifie : $\displaystyle\int_{\{} |h|\leq 1\}\pi_a(h)\,d\mu(h)<\infty.$

Nous allons utiliser dans cette partie les estimations du Lemme A2, qu'on trouvera en appendice de ce premier chapitre.

Régularité en espace

Théorème 1.2.1.1 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$. *Alors, si, pour un entier* $l\in\mathbb{N}$, *la mesure* μ *satisfait à l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{1.7})(\frac{2}{d+l})$, *il existe un sous-ensemble* N_t *de* Ω, $\mathbb{P}$*-négligeable, tel que : pour tout* $\omega\in\Omega-N_t$, *l'application* $\Phi_2(V)(t,\cdot,\omega)$ *est de classe* C^l *sur* $\mathbb{R}^d$.

Démonstration du théorème 1.2.1.1 :
L'ensemble de la démonstration repose sur les majorations de $G_{t-s}(x,y)$, énoncées dans le lemme A2.
Soit A un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et t un réel positif fixé. Nous allons montrer que,

sous chacune des conditions énoncées ci-dessus, il existe un ensemble $N_{t,A}$ tel que $\mathbb{P}(N_{t,A}) = 0$, et que, pour $\omega \notin N_{t,A}$, la fonction $V(t, \cdot, \omega)$ possède la régularité voulue sur l'ensemble A.

Soit x_0 un point de A, et r_0, un réel strictement positif et tel que, pour un $\delta > 0$, on ait :

$$A \subset B[x_0, r_0 - \delta).$$

On note dans la suite $B = B[x_0, r_0)$. Alors, pour tout $y \notin B$, et tout x dans A, on a :

$$\|y - x_0\| - r_0 + \delta \leq \|y - x\| \leq \|y - x_0\| + r_0. \tag{1.2.1}$$

Pour simplifier les écritures, on prend maintenant $x_0 = 0$.
Pour étudier la régularité de $\Phi_2(V)$, on va considérer séparément les particules situées en dehors de B et celles intérieures à B. Soit donc :

$$S(t,x) = \sum_{\substack{[0,t] \\ \times B^c \times U}} f(V_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y) \lambda^+(s,y,h).$$

Le lemme suivant donne la régularité de la fonction S sur $\mathbb{R}^+ \times A$.

Lemme 1.2.1.1 *Si les hypothèses* ($\mathrm{H}_{1.1}$), ($\mathrm{H}_{1.3}$), *et* ($\mathrm{H}_{1.4}$) *sont vérifiées, la fonction : $(t,x) \mapsto S(t,x)$ est presque sûrement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times A$.*
Plus précisément, il existe un ensemble N_A, qui est $\mathbb{P}$-négligeable, et tel que :

$$(\omega \notin N_A) \Longrightarrow ((t,x) \mapsto S(t,x) \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times A).$$

Preuve du lemme 1.2.1.1
On montre en fait que, pour tout $T \geq 0$, il existe un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable $N_{T,A}$ tel que, si $\omega \notin N_{T,A}$, la fonction $S(\cdot, \cdot, \omega)$ est C^∞ sur $[0,T] \times A$. La conclusion du lemme en découle naturellement.
Soit $D_{t,x}$ un opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. On envisage donc la somme :

$$S(D)(t,x) = \sum_{\substack{[0,t] \\ \times B^c \times U}} f(V_-)(s,y,h)\, D_{t,x}(G_{t-s}(x,y))\, \lambda^+(s,y,h).$$

Nous allons montrer que, presque sûrement, cette somme converge normalement sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Pour cela, il faut donc considérer, pour un y de B^c :

$$\sup_{\substack{t \leq T \\ x \in A}} D_{t,x}(G_t(x,y)).$$

Comme, $\|x - y\| \geq \delta$, et que $t \leq T$, il existe une constante C, et des réels n_1 et n_2, tels que :

$$D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C \frac{\|x-y\|^{n_1}}{t^{n_2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}.$$

Or, la fonction f définie par:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \dfrac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{t^{n_2}}, \end{array}$$

étant une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $\frac{C}{r^{2n_2}}$, et croissante sur $[0\,;\,r^2/2n_2]$, décroissante sur $[r^2/2n_2\,;\,+\infty)$, on a donc :

$$\begin{array}{rcll} D_{t,x}(G_t(x,y)) & \leq & C\|x-y\|^{n_1-2n_2} & \text{si } \|x-y\| \leq \sqrt{2Tn_2}\,; \\ D_{t,x}(G_t(x,y)) & \leq & C\|x-y\|^{n_1}\dfrac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2T}}}{T^{n_2}} & \text{si } \|x-y\| \geq \sqrt{2Tn_2}. \end{array}$$

Par suite, quitte à modifier la valeur de la constante C, comme $\|x-y\| \geq \delta$:

$$\sup_{t\leq T} D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C\|x-y\|^{n_1}\frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2T}}}{T^{n_2}}.$$

Grâce à l'encadrement de $\|x-y\|$ donné dans (1.2.1), on a encore :

$$\sup_{\substack{t\leq T\\ x\in A}} D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C(\|y\|+r_0)^{n_1}\frac{e^{-\frac{(\|y\|-r_0+\delta)^2}{2T}}}{T^{n_2}}. \tag{1.2.2}$$

Et, par suite :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{[0,t]\\ \times B^c\times U}} f(V_-)(s,y,h)\sup_{\substack{x\in A\\ t\leq T}} D_{t,x}(G_{t-s}(x,y))\lambda^+(s,y,h) \\ &\qquad\leq \sum_{\substack{[0,t]\\ \times B^c\times U}} C\, f(V_-)(s,y,h)\,(\|y\|+r_0)^{n_1}\,\frac{e^{-\frac{(\|y\|-r_0+\delta)^2}{2T}}}{T^{n_2}}\lambda^+(s,y,h). \end{aligned}$$

Or, le membre de droite de cette inégalité est d'espérance finie grâce aux hypothèses $(\mathrm{H}_{1.1})$ et $(\mathrm{H}_{1.3})$. La conclusion du lemme s'ensuit donc : la fonction S est presque sûrement C^∞ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. □
Ceci permet de ne considérer, pour l'étude de la régularité partielle en espace sur A, que les particules apparaissant dans un cylindre $[0,t]\times B$, pour un instant t positif fixé. On a alors le lemme suivant.

Lemme 1.2.1.2 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$, *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et qu'on a, pour un entier* l *:*

$$\int_0^t \int_B \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{(d+l)/2}}\wedge 1\right) dsdyd\mu(h) < \infty, \tag{1.2.3}$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t,\cdot)$ *est presque sûrement de classe* C^l *sur* A.

Fixons d'abord quelques notations. Pour un $m = (m_1, \cdots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose $|m| = m_1 + \cdots + m_d$, et

$$\partial^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_d^{m_d}}.$$

Grâce au lemme 1.2.1.1, il suffit de prouver que, si la condition (1.2.3) est vérifiée, alors la fonction :

$$x \longmapsto \sum_{\substack{[0,t] \\ \times B \times U}} f(V_-)(s,y,h)\, G_{t-s}(\cdot, y)\, \lambda^+(s,y,h), \tag{1.2.4}$$

est presque sûrement de classe C^l sur A. Pour cela, nous allons montrer que, si $m \in \mathbb{N}^d$ est tel que $|m| \le l$, alors la série donnée par :

$$\sum_{\substack{[0,t] \\ \times B \times U}} f(V_-)(s,y,h)\, \partial_x^m (G_{t-s}(x,y))\, \lambda^+(s,y,h), \tag{1.2.5}$$

converge presque sûrement, uniformément, pour $x \in A$, sous la condition (1.2.3). Remarquons d'abord qu'on peut supprimer dans cette somme les particules de masse $|h| \ge 1$, celles-ci étant en nombre fini dans $[0,t] \times B$. Par ailleurs, grâce au Lemme A2, il existe une constante $C_{|m|}$ telle que :

$$|\partial_x^m (G_{t-s}(x,y))| \le \frac{C_{|m|}}{(t-s)^{(d+|m|)/2}}.$$

Donc, pour tout d-uplet m d'entiers tel que $|m| \le l$:

$$|\partial_x^m (G_{t-s}(x,y))| \le \frac{C}{(t-s)^{(d+l)/2}},$$

pour une certaine constante C. La série (1.2.5) convergera donc uniformément sur A si :

$$\sum_{\substack{[0,t] \times B \\ \times \{|h| \le 1\}}} \frac{|h|\,(\,1 + |V_-(s,y)|\,)}{(t-s)^{(d+l)/2}}\, \lambda^+(s,y,h) < \infty,$$

donc si

$$\sum_{\substack{[0,t] \times B \\ \times \{|h| \le 1\}}} \left(\frac{|h|(1 + |V_-(s,y)|)}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) \lambda^+(s,y,h) < \infty.$$

Or, si X est une variable aléatoire positive, $\mathbb{E}(X \wedge 1) \le \mathbb{E}(X) \wedge 1$. Dès lors, en utilisant la formule d'intégration prévisible :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{\substack{[0,t] \times B \\ \times \{|h| \le 1\}}} \left(\frac{|h|(1 + |V_-(s,y)|)}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) \lambda^+(s,y,h) \right\} \\ \le M(1 + \|V\|_E e^{\alpha t}) \int_0^t \int_B \int_{|h| \le 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) ds dy d\mu(h). \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Sous la condition (1.2.3), la fonction (1.2.4) est donc de classe C^l, ce qui termine la preuve du lemme 1.2.1.2.□

Pour achever la démonstration du théorème 1.2.1.1, nous allons prouver que les conditions qu'il énonce, impliquent, dans chacun des cas possibles, la condition (1.2.3). Considérons d'abord le cas $l=0$, c'est-à-dire l'étude de la continuité de $\Phi_2(V)$ en la variable d'espace. Il faut alors, d'après (1.2.6), montrer que :

$$\int_{[0,t]}\int_{y\in B}\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}}\wedge 1\right)\,ds\,dy\,d\mu(h)<\infty.$$

Or, B est bornée, donc de mesure de Lebesgue finie, et :

$$\int_0^t\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}}\wedge 1\right)dsd\mu(h)$$

$$\leq \int_{|h|\leq 1}|h|\int_{s=|h|^{2/d}}^{t}\frac{ds}{s^{d/2}}d\mu(h)\;+\;\int_{|h|\leq 1}\int_{s=0}^{|h|^{2/d}}dsd\mu(h).$$

L'étude de la première intégrale impose de séparer les cas $d\neq 2$ et $d=2$. Pour $d>2$, on obtient

$$\int_0^t\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}}\wedge 1\right)dsd\mu(h)\leq\frac{d/2}{|d/2-1|}\int_{|h|\leq 1}|h|^{2/d}d\mu(h),$$

et, pour $d=2$,

$$\int_0^t\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}}\wedge 1\right)dsd\mu(h)$$

$$\leq(|\log(t)|+1)\int_{|h|\leq 1}|h|d\mu(h)\;+\;\int_{|h|\leq 1}|h||\log(|h|)|d\mu(h).$$

Par suite, quand la dimension $d\neq 2$, si :

$$\int_{|h|\leq 1}|h|^{2/d}d\mu(h)<\infty,$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t,\cdot,\omega)$ est presque sûrement continue sur A. De même, pour $d=2$, si

$$\int_{|h|\leq 1}|h||\log(h)|d\mu(h)<\infty.$$

En dimension 1 toutefois, on a :

$$\int_0^t \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}} \wedge 1 \right) ds d\mu(h) \leq \sqrt{t}/2 \int_{|h|\leq 1} |h| d\mu(h) < \infty,$$

sous la seule hypothèse $(\mathrm{H}_{1.1})$, qui suffit pour conclure à la continuité en espace.

L'étude des dérivabilités se fait de la même manière. Il faut considérer :

$$\int_{[0,t]} \int_{y\in A} \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{s^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) dsdyd\mu(h),$$

qui sera finie si :

$$\int_A \int_{|h|\leq 1} |h|^{2/(d+l)} dyd\mu(h) < \infty,$$

pour $d \neq 1$. Dans le cas unidimensionnel, il faut imposer

$$\int_A \int_{|h|\leq 1} |h| |\log(|h|)| dyd\mu(h) < \infty$$

pour la dérivabilité, et,

$$\int_A \int_{|h|\leq 1} |h|^{2/(1+l)} dyd\mu(h) < \infty$$

pour le caractère C^l, avec $l > 1$. Le théorème est donc démontré.

Régularité en temps

On étudie dans cette partie la régularité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $\Phi_2(V)(\cdot, x)$, x étant fixé dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.2.1.2 *On suppose que les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et que la mesure* μ *vérifie* $(\mathrm{H}_{1.7})(\frac{d}{d+2l})$*, pour un entier positif* l*. Alors, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$*, il existe un sous-ensemble* N_x *de* Ω*, qui est* $\mathbb{P}$*-négligeable, et tel que : pour tout* $\omega \notin N_x$*, la fonction* $\Phi_2(V)(\cdot, x)$ *est de classe* C^l *sur* $\mathbb{R}^+$*.*

Démonstration du théorème 1.2.1.2
On fixe donc cette fois $x \in \mathbb{R}^d$, et on étudie la régularité de la fonction $\Phi_2(V)(\cdot, x)$. Soient A et B comme dans la partie précédente, et tels que $x \in A$. Dans la suite, et pour simplifier les écritures, nous supposerons que $x = 0$. De même que dans l'étude de la régularité en espace, on peut se restreindre grâce au lemme 1.2.1.1 à l'étude de

l'influence des seules particules apparaissant dans $[0,T]\times B$.
De plus, grâce au lemme A2, on a la majoration uniforme :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left|\frac{\partial^l G_{t-s}(0,y)}{\partial t^l}\right|\le\frac{C_l'}{\|y\|^{d+2l}},$$

qui conduit à la propriété suivante, analogue au lemme 1.2.1.2 :

Lemme 1.2.1.3 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et qu'on a, pour un entier l :*

$$\int_0^t\int_B\int_{|h|\le 1}\left(\frac{|h|}{\|y\|^{d+2l}}\wedge 1\right)dsdyd\mu(h)<\infty, \tag{1.2.7}$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(\cdot,0)$ *est presque sûrement de classe* C^l *sur* $[0,T]$.

Pour la continuité en temps, on étudie donc la finitude de

$$\int_B\int_{h\in\mathbb{R}}\left(\frac{|h|}{\|y\|^d}\wedge 1\right)dyd\mu(h)\,.$$

Cette intégrale se majore selon :

$$\begin{aligned}&\int_B\int_{|h|\le 1}\left(\frac{|h|}{r^d}\wedge 1\right)r^{d-1}drd\mu(h)\\ &\qquad\le\int_{|h|\le 1}\int_{r=0}^{|h|^{1/d}}r^{d-1}drd\mu(h)\;+\;\int_{|h|\le 1}|h|\int_{r=|h|^{1/d}}^{r_0}\frac{dr}{r}d\mu(h),\\ &\qquad\le(|\log(r_0)|+1/d)\int_{|h|\le 1}|h|\,d\mu(h)\;+\;\frac{1}{d}\int_{|h|\le 1}|h||\log(|h|)|\,d\mu(h).\end{aligned}$$

Or, par hypothèse $\int_{|h|\le 1}|h|d\mu(h)<\infty$. Si, de plus, $\int_{|h|\le 1}|h\log(|h|)|d\mu(h)<\infty$, la fonction $\Phi_2(V)(\cdot,0,\omega)$ sera donc continue sur $[0,T]$.

Pour montrer que V est de classe C^l en temps, on considère, grâce à la condition (1.2.7), l'intégrale :

$$\int_{[0,t]}\int_A\int_{|h|\le 1}\left(\frac{|h|}{r^{d+2l}}\wedge 1\right)r^{d-1}dsdrd\mu(h),$$

qui sera finie si :

$$\int_{|h|\le 1}|h|^{\frac{d}{d+2l}}d\mu(h)<\infty,$$

ce qui achève la démonstration. □

Etude des ensembles de points irréguliers de $\Phi_2(V)$.

On considère le processus $\Phi_2(V)(t,x)$ pour $t \leq T$ ($T \geq 0$ arbitraire), on note par β l'indice de Blumenthal-Getoor défini selon :

$$\beta = \inf\{a \geq 0 \ : \ \int_{|h|\leq 1} |h|^a \, d\mu(h) \ < \ \infty\}, \tag{1.2.8}$$

et on suppose que $\beta < 1$.

Lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini $N(\omega)$ de particules $(s_i, y_i, h_i), 1 \leq i \leq N(\omega)$, le processus $\Phi_2(V)$ est donné par :

$$\Phi_2(V)(t,x) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} f(V_-(s_i,y_i), s_i, y_i, h_i) G_{t-s_i}(x, y_i), \tag{1.2.9}$$

et ce processus est donc de classe C^∞ en tout point (t,x) qui n'est pas une particule. Cependant, lorsqu'il y a une infinité de particules dans une partie bornée de $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, on ne peut généralement pas avoir une telle régularité, à cause d'une possible accumulation de particules au voisinage de certains points. Il est toutefois possible de trouver un analogue du résultat de régularité obtenu avec un nombre fini de particules, en considérant, pour un entier l, les ensembles E'_l et F'_l définis par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E'_l & = & \{ (t,x) \ : \ \Phi_2(V)(t,\cdot) \text{ n'est pas } C^l \text{ au vois. de } x \in \mathbb{R}^d\}, \\ \\ F'_l & = & \{ (t,x) \ : \ \Phi_2(V)(\cdot,x) \text{ n'est pas } C^l \text{ au vois. de } t \in [0,T]\}, \end{array} \right. \tag{1.2.10}$$

et en majorant, en fonction de β, leurs dimensions de Hausdorff. Pour faciliter l'étude, on ne considère pas directement les ensembles E'_l et F'_l, mais les ensembles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_l & = & \{ t \in [0,T] \ : \ \Phi_2(V)(t,\cdot) \text{ n'est pas de classe } C^l \text{ sur } \mathbb{R}^d\}, \\ \\ F_l & = & \{ x \in \mathbb{R}^d \ \ : \ \Phi_2(V)(\cdot,x) \text{ n'est pas de classe } C^l \text{ sur } [0,T]\}. \end{array} \right. \tag{1.2.11}$$

On va utiliser, pour majorer la dimension de Hausdorff de E_l, les résultats montrés dans [9] sur la régularité d'un subordinateur.
Dans la suite, on notera $\dim_{\mathrm{H}} A$ la dimension de Hausdorff d'un ensemble A inclus dans $[0,T]$ ou dans $\mathbb{R}^d$.

Dimension de Hausdorff de E_l

Théorème 1.2.1.3 *On suppose que $\beta < 1$, et que la fonction f vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{1.8})$ *ci-dessous.*
$(\mathrm{H}_{1.8})$. *Il existe une constante positive C, telle que, pour tout (v,s,y,h) :*

$$|f(v,s,y,h)| \leq C|h|.$$

Si les hypothèses du théorème 1.1.2.1 sont vérifiées, et qu'on a, pour un $l \in \mathbb{N}$, $\beta < \frac{2}{d+l}$, alors avec probabilité égale à 1 :

$$\dim_{\mathrm{H}} E_l \leq \frac{(d+l)\beta}{2}. \tag{1.2.12}$$

Démonstration du théorème 1.2.1.3.
Comme $|f|/|h|$ est bornée (hypothèse $(\mathrm{H}_{1.8})$), on a, d'après la démonstration du théorème 1.2.1.1, la propriété suivante, pour tout $t \in [0,T]$ fixé.

Propriété 1.2.1.1 *Pour un entier l, et tout compact K inclus dans $\mathbb{R}^d$, si*

$$\int_0^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}} d\lambda^+(s,y,h) < \infty, \tag{1.2.13}$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t,\cdot)$ est de classe C^l sur tout compact inclus dans l'intérieur de K.

Notons alors :

$$X(t',\omega) = \int_0^{t'} \int_{y\in K} \int_{|h|\leq 1} |h| d\lambda^+(s,y,h). \tag{1.2.14}$$

Le processus X est alors un subordinateur, et en outre, pour tout t dans $[0,T]$,

$$\int_0^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}} d\lambda^+(s,y,h) = \int_0^t \frac{dX_s}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}}. \tag{1.2.15}$$

En utilisant alors la formule d'intégrations par parties pour l'intégrale de Stieltjes, si on pose $Y_s = X_t - X_{t-s}$, on a pour tout nombre $\varepsilon > 0$

$$\frac{Y_t}{t^{\frac{d+l}{2}}} - \frac{Y_\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{d+l}{2}}} = \int_\varepsilon^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}} d\lambda^+(s,y,h) - \frac{d+l}{2} \int_\varepsilon^t \frac{Y_s}{s^{\frac{d+l}{2}+1}} ds, \tag{1.2.16}$$

ce qui implique le lemme ci-dessous.

Lemme 1.2.1.4 *S'il existe un nombre positif C tel que $|X_t - X_s| \leq C|t-s|^a$, avec $a > \frac{d+l}{2}$, alors :*

$$\int_0^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}} d\lambda^+(s,y,h) < \infty.$$

Preuve du lemme 1.2.1.4 :
Nous introduisons d'abord quelques notations. On dit que X est hölderien en t, d'exposant a, s'il existe un C positif tel que, pour tout $s \leq T$, $|X_t - X_s| \leq C|t-s|^a$, et on note $\mathrm{hold}_t X$ la borne supérieure de l'ensemble des $a \geq 0$ tels que X soit hölderien en t d'exposant a :

$$\mathrm{hold}_t X = \sup\{a \geq 0 \ : \ \exists C_a \text{ tel que } \forall s \in [0,T],\ |X_t - X_s| \leq C_a |t-s|^\alpha\}. \quad (1.2.17)$$

Alors, si $\mathrm{hold}_t X > \frac{d+l}{2}$, on a $\mathrm{hold}_0 Y > \frac{d+l}{2}$, et donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y_\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{d+l}{2}}} = 0.$$

Dès lors, d'après 1.2.16, les intégrales :

$$\int_0^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}}\, d\lambda^+(s,y,h) \quad \text{et} \quad \int_0^t \frac{Y_s}{s^{\frac{d+l}{2}+1}}\, ds$$

sont de même nature. Or, par hypothèse $\mathrm{hold}_0 Y > \frac{d+l}{2}$, donc il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que $|Y_s| \leq C|s|^{\frac{d+l}{2}+\varepsilon'}$, et par suite :

$$\int_0^t \frac{Y_s}{s^{\frac{d+l}{2}+1}}\, ds \ \leq \ C \int_0^t \frac{1}{s^{1-\varepsilon'}}\, ds < \infty,$$

donc,

$$\int_0^t \int_K \int_{|h|\leq 1} \frac{|h|}{(t-s)^{\frac{d+l}{2}}}\, d\lambda^+(s,y,h) < \infty,$$

c'est-à-dire la conclusion du lemme. □
Pour achever la preuve du théorème, on remarque que, grâce au lemme 1.2.1.4 et à la propriété 1.2.1.1 :

$$E_l \subset \left\{ t \ : \ \mathrm{hold}_t X \leq \frac{d+l}{2} \right\}. \quad (1.2.18)$$

Or, d'après le théorème principal de [9], on a :

$$\dim_{\mathrm{H}} \left\{ t \ : \ \mathrm{hold}_t X \leq \frac{d+l}{2} \right\} \ = \ \frac{d+l}{2}\beta,$$

ce qui permet de conclure la démonstration du théorème. □

Dimension de Hausdorff de F_l

Théorème 1.2.1.4 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et que* $\beta < \frac{d}{2(d+l)}$, *alors, presque sûrement :*

$$\dim_{\mathrm{H}} F_l \leq \frac{\beta(d+2l)}{(1-\beta)}. \tag{1.2.19}$$

Démonstration du théorème 1.2.1.4 :
De même que ci-dessus, on a la propriété suivante, tirée de la démonstration du théorème 1.2.1.2.

Propriété 1.2.1.2 *Soit B est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et $x \in B$. Si*

$$\int_0^T \int_B \int_{|h|\leq 1} \frac{|f(V_-,h)|}{\|x-y\|^{d+2l}}\, d\lambda^+(s,y,h) < \infty, \tag{1.2.20}$$

alors $\Phi_2(V)(\cdot,x)$ est de classe C^l sur $[0,T]$.

Par ailleurs, comme $\dfrac{|f|}{|h|}$ est à croissance linéaire en v, on a, pour tout ouvert borné B de $\mathbb{R}^d$, si $\alpha > \beta$:

$$\int_0^T \int_B \int_{|h|\leq 1} |f(V_-,h)|^\alpha d\lambda^+(s,y,h) < \infty, \tag{1.2.21}$$

presque sûrement. Donc, s'il existe un $C \geq 0$ tel que, pour toute particule de $[0,T] \times B \times \{|h| \leq 1\}$, on ait :

$$\frac{|f(V_-,h)|}{\|x-y\|^{d+2l}} \leq C|f(V_-,h)|^\alpha, \tag{1.2.22}$$

pour un $\alpha > \beta$, alors $\Phi_2(V)(\cdot,x)$ est de classe C^l sur $[0,T]$. Par suite, s'il existe un $C \geq 0$ tel que $|f(V_-,h)|^{\frac{1-\alpha}{d+2l}} \leq C\|x-y\|$, pour un $\alpha > \beta$, et pour toute particule (s,y,h), alors la fonction $\Phi_2(V)(\cdot,x)$ est de classe C^l sur $[0,T]$.

Dans le cas contraire, pour tout $C \geq 0$, il existe une particule (s,y,h), dans $[0,T] \times B \times \{|h| \leq 1\}$, telle que :

$$\|x-y\| \leq C|f(V_-,h)|^{\frac{1-\alpha}{d+2l}},$$

et donc,

$$x \in \bigcap_{C>0} \bigcup_{\substack{\lambda^+(s,y,h)=1 \\ y\in B,\,|h|\leq 1}} B[y, C|f(V_-,h)|^{\frac{1-\alpha}{d+2l}}) = \bigcap_{C>0} A_C, \tag{1.2.23}$$

où $B[y,r)$ représente la boule ouverte de centre y et de rayon r. Or, si

$$\frac{(1-\alpha)d}{d+2l} > \beta, \tag{1.2.24}$$

alors A_C est de mesure de Lebesgue finie, donc $\bigcap_{C>0} A_C$ est de mesure de Lebesgue nulle. De plus, en utilisant le recouvrement de l'intersection des A_C par les boules : $B[y, C|f(V_-,h)|^{\frac{1-\alpha}{d+2l}})$, on a alors :

$$\dim_{\mathrm{H}}\Big(\bigcap_{C>0} A_C\Big) \leq \frac{\beta(d+2l)}{(1-\beta)}. \tag{1.2.25}$$

Pour montrer le théorème, il suffit donc que l'on puisse choisir $\alpha > \beta$ et tel que (1.2.24) soit vérifiée, c'est-à-dire qu'il suffit que :

$$\beta < \frac{d}{2(d+l)},$$

ce qui est exactement l'hypothèse faite dans le théorème 1.2.1.4. Ce théorème est donc montré. □

Remarques *1) La même méthode peut être utilisée pour calculer* $\dim_{\mathrm{H}} E_l$*, mais le résultat qu'on trouve de la sorte est moins fin que celui donné dans le théorème 1.2.1.3. Cette méthode montre que, si* $\beta < \dfrac{2}{3+l}$*, alors* $\dim_{\mathrm{H}} E_l \leq \dfrac{\beta(1+l)}{(1-\beta)2}$.
2) Lorsque $d = 1$*, et que* $|f|/|h|$ *est bornée (hypothèse* $(\mathrm{H}_{1.8})$*), il est à nouveau possible d'utiliser les résultats montrés dans [9]. On montre ainsi que, si* $\beta < d/(d+2l)$*, alors :*

$$\dim_{\mathrm{H}} F_l \leq (d+2l)\beta\ . \tag{1.2.26}$$

En fait, si les résultats de [9] se généralisaient à une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$*, pour* $d > 1$*, un tel résultat demeurerait vrai sur* $\mathbb{R}^d$*. Nos tentatives pour prouver une telle généralisation n'ont, jusqu'ici, pas abouti.*

1.2.2 Etude des régularités partielles de $\Phi_1(V)$.

Nous étudions maintenant les régularités partielles en temps et en espace du processus $\Phi_1(V)$. Les résultats obtenus dans ce sens sont assez parcellaires. Ils supposent en général que la dimension d soit petite ($d = 1$ ou 2), ou que la fonction g soit bornée.

Régularité en espace de $\Phi_1(V)$

On obtient, sous l'hypothèse que g est bornée, une continuité et une dérivabilité partielle en espace, et une continuité en espace en dimension 1 et 2, lorque g est à croissance linéaire.

Théorème 1.2.2.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et que la fonction g est bornée, alors pour tout instant t fixé, la fonction $\Phi_1(V)(t,\cdot,\omega)$ est presque sûrement continue et dérivable sur $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 1.2.2.2 *On suppose ici que $d \leq 2$, que la mesure λ^- satisfait les hypothèses $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$, pour tout $1 \leq p < 1+2/d$, et que les fonctions f et g vérifient respectivement, $(\mathrm{H}_{1.3})$ et $(\mathrm{H}_{1.4})$. Alors la fonction $\Phi_1(V)(t,\cdot,\omega)$ est presque sûrement continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration des théorèmes 1.2.2.1 et 1.2.2.2

Dans ces démonstrations, on écrira en général $G(x)$ au lieu de $G_{t-s}(x,y)$, aucune ambiguïté n'étant à craindre.

La démonstration de chacun de ces théorèmes utilise le Lemme A3, dont on rappelle ci-dessous l'énoncé, et dont on trouvera la démonstration dans l'appendice de ce premier chapitre.

Lemme A3 *Soit $0 \leq \gamma \leq 1+2/d$, et T positif fixé, on note $\gamma_c = 1 + 1/(d+1)$. Il existe une constante positive C, ne dépendant que de d, T, et γ, et telle que, pour $t \leq T$, on a, si $\|x-z\| \leq 1/2$:*

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |G_s(x,y) - G_s(z,y)|^\gamma ds dy &\leq C\|x-z\|^\gamma, && 0 \leq \gamma < \gamma_c \,; \\
&\leq C\|x-z\|^{\gamma_c} |\ln(\|x-z\|)|, && \gamma = \gamma_c \,; \\
&\leq C\|x-z\|^{2-d(\gamma-1)}, && 1+2/d > \gamma > \gamma_c.
\end{aligned}$$

Démonstration du Théorème 1.2.2.1

Notons S un majorant de la fonction $|g|$, et soit

$$X(t,x,\omega) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y)\, G(x)\, dsdy.$$

La démonstration de la continuité est alors immédiate, en écrivant que :

$$|X(x) - X(z)| \leq S \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |G(x) - G(z)| dsdy,$$

et en appliquant le Lemme A3, avec $\gamma = 1$.
Pour montrer la dérivabilité, nous remarquons d'abord que, pour un $r_0 > 0$, si on note $B = B[x_0, 2r_0)$, alors la fonction :

$$z \mapsto \int_0^t \int_{B^c} g(V)(s,y)\, G(x)\, dsdy,$$

est différentiable sur $B[x_0, r_0)$, grâce aux théorèmes classiques de dérivation d'une fonction définie par une intégrale. Il suffit donc de montrer la différentiabilité de la fonction :

$$X_B(z) = \int_0^t \int_B g(V)(s,y)\, G(x)\, dsdy,$$

pour $z \in B[x_0, r_0)$. Pour cela, on note que, grâce au lemme A3, la fonction g étant bornée, on a, si $\|z - x\| \leq 1/2$ et $1 < \gamma < \gamma_c$:

$$\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^\gamma \left(\frac{|G(z) - G(x)|}{\|z - x\|} \right)^\gamma dsdy \leq C.$$

La famille de fonctions $\dfrac{G(z) - G(x)}{\|z - x\|} g(V)(s,y)$ est donc équiintégrable sur $[0,t] \times B$ quand x tend vers z. Notons alors $\vec{\nabla} G(z)$ le gradient de la fonction G, pris en z, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On a donc, si $z - x = \|z - x\| \vec{e_i}$:

$$\lim_{x \to z} \int_0^t \int_B g(V)(s,y) \frac{|G(z) - G(x)|}{\|z - x\|} ds\, dy \;=\; \int_0^t \int_B g(V)(s,y) \langle \vec{\nabla} G(z)\,,\, \vec{e_i} \rangle dsdy. \tag{1.2.27}$$

Or, la famille de fonctions $\|\vec{\nabla} G(z)\|$ est équiintégrable pour $z \in B[x_0, r_0)$; en effet :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \|\vec{\nabla} G(z)\|^p dsdy \;\leq\; \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|y\|^p}{s^p} G^p(y)\, dsdy \;<\; \infty,$$

pour $p < \gamma_c$. Par suite, en prenant pour $\vec{e_i}$, dans (1.2.27) un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, ceci montre que la fonction X_B possède une dérivée partielle par rapport à x_i, continue pour $z \in B[x, r_0)$. En conséquence, X_B est bien différentiable sur $B[x, r_0)$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.2.2.1.□

<u>Démonstration du Théorème 1.2.2.2</u>
Une nouvelle fois, grâce aux théorèmes classiques de continuité pour des fonctions définies par une intégrale, il suffit de montrer la continuité de l'application :

$$X_B(z) = \int_0^t \int_B G(z)\, g(V)(s,y)\, dsdy,$$

pour $z \in B$. On applique pour cela le critère de Kolmogoroff, pour chacune des dimensions considérées ($d = 1$ ou 2.) En dimension 1, l'application de l'inégalité de Hölder pour $1 < p' < 3$, fournit :

$$\left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)||G(x) - G(z)|\, dsdy\right)^{p'}$$
$$\leq \int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^{p'} |G(x) - G(z)|\, dsdy \left(\int_0^t \int_B |G(x) - G(z)| dsdy\right)^{p'-1}.$$

En prenant l'espérance de chacune de ces quantités, et en utilisant le Lemme A3, on montre alors que :

$$\mathbb{E}\{|X_B(x) - X_B(z)|^{p'}\} \leq C\|x - z\|^{p'},$$

avec $p' > 1$ ce qui permet de conclure.

Le cas de la dimension 2 est un peu plus retors. Alors $\gamma_c = 4/3$, et, toujours en utilisant l'inégalité de Hölder, on voit que :

$$|X_B(x) - X_B(z)|^\gamma$$
$$\leq \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)||G(x) - G(z)|^\gamma dsdy\right) \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)| dsdy\right)^{\gamma-1}.$$

Donc, avec une nouvelle application de Hölder

$$|X_B(x) - X_B(z)|^{\gamma\gamma'} \leq \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)| dsdy\right)^{\gamma'(\gamma-1)} \times$$
$$\times \int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^{\gamma'} |G(x) - G(z)|^\gamma dsdy \times \left(\int_0^t \int_B |G(x) - G(z)|^\gamma\, dsdy\right)^{\gamma'-1}.$$

On note alors

$$Y_B(x) = \frac{X_B(x)}{\left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)| dsdy\right)^{1-1/\gamma\gamma'}},$$

et, en prenant l'espérance dans les inégalités ci-dessus, on obtient, grâce au Lemme A3 :

$$\mathbb{E}\{|Y_B(x) - Y_B(z)|^{\gamma\gamma'}\} \;\leq\; C\|x - z\|^{\gamma\gamma'} \quad \forall \quad \gamma < \gamma_c, \quad \gamma' < 1 + 2/d = 2.$$

La conclusion s'ensuit grâce au lemme de Kolmogoroff. On obtient de surcroît une $1/4 - \varepsilon$-hölderianité pour Y_B, donc pour X_B. □

Régularité en temps de $\Phi_1(V)$

On a deux théorèmes différents, suivant que la fonction g est supposée bornée ou simplement à croissance linéaire. Ces théorèmes fournissent la continuité en temps mais pas la dérivabilité.

Théorème 1.2.2.3 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$, *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$ *sont vérifiées, et que la fonction g est bornée, alors la fonction $\Phi_1(V)(\cdot,x,\omega)$ est presque sûrement continue, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, et, si $\delta \leq 1/2$,*

$$|\Phi_1(V)(t,x,\omega) - \Phi_1(V)(t+\delta,x,\omega)| \leq C|\delta \log(|\delta|)|.$$

Théorème 1.2.2.4 *Supposons que les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.1})$, $(\mathrm{H}_{1.3})$, $(\mathrm{H}_{1.4})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$, *pour un $1 < p < 1 + 2/d$, soient vérifiées. Alors, pour tout x de $\mathbb{R}^d$, et tout t positif, il existe un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable N_x, tel que si $\omega \notin N_x$ la fonction $\Phi_1(V)(\cdot,x,\omega)$ soit continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstrations des théorèmes 1.2.2.3 et 1.2.2.4

Dans ces démonstrations, on utilise le Lemme A4 de l'appendice. On notera G_t pour $G_t(x,y)$ afin d'alléger les formules.

Démonstration du Théorème 1.2.2.3 :

Soit S un majorant de $|g|$, alors, pour $t \leq T$,

$$|\Phi_1(V)(t,x) - \Phi_1(V)(t+\delta,x)| \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} S|G_{t+\delta-s} - G_{t-s}|dsdy,$$

en posant $G_u(x,y) = 0$ si $u < 0$. D'après le Lemme A4, on a donc :

$$|\Phi_1(V)(t,x,\omega) - \Phi_1(V)(t+\delta,x,\omega)| \leq C\,S\,\delta|\ln(\delta)|,$$

ce qui montre le théorème 1.2.2.3.□

Démonstration du Théorème 1.2.2.4 :

Si $|h|^p$ est intégrable par rapport à μ, pour un $1 < p < 1 + 2/d$, c'est à dire si l'hypothèse $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$ est vérifiée, le processus V vérifie, d'après le corollaire 1.1.3.1 :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|V(t,x)|^p\} < \infty,$$

pour tout $T > 0$. Notons alors $X_x(t)$ la fonction :

$$X_x(t) = \int_0^t \int_{B[x,1)} g(V(s,y))G_{t-s}dsdy.$$

On a :

$$|X_x(t+\delta) - X_x(t)| \leq \int_0^T \int_{B[x,1)} |g(V)(s,y)||G_{t+\delta-s} - G_{t-s}|dsdy$$

Donc, grâce à l'inégalité de Hölder, si $\alpha = p-1$:

$$|X_x(t+\delta) - X_x(t)|^{1+\alpha}$$

$$\leq \int_0^T \int_{B[x,1)} |g(V)(s,y)|^p |G_{t+\delta-s} - G_{t-s}|dsdy \times \left(\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t+\delta-s} - G_{t-s}|dsdy \right)^\alpha .$$

On trouve finalement, en utilisant le Lemme A4 :

$$\mathbb{E}\{|X_x(t+\delta) - X_x(t)|^{1+\alpha}\} \leq C_{p,T}\delta^{1+\alpha}|\ln(\delta)|^{1+\alpha}$$

Le lemme de Kolmogoroff permet alors de conclure. □

1.2.3 Régularité Sobolev de W.

Dans cette partie, on considère la solution $W(t,x)$ comme une distribution $W_t \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ représente l'espace des mesures σ-finies sur $\mathbb{R}^d$. On note par $\mathrm{W}^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d$ qui sont dans L^p localement ainsi que leurs dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}$.
On note dans la suite par ∇_x le gradient d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$, par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.2.3.1 *Si les fonctions f et g vérifient les hypothèses* $(\mathrm{H}_{1.3})$ *et* $(\mathrm{H}_{1.4})$, *et que l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{1.2})$ *est vérifiée, pour un $1 < p < 1 + \frac{1}{d+1}$, alors, pour tout t positif :*

$$\mathbb{P}\{W_t \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}\} = 1.$$

Plus précisément, pour tout $T \geq 0$, $W(t,x)$ est dans l'espace $F_{1,p}$ des processus progressivement mesurables pour lesquels :

$$\|W\|_{F_{1,p}} = \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|W(t,x)|^p\}^{1/p} + \mathbb{E}\{|\nabla_x W(t,x)|^p\}^{1/p} < \infty. \qquad (1.2.28)$$

<u>Démonstration du Théorème 1.2.3.1.</u>
Dans toute cette démonstration, la lettre C désignera une constante positive, dont la

valeur pourra être différente d'une ligne à l'autre.
Rappelons que W vérifie la relation :

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(W)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(W_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y) d\lambda(s,y,h), \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

ω-presque sûrement et pour presque tout (t,x), et on a alors la propriété ci-dessous.

Lemme 1.2.3.1 *Le gradient de W_t, au sens des distributions, est donné par :*

$$\begin{aligned} \nabla_x W(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\, \nabla_x G_t(x,y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(W)(s,y)\, \nabla_x \left(G_{t-s}(x,y)\right) dsdy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(W_-)(s,y,h) \nabla_x \left(G_{t-s}(x,y)\right) d\lambda(s,y,h). \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Preuve du Lemme 1.2.3.1
Notons d'abord que, grâce au lemme A2, ou par un calcul direct, on a, pour tout t positif et $p > 1$, $p < 1 + 1/(d+1)$:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla_x G_{t-s}(x,y)\|^p\, dyds < \infty, \tag{1.2.31}$$

par suite, la formule (1.2.30) a bien un sens. La preuve du lemme s'obtient alors aisément grâce à une intégration par parties, en notant que, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_{t-s}(x,y)\, \nabla_x \phi(x)\, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x (G_{t-s}(x,y))\, \phi(x)\, dx. \tag{1.2.32}$$

□

On montre maintenant le théorème en prouvant que la suite W^n converge dans l'espace $F_{1,p}$, grâce au lemme de Walsh. On note :

$$H_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{\|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)\|^p\}^{1/p}, \tag{1.2.33}$$

et,

$$I_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{\|\nabla_x W^n(s,y) - \nabla_x W^{n-1}(s,y)\|^p\}^{1/p}. \tag{1.2.34}$$

Rappelons que, grâce à l'étude de l'équation compensée effectuée dans le paragraphe 1.1.3., on a, pour tout entier n :

$$H_{n+1}(t) \leq C \int_0^t \frac{H_n(s)}{(t-s)^{(p-1)d/2}}\, ds. \tag{1.2.35}$$

Considérons donc $I_{n+1}(t)$. On a :

$$\begin{aligned} &\|\nabla_x W^{n+1}(t,x) - \nabla_x W^n(t,x)\|^p \\ &\leq C \left\| \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U (f(W^n_-)(s,y,h) - f(W^{n-1}_-)(s,y,h)) \frac{(x-y)}{t-s} G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h) \right\|^p \\ &\qquad + C \left(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)| \frac{\|x-y\|}{t-s} G_{t-s}(x,y)\, dsdy \right)^p . \end{aligned} \tag{1.2.36}$$

Notons $I'_{n+1}(t,x)$ et $I''_{n+1}(t,x)$ respectivement chacun des deux membres du terme de droite, et soient :

$$J'_{n+1}(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|I'_{n+1}(s,x)|^p\},$$

et

$$J''_{n+1}(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|I''_{n+1}(s,x)|^p\}.$$

Nous utilisons l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour majorer $J'_{n+1}(t)$, on a alors :

$$\begin{aligned} J'_{n+1}(t) &\leq C \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \int_U \mathbb{E}\{|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)|^p\}\, G^p_{t-s}(x,y) \frac{\|x-y\|^p}{(t-s)^p} d\lambda^-(s,y,h), \\ &\leq C \int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{p-\frac{d+p-pd}{2}}} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\|x-y\|^p}{(t-s)^{\frac{d+p-pd}{2}}} G^p_{t-s}(x,y)\, dy \right) ds, \end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse ($\mathrm{H}_{1.2}$). Or, il existe une constante C, indépendante de $t \leq T$, et de $x \in \mathbb{R}^d$, telle que :

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\|x-y\|^p}{(t-s)^{\frac{d+p-pd}{2}}} G^p_{t-s}(x,y)\, dy \leq C. \tag{1.2.37}$$

Et on obtient :

$$J'_{n+1}(t) \leq \int_0^t \frac{H_n(s)}{(t-s)^{\frac{p}{2}(1+d)-\frac{d}{2}}}\, ds. \tag{1.2.38}$$

Grâce à (1.2.37) pour $p=1$, l'intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|x-y\|}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} G_{t-s}(x,y)\,dy,$$

est majorée indépendamment de t et de x. En utilisant l'inégalité de Jensen dans I'', on a donc:

$$J''_{n+1}(t) \leq C \int_0^t \frac{H_n(s)}{(t-s)^{\frac{p}{2}}}\,ds. \tag{1.2.39}$$

Par suite, grâce à (1.2.38) et (1.2.39), on a:

$$I_{n+1}(t) \leq C \int_0^t \frac{H_n(s)}{(t-s)^{\frac{p}{2}(1+d)-\frac{d}{2}}}\,ds, \tag{1.2.40}$$

et la conclusion du théorème en utilisant le lemme de Walsh. □

Remarque *En particulier, lorsque $d=1$, ce théorème implique, pour tout $t \geq 0$, l'existence d'une version continue pour le processus $W(t,\cdot)$. Ce résultat est complété par le théorème suivant.*

1.2.4 Régularité en dimension 1

On considère dans cette partie l'équation (1.0.5) posée dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, (donc avec $d=1$.) On utilise alors, pour sa résolution, une intégration stochastique L^p. Soit donc W le processus de E_p solution de (1.0.5):

$$W_t = u_0 + \int_0^t \left(\frac{\Delta W_s}{2} + \bar{g}(W_s)\right) ds + \int_0^t \int_U f(W_-)(s,y,h)\,d\lambda(s,y,h).$$

Théorème 1.2.4.1 *Soit $t \geq 0$. Si les hypothèses $(\mathrm{H}_{1.3})$, $(\mathrm{H}_{1.4})$ et $(\mathrm{H}_{1.2})(p)$ sont vérifiées, pour un $1<p<2$, alors, il existe un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable N_t tel que, si $\omega \notin N_t$, la fonction $W(t,\cdot,\omega)$ soit continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration:

Rappelons que le processus W vérifie:

$$\begin{aligned} W(t,x) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y) + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \bar{g}(W)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\,dy\,ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(W_-)(s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h). \end{aligned}$$

Le processus W^0, qui est le premier terme du membre de droite ci-dessus est clairement régulier. La régularité du deuxième terme se traite comme dans la partie 2.3.2.. Il suffit donc d'étudier la continuité en espace de :

$$\Psi_2(W)(t,x) = \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in U} f(W_-)(s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h).$$

Pour cela, on utilise l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour un exposant p avec $1 < p < 2$, et tel que $\int |h|^p d\mu(h)$ soit finie. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\} \\
&\quad \leq \mathbb{E}\{(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |f(W_-)(s,y,h)|^2 |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^2\, d\lambda^+(s,y,h))^{p/2}\}, \\
&\quad \leq \mathbb{E}\{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U K|(1+W_-(s,y))|^p |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^p |h|^p\, d\lambda^+(s,y,h)\}, \\
&\quad \leq C(1+\|W_-(s,y)\|_{E_2}^p) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^p |h|^p\, ds\, dy d\mu(h).
\end{aligned}$$

Le lemme A3 permet alors d'en déduire que, si $p \neq 3/2$:

$$\mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\} \leq C \left(\int_U |h|^p\, d\mu(h)\right) \|z-x\|^{s(p)},$$

avec : $s(p) = p$ si $1 < p < 3/2$, $s(p) = 3-p$ si $3/2 < p < 2$. Dans le cas $p = 3/2$, on obtient :

$$\mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\}\} \leq C(\int_U |h|^{3/2} d\mu(h)) \|z-x\|^{\frac{3}{2}} |\ln(\|z-x\|)|.$$

Si $1 < p < 2$, il est donc possible d'appliquer le Lemme de Kolmogoroff, qui fournit la conclusion souhaitée. □

Remarque. *Il est donc nécessaire ici d'imposer l'hypothèse :*

$$\int |h|^p d\mu(h) < \infty,$$

pour un $1 < p < 2$, afin de montrer la continuité de W en la variable d'espace. Dans le cas d'une E.D.P.S. conduite par un bruit blanc, Walsh, dans [20] parvient à montrer la continuité de la solution de l'équation (1.0.1), conjointement en espace et en temps. Nous sommes ici beaucoup plus limités, pour sans doute deux raisons.

D'abord, la solution V de (1.0.3), comme la solution W de (1.0.5), cesse d'être bornée au voisinage de chaque particule, et ne peut pas être dans L^p, pour un $p > 3$, tandis que la solution de l'équation de Walsh est dans tous les espaces L^p, pour p supérieur à 1. En outre, pour utiliser le critère de Kolmogoroff, l'application de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy conduit à essayer de majorer l'espérance de :

$$\Big(\sum_{\substack{[0,t] \\ \times \mathbf{R}^d \times U}} f^2(V_-)(s,y,h)|G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^2 \lambda^+(s,y,h) \Big)^{p/2},$$

dans le cas de l'équation avec un bruit poissonnien, au lieu de :

$$\Big(\int_{[0,t]} \int_{\mathbf{R}^d} f^2(V)(s,y,h)|G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^2 dsdy \Big)^{p/2},$$

dans le cas de l'équation avec un bruit blanc.

1.3 Appendice

Le premier lemme de cet appendice est emprunté à Walsh ([20] P.318), auquel nous empruntons également sa preuve.

Lemme A1. *Soit $h_n(t)$ une suite de fonctions définies sur $[0,T]$, pour un $T > 0$, telles que h_0 est bornée sur $[0,T]$, et qu'il existe une constante C indépendante de n, et un réel $a > -1$, pour lesquels :*

$$h_n(t) \leq C \int_0^t h_{n-1}(s)(t-s)^a ds.$$

Alors, il existe un entier k, tel que, pour tout n et tout m entiers :

$$h_{n+mk}(t) \leq C'^m \int_0^t h_n(s) \frac{(t-s)^m}{(m-1)!} ds.$$

En particulier, la série de fonctions de terme général $h_n(t)$ converge alors uniformément sur $[0,T]$, d'après le critère de Cauchy.

Nous utilisons ce lemme pour montrer la convergence d'une suite de processus V^n dans un espace vectoriel métrique complet (E,d). Supposons en effet que les fonctions h_n soient des fonctions croissantes et telles que :

$$h_n(T) = d(V^n, V^{n-1})^\gamma,$$

pour un certain exposant $\gamma > 0$. Alors, il existe deux constantes C et C' telles que, pour tous les entiers m et n :

$$h_{n+mk}(T) \leq C\frac{(C'T)^m}{(m-1)!}.$$

La série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_{n+mk}^{1/\gamma}(T)$$

converge donc dans $\mathbb{R}$, quel que soit $n \in \{0, \cdots, k-1\}$. Par suite,

$$\sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n+mk}^{1/\gamma}(T) < \infty,$$

et la suite V^n est donc une suite de Cauchy dans E.

Démonstration du lemme A1 :
On commence par traiter le cas où $a \geq 0$, alors

$$h_n(t) \leq C \int_0^t h_{n-1}(s)(t-s)^a ds \leq CT^a \int_0^t h_{n-1}(s)ds.$$

Par récurrence on obtient :

$$h_n(t) \leq (CT^a)^2 \int_0^t \int_0^s h_{n-2}(u)duds = (CT^a)^2 \int_0^t h_{n-2}(s)(t-s)ds.$$

En réitérant ce procédé, on obtient le lemme pour $k = 1$. Lorsque $a < 0$, il suffit donc de montrer qu'on peut se ramener à ce qui précède. Posons donc $a = -1 + \varepsilon$, on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} h_n(t) &\leq (C)^2 \int_0^t \int_0^s \frac{h_{n-2}(u)}{((t-s)(s-u))^{1-\varepsilon}} duds, \\ &\leq (C)^2 \int_0^t h_{n-2}(s) \left(\int_s^t ((t-u)(u-s))^a du \right) ds. \end{aligned}$$

Or, l'intégrale intérieure de la dernière expression est majorée par :

$$2\left(\frac{2}{t-u}\right)^{1-\varepsilon} \int_0^{(t-u)/2} \frac{dv}{v^{1-\varepsilon}} \leq \frac{4}{\varepsilon}(t-u)^{2\varepsilon-1}.$$

On obtient donc, pour une autre valeur de C :

$$h_n(t) \leq C \int_0^t \frac{h_{n-2}(s)}{(t-s)^{(1-2\varepsilon)}} ds.$$

Si $2\varepsilon \geq 1$, on peut alors conclure. Dans le cas contraire, on réitère le même procédé jusqu'à obtenir une puissance positive pour $(t-s)$ dans notre intégrale. $\Box$

Les trois lemmes suivants présentent des estimations utiles sur la fonction de Green.
Lemme A2 *Soit g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par :*

$$g_1(x) = \frac{e^{\frac{-\|x\|^2}{2t}}}{t^{d/2}},$$

alors, $\forall l \in \mathbb{N}$ $\exists C_l \geq 0$ tel que, pour tout $D = \frac{\partial^l}{(\partial x_1)^{i_1} \cdots (\partial x_d)^{i_d}}$ où $i_1 + \cdots + i_d = l$:

$$\sup_{\mathbf{R}^d} |D(g_1(x))| \leq \frac{C_l}{t^{(d+l)/2}}.$$

Soit g_2 la fonction donnée sur $\mathbb{R}^+$ par $g_2(t) = \frac{e^{\frac{-r^2}{2t}}}{t^{d/2}}$. Alors $\forall l \in \mathbb{N}$ $\exists C'_l \geq 0$ tel que :

$$\sup_{\mathbf{R}^+} |g_2^{(l)}(t)| \leq \frac{C'_l}{r^{d+2l}}.$$

<u>Démonstration du Lemme A1</u>
Soient D et g_1 comme dans l'énoncé, alors :

$$D(g_1(x)) = \frac{1}{t^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{\partial^{i_j} e^{\frac{-x_j^2}{2t}}}{(\partial x_j)^{i_j}}.$$

Il suffit donc de montrer l'inégalité en dimension 1. Considérons donc $f_1(x) = e^{\frac{-x^2}{2t}} = e^{-u^2/2}$ avec $u = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Comme :

$$\frac{d^l e^{\frac{-u^2}{2}}}{(du)^l} = (-1)^l H_l(u) e^{\frac{-u^2}{2}}.$$

où H_l représente le l-ième polynôme de Hermite, on obtient, pour f_1 :

$$\frac{d^l f_1(x)}{(dx)^l} = \frac{1}{t^{l/2}} H_l(\frac{x}{\sqrt{t}})(-1)^l e^{\frac{-x^2}{2t}}.$$

Or, la fonction $H_l(u)e^{\frac{-u^2}{2}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc, il existe une constante positive C_l telle que :

$$\mid \frac{d^l f_1(x)}{(dx)^l} \mid \leq \frac{C_l}{t^{l/2}},$$

ce qui démontre la première partie du lemme.
Pour la seconde partie, on remarque d'abord que si $\Phi(t,x) = G_t(x,0)$, alors si $(t,x) \neq (0,0)$, Φ vérifie :

$$\frac{\partial^l \Phi}{(\partial t)^l} = \frac{1}{2^l}\Delta^l \Phi,$$

et Δ^l est une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^m \beta_j D_j$ d'opérateurs de dérivation D_j tels que : $D_j = \frac{\partial^{2l}}{(\partial x_1)^{2i_{j1}} \cdots (\partial x_d)^{2i_{jd}}}$, avec $i_{j1} + \cdots + i_{jd} = l$. Donc,

$$|D_j(\Phi)| \leq \prod_{k=1}^{d} |H_{2i_{jk}}|(\frac{r}{\sqrt{t}})\, \frac{e^{\frac{-x_k^2}{2t}}}{t^{i_{jk}+d/2}},$$

où $|H_s|$ est le polynôme dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de H_s. On a donc alors :

$$\mid \frac{\partial^l \Phi}{(\partial t)^l} \mid \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j}{2^l} \sum_{s=0}^{2l} |h_{js}| \frac{r^s e^{\frac{-r^2}{2t}}}{t^{(s+d+2l)/2}},$$

pour certains coefficients h_{js}. Avec

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \frac{e^{\frac{-r^2}{2t}}}{t^{(s+d+2l)/2}} = \frac{K}{r^{(s+d+2l)}},$$

on obtient donc :

$$\sup_{\mathbf{R}^+} |g_2^{(l)}(t)| \leq \frac{C_l'}{r^{d+2l}},$$

ce qui conclut la preuve du lemme.□

Lemme A3 *Soit $0 \leq \gamma \leq 1 + 2/d$, et T positif fixé, on note $\gamma_c = 1 + 1/(d+1)$. Il existe une constante positive C, ne dépendant que de d, T, et γ, et telle que, pour $t \leq T$, on a, si $\|x - z\| \leq 1/2$:*

$$\begin{array}{rcll} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |G_s(x,y) - G_s(z,y)|^\gamma ds dy & \leq & C\|x-z\|^\gamma, & 0 \leq \gamma < \gamma_c, \\ & \leq & C\|x-z\|^{\gamma_c} |\ln(\|x-z\|)|, & \gamma = \gamma_c \\ & \leq & C\|x-z\|^{2-d(\gamma-1)}, & 1+2/d > \gamma > \gamma_c. \end{array}$$

<u>Démonstration du lemme A3</u>
Dans l'ensemble de cette démonstration, on désignera par C un nombre réel strictement positif ne dépendant que de d, T, et γ, et dont la valeur pourra changer d'une ligne à l'autre.
Posons :

$$\Delta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_s(x,y) - G_s(z,y)|^\gamma ds dy.$$

Alors, quitte à effectuer un changement de variable isométrique, on se ramène à $x = 0$, et $z = he_1$, avec $h \geq 0$. ($(e_i)_{1\leq i\leq d}$ représentant la base canonique de $\mathbb{R}^d$).
On va montrer ces inégalités pour $T > 1$ et $h \leq 1/2$. On a donc,

$$\Delta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_s(he_1,y) - G_s(0,y)|^\gamma ds dy.$$

En posant alors $y = hy'$, et $u = h^{-2}s$, cette expression devient :

$$\Delta = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_0^{T/h^2} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{-\frac{(y'_1-1)^2+\cdots+y'^2_d}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1+\cdots+y'^2_d}{2u}}}{u^{d/2}} \right|^\gamma dy'_1\cdots dy'_d du.$$

Nous commençons par nous affranchir des problèmes posés par l'intégrale quand u est petit, en remarquant que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |G_u(e_1,y') - G_u(0,y')|^\gamma du dy' &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} C|G_u(0,y')|^\gamma du dy' \\ &\leq C < \infty.\end{aligned}$$

Notons alors :

$$\Delta' = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_1^{T/h^2} \int_{y'_1\in\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}}}{u^{1/2}} \right|^\gamma dy'_1 \times \prod_{j=2}^{d} \int_{y'_j\in\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{y'^2_j\gamma}{2u}}}{\sqrt{u}^\gamma} dy'_j du,$$

on a donc :

$$\Delta' = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_1^{T/h^2} \frac{1}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1)}} \int_{y'_1\in\mathbb{R}} \frac{\left| e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}} \right|^\gamma}{u^{1/2}} dy'_1 du.$$

Il faut alors majorer :

$$\delta(u) = \int_{y'_1\in\mathbb{R}} \frac{\left| e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}} \right|^\gamma}{u^{1/2}} dy'_1.$$

Pour cela, on note que : $(|y'_1 - 1| \leq |y'_1|) \Leftrightarrow (y'_1 \geq \frac{1}{2})$, ce qui permet de découper $\delta(u)$ selon $\delta(u) = 2I(u)$, avec:

$$I(u) \;=\; \int_{1/2}^{+\infty} \frac{(-e^{-\frac{{y'}_1^2}{2u}} + e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}})^\gamma}{\sqrt{u}} dy'_1,$$

par symétrie. De plus,

$$I(u) \;=\; \int_{1/2}^{+\infty} \frac{(1 - e^{\frac{(y'_1-1)^2 - {y'}_1^2}{2u}})^\gamma}{\sqrt{u}} e^{-\frac{(y'_1-1)^2\gamma}{2u}} dy'_1.$$

Effectuons alors le changement de variable $y = y'_1 - 1$ dans $I(u)$, on obtient :

$$\sqrt{u}I(u) = \int_{-1/2}^{+\infty} (1 - e^{-\frac{(y+1)^2 - y^2}{2u}})^\gamma e^{\frac{-y^2\gamma}{2u}} dy.$$

Or, pour tout réel v, $1 - e^{-v} \leq v$; donc,

$$\sqrt{u}I(u) \leq \int_{-1/2}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^\gamma dy,$$

et,

$$\sqrt{u}I(u) \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^\gamma dy + \int_{-1/2}^{0} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^\gamma dy.$$

Or, pour $\gamma \leq 1$, on a $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma$, et, si $\gamma \geq 1$, $(a+b)^\gamma \leq 2^{\gamma-1}(a^\gamma + b^\gamma)$, par convexité. Donc,

$$\sqrt{u}I(u) \leq C \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{y^\gamma}{u^\gamma} dy + C \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{dy}{u^\gamma} + C \int_{-1/2}^{0} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{dy}{u^\gamma}.$$

Notons respectivement $\sqrt{u}K(u)$, $\sqrt{u}L(u)$, et $\sqrt{u}M(u)$ les trois intégrales ci-dessus. En effectuant le changement de variable $y' = y/\sqrt{u}$, on obtient :

$$K(u) \leq \frac{C}{u^{\frac{\gamma}{2}}}, \quad L(u) \leq \frac{C}{u^\gamma}, \quad M(u) \leq \frac{C}{u^\gamma}.$$

On a donc :

$$\delta(u) \leq \frac{C}{u^{\gamma/2}} + \frac{C}{u^\gamma},$$

par suite :

$$\Delta \leq Ch^{2-d(\gamma-1)} \left(C + \int_1^{T/h^2} \left(\frac{C}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1)+\frac{\gamma}{2}}} + \frac{C}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1)+\gamma}} \right) du \right). \tag{1.3.1}$$

Supposons dans un premier temps que tous les exposants de u, intervenant dans l'intégrale ci-dessus, soient différents de 1. On obtient alors :

$$\Delta \leq Ch^{2-d(\gamma-1)} + Ch^{\gamma} + Ch^{2\gamma}.$$

Donc, pour $h \leq 1/2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta &\leq Ch^{\gamma} && \text{si} \quad 0 < \gamma < \gamma_c, \\ \Delta &\leq Ch^{2-d(\gamma-1)} && \text{si} \quad \gamma_c < \gamma < 1 + 2/d. \end{aligned}$$

Si on prend à présent $\gamma = \gamma_c = 1 + \frac{1}{d+1}$ dans (1.3.1), on obtient, pour $h \leq 1/2$,

$$\Delta \leq Ch^{\gamma_c} |\log(h)|,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.□

Lemme A4 *Pour tout $T \geq 0$, il existe une constante positive C, telle que, pour tout $t + \delta \leq T$, on a, si $\delta \leq 1/2$:*

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)| ds dy \quad \leq \quad C\delta |\ln(\delta)|,$$

en posant $G_u(x,y) = 0$, pour tout u strictement négatif.

Démonstration du lemme A4

On effectue d'abord le changement de variable :

$$\begin{aligned} t - s &= \delta u \\ x - y &= \sqrt{\delta} z \end{aligned}$$

qui permet d'écrire :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)|\, ds dy \quad = \quad |\delta| \int_0^{T/\delta} \int_{\mathbf{R}^d} |G_{u+1}(z) - G_u(z)|\, du dy.$$

Soit $z_0(u)$, la fonction donnée par :

$$z_0(u) = \sqrt{d(u+1)u \ln(1 + \frac{1}{u})}.$$

Si $\|z\| = z_0$, alors $G_u(z) = G_{u+1}(z)$; la fonction z_0 est croissante en u, nulle en 0, équivalente à $\sqrt{du}$ en $+\infty$, et

$$\text{si} \quad z \leq z_0(u) \quad \text{alors} \quad G_{u+1}(z) \leq G_u(z) \ ;$$

$$\text{si} \quad z \geq z_0(u) \quad \text{alors} \quad G_u(z) \leq G_{u+1}(z).$$

Soit à présent $I(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |G_{u+1}(z) - G_u(z)|\, dsdy$ alors :

$$\begin{aligned} I(u) &= \int\limits_{\|z\|=0}^{z_0} \left(G_u(z) - G_{u+1}(z)\right) dz + \int\limits_{\|z\|=z_0}^{+\infty} (G_{u+1}(z) - G_u(z))dz, \\ &= \frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1}} \left(\frac{d}{2}\right)! \int\limits_{r=\frac{z_0}{\sqrt{u+1}}}^{\frac{z_0}{\sqrt{u}}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{d-1} dr. \end{aligned}$$

Donc $I(u) \leq C_1$ pour tout $u \geq 0$. De plus, sur $\left[\frac{z_0}{\sqrt{u+1}}; \frac{z_0}{\sqrt{u}}\right]$, l'intégrant $e^{-\frac{r^2}{2}} r^{d-1}$ est plus petit que $\left(\frac{z_0}{\sqrt{u}}\right)^{d-1}$, et donc, pour $u \geq 1$:

$$\begin{aligned} I(u) &\leq C_2 z_0(u) \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}\right) \left(\frac{z_0}{\sqrt{u}}\right)^{d-1}, \\ &\leq \frac{C_2}{u}. \end{aligned}$$

car $z_0(u) \leq \sqrt{d(u+1)}$, et pour $u \geq 1$, $\frac{z_0(u)}{\sqrt{u}} \leq \sqrt{2d}$. Donc

$$\int_0^{\frac{T}{\delta}} I(u)\, du \leq \int\limits_0^1 C_1\, du + \int\limits_1^{\frac{T}{\delta}} \frac{C_2}{u} du \leq C_1 + C_2 \ln\left(\frac{T}{\delta}\right).$$

D' où, par multiplication par δ, la conclusion du lemme :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)| dsdy \leq C_3 \delta |\ln(\delta)|,$$

pour $\delta \leq 1/2$.□

Chapitre 2

Calcul variationnel stochastique pour une E.D.P.S. conduite par un bruit poissonnien

Introduction

Le but de cette partie est de construire un calcul variationnel stochastique afin d'étudier l'existence de densités pour la loi de la variable aléatoire $V(t, x, \omega)$, le processus V représentant la solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique parabolique (1.0.5) étudiée dans le premier chapitre de ce travail. Nous travaillons cette fois sur un intervalle de temps borné $[0, T]$. A ces détails près, nous reprenons les mêmes notations que précédemment. L'ensemble Ω est donc l'ensemble des mesures à valeurs entières sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, et les notations $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$ et λ^+ ont, sauf mention du contraire, la même signification que dans le premier chapitre. On suppose ici, de plus, que l'espace U est égal à $\mathbb{R}^r$.
Historiquement, les premiers travaux présentant un calcul variationnel pour des processus à sauts sont dus à Bismut [1], qui utilise des perturbations sur les amplitudes des sauts d'une mesure aléatoire. Ces méthodes sont reprises dans Bitcheler-Gravereaux-Jacod [11]. Dans le cas du processus de Poisson standard, Carlen et Pardoux [3] ont étudié un problème analogue en utilisant des transformations consistant à déplacer les instants de sauts du processus de Poisson. Dans son travail sur le même sujet, Nicolas Privaut [18] utilise des transformations sur l'espace des variables aléatoires exponentielles représentant les délais entre deux sauts successifs d'un processus de Poisson. Jean Picard, dans [16], a présenté une approche encore différente, consistant à rajouter où à enlever une ou plusieurs particules, ceci afin de parvenir à étudier l'existence de densités même si l'intensité du processus de Poisson considéré est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue [17]. Enfin, plus récemment,

Kondratiev, Albeverio et Röckner ont présenté dans [12] une technique de calcul de Malliavin pour des espaces de mesures aléatoires de Poisson localement finies sur $\mathbb{R}^d$, technique basée sur l'utilisation de groupes de difféomorphismes à un paramètre sur $\mathbb{R}^d$. Notre approche s'inspire essentiellement de cette dernière et de celle de Bismut. Nous perturbons l'amplitude des particules de notre bruit poissonnien grâce à un groupe de difféomorphismes à un paramètre sur $\mathbb{R}^r$. Un tel groupe s'obtient par un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, dépendant de $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Dans une première partie, nous étudions de façon assez générale, les changements de probabilité absolument continus sur Ω, espace des mesures à valeurs entières sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, qu'on suppose muni de la probabilité $\mathbb{P}$ sous laquelle λ^+ détermine un bruit poissonnien d'intensité $d\lambda^- = ds \otimes d\tilde{\lambda}^-(y, h)$. Ceci fournit des résultats utiles dans la partie suivante.

Dans la deuxième partie, nous présentons les transformations qui nous permettent de définir une dérivation de Malliavin sur Ω. On montre en particulier, pour cette dérivation, une formule d'intégration par parties, et une propriété de fermabilité dans $L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p' > 1$. On présente aussi des théorèmes permettant de dériver des variables aléatoires définies par des intégrales déterministes ou stochastiques.

Dans la troisième partie, nous montrons quelques applications du calcul variationnel ainsi construit. En particulier, nous étudions l'existence d'une densité par rapport à la mesure de Lebesgue pour la loi de la solution d'une E.D.S., puis pour la loi de la solution de l'E.D.P.S. (1.0.5) du premier chapitre. Dans le premier cas, on obtient l'existence d'une densité sous des hypothèses assurant que la solution de l'E.D.S. dépend, au voisinage de $t = 0$, d'une infinité de petites particules. L'étude de la loi de la solution de l'E.D.P.S. est plus délicat. Le processus solution $V(t, x)$ devient en effet non borné au voisinage de chaque particule. Il n'est donc pas possible d'utiliser ici des arguments liés à la continuité en (t, x) de V. Ce sont de tels arguments qui permettent de traiter le problème analogue avec un bruit blanc gaussien. Pour l'E.D.P.S. (1.0.5), on obtient l'existence d'une densité pour la loi de $V(t, x)$ sous des hypothèses de positivité et de monotonie pour le coefficient f de cette équation.

2.1 Changements de probabilité sur Ω

Nous présentons dans cette partie des théorèmes assez généraux permettant de calculer la densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ d'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Ces résultats ne nous seront pas utiles dans toute leur généralité.

2.1.1 Théorème de Girsanov pour des mesures aléatoires

Nous reprenons d'abord le théorème de Girsanov pour des mesures aléatoires, tel qu'il est présenté par J. Jacod et L. Shyryaev dans [8].

On note par $\mathcal{O}(\mathcal{F}_t)$ (resp. $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$), la tribu optionnelle (resp. prévisible) sur $\Omega \times [0,T]$, et par $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$) la tribu $\mathcal{O}(\mathcal{F}_t) \times Bor(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r)$ (resp. la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \times Bor(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r)$.) On pose aussi $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$.
Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité sur Ω, on appelle mesure aléatoire sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ une famille $\nu^+(\omega, ds, dy, dh)$ de mesures positives sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, telles que $\nu^+(\omega, \{0\} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r) = 0$. Pour une telle famille, si W est une application mesurable de $\tilde{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$W * \nu_t^+ = \begin{cases} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^r} W d\nu^+ \quad \text{si} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^r} |W| d\nu^+ < \infty, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

La mesure aléatoire ν^+ est dite optionnelle (resp. prévisible) si, lorsque W est $\tilde{\mathcal{O}}$-mesurable (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable), le processus $W * \nu_t^+$ est $\mathcal{O}(\mathcal{F}_t)$-mesurable (resp. $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$-mesurable.) Elle est dite $\tilde{\mathcal{P}}$-σ finie s'il existe une partition A_n, $n \in \mathbb{N}$ de $\tilde{\Omega}$ avec $A_n \in \tilde{\mathcal{P}}$, et telle que $|\mathbf{1}_{A_n} * \nu_t^+|$ est borné. On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.1.1.1 (*cf.* [8], Ch. II Théorème 1.8.) *Soit ν^+ mesure aléatoire $\tilde{\mathcal{P}}$-σ finie ν^+, il existe une unique (à un ensemble de $\mathbb{Q}$-mesure nulle près), mesure aléatoire prévisible ν^- telle que le processus :*

$$W * \nu_t = W * \nu_t^+ - W * \nu_t^- \tag{2.1.2}$$

soit une martingale locale. La mesure aléatoire ν^- s'appelle le compensateur de ν^+.

Si la mesure aléatoire ν^+ est $\tilde{\mathcal{P}} - \sigma$ finie, et que W est $\tilde{\mathcal{O}}$-mesurable, on note $\mathrm{M}_{\mathbb{Q}\otimes\nu^+}(W/\tilde{\mathcal{P}})$ l'espérance conditionnelle de W par rapport à $\tilde{\mathcal{P}}$, pour la mesure $\mathbb{Q} \otimes \nu^+$, qui est σ-finie sur $\tilde{\Omega}$. C'est-à-dire que, $\mathrm{M}_{\mathbb{Q}\otimes\nu^+}(W/\tilde{\mathcal{P}})$ est l'unique processus $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable tel que, si U est un processus $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable :

$$\int U\, W\, d\mathbb{Q} \otimes d\nu^+ = \int U\, \mathrm{M}_{\mathbb{Q}\otimes\nu^+}(W/\tilde{\mathcal{P}}) d\mathbb{Q} \otimes d\nu^+. \tag{2.1.3}$$

On a alors le théorème de Girsanov suivant.

Théorème 2.1.1.2 ([8] Ch.III thm. 3.17.) *Soient $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ deux probabilités sur Ω telles que $\mathbb{Q}' \overset{\ll}{\scriptstyle loc} \mathbb{Q}$. Soit $Z(t,\omega) = \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t}$ le processus densité. Soit ν^+ une mesure* *aléatoire de $\mathbb{Q}$-compensateur ν^- et de $\mathbb{Q}'$-compensateur ν'^-. On a alors :*

(a) ν^+ est $\tilde{\mathcal{P}} - \sigma$ finie pour $\mathbb{Q}'$.

(b) Toute version positive Y de $\mathrm{M}_{\mathbb{Q}\otimes\nu^+}\left(\frac{Z}{Z_-}\mathbf{1}_{\{Z_->0\}}/\tilde{\mathcal{P}}\right)$ vérifie les trois propriétés équivalentes ci-dessous.

(i) $d\nu'^- = Y d\nu^-$, *$\mathbb{Q}'$-presque sûrement.*
(ii) $\mathbf{1}_{\{Z_->0\}}d\nu'^- = Y\mathbf{1}_{\{Z_->0\}}d\nu^-$, *$\mathbb{Q}$-presque sûrement.*
(iii) YZ_- *est une version de* $\mathrm{M}_{\mathbb{Q}\otimes\nu^+}(Z/\tilde{\mathcal{P}})$.

2.1.2 Compensateurs et changements de probabilité

On suppose maintenant que l'espace Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{Q}$, on note ν^- le compensateur de λ^+ pour la probabilité $\mathbb{Q}$. On suppose de plus que $d\nu^- \ll d\lambda^-$, et on note par Y le processus densité :

$$Y(\omega,s,y,h) = \frac{d\nu^-}{d\lambda^-}(\omega,s,y,h). \tag{2.1.4}$$

Dans la suite, on suppose que le processus Y vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.1})(p)$, ci-dessous, pour un $p \in]1,2]$:

$(\mathrm{H}_{2.1})(p)$. Le processus Y est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable, et tel que :

(1) $(\omega,s) \longmapsto \int_y\int_h |Y(\omega,s,y,h)-1|^p d\tilde{\lambda}^-(y,h) \in L^\infty(d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})\otimes ds)$;

(2) $Y > 0$, $d\lambda^- \otimes d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})$-presque partout.

On appelle $\mathbf{F}_p$ l'espace vectoriel des processus X adaptés càdlàg, et tels que :

$$\|X\|_{\mathbf{F}_p} = \mathbb{E}\Big\{\sup_{s\in[0,T]}|X(s)|^p\Big\}^{1/p} < \infty, \tag{2.1.5}$$

le symbole $\mathbb{E}$ ci-dessus représentant une espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$. On considère alors l'équation différentielle stochastique (E.D.S.) :

$$X(t,\omega) = 1 + \int_0^t\int_y\int_h X(s^-,\omega)(Y(\omega,s,y,h)-1)\,d\lambda(s,y,h), \tag{2.1.6}$$

et on a le théorème suivant.

Théorème 2.1.2.1 *Si le processus Y vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.1})(p)$, pour un $p \in]1,2]$, on a :*

(1) L'E.D.S. (2.1.6) possède une solution unique $\delta(t,\omega)$ dans l'espace $\mathbf{F}_p$, et on a :

$$\mathrm{M}_{\mathbf{P}\otimes\lambda^+}\left(\frac{\delta_t}{\delta_{t^-}}\,\mathbf{1}_{\{\delta_{t^-}>0\}}\Big/\tilde{\mathcal{P}}\right) = Y \tag{2.1.7}$$

(2) Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, et $d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t,\omega)\,d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$. On a donc :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t,\omega) = \exp\Big\{\iiint_0^t \ln(Y)d\lambda + \iiint_0^t (\ln(Y) - Y + 1)d\lambda^-\Big\}. \tag{2.1.8}$$

<u>Démonstration du théorème 2.1.2.1</u>.
<u>Preuve de (1)</u>
On considère la suite de processus Z^n, définie par :

$$\begin{cases} Z^0(t,\omega) &= 1, \\ Z^{n+1}(t,\omega) &= 1 + \int_0^t \int_y \int_h Z^n(s^-,\omega)\,(Y(\omega,s,y,h)-1)\,d\lambda(s,y,h). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Alors,

$$Z^{n+1}(t,\omega) - Z^n(t,\omega) = \int_0^t \int_y \int_h (Z^n(s^-,\omega) - Z^{n-1}(s^-,\omega))\,(Y_s - 1)\ d\lambda(s,y,h).$$

Posons

$$H_n(t) = \mathbb{E}\Big\{\sup_{s\in[0,t]} |Z^n(s) - Z^{n-1}(s)|^p\Big\}. \tag{2.1.10}$$

Grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big\{\sup_{s\in[0,t]} |Z^{n+1}(s) - Z^n(s)|^p\Big\} \\ &\qquad \le C\,\mathbb{E}\ \Big\{\int_0^t\int_y\int_h \Big(\sup_{u\in[0,s]} |Z^n(u^-) - Z^{n-1}(u^-)|^p\Big)\,|Y_s - 1|^p\,ds d\tilde{\lambda}^-(y,h)\ \Big\}, \\ &\qquad \le C\int_0^t \mathbb{E}\Big\{\sup_{u\in[0,s]} |Z^n(u^-) - Z^{n-1}(u^-)|^p\Big\}\,ds. \end{aligned}$$

Par suite, on a donc :

$$H_{n+1}(t) \le C\int_0^t H_n(s)ds, \tag{2.1.11}$$

et le Lemme de Walsh (cf. [20], p. 318) permet de conclure que la suite Z^n converge dans $\mathbf{F}_p$. De même, pour l'unicité, si Z et Z' sont deux processus solutions de (2.1.6) dans l'espace $\mathbf{F}_p$, on a, pour la fonction

$$H(t) = \mathbb{E}\Big\{ \sup_{s\in[0,t]} |Z(s) - Z'(s)|^p \Big\},$$

l'inégalité :

$$H(t) \leq C \int_0^t H(s) ds,$$

qui impose donc que $Z = Z'$.
De plus, comme $Y > 0$, $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$-presque partout, alors $\delta_{t^-} > 0$, pour tout t, et :

$$\frac{\delta_t}{\delta_{t^-}} = 1 + \int_{y\in\mathbf{R}^d} \int_{h\in\mathbf{R}^r} (Y(t,y,h,\omega) - 1)\, d\lambda^+(t,y,h,\omega).$$

Donc, si W est un processus prévisible, on a :

$$\int W \left(\frac{\delta_t}{\delta_{t^-}} \mathbf{1}_{\{\delta_{t^-} > 0\}}\right) d\lambda^+ \otimes d\mathbb{P} \;=\; \mathbb{E}\Big\{ \iiint W\, d\lambda^+ \;+\; \iiint W\,(Y-1)\, d\lambda^+ \Big\}.$$

Il s'ensuit donc que :

$$\mathrm{M}_{\mathrm{P}\otimes\lambda^+}\left(\frac{\delta_t}{\delta_{t^-}} \mathbf{1}_{\{\delta_{t^-} > 0\}} \Big/ \tilde{\mathcal{P}} \right) \;=\; 1 \;+\; (Y-1) \;=\; Y,$$

ce qui achève la preuve du (1). $\square$

Preuve de (2)
Considérons cette fois l'espace $\mathbf{G}_p$ des processus X qui sont adaptés, càdlàg et tels que :

$$\|X\|_{\mathbf{G}_p} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big\{ \sup_{s\in[0,T]} |X(s)|^p \Big\}^{1/p} < \infty. \tag{2.1.12}$$

De même que ci-dessus, il est possible, dans cet espace, de résoudre l'E.D.S. :

$$X(t,\omega) = 1 + \int_0^t \int_y \int_h X(s^-,\omega)(Y^{-1}(\omega,s,y,h) - 1)\, d(\lambda^+ - Y\cdot\lambda^-)(s,y,h), \tag{2.1.13}$$

En effet, le $\mathbb{Q}$-compensateur de λ^+ est égal à $Y d\lambda^-$, et la dernière intégrale ci-dessus est donc une intégrale stochastique compensée définie dans $L^p(\mathbb{Q},\Omega)$. Notons alors

$X(t,\omega)$ la solution dans $\mathbf{G}_p$ de l'E.D.S. (2.1.13), et soit $\mathbb{P}'$ la probabilité sur Ω définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t} = X(t,\omega).$$

D'après le théorème de Girsanov (Théorème 2.1.1.2 ci-avant), le $\mathbb{P}'$-compensateur de λ^+ est égal à $Y^{-1}Y\,d\lambda^- = d\lambda^-$. Donc $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$, et en outre :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t} = \exp\left\{\iiint_0^t \ln(Y^{-1})d(\lambda^+ - Y\cdot\lambda^-) + \iiint_0^t (\ln(Y^{-1}) - Y^{-1} + 1)\,Y d\lambda^-\right\}. \quad (2.1.14)$$

Le lemme suivant permet alors de conclure la démonstration du théorème.

Lemme 2.1.2.1 *On a $X(t,\omega)^{-1} = \delta(t,\omega)$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.*

Preuve du lemme 2.1.2.1
Il suffit de constater que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} -\int_0^t\!\!\int\int_{|h|\geq\varepsilon} \ln(Y^{-1})d(\lambda^+ - Y\cdot\lambda^-) \;-\; \int_0^t\!\!\int\int_{|h|\geq\varepsilon} (\ln(Y^{-1}) - Y^{-1} + 1)\,Y d\lambda^- \\ = \int_0^t\!\!\int\int_{|h|\geq\varepsilon} \ln(Y)d(\lambda^+ - \lambda^-) \;+\; \int_0^t\!\!\int\int_{|h|\geq\varepsilon} (\ln(Y) - Y + 1)\,Y d\lambda^-. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers 0. Le terme de gauche de cette égalité converge dans $L^p(\mathbb{Q},\Omega)$ (donc, $\mathbb{Q}$-presque sûrement quitte à extraire une suite $\varepsilon_n \to 0$,) vers $\ln(X^{-1}(t,\omega))$. Le terme de droite de cette égalité converge dans $L^p(\mathbb{P},\Omega)$ (donc, $\mathbb{P}$-presque sûrement) vers $\ln(\delta(t,\omega))$. Or, $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, donc,

$$X(t,\omega)^{-1} = \delta(t,\omega),$$

$\mathbb{P}$-presque sûrement. Le lemme 2.1.2.1 est donc prouvé, ainsi que le théorème 2.1.2.1.
□

2.1.3 Cas particuliers et exemples

Le cas déterministe

Dans l'essentiel de la suite de ce travail, le processus Y, utilisé dans la démonstration précédente, sera en fait déterministe. Dans ce cas, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1.3.1 *Soit $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{P}'$), la probabilité sur Ω pour laquelle λ^+ est une mesure de Poisson aléatoire de compensateur λ^- (resp. de compensateur la mesure* *déterministe λ'^{-}.) On suppose que l'application :*

$$s \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^r} \left| \frac{d\lambda'^{-}}{d\lambda^{-}}(s,y,h) - 1 \right|^p d\tilde{\lambda}^{-}(y,h)$$

est bornée sur $[0,T]$*. Alors,* $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$ *et*

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \delta(t,\omega) = \exp\Big\{ \iiint_0^t \ln(\frac{d\lambda'^{-}}{d\lambda^{-}})\, d\lambda + \iiint_0^t (\ln(\frac{d\lambda'^{-}}{d\lambda^{-}}) - \frac{d\lambda'^{-}}{d\lambda^{-}} + 1)\, d\lambda^{-} \Big\}. \quad (2.1.15)$$

Démonstration du théorème 2.1.3.1.
Lorsque la densité $\frac{d\lambda'^{-}}{d\lambda^{-}}$ ne s'annule pas, il suffit d'appliquer le théorème 2.1.2.1 pour conclure. Dans le cas contraire, grâce au théorème 2.1.1.2, on sait que, sous la probabilité $d\mathbb{Q}'_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t,\omega)d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$, la mesure aléatoire λ^+ a pour compensateur $d\lambda'^{-}$, donc $\mathbb{Q}' = \mathbb{P}'$, ce qui prouve le théorème.□

Changements de probabilité et transformations sur Ω

On suppose ici que $d\lambda^{-} = l(s,y,h)\, dsdydh$, l étant une fonction mesurable, et on s'intéresse à des changements de probabilité obtenus grâce à certaines applications de Ω dans lui-même.
Soit ψ une application $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable de $\tilde{\Omega}$, à valeurs dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r - \{0\}$ et telle que, $\mathbb{P}$-presque sûrement, l'application $\psi_\omega = \psi(\omega,\cdot)$ soit un C^1-difféomorphisme de $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r - \{0\}$.
Si m est une mesure sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r - \{0\}$, on définit la mesure $\tau_{\psi_\omega}(m) = {\psi_\omega}^* m$, c'est à-dire que l'on a, pour toute fonction f mesurable sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$,

$$\iiint_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r-\{0\}} f\, d\tau_{\psi_\omega}(m) = \iiint_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r-\{0\}} f \circ \psi_\omega\, dm.$$

En particulier, l'application τ_{ψ_ω}, restreinte à Ω, est une application de Ω dans lui-même:

$$\begin{array}{cccl} \tau_{\psi_\omega} & : & \Omega & \longrightarrow \Omega \\ & & \omega & \longmapsto \tau_{\psi_\omega}(\omega) = {\psi_\omega}^*\omega. \end{array}$$

On suppose maintenant que $\tau_{\psi_\omega^{-1}}(\lambda^{-}) \ll d\lambda^{-}$, et on note :

$$Y(\omega,s,y,h) = \frac{d\tau_{\psi_\omega^{-1}}(\lambda^{-})}{d\lambda^{-}}(\omega,s,y,h). \quad (2.1.16)$$

Si on a :

$$\iint_{y\ h} |Y(\omega,s,y,h)-1|^p d\tilde{\lambda}^-(y,h) \ \in \ L^\infty(d\mathbb{P}\otimes ds),$$

on note $\delta(t,\omega)$ la solution de l'E.D.S. (2.1.6) pour ce processus Y.
On définit la probabilité $\mathbb{Q}$ sur Ω par $d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \delta(t,\omega)d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}$. On a alors le théorème suivant, qu'on peut trouver dans [11].

Théorème 2.1.3.2 *Si le processus $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable Y vérifie :*

$$\int_y\int_h |Y(\omega,s,y,h)-1|^p d\tilde{\lambda}^-(y,h) \ \in \ L^\infty(d\mathbb{P}\otimes ds),$$

alors on a :

$$\mathbb{P} = \tau_{\psi_\omega}{}^*\mathbb{Q}. \tag{2.1.17}$$

Démonstration du théorème 2.1.3.2.
Par le théorème 2.1.1.2, le compensateur de λ^+ sous la mesure $\mathbb{Q}$ est $Y\,d\lambda^-$. Sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}' = \tau^*_{\psi_\omega}\mathbb{Q}$, λ^+ a donc pour compensateur $\tau^*_{\psi_\omega}(Y\,d\lambda^-)$.

Notons $Ja(f)(x)$ le jacobien de l'application f en x. De la formule de changement de variable pour la mesure de Lebesgue, on tire :

$$Y(\omega,s,y,h) = \frac{l(\psi_\omega(s,y,h))}{l(s,y,h)}\, Ja(\psi_\omega)(s,y,h), \tag{2.1.18}$$

et

$$\tau^*_{\psi_\omega}(Y\,d\lambda^-) = l(\psi_\omega^{-1}(s,y,h))\,Y(\omega,\psi_\omega^{-1}(s,y,h))\,Ja(\psi_\omega^{-1})(s,y,h). \tag{2.1.19}$$

Par suite, le compensateur de λ^+ sous $\mathbb{P}'$ est égal à λ^-, ce qui achève la preuve du théorème.□

Remarque. *Les transformations que nous envisagerons dans la suite de ce travail ne seront en fait pas aléatoires, mais déterministes. Ce résultat ne nous sera donc pas utile dans toute sa généralité.*

2.2 Calcul variationnel sur Ω

Dans cette partie, nous élaborons un calcul variationnel stochastique sur Ω. Pour cela, nous construisons d'abord une dérivation de Malliavin pour des variables aléatoires lisses sur Ω. Nous montrons ensuite une formule d'intégration par parties, et une propriété de fermabilité pour cette dérivation. Enfin, nous utilisons ensuite ces propriétés pour obtenir des théorèmes permettant de dériver des variables aléatoires plus générales (c'est-à-dire non lisses), en particulier des solutions d'équations différentielles stochastiques, ou bien la solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (1.0.5), étudiée dans le premier chapitre.

2.2.1 Construction de l'opérateur de dérivation

Nous présentons d'abord des notations et des hypothèses qui vont être utilisées dans toute la suite de ce travail.

Nous allons construire un calcul variationnel grâce à des perturbations de l'amplitude des particules d'un élément ω de Ω. Cela nécessite une certaine régularité pour l'intensité de la mesure λ^- par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$. On choisit donc dans toute la suite $U=\mathbb{R}^r$, et on note $d\lambda^- = l(y,h)\, dsdydh$. On écrit alors $(\!(h \,\|\, h')\!)$, pour le produit scalaire de deux vecteurs h et h' de $\mathbb{R}^r$, ∇_U (resp. Hess_U) pour le gradient (resp. la Hessienne) d'une application de $\mathbb{R}^r$ à valeurs réelles , $\bar{d}_h$, (resp. $\bar{d}_h^2$) pour la différentielle en h, (resp. la différentielle seconde en h), d'une application de $\mathbb{R}^r$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^r$. On fait sur la fonction l, l'hypothèse suivante, pour un $p>1$, $p\le 2$.

$(\mathrm{H}_{2.2})(p)$. La fonction l vérifie :

(1) $\displaystyle\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^r} l(y,h)\,|h|^p\,dh \;<\;\infty\,;$

(2) la fonction $l(y,\cdot)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$;

(3) pour tout $A\subset\mathbb{R}^d$, borné, il existe deux constantes positives C_A et h'_A telles que, si $y\in A$, et $|h|\le h'_A$:

$$\frac{|\nabla_U\, l(y,h)|}{l(y,h)}|h| \;\le\; C_A \quad \text{et} \quad \frac{|\mathrm{Hess}_U\, l(y,h)|}{l(y,h)}|h|^2 \;\le\; C_A.$$

Pour construire les transformations de l'amplitude des particules, on s'inspire de l'idée utilisée par Kondratiev, Albeverio et Röckner dans [12]. On va perturber notre mesure aléatoire λ^+, en modifiant l'amplitude h des particules grâce à des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r$. Soit donc $\psi_{s,y}(h)$, une famille de champs de vecteurs de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r$, indexée par $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. On suppose que $\psi_{s,y}$ vérifie les hypothèses suivantes.

$(\mathrm{H}_{2.3})$. La famille $\psi_{s,y}(h)$, est une famille de champs de vecteurs qui sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$, telle que :

(1) $\psi(0) = 0,\ \bar{d}_0\psi = 0$;

(2) Il existe une constante C, indépendante de s et y, et telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^r$:

$$|\bar{d}_h^2\psi_{s,y}| \leq C \ ;$$

(3) Il existe un compact K inclus dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, et tel que :

$$\operatorname{supp}\psi_{s,y} \subset K \subset [0,T] \times \operatorname{supp} l.$$

($\operatorname{supp}\psi$ représente le plus petit fermé de $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$ en dehors duquel $\psi_{s,y}(h) = 0$.) Un tel champ de vecteurs $\psi_{s,y}$ induit un groupe de difféomorphismes à un paramètre sur $\mathbb{R}^r$, noté $X^{\psi_{s,y}}$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^{\psi_{s,y}}(h,0) & = & h, \\ \dfrac{dX^{\psi_{s,y}}(h,\theta)}{d\theta} & = & \psi_{s,y}(X^{\psi_{s,y}}(h,\theta)). \end{array} \right. \tag{2.2.1}$$

De plus, quels que soient θ, θ', et α, on a :

$$\begin{array}{rcl} X^{\psi_{s,y}}(\cdot,\theta) \circ X^{\psi_{s,y}}(\cdot,\theta') & = & X^{\psi_{s,y}}(\cdot,\theta+\theta') \ ; \\ X^{\alpha\psi_{s,y}}(\cdot,\theta) & = & X^{\psi_{s,y}}(\cdot,\alpha\theta). \end{array}$$

On écrira en général seulement ψ au lieu de $\psi_{s,y}$, afin d'alléger les écritures.
Pour $\theta \geq 0$, on définit l'application $T_{\theta\psi}$ de $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$ à valeurs dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, par : $T_{\theta\psi}(s,y,h) = (s,y,X^\psi(h,\theta))$, et pour $\omega \in \Omega$, on pose : $\tau_{\theta\psi}(\omega) = {T_{\theta\psi}}^*\omega$.
La mesure $\tau_{\theta\psi}(\omega)$ vérifie donc :

$$\iiint f(s,y,h)\, d\tau_{\theta\psi}(\omega) \ = \ \iiint f(s,y,X^\psi(h,\theta))d\omega.$$

On va construire la dérivée directionnelle $D_\psi Y$ d'une variable aléatoire Y dans la direction de ψ de telle sorte que, si cette limite existe :

$$D_\psi Y = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\,(\,Y(\tau_{\theta\psi}(\omega)) - Y(\omega)\,). \tag{2.2.2}$$

On note $\mathbb{P}' = {\tau_\psi}^*\mathbb{P}$, et $\mathbb{P}'_\theta = {\tau_{\theta\psi}}^*\mathbb{P}$.
Si ϕ est une application mesurable sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, on pose :

$$\lambda^+(\phi) = \iiint \phi(s,y,h)\, d\lambda^+(s,y,h),$$

et, de la même façon :

$$\lambda(\phi) = \iiint \phi(s,y,h)\, d\lambda(s,y,h),$$

On dit que la variable aléatoire Y est lisse si elle s'écrit :

$$Y(\omega) = F(\lambda^+(\phi_1), \cdots, \lambda^+(\phi_n)),\ (\text{resp. } Y(\omega) = F(\lambda(\phi_1), \cdots, \lambda(\phi_n))\ ),$$

avec :
– la fonction F est de classe C^∞ et à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^n$;
– les fonctions ϕ_i sont à support compact dans $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r-\{0\}$, elles sont de classe C^∞ en h sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$, et à dérivées uniformément bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r-\{0\}$.
On définit alors la dérivée D_ψ d'une telle variable aléatoire par :

$$D_\psi Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\lambda^\kappa(\phi_1), \cdots, \lambda^\kappa(\phi_n)) \iiint (\!(\nabla_U \phi_i \| \psi_{s,y}(h))\!)\, d\lambda^+(s,y,h), \tag{2.2.3}$$

avec $\lambda^\kappa = \lambda^+$ (resp. $\lambda^\kappa = \lambda$.)
Pour pouvoir appliquer cet opérateur de dérivation à notre équation, il est nécessaire qu'il soit fermable dans $L^{p'}(\Omega)$. La formule d'intégration par parties ci-dessous permet de le montrer, pour tout $p' > 1$.

2.2.2 Formule d'intégration par parties

Théorème 2.2.2.1 *Si la mesure λ^- vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$*, pour un $p \in]1,2]$, et que la famille de champs de vecteurs $\psi_{s,y}$ vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.3})$*, alors, pour toute variable aléatoire lisse Y, on a la formule d'intégration par parties suivante :*

$$\mathbb{E}\{D_\psi Y\} = \mathbb{E}\left\{-Y \iiint \left(\frac{(\!(\nabla_U l \| \psi)\!)}{l} + \operatorname{div}(\psi)\right) d\lambda.\right\} \tag{2.2.4}$$

Démonstration du théorème 2.2.2.1.
Dans l'ensemble de cette preuve, les lettres C, C', et C" désigneront des constantes indépendantes de s, y, et ω, et dont la valeur pourra varier d'une ligne à l'autre.
Grâce au théorème 2.1.3.1, nous allons montrer que la mesure $\mathbb{P}'_{\theta\psi} \sim \mathbb{P}$. Notons alors $\delta(\theta,\omega) = \frac{d\mathbb{P}'_{\theta\psi}}{d\mathbb{P}}(\omega)$, on a donc :

$$\mathbb{E}\{Y \circ \tau_{\theta\psi}\} = \mathbb{E}\{\delta(\theta,\cdot)Y\},$$

et la formule d'intégration par parties s'obtient en dérivant cette dernière égalité. Il nous faut donc d'abord prouver que $\mathbb{P}'_{\theta\psi} \sim \mathbb{P}$, calculer $\delta(\theta,\omega)$, et enfin justifier les dérivations nécessaires. Dans toute cette démonstration, on note h_0 un réel positif tel que, pour tout couple (s,y), si $|h| > h_0$, alors $\psi_{s,y}(h) = 0$.

Existence et calcul de la densité. Nous présentons d'abord un lemme technique permettant d'évaluer $X^\psi(h,\theta)$ et $X^\psi(h,\theta) - h$.

Lemme 2.2.2.1 *Soit θ_0 un nombre réel positif. Il existe des constantes positives C, C', et C", indépendantes de s, y, et ω, telles que, pour tout h, $|h| \leq h_0$, et tout θ, $|\theta| \leq \theta_0$, on ait:*

$$\begin{aligned} |X^\psi(h,\theta)| &\leq C|h|, &(2.2.5)\\ |X^\psi(h,\theta) - h| &\leq C"|h|^2|\theta|. &(2.2.6) \end{aligned}$$

<u>Preuve du lemme 2.2.2.1.</u>
Nous commençons par majorer $|X^\psi(h,\theta)|$, on a,

$$\frac{d|X^\psi(h,\theta)|^2}{d\theta} = 2\langle\!\langle \psi(X^\psi(h,\theta)) \,\|\, X^\psi(h,\theta) \rangle\!\rangle \,.$$

Or, $\psi(X^\psi(h,\theta)) \leq C|X^\psi(h,\theta)|$, et donc, grâce au lemme de Gronwall:

$$|X^\psi(h,\theta)| \leq C|h|e^{C'|\theta|}. \tag{2.2.7}$$

Nous majorons à présent $|X^\psi(h,\theta) - h|$. On a, grâce l'hypothèse ($H_{2.3}$), et par l'inégalité des accroissements finis:

$$\begin{aligned} |X^\psi(h,\theta) - h| &\leq \int_0^\theta |\psi(X^\psi(h,u))|du,\\ &\leq C\int_0^\theta |X^\psi(h,u)|^2 du, \end{aligned}$$

De plus, pour tout $h' \in \mathbb{R}^r$, $\psi(h') \leq C|h'|^2$, avec une constante C indépendante de s, de y, et de h'. On obtient donc:

$$|X^\psi(h,\theta) - h| \leq C|h|^2\,|\theta|, \tag{2.2.8}$$

ce qui conclut la preuve du lemme 2.2.2.1.□
Nous allons maintenant montrer que les mesures de probabilité $\mathbb{P}'_{\theta\psi}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes. Pour cela, on note que, pour tout θ réel, la mesure $T_{\theta\psi}{}^*\lambda^- = \lambda'^-_\theta$ possède une densité par rapport à λ^- donnée par:

$$\frac{d\lambda'^-_\theta}{d\lambda^-} = \frac{l(\,y, X^{-\psi}(h,\theta)\,)}{l(y,h)}\,\exp\left\{-\int_0^\theta \mathrm{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du\right\}. \tag{2.2.9}$$

On pose alors $\nu(s,y,h,\theta) = \frac{d\lambda'^{-}_{\theta}}{d\lambda^{-}} - 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}\nu(s,y,h,\theta) = &\left(\frac{l(y,X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} - 1\right)\exp\left\{-\int_0^\theta \operatorname{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du\right\} \\ &+ \left(\exp\left\{-\int_0^\theta \operatorname{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du\right\} - 1\right).\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Nous utilisons d'abord les estimations obtenues en (2.2.7) et (2.2.8) pour majorer la différence :

$$\frac{l(y,X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} - 1,$$

qui apparaît dans l'expression de ν. Cette majoration est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.2.2 *Il existe des constantes positives C et α telles que, pour tout (h,θ), si $|\theta||h| \leq \alpha$, alors :*

$$\left|\frac{l(y,X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} - 1\right| \leq C|h||\theta|. \tag{2.2.11}$$

<u>Preuve du lemme 2.2.2.2.</u>
Posons $\alpha = \frac{1}{2C"}$, où $C"$ est la constante intervenant dans le dernier membre de (2.2.8). Alors, si $|h||\theta| \leq \alpha$, on a :

$$|X^{\psi}(h,\theta) - h| \leq C"|h|^2|\theta| \leq \frac{|h|}{2}. \tag{2.2.12}$$

Choisissons alors un vecteur $u \in \mathbb{R}^r$, tel que $|u| \leq C"|h|^2|\theta|$, pour un couple (h,θ) tel que $|h||\theta| \leq \alpha$, et posons, pour $\xi \in [0,1]$:

$$\phi(\xi) = l(y, h+\xi u).$$

On a donc :

$$|\phi'(\xi)| = |\langle\langle(\nabla_U l)(y,h+\xi u)|u\rangle\rangle| \leq |(\nabla_U l)(y,h+\xi u)|\,|u|.$$

Or, on a choisi $|u| \leq |h|/2$, donc $|h|/2 \leq |h+\xi u| \leq 3|h|/2$, et comme $|u| \leq C"|h|^2|\theta|$, on a donc $|u| \leq 2C"|h+\xi u|\,|h|\,|\theta|$, et donc :

$$|\phi'(\xi)| \leq C|(\nabla_U l)(y,h+\xi u)|\,|h+\xi u|\,|h|\,|\theta|. \tag{2.2.13}$$

Et on a supposé (hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$) que $\frac{\nabla_U l}{l}|h| \leq C$, sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^r$, uniformément sur tout borné de $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Il s'ensuit que :

$$\Big| \frac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi)} \Big| \leq C|h|\,|\theta|,$$

et, en intégrant en ξ, que :

$$\Big| \frac{\phi(1)}{\phi(0)} - 1 \Big| \leq C|h|\,|\theta|. \tag{2.2.14}$$

Appliquant l'inégalité ci-dessus pour $u = X^{\psi}(h,\theta) - h$, on obtient :

$$\Big| \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} - 1 \Big| \leq C|h||\theta|, \tag{2.2.15}$$

avec une constante C indépendante de s, y, et ω. Le lemme 2.2.2.2 est donc prouvé. $\square$

Nous utilisons à présent l'inégalité (2.2.5) pour majorer le terme exponentiel apparaissant dans l'expression de ν. Rappelons que, par l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$, on a $|\mathrm{div}(\psi)(X^{\psi}(h,\theta))| \leq C|X^{\psi}(h,\theta)|$, avec une constante C indépendante de (s,y,h). Il s'ensuit donc, que, si $|h| \leq h_0$, et $|\theta| \leq \theta_0$:

$$\Big| \exp\Big\{ -\int_0^{\theta} \mathrm{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du \Big\} \Big| \leq C, \tag{2.2.16}$$

et

$$\Big| \exp\Big\{ -\int_0^{\theta} \mathrm{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du \Big\} - 1 \Big| \leq C\,|h|\,|\theta|. \tag{2.2.17}$$

Nous reportons alors les majorations (2.2.15), (2.2.16), et (2.2.17) obtenues ci-dessus, dans l'expression de ν (formule (2.2.10)). On a donc, pour tout couple (s,y), si $\theta \leq \theta_0$, et $|h| \leq h_1$:

$$|\nu(s,y,h,\theta)| \leq C\,|h|\,|\theta|. \tag{2.2.18}$$

De plus, la fonction ν est nulle en dehors d'un certain compact de $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, et cette majoration nous permet donc de vérifier que la fonction :

$$s \mapsto \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^r} |\nu(s,y,h,\theta)|^p d\tilde{\lambda}^-(y,h) \tag{2.2.19}$$

est bornée sur $[0,T]$. D'après le théorème 2.1.3.1, les mesures de probabilité $\mathbb{P}'_{\theta\psi}$ et $\mathbb{P}$ sont donc équivalentes, et :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{P}'_{\theta\psi}}{d\mathbb{P}} = \exp\Big\{ &\iiint \ln(1+\nu(s,y,h,\theta))\,d\lambda \\ &+ \iiint (\ln(1+\nu(s,y,h,\theta)) - \nu(s,y,h,\theta))\,d\lambda^- \Big\}.\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Justification des dérivations Par définition de $\delta(\theta,\omega)$, on a, pour toute variable aléatoire lisse Y :

$$\mathbb{E}\{Y\circ\tau_{\theta\psi}\}=\mathbb{E}\{Y\,\delta(\theta,\cdot)\}. \tag{2.2.21}$$

De plus, comme Y est lisse, on a :

$$\frac{dY\circ\tau_{\theta\psi}}{d\theta}\;=\;(D_\psi Y)\circ\tau_{\theta\psi}\;=D_\psi(Y\circ\tau_{\theta\psi}). \tag{2.2.22}$$

et, à partir de (2.2.3), on voit que, pour θ petit :

$$|D_\psi(Y\circ\tau_{\theta\psi})-D_\psi Y|\le C|\theta|\iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi}|h|^2d\lambda^+. \tag{2.2.23}$$

avec une constante C indépendante de ω. Par suite,

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left\{\frac{Y\circ\tau_{\theta\psi}-Y}{\theta}\right\}-\mathbb{E}\{D_\psi Y\}\right| &\le \frac{1}{\theta}\int_0^\theta\mathbb{E}\{|D_\psi(Y\circ\tau_{u\psi})-D_\psi Y|\}du,\\ &\le \int_0^\theta C|\theta|\mathbb{E}\{\iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi}|h|^2d\lambda^+\}du,\\ &\le C|\theta|\iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi}|h|^2d\lambda^-,\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\{Y\circ\tau_{\theta\psi}\}_{|\theta=0}=\mathbb{E}\{D_\psi Y\}. \tag{2.2.24}$$

Pour pouvoir dériver le terme de droite de (2.2.21), on utilise les deux lemmes techniques suivants.

Lemme 2.2.2.3 *Il existe un θ_1 positif tel que, si $|h|\le h_0$, et $\theta\le\theta_1$, on ait :*

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\nu}{\partial\theta}(s,y,h,\theta)\right| &\le C|h|, &(2.2.25)\\ \left|\frac{\partial^2\nu}{(\partial\theta)^2}(s,y,h,\theta)\right| &\le C|h|. &(2.2.26)\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2.2.2.3;

Nous rappelons d'abord l'expression de ν, obtenue ci-avant (formule (2.2.10)) :

$$\begin{aligned}\nu(s,y,h,\theta)=&\left(\frac{l(y,X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)}-1\right)\exp\left\{-\int_0^\theta\operatorname{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du\right\}\\ &+\left(\exp\left\{-\int_0^\theta\operatorname{div}(\psi_{s,y})(X^{-\psi}(h,u))\,du\right\}-1\right).\end{aligned}$$

La dérivée de ν par rapport à θ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \nu}{\partial \theta}(s,y,h,\theta) = \\
&-\frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} \exp\Big\{ - \int_0^\theta \operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,u))du \Big\} \\
&-\frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} \exp\Big\{ - \int_0^\theta \operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,u))du \Big\} \operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,\theta)),
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

et sa dérivée seconde est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \nu}{(\partial \theta)^2}(s,y,h,\theta) = \exp\Big\{ - \int_0^\theta \operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,u))du \Big\} \times \\
&\times \Bigg(2 \frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} \times \operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,\theta))du \\
&\quad + \frac{\langle\!\langle \operatorname{Hess}_U(l(y, X^{-\psi}(h,\theta)))\psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} \\
&\quad + \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} \Big(\operatorname{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,\theta)) \Big)^2 \\
&\quad + \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} \times \langle\!\langle \nabla_U(\operatorname{div}(\psi))(X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle \\
&\quad + \frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \bar{d}_{X^{-\psi}(h,\theta)}(\psi)(\psi(X^{-\psi}(h,\theta))) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Nous montrons maintenant l'inégalité (2.2.25). Notons d'abord que :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} &= \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} \\
&\times \frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}.
\end{aligned}$$

et donc, grâce à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$ et à l'inégalité (2.2.5) :

$$\left| \frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta)) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} \right| \leq C \left| \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)} \right| |h|. \tag{2.2.29}$$

D'après le lemme 2.2.2.2, il existe un θ_1 positif, tel que, si $|h| \leq h_0$, et $|\theta| \leq \theta_1$, alors :

$$\Big|\frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)}\Big| \leq C, \tag{2.2.30}$$

et, par suite, comme $|X^{-\psi}(h,\theta)| \leq C|h|$:

$$\Big|\frac{(\!(\nabla_U l(y, X^{-\psi}(h,\theta)) \| \psi(X^{-\psi}(h,\theta))\,)\!)}{l(y,h)}\Big| \leq C|h|, \tag{2.2.31}$$

De plus, grâce à l'hypothèse ($\mathrm{H}_{2.3}$), il existe un $\theta_1 > 0$ pour lequel, si $|h| \leq h_0$ et $\theta \leq \theta_1$, on a :

$$\Big|\mathrm{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,\theta))\Big| \ \leq C|X^{-\psi}(h,\theta)| \ \leq C|h|. \tag{2.2.32}$$

Dès lors, grâce à l'inégalité (2.2.11), on a donc :

$$\Big|\ \frac{l(y, X^{-\psi}(h,\theta))}{l(y,h)}\ \mathrm{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,\theta))\ \Big| \leq C'|h|. \tag{2.2.33}$$

En outre, l'intégrale $\int_0^\theta \mathrm{div}(\psi)(X^{-\psi}(h,u))\,du$, est bornée pour $|h| \leq h_0$ et $\theta \leq \theta_1$. Donc, en utilisant (2.2.31) et (2.2.33), on a la majoration (2.2.25) :

$$\Big|\frac{\partial \nu}{\partial \theta}(s,y,h,\theta)\Big| \ \leq \ C|h|.$$

L'inégalité (2.2.26) se montre de la même manière en utilisant l'expression de $\frac{\partial^2 \nu}{(\partial \theta)^2}$ donnée dans (2.2.28). Ceci achève donc la preuve du Lemme 2.2.2.3. □

Dans la suite, pour simplifier les formules, on écrira seulement $\nu(\theta)$, en supprimant les dépendances de ν en (s,y,h). On a alors le lemme suivant.

Lemme 2.2.2.4 *Le processus $\delta(\theta,\omega)$ est presque sûrement continûment dérivable en θ, et sa dérivée est donnée par :*

$$\frac{d\delta}{d\theta}(\theta,\omega) = \delta(\theta,\omega)\ \left(\iiint \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta)\ \frac{d\lambda}{\nu(\theta)+1} - \iiint \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta)\ \frac{\nu(\theta)\ d\lambda^-}{\nu(\theta)+1}\right). \tag{2.2.34}$$

De plus, pour toute variable aléatoire lisse Y, l'application :

$$\theta \mapsto \mathbb{E}\Big\{Y \frac{d\delta}{d\theta}(\theta)\Big\} \tag{2.2.35}$$

est continue sur l'intervalle $[-\theta_1, \theta_1]$.

Preuve du lemme 2.2.2.4.

Rappelons d'abord l'estimation obtenue dans la formule (2.2.18), pour $|h||\theta| \leq \alpha$:

$$|\nu(s,y,h,\theta)| \leq C\,|h|. \tag{2.2.36}$$

D'après l'égalité (2.2.20), nous avons:

$$\delta(\theta) = \exp\left\{\iiint \ln(1+\nu(\theta))\,d\lambda + \iiint (\ln(1+\nu(\theta)) - \nu(\theta))\,d\lambda^-\right\}. \tag{2.2.37}$$

Or,

$$\nu(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\nu}{d\theta}(u)du \quad \text{et} \quad \ln(1+\nu(\theta)) = \int_0^\theta \frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{du}{\nu(u)+1}.$$

Par suite, en changeant l'ordre des intégrales, il vient:

$$\begin{aligned}\ln(\delta(\theta,\omega)) &= \iiint \ln(1+\nu(\theta))\,d\lambda + \iiint (\ln(1+\nu(\theta)) - \nu(\theta))\,d\lambda^- \\ &= \int_{u=0}^{\theta} \left(\iiint \frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{d\lambda}{\nu(u)+1} - \iiint \frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{\nu(u)\,d\lambda^-}{\nu(u)+1}\right) du.\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Or, en utilisant les majorations (2.2.36) et (2.2.26), on a, si $|u| \leq \theta_1$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\theta}(u) \times \frac{1}{\nu(u)+1}\right)\right| \leq C|h|,$$

avec une constante C indépendante de u. Donc, si u et u' sont deux éléments de $[-\theta_1,\theta_1]$:

$$\left|\frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{1}{\nu(u)+1} - \frac{d\nu}{d\theta}(u')\,\frac{1}{\nu(u')+1}\right| \leq C|h|\,|u-u'|,$$

et, grâce au critère de Kolmogoroff, l'application:

$$u \mapsto \iiint \frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{d\lambda}{\nu(u)+1}$$

est donc continue sur $[-\theta_1,\theta_1]$. De la même manière, grâce aux théorèmes classiques de continuité pour une fonction définie par une intégrale, l'application:

$$u \mapsto \iiint \frac{d\nu}{d\theta}(u)\,\frac{\nu(u)\,d\lambda^-}{\nu(u)+1}$$

est continue sur $[-\theta_1,\theta_1]$. Par suite, l'application $\theta \mapsto \delta(\theta,\omega)$ est presque sûrement continûment dérivable, pour $|\theta| \leq \theta_1$, et on a:

$$\frac{d\delta}{d\theta}(\theta,\omega) = \delta(\theta,\omega)\,\left(\iiint \frac{\partial\nu}{\partial\theta}(\theta)\,\frac{d\lambda}{\nu(\theta)+1} - \iiint \frac{\partial\nu}{\partial\theta}(\theta)\,\frac{\nu(\theta)\,d\lambda^-}{\nu(\theta)+1}\right).$$

On a donc montré la première partie du lemme 2.2.2.4. En particulier, en $\theta = 0$, on a :

$$\frac{d\delta}{d\theta}(0,\omega) = -\iiint \left(\frac{⟪\nabla_U l(y,h) \,|\, \psi(h)⟫}{l(y,h)} + \operatorname{div}(\psi)(h) \right) d\lambda(s,y,h). \tag{2.2.39}$$

Pour montrer à présent la continuité de l'application définie dans (2.2.35), il suffit par équiintégrabilité, de prouver que, pour un $p' > 1$:

$$\sup_{|\theta| \le \theta_1} \mathbb{E}\Big\{ \Big| Y \frac{d\delta}{d\theta}(\theta) \Big|^{p'} \Big\} = C < \infty, \tag{2.2.40}$$

et, comme Y est une variable aléatoire lisse, donc bornée, il suffit de le montrer pour $Y = 1$. Or, d'après la définition de δ (E.D.S. (2.1.6)), on a :

$$\mathbb{E}\{\delta(\theta)^2\} = \exp\Big\{ \iiint_{\operatorname{supp}\psi} \nu(\theta)^2 d\lambda^- \Big\}.$$

Donc, en utilisant (2.2.36)

$$\mathbb{E}\{|\delta(\theta)|^2\} \;\le\; \exp\Big\{ C \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} |h|^2 d\lambda^- \Big\}.$$

Par suite,

$$\sup_{|\theta| \le \theta_1} \mathbb{E}\{|\delta(\theta)|^2\} < \infty. \tag{2.2.41}$$

De plus, par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, pour tout $q > 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big\{ \Big| \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{d\lambda}{\nu(\theta)+1} + \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{\nu(\theta)\, d\lambda^-}{\nu(\theta)+1} \Big|^q \Big\} \\ &\quad \le C \Big| \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{\nu(\theta)\, d\lambda^-}{\nu(\theta)+1} \Big|^q + C\mathbb{E}\Big\{ \Big(\iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \Big(\frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{d\lambda^+}{\nu(\theta)+1} \Big)^2 \Big)^{q/2} \Big\}, \\ &\quad \le C \Big(\iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} |h|^2\, d\lambda^- \Big)^q + C\mathbb{E}\Big\{ \Big(\iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} |h|^2 d\lambda^+ \Big)^{q/2} \Big\}, \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

avec un C indépendant de θ. Or, $\mathbb{E}\{e^{\iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} |h|^2 d\lambda^+}\} < \infty$, donc :

$$\sup_{|\theta| \le \theta_1} \mathbb{E}\Big\{ \Big| \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{d\lambda}{\nu(\theta)+1} + \iiint_{\operatorname{supp}\,\psi} \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta) \frac{\nu(\theta)\, d\lambda^-}{\nu(\theta)+1} \Big|^q \Big\} < \infty, \tag{2.2.43}$$

pour tout $q > 1$. Soit maintenant $p' \in]1,2[$, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\mathbb{E}\Big\{\Big|\frac{\partial\delta}{\partial\theta}\Big|^{p'}\Big\} \leq \mathbb{E}\{|\delta(\theta)|^2\}^{p'/2}$$
$$\times\, \mathbb{E}\Big\{\Big|\iiint\limits_{\mathrm{supp}\,\psi} \frac{\partial\nu}{\partial\theta}(\theta)\frac{d\lambda}{\nu(\theta)+1} + \iiint\limits_{\mathrm{supp}\,\psi} \frac{\partial\nu}{\partial\theta}(\theta)\frac{\nu(\theta)\, d\lambda^-}{\nu(\theta)+1}\Big|^{\frac{2}{2-p'}}\Big\}^{\frac{p'(2-p')}{2}},$$

et donc, en utilisant les inégalités (2.2.41) et (2.2.43), la conclusion du lemme 2.2.2.4.□

Nous revenons maintenant à la formule (2.2.21) :

$$\mathbb{E}\{Y \circ \tau_{\theta\psi}\} = \mathbb{E}\{Y\,\delta(\theta,\cdot)\},$$

dont on souhaite dériver le membre de droite. Grâce au lemme 2.2.2.4, on a donc, si $|\theta| \leq \theta_1$:

$$\delta(\theta,\omega) - 1 = \int_0^\theta \frac{d\delta}{d\theta}(u,\omega)du.$$

Et, puisque l'application $\theta \mapsto \mathbb{E}\{Y\frac{d\delta}{d\theta}(\theta)\}$ est continue, on a donc :

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\{Y\circ\tau_{\theta\psi} - Y\} &= \lim_{\theta\to 0}\int_0^\theta \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\Big\{Y\frac{d\delta}{d\theta}(u)\Big\}\,du,\\ &= \mathbb{E}\Big\{Y\frac{d\delta}{d\theta}(0)\Big\}.\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant les relations (2.2.24) et (2.2.39), on a donc :

$$\mathbb{E}\{D_\psi Y\} = \mathbb{E}\left\{-Y\iiint\left(\frac{(\!(\nabla_U l \| \psi)\!)}{l} + \mathrm{div}(\psi)\right)d\lambda\right\},$$

ce qui conclut la preuve du théorème 2.2.2.1. □

Dans tout ce qui va suivre, et sauf mention du contraire, on suppose que l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$ est satisfaite pour un $1 < p \leq 2$, et on note par ψ une famille de champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$. On note aussi par Z la variable aléatoire :

$$Z(\omega) = -\iiint\limits_{\mathrm{supp}\,\psi}\left(\frac{(\!(\nabla_U l(y,h) \,\|\, \psi(h))\!)}{l(y,h)} + \mathrm{div}(\psi)(h)\right)d\lambda. \tag{2.2.44}$$

En appliquant le théorème 2.2.2.1 à un produit Y_1Y_2 de variables aléatoires lisses, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.2.2.5 *Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires lisses, on a :*

$$\mathbb{E}\{Y_1D_\psi(Y_2)\} + \mathbb{E}\{Y_2D_\psi(Y_1)\} = \mathbb{E}\{ZY_1Y_2\}. \tag{2.2.45}$$

2.2.3 Dérivation d'une variable aléatoire générale

Comme annoncé ci-dessus, on suppose dans tout ce qui suit, et sauf mention du contraire, que la mesure λ^- vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, pour un $p \in]1,2]$, et on note par ψ une famille de champs de vecteurs satisfaisant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$.

Fermabilité de l'opérateur D_ψ

Nous présentons maintenant quelques théorèmes et propriétés utiles pour montrer la dérivabilité (au sens de D_ψ) d'une variable aléatoire ou pour calculer sa dérivée. Nous prouvons d'abord que l'opérateur D_ψ est fermable dans $L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p' > 1$.

Propriété 2.2.3.1 *Nous supposons donc que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$*, pour un $p \in]1,2]$. Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant* $(\mathrm{H}_{2.3})$*. Alors l'opérateur D_ψ est fermable dans $L^{p'}(\Omega)$, pour tout $p' > 1$.*

Preuve de la propriété 2.2.3.1.
La démonstration repose sur le lemme suivant qui précise l'intégrabilité de la dérivée $D_\psi Y$ d'une variable aléatoire Y lisse, ainsi que l'intégrabilité de la variable aléatoire Z, définie dans (2.2.44).

Lemme 2.2.3.1 *Sous les hypothèses de la propriété 2.2.3.1, si Y est une variable aléatoire lisse, et si Z est la variable aléatoire définie en (2.2.44), on a, pour tout p' positif :*

$$\mathbb{E}\{\exp\{p'|D_\psi Y|\}\} < \infty, \tag{2.2.46}$$

$$\mathbb{E}\{\exp\{p'|Z|\}\} < \infty. \tag{2.2.47}$$

Preuve du lemme 2.2.3.1.
Si Y est une variable aléatoire lisse, la différentielle seconde des champs de vecteurs $\psi_{s,y}$ étant bornée, on a, grâce à la formule (2.2.3) :

$$|D_\psi Y| \leq C \iiint\limits_{\mathrm{supp}\ \psi} |h|^2 \, d\lambda^+,$$

et donc :

$$\mathbb{E}\{\exp\{p'|D_\psi Y|\}\} \leq \mathbb{E}\{\exp\{p'C \iiint\limits_{\mathrm{supp}\ \psi} |h|^2 \, d\lambda^+\}\} < \infty.$$

Pour montrer (2.2.47), on note que, grâce à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$, on a :

$$\left|\left(\frac{\langle\!\langle \nabla_U l(y,h) \,\|\, \psi(h) \rangle\!\rangle}{l(y,h)} + \mathrm{div}(\psi)(h)\right)\right| \leq C|h| \leq Ch_0.$$

Or,

$$\mathbb{E}\{e^{p'Z}\} = \exp\Big\{ \iiint_{\mathrm{supp}\,\psi} \Big[\exp\Big\{ -p'\Big(\frac{(\!(\, \nabla_U l(y,h) \parallel \psi(h) \,)\!)}{l(y,h)} + \operatorname{div}(\psi)(h) \Big) \Big\} - 1 + p'\Big(\frac{(\!(\, \nabla_U l(y,h) \parallel \psi(h) \,)\!)}{l(y,h)} + \operatorname{div}(\psi)(h) \Big) \Big] d\lambda^- \Big\},$$

et, si $|x| \leq C|h_0|$, il existe une constante $C_{p'}$ telle que :

$$|e^{-p'x} - 1 + p'x| \leq C|x|^2,$$

donc,

$$\mathbb{E}\{e^{p'Z}\} \leq \exp\Big\{ C \iiint_{\mathrm{supp}\,\psi} |h|^2 d\lambda^- \Big\} < \infty,$$

pour tout $p' \geq 0$. De la même manière, pour $p' \geq 0$, $\mathbb{E}\{e^{-p'Z}\} < \infty$, et donc $\mathbb{E}\{e^{p'|Z|}\} < \infty$.□
,

Nous achevons maintenant la preuve de la propriété de fermabilité. Notons que, grâce au lemme 2.2.3.1, les variables aléatoires $D_\psi Y$ et Z sont de puissance p'-ième intégrable, pour tout $p' > 1$. Soit donc $p' > 1$, et q' son exposant conjugué. Soit F_n une suite de variables aléatoires lisses tendant vers 0 dans $L^{p'}(\Omega)$ et telles que $D_\psi F_n \to \eta$ dans $L^{p'}(\Omega)$, et soit Y une autre variable aléatoire lisse. Alors, en utilisant le lemme 2.2.2.5 et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta Y\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{ZF_nY\} - \mathbb{E}\{F_n D_\psi Y\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite la variable aléatoire η est donc nulle, ce qui montre la fermabilité, dans $L^{p'}(\Omega)$ de l'opérateur D_ψ.□

Remarques *1) Cet opérateur de dérivation directionnelle n'est a priori pas fermable dans $L^1(\Omega)$. Ceci vient de ce que, si F est une variable aléatoire lisse (donc en particulier, bornée ainsi que toutes ses dérivées), la variable aléatoire $D_\psi F$ n'est en général pas bornée. Dans le cas du calcul de Malliavin Gaussien à l'inverse, la variable aléatoire $< DW, h >$ sera bornée si W est une variable aléatoire lisse bornée, et à dérivées bornées, et si h est un élément de l'espace de Cameron-Martin (voir par exemple à ce sujet [13].)*
2) Dans [12], Kondratiev, Albeverio, et Röckner construisent des perturbations du même type que ci-dessus pour des mesures de Poisson n'ayant, presque sûrement, qu'un nombre fini d'atômes dans toute partie bornée. Nous considérons ici des cas où la mesure aléatoire λ^+ a une infinité d'atômes dans certaines parties bornées de

$[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$. *Toutefois, notre formule d'intégration par parties est identique à celle de [12].*

Dans la suite de ce travail, on notera $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires Y telles que Y et $D_\psi Y$ sont dans $L^p(\Omega)$. On munit l'espace $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$ de la norme :

$$\|Y\|_{\mathbb{D}_\psi^{1,p}} = \mathbb{E}\{|Y|^p + |D_\psi Y|^p\}^{1/p}. \tag{2.2.48}$$

Si Y est un processus dépendant de $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, et tel que, pour tout couple (t,x), la variable aléatoire $Y(t,x,\omega) \in \mathbb{D}_\psi^{1,p}$ on utilise l'espace vectoriel $\mathbb{E}_\psi^{1,p}$ des processus Y tels que :

$$\|Y\|_{\mathbb{E}_\psi^{1,p}} = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \|Y\|_{\mathbb{D}_\psi^{1,p}} < \infty. \tag{2.2.49}$$

La fermabilité de l'opérateur D_ψ a pour conséquence la propriété suivante, qui se montre aisément en approchant la variable aléatoire Y par des variables aléatoires lisses, et la fonction ϕ par des fonctions de classe C^∞ à dérivées bornées.

Propriété 2.2.3.2 (formule d'enchaînement) *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$*, pour un $p \in]1,2]$. Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant* $(\mathrm{H}_{2.3})$*, Y une variable aléatoire de $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$, et ϕ une fonction réelle de classe C^1 et à dérivée bornée, alors :*

$$\begin{array}{ll} (1) & \phi(Y) \in \mathbb{D}_\psi^{1,p}, \\ (2) & D_\psi \phi(Y) = \phi'(Y)\, D_\psi Y. \end{array} \tag{2.2.50}$$

Formule intégrale

Le théorème suivant montre que la formule (2.2.2) est bien, presque sûrement vérifiée. Il sera également utile pour montrer le critère d'absolue continuité énoncé par le théorème 2.3.1.1.

Théorème 2.2.3.1 *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$*, pour un $p \in]1,2]$. Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant* $(\mathrm{H}_{2.3})$*, soit $Y \in \mathbb{D}_\psi^{1,p}$, alors, $\mathbb{P}$-presque sûrement, quels que soient les réels a et b :*

$$Y \circ \tau_{b\psi}(\omega) - Y \circ \tau_{a\psi}(\omega) = \int_a^b (D_\psi Y) \circ \tau_{u\psi}(\omega)\, du. \tag{2.2.51}$$

Démonstration du théorème 2.2.3.1.
Nous empruntons cette preuve à celle effectuée par D. Nualart, dans [14], pour la propriété analogue dans le cas gaussien.
a) Soit Y une variable aléatoire de $L^p(\Omega)$. Alors, la famille de variables aléatoires $(Y \circ \tau_{\theta\psi}, |\theta| \leq \theta_0)$, où θ_0 est un réel positif quelconque, est uniformément bornée dans $L^q(\omega)$, pour $1 \leq q < p$. En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|Y \circ \tau_{\theta\psi}|^q\} &= \mathbb{E}\{|Y|^q \delta(\theta)\} \\ &\leq \mathbb{E}\{|Y|^p\}^{q/p}\, \mathbb{E}\{\delta(\theta)^{\frac{p}{q-p}}\}^{1-\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Et le terme de droite est uniformément borné pour $|\theta| \leq \theta_0$, grâce à l'inégalité (2.2.18).
b) Nous montrons maintenant l'égalité (2.2.51), pour une variable aléatoire quelconque de $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$. Si Y est une variable aléatoire lisse, la formule (2.2.51) est trivialement vérifiée.
Si Y n'est pas une variable aléatoire lisse, soit Y_n une suite de variables aléatoires lisses convergeant vers Y dans $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$ et telle que Y_n et $D_\psi Y_n$ convergent presque sûrement. En utilisant les inégalités ci-dessus, on a, pour un $q < p$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big\{\Big|\int_a^b D_\psi Y_n \circ \tau_{u\psi}\, du - \int_a^b D_\psi Y \circ \tau_{u\psi}\, du\Big|\Big\} &\leq \mathbb{E}\Big\{\int_a^b |D_\psi Y_n - D_\psi Y| \circ \tau_{u\psi}\, du\Big\}, \\ &\leq C\, \mathbb{E}\Big\{|D_\psi Y_n - D_\psi Y|^q\Big\}^{1/q}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient donc (2.2.51). En particulier, si $Y \in \mathbb{D}_\psi^{1,p}$, il existe donc une version du processus $Y \circ \tau_{u\psi}$ qui a des trajectoires absolument continues et admet pour dérivée $D_\psi Y \circ \tau_{u\psi}$, presque partout pour la mesure de Lebesgue.□

Dérivation de variables aléatoires définies par des intégrales.

On considère maintenant des processus $V(s, y, \omega)$ tels que l'application :

$$\begin{aligned} [0,T] \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{D}_\psi^{1,p} \\ (s,y) &\mapsto V(s,y,\cdot) \end{aligned} \tag{2.2.52}$$

soit continue et bornée, et on note $\mathbb{C}_{b,\psi}^{1,p}$ l'espace vectoriel de ces processus, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_\psi^{1,p}}$. On a alors le théorème suivant, qui permet de dériver une variable aléatoire définie par une intégrale contre une mesure déterministe.

Théorème 2.2.3.2 *Nous supposons que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, *pour un* $p \in]1,2]$ *et que ψ est une famille de champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^r - \{0\}$ *satisfaisant* $(\mathrm{H}_{2.3})$.

Soit alors $V(s,y) \in \mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$*, et* m *une mesure déterministe finie sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^d$*, et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors*

$$Y = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} V(s,y)\, dm(s,y) \quad \in \mathbb{D}^{1,p}_{\psi}\,; \tag{2.2.53}$$

$$D_\psi Y = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_\psi V(s,y)\, dm(s,y). \tag{2.2.54}$$

<u>Démonstration du théorème 2.2.3.2.</u>
Soit donc $V \in \mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$ et soit K un compact inclus dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, et tel que :

$$\iint_{K^c} \mathbb{E}\{|V(s,y)|^p + |D_\psi V(s,y)|^p\}\, dm(s,y) < \varepsilon. \tag{2.2.55}$$

On note par ξ_K un module de continuité uniforme sur K pour l'application définie en (2.2.52). On considère alors $\mathcal{A} = (A_i, (s_i, y_i))_{1\le i\le n}$ une subdivision pointée de K, par des pavés A_i d'intérieurs disjoints, on note $\delta(\mathcal{A}) = \sup\limits_{1\le i\le n} (\mathrm{diam}(A_i))$ ($\delta(\mathcal{A})$ est donc le "pas" de la subdivision $\mathcal{A}$), et

$$Y_{\mathcal{A}}(\omega) = \sum_{i=1}^n m(A_i)\, V(s_i, y_i). \tag{2.2.56}$$

Alors,

$$Y_{\mathcal{A}} - Y = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} (V(s_i,y_i) - V(s,y))\, dm(s,y) - \iint_{K^c} V(s,y) dm(s,y),$$

et

$$|Y_{\mathcal{A}} - Y|^p = \left| \iint_K \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} (V(s_i,y_i) - V(s,y))\, dm(s,y) - \iint_{K^c} V(s,y)\, dm(s,y) \right|^p,$$

et comme, pour chaque $(s,y) \in K$, un seul des termes de la somme finie ci-dessus est non nul, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|Y_{\mathcal{A}} - Y|^p\} \;\le\; & C \iint_{K^c} \mathbb{E}\{|V(s,y)|^p\}\, dm(s,y) \\ & + C \iint_K \mathbb{E}\Big\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) |V(s,y) - V(s_i,y_i)|^p \Big\}\, dm(s,y). \end{aligned}$$

Or, pour tout $(s,y) \in A_i$,

$$\mathbb{E}\{|V(s_i,y_i) - V(s,y)|^p\} \leq \xi_K(\text{diam }(A_i))^p \leq \xi_K(\delta(\mathcal{A})),$$

donc

$$\mathbb{E}\{|Y_{\mathcal{A}} - Y|^p\} \leq C\varepsilon + C\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p. \tag{2.2.57}$$

de la même manière, si on note

$$Y' = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} D_\psi Y \, dm(s,y),$$

on a :

$$D_\psi(Y_{\mathcal{A}}) = \sum_{i=1}^n m(A_i)\, D_\psi V(s_i,y_i),$$

et donc :

$$\mathbb{E}\{|Y' - D_\psi(Y_{\mathcal{A}})|^p\} \leq C\varepsilon + C\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p. \tag{2.2.58}$$

En choisissant alors ε et $\delta(\mathcal{A})$ assez petits dans les inégalités (2.2.57) et (2.2.58), on conclut la preuve du théorème grâce à la fermabilité de l'opérateur D_ψ. $\square$

Le théorème suivant permet de dériver une variable aléatoire Y définie par une intégrale stochastique :

$$Y(\omega) = \iiint f(V_-(s,y),s,y,h)\, G(s,y)\, d\lambda(s,y,h). \tag{2.2.59}$$

Pour obtenir ce résultat, nous faisons sur f, V, et G, qui interviennent dans (2.2.59) les hypothèses suivantes.
$(\mathrm{H}_{2.4})$. Le processus V est progressivement mesurable, et est dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$.

$(\mathrm{H}_{2.5})$. La fonction $f(v,s,y,h)$ est de classe C^1 en v, et il existe une constante C telle que :

$$|f'(v,s,y,h)| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h)\right| \leq C|h|.$$

$(\mathrm{H}_{2.6})$. La fonction G est telle que :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^r} |h|^p |G(s,y)|^p \, d\lambda^-(s,y,h) < \infty.$$

(Rappelons que la fonction l satisfait elle à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$.) Le résultat principal, énoncé ci-dessous, reste valable lorsque l'on remplace les intégrales stochastiques contre $d\lambda$ par des intégrales contre $d\lambda^+$.

Théorème 2.2.3.3 *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, *pour un $p \in]1,2]$, et que la famille ψ de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfait* $(\mathrm{H}_{2.3})$. *Soit alors :*

$$Y = \iiint f(V_-(s,y), s, y, h) G(s,y) \, d\lambda(s,y,h), \tag{2.2.60}$$

avec V, f, et G satisfaisant respectivement les hypothèses $(\mathrm{H}_{2.4})$, $(\mathrm{H}_{2.5})$, *et* $(\mathrm{H}_{2.6})$. *Alors la variable aléatoire Y est dans $\mathbb{D}_\psi^{1,p}$, et on a :*

$$\begin{aligned} D_\psi Y = & \iiint D_\psi V_- \, f'(V_-(s,y), s, y, h) \, G(s,y) \, d\lambda(s,y,h) \\ & + \iiint \langle\!\langle \nabla_U f(V_-(s,y)s, y, h) \, \| \, \psi(h) \rangle\!\rangle \, G(s,y) \, d\lambda^+(s,y,h). \end{aligned} \tag{2.2.61}$$

Démonstration du théorème 2.2.3.3.
Rappelons que le processus V_-, qui intervient dans (2.2.60) est un processus prévisible égal à V, $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$-presque partout. Nous allons montrer le théorème lorsque

$$f(v,s,y,h) = f_1(v) f_2(s,y,h),$$

avec $f_1 \in C_b^1(\mathbb{R})$, et $|f_2| \leq k|h|$. On conclut, dans le cas général, par densité.
D'après la formule d'enchaînement, $V'_- = f_1(V_-(s,y)) \in \mathbb{C}_{b,\psi}^{1,p}$, puisque f_1 est de classe C^1 à dérivée bornée. On va procéder comme dans la preuve du théorème 2.2.3.2, dont on conserve les notations : $\mathcal{A} = (A_i, (s_i, y_i)_{1 \leq i \leq n})$, $\delta(\mathcal{A})$, ξ_K. On suppose toutefois en outre que, pour tout $(s,y) \in A_i$, $s_i \leq s$. On note par K un compact inclus dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, tel que supp $\psi \subset K \times \mathbb{R}^r$, et que :

$$\iiint_{K^c \times \mathbf{R}^r} |h|^p \, |G|^p \, \mathbb{E}\{(|V'|^p + |DV'|^p)\} \, d\lambda^- < \varepsilon. \tag{2.2.62}$$

Avec les mêmes notations que dans la preuve du théorème 2.2.3.2, soit

$$Y_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^n V'(s_i, y_i) \Big(\iiint_{A_i \times \mathbf{R}^r} f_2(s,y,h) \, G(s,y) \, d\lambda(s,y,h) \Big).$$

Rappelons que, pour tout $(s,y) \in A_i$, $s_i \le s$. Cette précaution nous permet de n'avoir à intégrer que des processus prévisibles. Alors, grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, comme $V_- = V$, $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$-presque partout :

$$\mathbb{E}\{|Y - Y_{\mathcal{A}}|^p\} \le C \iiint\limits_{K\times\mathbf{R}^r} \xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p |h|^p \, |G(s,y)|^p \, d\lambda^- \\ + C \iiint\limits_{K^c\times\mathbf{R}^r} \mathbb{E}\{|V'_-(s,y)|^p\} \, |h|^p \, |G(s,y)|^p \, d\lambda^-,$$

où ξ_K a le même sens que dans la preuve du théorème 2.2.3.2. Par suite,

$$\mathbb{E}\{|Y - Y_{\mathcal{A}}|^p\} \le C\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p + C\varepsilon. \tag{2.2.63}$$

Notons maintenant

$$Y' = \iiint D_\psi V'_-(s,y) \, f_2(s,y,h) \, G(s,y) \, d\lambda \\ + \iiint ⟪ \nabla_U f_2(s,y,h) \parallel \psi(h) ⟫ \, V'_-(s,y) \, G(s,y) \, d\lambda^+,$$

on a

$$D_\psi(Y_{\mathcal{A}}) = \iiint\limits_{K\times\mathbf{R}^r} \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) D_\psi V'(s_i,y_i) \Big) f_2(s,y,h) G(s,y) d\lambda \\ + \iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi} ⟪ \nabla_U f_2(s,y,h) \parallel \psi(h) ⟫ \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) V'(s_i,y_i) \right] G(s,y) \, d\lambda^+,$$

et, puisque $\operatorname{supp} \psi \subset K \times \mathbb{R}^r$ par hypothèse :

$$Y' - D_\psi Y_{\mathcal{A}} = \iiint\limits_{K^c\times\mathbf{R}^r} D_\psi V'_-(s,y) f_2(s,y,h) \, G(s,y) \, d\lambda^- \\ + \iiint\limits_{K\times\mathbf{R}^r} \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) (D_\psi V'_-(s,y) - D_\psi V'(s_i,y_i)) \Big) f_2(s,y,h) \, G(s,y) \, d\lambda \\ + \iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi} ⟪\nabla_U f_2(s,y,h) \| \psi(h)⟫ \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) (V'(s,y) - V'(s_i,y_i)) \right] G(s,y) \, d\lambda^+.$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy dans les deux premiers termes, on obtient :

$$\mathbb{E}\{|Y' - Y_{\mathcal{A}}|^p\} \le C\varepsilon + C'\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p \\ + \mathbb{E}\Big\{ \Big(\iiint\limits_{\operatorname{supp}\psi} ⟪\nabla_U f_2(s,y,h) \parallel \psi(h)⟫ \\ \times \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(s,y) (V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i)) \Big) G(s,y) \, d\lambda^+ \Big)^p \Big\}. \tag{2.2.64}$$

Pour le dernier terme du membre de droite, on réécrit $d\lambda^+ = d\lambda + d\lambda^-$. Alors, comme $|\psi(h)| \leq C|h|$ et $|\nabla_U f_2| \leq C$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big\{\Big| \iiint_{\operatorname{supp}\psi} (\!(\nabla_U f_2 \,\|\, \psi)\!) \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i))\Big) G\, d\lambda \Big|^p\Big\} \\
\leq \iiint_{\operatorname{supp}\psi} C|h|^p \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}|V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i)|\Big)^p |G|^p\, d\lambda^-, \qquad (2.2.65) \\
\leq C\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p.
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big| \iiint_{\operatorname{supp}\psi} (\!(\nabla_U f_2 \,\|\, \psi)\!) \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}|V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i)|\Big) G\, d\lambda^- \Big|^p \\
&\leq C\Big(\iiint_{\operatorname{supp}\psi} \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}|V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i)|\Big) |G(s,y)||h|^2\, d\lambda^- \Big)^p, \\
&\leq C \iiint_{\operatorname{supp}\psi} |G(s,y)|^p |h|^p \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(V'_-(s,y) - V'(s_i,y_i))\Big)^p d\lambda^-.
\end{aligned}$$

Donc, grâce à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.6})$,

$$\mathbb{E}\Big\{\Big| \iiint_{\operatorname{supp}\psi} (\!(\nabla_U f_2 \,\|\, \psi)\!) \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(V'_- - V'(s_i,y_i))\Big) G\, d\lambda^- \Big|^p\Big\} \leq C'\xi_K(\delta(\mathcal{A}))^p. \qquad (2.2.66)$$

Par suite, en utilisant (2.2.64), (2.2.65), et (2.2.66) :

$$\mathbb{E}\{|Y' - D_\psi Y_{\mathcal{A}}|^p\} \leq C\varepsilon \,+\, C'\xi_K(\delta(\mathcal{A})),$$

ce qui permet de conclure la preuve du théorème 2.2.3.3.□

2.3 Applications du Calcul variationnel

Dans cette partie, nous supposons encore, sauf mention du contraire, que la mesure λ^- vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, pour un $1 < p \leq 2$, et on note de nouveau par ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$.
Nous présentons maintenant quelques applications du calcul variationnel construit ci-dessus. Nous rappelons d'abord un critère classique d'absolue continuité, dû à Nicolas Bouleau et Francis Hirsch. Nous l'utilisons ensuite pour étudier l'absolue continuité de la loi des solutions de certaines E.D.S. conduites par une mesure aléatoire de Poisson. Enfin nous étudions la même question pour $V(t,x)$, le processus V étant la solution de l'E.D.P.S. (1.0.5) étudiée dans le premier chapitre, et le couple (t,x) étant fixé. Des théorèmes techniques utiles dans certaines démonstrations, sont présentés en appendice de cette partie.

2.3.1 Critère d'absolue continuité

Nous empruntons à Bouleau-Hirsch [2] et à Nualart [14] les éléments de la preuve du théorème suivant. Dans celui-ci, on considère des champs de vecteurs ψ_k, $1 \leq k \leq l$ vérifiant chacun l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.3})$, et on note $\mathbb{D}^{1,p}_{\psi_k}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires Y de $L^p(\Omega)$, telles que $D_{\psi_k}Y$ existe et est dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 2.3.1.1 *Nous supposons donc que la fonction l vérifie $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, pour un $p \in]1,2]$. Soient ψ_k, $k \leq l$ des familles de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant $(\mathrm{H}_{2.3})$, et soit $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $Y_i \in \bigcap_{k=1}^{l} \mathbb{D}^{1,p}_{\psi_k}$. On pose alors :*

$$J = \det\left(\left(\sum_{k=1}^{l} D_{\psi_k} Y_i \, D_{\psi_k} Y_j\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right). \tag{2.3.1}$$

Alors, sur l'événement $\{J \neq 0\}$, la loi de Y est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration du théorème 2.3.1.1
Nous rappelons d'abord un résultat d'analyse de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application mesurable. On dit que ϕ est approximativement dérivable en $a \in \mathbb{R}$, et de dérivée approximative égale à b ($b = \mathrm{ap}\,\phi'(a)$), si :

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int \mathbf{1}_{\{x \in [a-\eta, x+\eta] \,:\, |f(x)-f(a)-(x-a)b| > \varepsilon |x-a|\}} \, dx = 0. \tag{2.3.2}$$

En particulier, s'il existe une fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple de réels (a,b) :

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b g(t)dt,$$

alors, la fonction ϕ est presque partout approximativement dérivable, et presque partout $\mathrm{ap}\,\phi'(t) = g(t)$.
Si $(\phi_1, \cdots, \phi_l) = \phi : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^n$, on dit que ϕ est approximativement différentiable en $a \in \mathbb{R}^l$ si toutes ses dérivées partielles approximatives existent en a. On note alors :

$$\mathrm{ap}\,\nabla\phi_i = \left(\mathrm{ap}\,\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq j \leq l},$$

le gradient approximatif de la $i-$ème composante de ϕ. On a alors le lemme suivant (v. Federer [6], pp. 241-245).

Lemme 2.3.1.1 *Soit $\phi : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^n$ une application mesurable approximativement différentiable presque partout (pour la mesure de Lebesgue) sur un ouvert W de $\mathbb{R}^l$.*

Alors, pour tout $B \subset \mathbb{R}^n$, de mesure de Lebesgue nulle,

$$\int_{\phi^{-1}(B)} \det\Big(< \mathrm{ap}\,\nabla\phi_j,\, \mathrm{ap}\,\nabla\phi_i >_{1\leq i,j\leq n} \Big)\, dx_1\cdots dx_l \;=\; 0. \tag{2.3.3}$$

C'est-à-dire que la mesure $\Big(\det(< \mathrm{ap}\,\nabla\phi_j,\, \mathrm{ap}\,\nabla\phi_i >_{1\leq i,j\leq n})\, dx_1\cdots dx_l\Big)\circ\phi^{-1}$ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.*

Soit maintenant Y une variable aléatoire telle que dans l'énoncé du théorème 2.3.1.1. Pour $(\theta_1,\cdots,\theta_l) = \theta \in \mathbb{R}^l$, on pose $\theta\cdot\psi = \sum_{i=1}^l \theta_i\psi_i$. Le champ de vecteurs $\theta\cdot\psi$ vérifie alors l'hypothèse ($\mathrm{H}_{2.3}$). On pose $\mathbb{P}_\theta = \tau_{\theta\cdot\psi}{}^*\mathbb{P}$, et on choisit un $\theta_0 \geq 0$ tel que, pour tout $\theta \in]-\theta_0,\theta_0[^l$, la mesure $\mathbb{P}_\theta$ soit équivalente à $\mathbb{P}$. On note alors: $\delta(\theta,\omega) = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}}$, et $\tilde{Y}(\omega,\theta) = Y(\tau_{\theta\cdot\psi}(\omega))$. Grâce au théorème 2.2.3.1, la fonction $\tilde{Y}(\omega,\cdot)$ est approximativement différentiable sur $]-\theta_0,\theta_0[^l$, et

$$\begin{aligned}\det\Big[< \mathrm{ap}\,\nabla\tilde{Y}_i(\omega,\cdot), \mathrm{ap}\,\nabla\tilde{Y}_j(\omega,\cdot) >_{1\leq i,j\leq n}(\theta)\Big] &= \\ \det\Big[\Big(\sum_{k=1}^l (D_{\psi_k}Y_i)(\tau_{\theta\cdot\psi}(\omega)) &\times (D_{\psi_k}Y_j)(\tau_{\theta\cdot\psi}(\omega))\Big)_{1\leq i,j\leq n}\Big].\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

D'après le lemme 2.3.1.1, on a donc, $\mathbb{P}$-presque sûrement:

$$\int_{\substack{\theta\in(\tilde{Y}(\omega,\cdot))^{-1}(B)\\ \cap]-\theta_0,\theta_0[^l}} \det\Big(\Big(\sum_{k=1}^l (D_{\psi_k}Y_i)(D_{\psi_k}Y_j)\Big)\circ\tau_{\theta\cdot\psi}\Big)_{1\leq i,j\leq n}(\omega)\, d\theta_1\cdots d\theta_l = 0.$$

Donc,

$$\mathbb{E}^{\mathrm{P}}\Big\{\int_{\substack{\theta\in(\tilde{Y}(\omega,\cdot))^{-1}(B)\\ \cap]-\theta_0,\theta_0[^l}} \det\Big(\Big(\sum_{k=1}^l (D_{\psi_k}Y_i)(D_{\psi_k}Y_j)\Big)\circ\tau_{\theta\cdot\psi}\Big)_{1\leq i,j\leq n} d\theta_1\cdots d\theta_l\Big\} = 0,$$

et, par suite,

$$\int_{]-\theta_0,\theta_0[^l} \mathbb{E}^{\mathrm{P}}\Big\{\mathbf{1}_{\{Y\circ\tau_{\theta\cdot\psi}\in B\}} \det\Big(\Big(\sum_{k=1}^l (D_{\psi_k}Y_i)(D_{\psi_k}Y_j)\Big)\circ\tau_{\theta\cdot\psi}\Big)_{i,j}\Big\} d\theta_1\cdots d\theta_l = 0,$$

et

$$\int_{]-\theta_0,\theta_0[^l} \mathbb{E}^{\mathrm{P}}\Big\{\delta(\theta)\mathbf{1}_{\{Y\in B\}} \det\Big(\Big(\sum_{k=1}^l (D_{\psi_k}Y_i)(D_{\psi_k}Y_j)\Big)\Big)_{1\leq i,j\leq n}\Big\} d\theta_1\cdots d\theta_l = 0,$$

donc

$$\mathbf{1}_{\{Y\in B\}}\det\Big(\Big(\sum_{k=1}^{l}(D_{\psi_k}Y_i)(D_{\psi_k}Y_j)\Big)\Big)_{1\leq i,j\leq n}=0,$$

$\mathbb{P}$-presque sûrement, ce qui démontre l'affirmation du théorème. La loi de Y possède donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, sur l'événement $\{J\neq 0\}$. □

2.3.2 Application aux équations différentielles stochastiques

Nous présentons maintenant des applications du calcul variationnel construit ci-dessus, à l'étude de la régularité des lois de solutions d'équations différentielles stochastiques.

Cas général

Pour l'étude de ce premier exemple, on suppose que λ^+ est une mesure aléatoire de Poisson sur $[0,T]\times\mathbb{R}^r$ (en supprimant donc une dépendance en espace par rapport à ce qui a été fait jusqu'ici), d'intensité $d\lambda^- = l(h)\,dsdh = ds\otimes d\mu(h)$, la fonction l vérifiant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.7})(p)$ ci-dessous, pour un $p\in]1,2]$.

$(\mathrm{H}_{2.7})(p)$. La fonction l vérifie :

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^r} l(h)\,|h|^p\,dh \;<\;\infty$;

(2) la fonction l est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$;

(3) il existe deux constantes positives C et h' telles que, si $|h|\leq h'$:

$$\frac{|\nabla_U\, l(h)|}{l(h)}|h|\;\leq\;C\quad\text{et}\quad\frac{|\mathrm{Hess}_U\, l(h)|}{l(h)}|h|^2\;\leq\;C.$$

Cette hypothèse jouera dans cette partie le même rôle que l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$ dans ce qui précède. On note alors $E_{p,u}$ l'espace vectoriel des processus X progressivement mesurables, pour lesquels :

$$\|X\|_{E_{p,u}}=\mathbb{E}\{\sup_{s\in[0,T]}|X(s)|^p\}^{1/p}<\infty,$$

et, si ψ est une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r-\{0\}$ satisfaisant $(\mathrm{H}_{2.3})$, on note par $\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$ l'espace vectoriel des processus progressivement mesurables, tels que l'application :

$$\begin{array}{rcl} [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{D}_\psi^{1,p} \\ s & \longmapsto & X(s,\cdot) \end{array}$$

est continue, et tels que :

$$\|X\|_{\mathbb{C}_{u,\psi}^{1,p}} = \|X\|_{Ep,u} + \|D_\psi X\|_{Ep,u} < \infty.$$

Pour des processus de $\mathbb{C}_{u,\psi}^{1,p}$, il est donc possible d'utiliser les théorèmes 2.2.3.2 et 2.2.3.3. On considère alors l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_{s^-}, s)\, ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^r} b(X_{s^-}, s, h)\, d\lambda(s,h), \tag{2.3.5}$$

où on fait sur les fonctions $a : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, les hypothèses suivantes.

($\mathrm{H}_{2.8}$). La fonction $a(\cdot, t)$ est de classe C^1, et il existe une constante k, indépendante de t, et telle que, pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$,

(1) $\left|\dfrac{da(x,t)}{dx}\right| \leq k$;

(2) $\left|\dfrac{da(x,t)}{dx} - \dfrac{da(x',t)}{dx}\right| \leq k|x-x'|$

($\mathrm{H}_{2.9}$). Les fonctions $b(\cdot, s, h)$ et $b(x, s, \cdot)$ sont de classe C^1, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout $(x,x') \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(s,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^r$:

(1) $\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,s,h) > -1$;

(2) $\left|\dfrac{db(\cdot,s,h)}{dx}\right| \leq C|h|$;

(3) $\left|\dfrac{db(x,s,h)}{dx} - \dfrac{db(x',s,h)}{dx}\right| \leq C|x'-x||h|$

(4) $|\nabla_U b(x,s,h) - \nabla_U b(x',s,h)| \leq C|x-x'|$.

Ces deux dernières hypothèses permettront d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution de (2.3.5) dans $\mathbb{C}_{u,\psi}^{1,p}$. Pour obtenir l'absolue continuité de la loi de la variable aléatoire X_t, on va utiliser en outre les hypothèses suivantes.

$(\mathrm{H}_{2.10})$. La mesure μ vérifie : $\int\limits_0 d\mu(h) = \infty$.

$(\mathrm{H}_{2.11})$. Il existe un voisinage V de $(x_0, 0, 0)$, sur lequel la fonction $\nabla_U b$ est continue et ne s'annule pas.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.3.2.1 *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse* $(\mathrm{H}_{2.7})(p)$, *pour tout $p \in]p_0, p_1[$, avec $1 \leq p_0 < p_1 \leq 2$. Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{2.8})$ *et* $(\mathrm{H}_{2.9})$ *sont vérifiées, alors l'équation (2.3.5) admet une solution unique X_t dans $\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$, pour tout $p \in]p_0, p_1[$.*
Si en outre, μ et b vérifient respectivement les hypothèses $(\mathrm{H}_{2.10})$ *et* $(\mathrm{H}_{2.11})$, *alors, pour tout $t \in [0, T]$, la loi de la variable aléatoire X_t possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration du théorème 2.3.2.1.
Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant $(\mathrm{H}_{2.3})$. On considère l'itération définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^0 & = & x_0, \\ X^{n+1} & = & x_0 + \int\limits_0^t a(X^n_s, s)\, ds + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(X^n_{s^-}, s, h)\, d\lambda. \end{array} \right. \tag{2.3.6}$$

Dans ce qui suit, on note $a'(x,s) = \frac{\partial a}{\partial x}(x,s)$, et $b'(x,s,h) = \frac{\partial b}{\partial x}(x,s,h)$. Remarquons d'abord que, si $X^n \in \mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$, alors $X^{n+1} \in \mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$, et, grâce aux théorèmes 2.2.3.2 et 2.2.3.3, $D_\psi X^{n+1}$ est donné par l'E.D.S :

$$\begin{aligned} D_\psi X^{n+1}_t = \int\limits_0^t a'(X^n_s, s)\, D_\psi X^n_s\, ds + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^r} b'(X^n_{s^-}, s, h)\, D_\psi X^n_{s^-}\, d\lambda \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^r} \langle\!\langle \nabla_U b(X^n_{s^-}, s, h) \,\|\, \psi_s(h) \rangle\!\rangle\, d\lambda^+. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Alors, par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\mathbb{E}\{\sup_{s\in[0,t]} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^p\} \leq$$
$$C \int_0^t\int_h \mathbb{E}\{\sup_{u\in[0,s]} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^p\}|h|^p \, ds d\mu(h)$$
$$+ C' \int_0^t \mathbb{E}\{\sup_{u\in[0,s]} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^p\} ds,$$

donc :

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{[0,t]} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^p\right\} \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left\{\sup_{[0,s]} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^p\right\} ds. \qquad (2.3.8)$$

En particulier, la suite X^n converge vers un processus X, solution de (2.3.5). De plus, la suite $\mathbb{E}\{\sup_{[0,t]} |D_\psi X^n|^p\}$ est bornée. En effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\sup_{[0,t]} |D_\psi X^n|^p\} \;&\leq\; C \int_0^t \mathbb{E}\{\sup_{[0,s]} |D_\psi X_u^n|^p\} \, (ds + \int_{\mathbf{R}^r} |h|^p \, d\lambda^-(s,h)) \\ &\qquad + C' \int_0^t \left(\mathbb{E}\{\sup_{[0,s]} |X_u^n|^p\} + 1\right) \int_{\mathbf{R}^r} |h|^p \, d\lambda^-(s,h) \; ; \\ &\leq\; C + C' \int_0^t \mathbb{E}\{\sup_{[0,s]} |D_\psi X_u^n|^p\} \, ds.\end{aligned}$$

Et donc, par récurrence, quitte à modifier la valeur de C :

$$\mathbb{E}\{\sup_{[0,t]} |D_\psi X^n|^p\} \leq Ce^{C'T}, \qquad (2.3.9)$$

pour tout entier n et tout réel $t \in [0,T]$.

Nous notons maintenant par Z le processus solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} (\!(\nabla_U b(X_{s^-}, s, h) \,\|\, \psi_s(h))\!) \, d\lambda^+ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'(X_{s^-}, s, h) Z_{s^-} \, d\lambda$$
$$+ \int_0^t a'(X_s, s) Z_{s^-} \, ds,$$

et nous considérons la différence :

$$Z_t - D_\psi X_t^{n+1} = \int_0^t \int_{\mathrm{R}^r} \langle\!\langle \nabla_U b(X_{s^-}, s, h) - \nabla_U b(X_{s^-}^n, s, h) \,|\, \psi_s(h) \rangle\!\rangle \, d\lambda^+$$
$$+ \int_0^t a'(X_s^n, s)(Z_s - D_\psi X_s^n)\, ds + \int_0^t \int_{\mathrm{R}^r} b'(X_{s^-}^n, s, h)(Z_{s^-} - D_\psi X_{s^-}^n) d\lambda(s,h)$$
$$+ \int_0^t (a'(X_s, s) - a'(X_s^n, s)) Z_s \, ds + \int_0^t \int_{\mathrm{R}^r} (b'(X_s, s, h) - b'(X_{s^-}^n, s, h)) Z_{s^-} d\lambda(s,h).$$

On pose alors :

$$H_n(t) = \mathbb{E}\Big\{ \sup_{[0,t]} |X_s - X_s^n|^p + \sup_{[0,t]} |Z_s - D_\psi X_s^n|^p \Big\}.$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a donc :

$$\begin{aligned} H_n(t) \leq C \int_0^t H_{n-1}(s)\, ds & \\ + \mathbb{E}\Bigg\{ \sup_{[0,t]} \Bigg| \int_0^t Z_s(a'(X_s, s) - a'(X_s^n, s))\, ds & \\ + \int_0^t \int_{\mathrm{R}^r} Z_{s^-}(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X_{s^-}^n, s, h))\, d\lambda(s,h) \Bigg|^p \Bigg\} &. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Il faut donc étudier cette dernière espérance. Nous allons montrer qu'elle converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui nous permettra d'utiliser le Lemme 2.3.4.1 pour conclure la preuve de ce théorème. Notons d'abord que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Bigg\{ \sup_{[0,t]} \Bigg| \int_0^t Z_s(a'(X_s, s) - a'(X_s^n, s))\, ds \Bigg|^p \Bigg\} & \\ \leq C\mathbb{E}\Bigg\{ \int_0^t \mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]} |X - X^n| < 1/n\}} \sup_{[0,s]} \Big| Z_u(a'(X_u, u) - a'(X_u^n, u)) \Big|^p ds \Bigg\} & \\ + C\mathbb{E}\Bigg\{ \int_0^t \mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]} |X - X^n| \geq 1/n\}} \sup_{[0,s]} \Big| Z_u(a'(X_u, u) - a'(X_u^n, u)) \Big|^p ds \Bigg\} &. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathrm{H}_{2.8}$), on obtient donc :

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{[0,t]}\left|\int_0^t Z_s(a'(X_s,s)-a'(X_s^n,s))\,ds\right|^p\right\}$$

$$\leq \frac{C\mathbb{E}\{\sup_{[0,T]}|Y_s|^p\}}{n^p}+C'\int_0^t \mathbb{E}\Big\{\mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]}|X-X^n|\geq 1/n\}}\sup_{[0,s]}|Y_u|^p\Big\}\,ds.$$

Nous utilisons alors l'inégalité de Hölder pour majorer la dernière intégrale. Soit $p'>p$, $p'<p_1$, et soit q l'exposant conjugué de p'/p. On a donc :

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{[0,t]}\left|\int_0^t Z_s(a'(X_s,s)-a'(X_s^n,s))\,ds\right|^p\right\}$$

$$\leq \frac{C\mathbb{E}\{\sup_{[0,T]}|Y_s|^p\}}{n^p}+C'\int_0^t \mathbb{E}\Big\{\mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]}|X-X^n|\geq 1/n\}}\Big\}^{1/q}\mathbb{E}\Big\{\sup_{[0,s]}|Y_u|^{p'}\Big\}^{p/p'}\,ds.$$

Or, comme :

$$\mathbb{E}\{\sup_{[0,t]}|X_s-X_s^n|^p\}\;\leq\; C\int_0^t \mathbb{E}\{\sup_{[0,s]}|X_u-X_u^n|^p\}\,ds,$$

grâce au Lemme A1, on sait qu'il existe deux constantes C et C' telles que :

$$\mathbb{E}\{\sup_{[0,T]}|X_s-X_s^n|^p\}\;\leq\; C\frac{(C'T)^n}{n!}.$$

Dès lors, en utilisant l'inégalité de Tchebycheff :

$$\mathbb{P}\{\sup_{[0,s]}|X-X^n|\geq 1/n\}\;\leq\; C\frac{n^p(C'T)^n}{n!},$$

ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\sup_{[0,s]}|X-X^n|\geq 1/n\}=0,$$

et donc que :

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{[0,t]}\left|\int_0^t Z_s(a'(X_s,s)-a'(X_s^n,s))\,ds\right|^p\right\}\leq \varepsilon_n, \tag{2.3.11}$$

avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.
Nous étudions maintenant l'intégrale stochastique qui apparait dans (2.3.10). Grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\{ \sup_{[0,t]} \Big| \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} Z_{s^-} \left(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X^n_{s^-}, s, h) \right) d\lambda(s,y) \Big|^p \Big\} \\
&\quad \leq C\mathbb{E}\Big\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} |Z_{s^-} \left(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X^n_{s^-}, s, h) \right)|^p \, d\lambda^+(s,y) \Big\} \; ; \\
&\quad \leq C\mathbb{E}\Big\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]} |X^n - X| < 1/n\}} |Z_{s^-} \left(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X^n_{s^-}, s, h) \right)|^p \, d\lambda^+(s,y) \Big\} \\
&\qquad + C'\mathbb{E}\Big\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]} |X^n - X| \geq 1/n\}} |Z_{s^-} \left(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X^n_{s^-}, s, h) \right)|^p \, d\lambda^+(s,y) \Big\} \; ; \\
&\quad \leq \frac{C}{n^p} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \mathbb{E}\{ |Z_{s^-}|^p \} |h|^p \, d\lambda^-(s,h) \\
&\qquad \quad + C'\mathbb{E} \left\{ \int_0^t |Z_{s^-}|^{p'} |h|^p d\lambda^+ \right\}^{p/p'} \mathbb{E} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \mathbf{1}_{\{\sup_{[0,s]} |X^n - X| \geq 1/n\}} |h|^p d\lambda^+ \right\}^{1/q} .
\end{aligned}$$

Et donc, comme ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{E}\Big\{ \sup_{[0,t]} \Big| \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} Z_{s^-} \left(b'(X_{s^-}, s, h) - b'(X^n_{s^-}, s, h) \right) d\lambda(s,y) \Big|^p \Big\} \leq \varepsilon'_n, \tag{2.3.12}$$

avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon'_n = 0$. En regroupant les estimations (2.3.11) et (2.3.12), et en les portant dans (2.3.10), on obtient donc, pour la suite de fonctions $H_n(t)$:

$$H_n(t) \leq (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) + C \int_0^t H_{n-1}(s). \tag{2.3.13}$$

Le Lemme 2.3.4.1 permet d'en déduire que cette suite de fonctions converge uniformément sur $[0,T]$, vers la fonction nulle. Par suite, du fait de la fermabilité de l'opérateur D_ψ dans L^p, pour $p > 1$, la variable aléatoire X est dans $\mathbb{C}^{1,p}_{u,\psi}$, pour tout $p \in]p_0, p_1[$. Sa dérivée est la solution de l'équation obtenue en dérivant formellement (2.3.5) :

$$\begin{aligned}
D_\psi X_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \langle\!\langle \nabla_U b(X_{s^-}, s, h) \,|\, \psi_s(h) \rangle\!\rangle \, d\lambda^+ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'(X_{s^-}, s, h) D_\psi X_{s^-} \, d\lambda \\
+ \int_0^t a'(X_s, s) D_\psi X_{s^-} \, ds.
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Grâce au théorème 2.3.4.1, démontré dans l'appendice de cette partie, le processus $D_\psi X_t$ s'écrit donc :

$$D_\psi X_t = \Big(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^r} \frac{\langle\!\langle \nabla_U b(X_{s^-}, s, h) \,\|\, \psi_s(h) \rangle\!\rangle}{Y_{s^-}(1 + b'(X_{s^-}, s, h))} \, d\lambda^+ \Big) Y_t, \tag{2.3.15}$$

où Y est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^r} b'(X_{s^-}, s, h) Y_{s^-} d\lambda + \int_0^t a'(X_s, s) Y_s ds.$$

Du fait que $b' > -1$ (hypothèse ($\mathrm{H}_{2.9}$)), le processus Y est toujours strictement positif. Supposons en outre satisfaites les hypothèses ($\mathrm{H}_{2.10}$) et ($\mathrm{H}_{2.11}$). Alors, la fonction $\nabla_U b(x_0, 0, \cdot) \neq 0$ sur une boule ouverte V_h de centre 0, et est continue sur V_h. Il existe donc un champ de vecteurs ψ, satisfaisant ($\mathrm{H}_{2.3}$), et tel que :

$$\psi_s(h) = \mathbf{1}_{\{s<1\}} \alpha(h) \nabla_U b(x_0, 0, h), \tag{2.3.16}$$

avec $\alpha(h) > 0$ si $h \in V_h$ est non nul.
Il existe alors un voisinage $V' =]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\times [0, \gamma'[\times \{|h| \leq \gamma"\}$ de $(x_0, 0, 0)$, tel que, si $(x, s, h) \in V'$, alors $\langle\!\langle \nabla_U b(x, s, h) \,\|\, \psi_s(h) \rangle\!\rangle > 0$. On note alors $T(\omega)$ le temps d'arrêt défini par :

$$T(\omega) = \inf\{t \geq 0 \;:\; |X_t - x_0| > \gamma\}. \tag{2.3.17}$$

Comme le processsus X est càdlàg, on a, pour le temps d'arrêt T,

$$\mathbb{P}\{T > 0\} = 1.$$

Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi_{n,s}(h) = \psi_s(h) \mathbf{1}_{\{s<1/n\}}$, alors, si $T > 1/n$, on a, presque-sûrement $\langle\!\langle \nabla_U b(X_{s^-}, s, h) \,\|\, \psi_{n,s}(h) \rangle\!\rangle > 0$, et donc, en utilisant l'expression (2.3.15) $D_{\psi_{n,s}} X > 0$ presque sûrement. La variable aléatoire $X(t, \cdot)$ possède donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, conditionnellement à l'événement $\{T > 1/n\}$. Il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, de faire tendre n vers $+\infty$.□

Remarques : *1) L'hypothèse $b' > -1$ peut être remplacée par $b' \neq -1$. Il suffit, alors, pour montrer le théorème, de remplacer le temps d'arrêt T, utilisé ci-dessus, par le temps d'arrêt $T \wedge Q$, avec*

$$Q(\omega) = \inf\{t \geq 0 \;:\; Y_t < 0\}.$$

Comme le processus Y_t est càdlàg, de même que le processus X, on a $\mathbb{P}\{Q > 0\} = 1$. La suite de la démonstration se fait de manière identique à ce qui précède.

Cas linéaire

On revient maintenant au cas où λ^+ est une mesure aléatoire sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, d'intensité $d\lambda^- = l(y,h)\, dsdydh$, avec une fonction l qui satisfait l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, pour un $1 < p \leq 2$.
Soit $\nu \in L^p(d\lambda^-)$ une fonction sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, à support compact. On note alors $d\lambda'^-(s,y,h) = (1+\nu(s,y,h))\, d\lambda^-(s,y,h)$, et $\mathbb{P}'$ la probabilité sur Ω pour laquelle λ^+ est un bruit poissonnien d'intensité $d\lambda'^-$. Alors, le processus

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} = \delta_t(\omega)$$

est la solution de :

$$\delta_t = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^r} \delta_{s^-}\, \nu(s,y,h)\, d\lambda(s,y,h). \tag{2.3.18}$$

Nous étudions dans cette partie l'existence d'une densité pour la loi de δ_t. Ceci peut donc être vu comme un cas particulier simple de ce qui précède. Nous le considérons à part, et en détail afin de mieux cerner les conditions dans lesquelles notre calcul variationnel peut permettre de montrer l'absolue continuité des lois de certaines variables aléatoires.

On suppose que la fonction ν vérifie les hypothèses suivantes :

$(\mathrm{H}_{2.12})$. La fonction ν est continue, à support compact et à valeurs dans $]-1,+\infty[$, et il existe une constante C telle que :

(1) $|\nu(s,y,h)| \leq C|h|$,
(2) pour tout $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, la fonction $\nu(s,y,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et on a :

$$\lambda^-(\,\mathrm{supp}\,(\nabla_U \nu) \cap [0,t[\,) = +\infty.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.3.2.2 *Nous supposons que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$*, pour un $p \in]1,2]$. Si l'application ν vérifie* $(\mathrm{H}_{2.12})$*, alors la variable aléatoire $\delta_t(\omega)$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve du théorème 2.3.2.2.
Par construction $\nu > -1$, donc $\delta_t > 0$, presque sûrement. Soit ψ une famille de

champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$ satisfaisant ($H_{2.3}$). Nous appliquons, comme ci-dessus, le théorème 2.2.3.3 pour dériver l'équation (2.3.18) dans la direction de ψ, nous obtenons donc :

$$D_\psi \delta_t = \iiint_{\mathrm{supp}\,\nu} \delta_{s^-} \langle\!\langle \nabla_U \nu(s,y,h) \,|\, \psi_{s,y}(h) \rangle\!\rangle \, d\lambda^+ + \iiint_{\mathrm{supp}\,\nu} D_\psi \delta_{s^-} \, \nu(s,y,h)\, d\lambda. \quad (2.3.19)$$

Or, $\lambda^-(\,\mathrm{supp}\,(\nabla_U \nu) \cap [0,t[\,) = +\infty$, et il existe donc un vecteur e_1 tel que :

$$\lambda^-(\{\langle\!\langle (\nabla_U \nu) \,\|\, e_1 \rangle\!\rangle > 0\} \cap [0,t[) = +\infty.$$

De plus, comme $\nu \in L^p(d\lambda^-)$,

$$\lambda^-(\{\langle\!\langle (\nabla_U \nu) \,\|\, e_1 \rangle\!\rangle > 0\} \cap [0,t[\cap \{|\nu| < 1\}) = +\infty. \quad (2.3.20)$$

En outre, on a le lemme suivant.

Lemme 2.3.2.1 *Si les hypothèses du théorème 2.3.2.2 sont vérifiées, on a :*

$$\lambda^-(\{\langle\!\langle (\nabla_U \nu) \,\|\, e_1 \rangle\!\rangle > 0\} \cap \{\nu = 0\}) = 0. \quad (2.3.21)$$

Preuve du Lemme 2.3.2.1.
Soit
$$I = \{(s,y,h) \,:\, \langle\!\langle (\nabla_U \nu(s,y,h)) \,\|\, e_1 \rangle\!\rangle > 0 \text{ et } |\nu(s,y,h)| < 1\},$$
On note alors, pour tout (s,y) dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$I_{s,y} = \{h \in \mathbb{R}^r, \text{ tels que } (s,y,h) \in I\}.$$

D'après l'hypothèse ($H_{2.12}$), $I_{s,y}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^r - \{0\}$. De plus, comme $\nabla_U \nu \neq 0$ sur $I_{s,y}$, l'équation $\nu = 0$ définit une sous-variété de $I_{s,y}$, éventuellement vide, et de dimension inférieure ou égale à $r-1$. Une telle sous-variété est de mesure de Lebesgue nulle. Et, par suite, comme $d\lambda^- = l(y,h)\, dsdydh$, on a :

$$\lambda^-(I \cap \{\nabla_U \nu = 0\}) = 0,$$

ce qui montre le lemme 2.3.2.1. □

Nous supposons donc, par exemple, que :

$$\lambda^-(\{\langle\!\langle (\nabla_U \nu) \,\|\, e_1 \rangle\!\rangle > 0\} \cap [0,t[\cap \{0 < \nu < 1\}) = +\infty. \quad (2.3.22)$$

Notons I^+ l'ensemble ci-dessus. Soit $(s', y', h') \in I^+$ fixé, et V un voisinage de (s', y', h') dans I^+. On note alors par $\psi_{s,y}$ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r$, vérifiant les hypothèses $(\mathrm{H}_{2.3})$ et tels que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \operatorname{supp} \psi = \bar{V}, \\ (ii) & \psi_{s,y}(h) = \alpha(s,y,h)\, e_1,\ \alpha \geq 0, \end{array}$$

(quitte à remplacer V par un $V' \subset V$.) Grâce au théorème 2.3.4.1, on a donc $D_\psi \delta > 0$ presque sûrement, si $\lambda^+(V) \geq 1$. La variable aléatoire $\delta_t(\omega)$ possède donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, conditionnellement à l'événement $\lambda^+(V) \geq 1$. On termine la preuve du théorème en réitérant cette construction pour une suite d'ouverts $V_n \subset I^+$, tels que :

$$\lambda^-\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\Big) = +\infty.$$

□

Remarque sur le (2) **de** $(\mathrm{H}_{2.12})$. *Supposons qu'on ait*

$$\lambda^-(\operatorname{supp}(\nabla_U \nu) \cap [0,t[) < \infty,$$

alors,

$$\mathbb{P}\{\lambda^+(\operatorname{supp}(\nabla_U \nu) \cap [0,t[) = 0\} > 0.$$

Or, si, $\lambda^+(\operatorname{supp} \nabla_U \nu \cap [0,t[) = 0$, *quelle que soit* $\psi_{s,y}$, *on a* $D_\psi \delta_t = 0$. *Cette méthode ne peut donc alors pas permettre de montrer l'existence d'une densité pour la variable aléatoire* $\delta_t(\omega)$.
Or, si l'ensemble $(\operatorname{supp}(\nabla_U \nu))^c \cap [0,t]$ *possède un nombre fini de composantes connexes* C_i, $1 \leq i \leq n$, *alors l'application* ν *est constante sur chaque* C_i. *Nous notons* c_i *sa valeur sur chaque composante respectivement. Comme* $\nu \in L^p(d\lambda^-)$, *on a :*

$$\lambda^-\Big(\bigcup_{c_i \neq 0} C_i\Big) < \infty,$$

et donc,

$$\lambda^-((\operatorname{supp} \nu) \cap (\operatorname{supp} \nabla_U \nu)^c \cap [0,t]) < \infty.$$

Par suite,

$$\lambda^-(\operatorname{supp} \nu \cap [0,t]) < \infty,$$

et on a alors $\mathbb{P}\{\lambda^+(\operatorname{supp} \nu \cap [0,t[) = 0\} > 0$, *donc :*

$$\mathbb{P}\{\delta_t = 1\} \geq \mathbb{P}\{\lambda^+(\operatorname{supp} \nu \cap [0,t[) = 0\} > 0.$$

La loi de la variable aléatoire δ_t ne peut donc pas être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
En revanche, si $(\mathrm{supp}\,\nabla_U \nu)^c \cap [0,t]$ possède une infinité de composantes connexes C_i, $i \in \mathbb{N}$, telles que $\nu = c_i$ sur C_i, alors, sur l'événement $\lambda^+(\mathrm{supp}\,\nabla_U \nu) = 0$, la variable aléatoire δ_t est donnée par :

$$\delta_t = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(1+c_i)\,\lambda^+(C_i) \;-\; c_i \lambda^-(C_i) \right) \right),$$

où la limite dans l'expression ci-dessus est à comprendre comme une limite dans $L^p(\Omega)$. La variable aléatoire δ_t est donc susceptible d'avoir une loi absolument continue, mais cette méthode ne permettra pas de le montrer.

2.3.3 Application à une EDPS parabolique.

Résultat principal

Nous étudions à présent l'existence d'une densité pour la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$, si V est le processus solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique écrite sous forme intégrale selon :

$$\begin{aligned} V(t,x) = \int_{\mathbf{R}^d} u_0(y)\, G_t(x,y)\, dy + \iiint f(V_-(s,y),s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h) \\ + \iint g(V(s,y),s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy, \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

où

$$G_{t-s}(x,y) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}^{\,d}}, \tag{2.3.24}$$

et $G_t(x,y) = 0$ si $t < 0$. La mesure λ ci-dessus est une mesure aléatoire de Poisson, d'intensité λ^-, avec $d\lambda^- = l(y,h)\, dsdydh$. On suppose en outre que la fonction l vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, pour un $p \in]1,2]$, $p < 1 + 2/d$.
On fait sur fes fonctions f et g les hypothèses suivantes.

$(\mathrm{H}_{2.13})$. La fonction $f(v,s,y,h)$ est de classe C^1 en v, et il existe une constante k telle que, pour tout (v,s,y,h) :

(1) $|f(v,s,y,h)| \leq k\,(1+|v|)\,|h|$;

(2) $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) \right| \leq k|h|$.

(3) $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) - \dfrac{\partial f}{\partial v}(v',s,y,h) \right| \leq k|h||v-v'|$.

($H_{2.14}$). La fonction $g(v,s,y)$ est de classe C^1 en v, et il existe une constante k' telle que, pour tout (v,s,y) :

(1) $|g(v,s,y)| \leq k'\,(1+|v|)$;

(2) $\left| \dfrac{\partial g}{\partial v}(v,s,y) \right| \leq k'$.

(3) $\left| \dfrac{\partial g}{\partial v}(v,s,y) - \dfrac{\partial g}{\partial v}(v',s,y) \right| \leq k'|v-v'|$.

Sous ces hypothèses, l'équation (2.3.23) possède une solution unique dans l'espace E_p des processus progressivement mesurables, pour lesquels :

$$\|X\|_{E_p} = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|X(t,x)|^p\}^{1/p} < \infty. \tag{2.3.25}$$

Pour étudier l'absolue continuité de la loi de $V(t,x)$, on fait en outre les hypothèses suivantes sur f :

($H_{2.15}$). La fonction $f(v,s,y,h)$ est de classe C^1 en h sur $\mathbb{R}^r - \{0\}$, et il existe une constante k", telle que, pour tout couple de réels (v,v'), et tout (s,y,h) de $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r - \{0\}$:

(1) $|\nabla_U f(v,s,y,h)| \leq k"(1+|v|)$;

(2) $|\nabla_U f(v,s,y,h) - \nabla_U f(v',s,y,h)| \leq k"|v'-v|$.

On note alors, comme dans les théorèmes 2.2.3.2 et 2.2.3.3, par $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$ l'espace vectoriel des processus X, progressivement mesurables, et tels que l'application :

$$\begin{array}{rcccl} X & : & [0,T]\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{D}^{1,p}_{\psi} \\ & & (t,x) & \longmapsto & X(t,x,\omega) \end{array} \tag{2.3.26}$$

soit continue et bornée. On munit l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$ de la norme :

$$\|X\|_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}} = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \|X(t,x)\|_{\mathbb{D}^{1,p}_{\psi}}. \tag{2.3.27}$$

Dans ce qui va suivre, on écrira seulement $f(V,h)$, et $g(V)$, de manière à alléger les écritures. Le théorème suivant permet de dériver le processus V dans la direction d'un champ de vecteurs ψ. Nous présenterons ensuite des études d'exemples, et des cas où cette dérivation permet de montrer l'existence de densité pour la loi de $V(t,x)$.

Théorème 2.3.3.1 *Nous supposons que la fonction l vérifie* $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$, *pour tout* $p \in]p_0,p_1[$, *avec* $1 \leq p_0 < p_1 \leq 1+2/d$. *Soit ψ une famille de champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^r - \{0\}$ *satisfaisant* $(\mathrm{H}_{2.3})$. *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_{2.13})$, $(\mathrm{H}_{2.14})$ *et* $(\mathrm{H}_{2.15})$ *sont vérifiées, alors l'équation (2.3.23) admet une solution unique V dans l'espace* $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, *pour tout* $p \in]p_0,p_1[$. *La dérivée directionnelle $D_\psi V$ de cette solution se calcule en dérivant formellement (2.3.23). Le processus $D_\psi V$ est la solution, dans E_p, de l'équation :*

$$\begin{aligned} D_\psi V(t,x) &= \iint D_\psi V\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ &+ \iiint G_{t-s}(x,y)\Big(\langle\!\langle \nabla_U f(V_-,h) \| \psi(h)\rangle\!\rangle\, d\lambda^+ + D_\psi V_-\, f'(V_-,h)\, d\lambda\Big). \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

<u>Démonstration du théorème 2.3.3.1.</u>
On considère l'itération :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V^0(t,x) &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_{t-s}(x,y)\, dy, \\ V^{n+1}(t,x) &=& V^0(t,x) + \displaystyle\iiint f(V^n_-,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda \\ && \qquad + \displaystyle\iint g(V^n)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy. \end{array} \right. \tag{2.3.29}$$

En particulier, on a donc $V^0 \in \mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, et si $V^n \in \mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, alors $V^{n+1} \in \mathbb{D}^{1,p}_{\psi}$, et :

$$\begin{aligned} D_\psi V^{n+1}(t,x) &= \iint D_\psi V^n\, g'(V^n)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ + & \iiint \Big(\langle\!\langle \nabla_U f(V^n_-,h) \| \psi(h)\rangle\!\rangle\ d\lambda^+ + D_\psi V^n_-\, f'(V^n_-,h)\, d\lambda\Big). \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 2.3.3.1 *Sous les hypothèses du théorème 2.3.3.1, si le processus V^n est dans l'espace* $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, *alors V^{n+1} est dans l'espace* $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$.

<u>Preuve du lemme 2.3.3.1.</u>
On va montrer seulement la continuité de l'application :

$$\begin{array}{rcl} [0,T]\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & E_p \\ (t,x) & \longmapsto & D_\psi V^{n+1}(t,x), \end{array}$$

la continuité de l'application à valeurs dans E_p : $(t,x) \mapsto V^{n+1}(t,x)$, se montrant de la même façon. On a donc :

$$
\begin{aligned}
&|D_\psi V^{n+1}(t,x) - D_\psi V^{n+1}(t',x')| \\
&\leq |D_\psi V^{n+1}(t,x) - D_\psi V^{n+1}(t',x)| + |D_\psi V^{n+1}(t',x) - D_\psi V^{n+1}(t',x')| \\
&\leq \Big| \iiint \Big((\!(\nabla_U f(V^n_-,h) \| \psi(h))\!) + D_\psi V^n_- \, f'(V^n_-,h) \Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \Big) \, d\lambda(s,y,h) \Big| \\
&+ \Big| \iint D_\psi V^n \, g'(V^n) \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \Big) \, dsdy \Big| \\
&+ \Big| \iiint (\!(\nabla_U f(V^n_-,h) \| \psi(h))\!) \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \Big) \, d\lambda^- \Big| \\
&+ \Big| \iiint \Big((\!(\nabla_U f(V^n_-,h) | \psi(h))\!) + D_\psi V^n_- \, f'(V^n_-,h) \Big) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \Big(G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \Big) d\lambda(s,y,h) \Big| \\
&+ \Big| \iint D_\psi V^n \, g'(V^n) \Big(G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \Big) \, dsdy \Big| \\
&+ \Big| \iiint (\!(\nabla_U f(V^n_-,h) \| \psi(h))\!) \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \Big) \, d\lambda^- \Big|.
\end{aligned}
$$

Notons I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, et I_6, les six termes du membre de droite ci-dessus. Nous allons utiliser les lemmes 2.3.4.2, 2.3.4.3, et 2.3.4.4 de l'appendice de cette partie, pour majorer chacun de ces termes.
Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{I_1^p\} &\leq C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}}) \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)|^p \, dsdy, \\
&\leq C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}}) \, \zeta_p(\sqrt{t'-t}),
\end{aligned}
$$

où la fonction ζ est la fonction définie dans le lemme 2.3.4.4 de l'appendice. Pour majorer I_2, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$
\begin{aligned}
I_2^p \;\leq\; & \iint |D_\psi V^n \, g'(V^n)|^p \Big| G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \Big| \, dsdy \;\times \\
& \qquad\qquad\qquad \times \Big(\iint \Big| G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \Big| \, dsdy \Big)^{p-1},
\end{aligned}
$$

et donc, grâce au lemme 2.3.4.3 :

$$\mathbb{E}\{I_2^p\} \leq C(1 + \|V^-n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, |t' - t|^p\, |\ln(|t' - t|)|^p.$$

Pour majorer I_3, notons que $|\psi(h)| \leq C|h|^p$, et que, comme la fonction l est supposée vérifier $(\mathrm{H}_{2.2})(p)$ pour un $1 < p \leq 2$, $p < 1 + 2/d$, on a, grâce à l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.15})$:

$$\int_{h \in \mathbf{R}^r} |(\!(\nabla_U f(V^n_-, h) \| \psi(h))\!)|\, l(y,h)\, dh \leq C(1 + |V^n_-|),$$

on majore alors I_3 comme I_2, avec l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} I_3^p \;\leq\; & \iint C(1 + |V^n_-|)^p \left| G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \right| dsdy \\ & \qquad\qquad \times \left(\iint \left| G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y) \right| dsdy, \right)^{p-1}, \end{aligned}$$

donc, grâce au lemme 2.3.4.3 :

$$\mathbb{E}\{I_3^p\} \leq C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, |t' - t|^p\, |\ln(|t' - t|)|^p.$$

Nous majorons maintenant I_4 en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{I_4^p\} \;&\leq\; C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}}) \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y)|^p\, dsdy, \\ &\leq\; C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, \zeta_p(|x - x'|), \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.3.4.2. Pour majorer I_5, de même que pour majorer I_2, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} I_5^p \;\leq\; & \iint |D_\psi V^n\, \bar{g}'(V^n)|^p \left| G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \right| dsdy \\ & \qquad\qquad \times \left(\iint \left| G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \right| dsdy \right)^{p-1}, \end{aligned}$$

et, en utilisant le lemme 2.3.4.2 :

$$\mathbb{E}\{I_5^p\} \leq C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, |x' - x|^p.$$

Enfin, pour majorer I_6, on utilise l'inégalité de Hölder de la même manière que pour majorer I_3, ce qui fournit :

$$\begin{aligned} I_6^p \;\leq\; & \iint C(1 + |V^n_-|)^p \left| G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \right| dsdy \\ & \qquad\qquad \times \left(\iint \left| G_{t'-s}(x,y) - G_{t'-s}(x',y) \right| dsdy, \right)^{p-1}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{E}\{I_6^p\} \leq C(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, |x' - x|^p.$$

En regroupant les majorations obtenues pour I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6, il vient :

$$\mathbb{E}\{|D_\psi V^n(t,x) - D_\psi V^n(t,x)|^p\} \leq C\,(1 + \|V^n\|^p_{\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}})\, \mathcal{E}(|t'-t| + |x'-x|),$$

avec

$$\lim_{\substack{t \to t' \\ x \to x'}} \mathcal{E}(|t'-t| + |x'-x|) = 0.$$

Il s'ensuit donc que l'application :

$$\begin{array}{rcl} [0,T] \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & E_p \\ (t,x) & \longmapsto & D_\psi V(t,x) \end{array}$$

est une application continue. $\square$

Nous allons maintenant montrer la convergence de la suite de processus V^n dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, en opérant de manière analogue à ce que nous avons fait pour l'étude de l'équation différentielle stochastique dans la preuve du théorème 2.3.2.1. Pour cela, nous remarquons d'abord que, pour $p \in]p_0, p_1[$:

$$\sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|D_\psi V^{n+1}(t,x)|^p\} \leq C + C' \int_0^t \sup_{[0,s]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|D_\psi V^n(u,x)|^p\}\,(t-s)^{\frac{-(p-1)d}{2}}\, ds,$$

et la suite $\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|D_\psi V^n(t,x)|^p\}$ est donc bornée (*cf.* démonstration du lemme 2.3.4.1). En procédant comme dans la démonstration du théorème 1.1.3.1, on montre que, si

$$H'_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{|V(t,x) - V^n(t,x)|^p\},$$

alors :

$$H'_{n+1}(t) \leq C + C' \int_0^t \frac{H'_n(s)}{(t-s)^{\frac{(p-1)d}{2}}}\, ds.$$

Par suite, grâce au lemme A1, il existe un entier k et deux constantes C et C' telles que, pour tout entier n, et tout $t \in [0,T]$:

$$H'_n(t) \leq C\, \frac{C'^{Ent(\frac{n}{k})}}{(Ent(\frac{n}{k}))!},$$

où $Ent(x)$ représente la partie entière du réel x. Par suite, pour tout $(s,y) \in [0,t]\times\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{|V(s,y) - V^n(s,y)| \geq 1/n\} \leq C\, \frac{C'^{Ent(\frac{n}{k}}}{(Ent(\frac{n}{k}))!}\, n^p,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d}\mathbb{P}\{|V(s,y)-V^n(s,y)|\geq 1/n\}\Big)=0. \tag{2.3.31}$$

On note à présent par W le processus solution de :

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \iint W\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ &\quad + \iiint G_{t-s}(x,y)\Big(\langle\!\langle \nabla_U f(V_-,h) \| \psi(h)\rangle\!\rangle\, d\lambda^+ + W_-\, f'(V_-,h)\, d\lambda\Big). \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Et on considère :

$$H_n(t)=\sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d}\Big(\mathbb{E}\{|V(s,y)-V^n(s,y)|^p\}+\mathbb{E}\{|W(s,y)-D_\psi V^n(s,y)|^p\}\Big).$$

On a donc :

$$\sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d}\mathbb{E}\{|V(s,y)-V^n(s,y)|^p\}\leq C\int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{(p-1)d}{2}}}\, ds.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} W(t,x)-D_\psi V^{n+1}(t,x) &= \iiint_0^t \Big(\langle\!\langle \nabla_U f(V_-,h)-\nabla_U f(V_-^n,h) \,\|\, \psi(h)\rangle\!\rangle\Big) G_{t-s}(x,y) d\lambda^+ \\ &+ \iiint_0^t (W_- - D_\psi V_-^n)\, f'(V_-^n,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda + \iint_0^t (W-D_\psi V^n)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ &+ \iiint_0^t W_-(f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h)) G_{t-s}(x,y) d\lambda + \iint_0^t W(g'(V)-g'(V^n)) G_{t-s}(x,y) dsdy. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a donc :

$$\begin{aligned} \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d}\mathbb{E}\{|W(s,x)-D_\psi V^n(s,x)|^p\} &\leq C\int_0^t H_{n-1}(s)(t-s)^\alpha\, ds \\ &+ \sup_{[0,t]\times\mathbf{R}^d}\mathbb{E}\Big\{\Big|\iiint W_-(f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h)) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda \\ &\qquad + \iint W(g'(V)-g'(V^n)) G_{t-s}(x,y)\, dsdy\Big|^p\Big\}. \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

pour un $\alpha > -1$. Il faut donc maintenant montrer que l'espérance ci-dessus converge vers 0, pour appliquer le lemme 2.3.4.1 et conclure la preuve du théorème.

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous avons :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\Big|\iiint W_-(s,y)(f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h))\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda\Big|^p\Big\}$$

$$\leq C \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iiint |W_-(s,y)|^p|f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h)|^p \\ G_{t-s}^p(x,y)\,\mathbf{1}_{\{|V-V^n|<1/n\}}\,d\lambda^+\Big\}$$

$$+ C' \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iiint |W_-(s,y)|^p|f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h)|^p \\ G_{t-s}^p(x,y)\,\mathbf{1}_{\{|V-V^n|\geq 1/n\}}\,d\lambda^+\Big\}$$

$$\leq \frac{C}{n^p}\Big\{\iiint \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\{|W_-(s,y)|^p\}G_{t-s}^p(x,y)\,d\lambda^-\Big\}$$

$$+ C' \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iiint |W_-(s,y)|^p|f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h)|^p \\ G_{t-s}^p(x,y)\,\mathbf{1}_{\{|V-V^n|\geq 1/n\}}\,d\lambda^+\Big\}.$$

Soit maintenant $p'>p$, $p'<p_1$, on note par q l'exposant conjugué de p'/p. L'inégalité de Hölder permet donc d'écrire :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\Big|\iiint W_-(s,y)(f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h))\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda\Big|^p\Big\}$$

$$\leq \frac{C}{n^p} + C' \sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{P}\{|V_-(s,y)-V_-^n(s,y)|\geq 1/n\}^{1/q}.$$

Or, grâce à (2.3.31), on sait que :

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{P}\{|V_-(s,y)-V_-^n(s,y)|\geq 1/n\}^{1/q}\Big)=0.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathbb{E}\Big\{\Big|\iiint W_-(s,y)(f'(V_-,h)-f'(V_-^n,h))\,G_{t-s}(x,y)\,d\lambda\Big|^p\Big\}\leq \varepsilon_n, \tag{2.3.34}$$

avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Nous étudions à présent le terme dû à la dérive g dans (2.3.33). Par l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\Big|\iint W(s,y)\,(g'(V)-g'(V^n))G_{t-s}(x,y)\,dsdy\Big|^p\Big\}$$

$$C\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iint |W(s,y)|^p\,|g'(V)-g'(V^n)|^p G_{t-s}(x,y)\,dsdy\Big\}$$

$$\le C\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iint |W(s,y)|^p\,|g'(V)-g'(V^n)|^p G_{t-s}(x,y)\mathbf{1}_{\{|V^n-V|<1/n\}}\,dsdy\Big\}$$

$$+C'\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\iint |W(s,y)|^p\,|g'(V)-g'(V^n)|^p G_{t-s}(x,y)\mathbf{1}_{\{|V^n-V|\ge1/n\}}\,dsdy\Big\}.$$

Et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder comme ci-dessus :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\Big|\iint W(s,y)\,(g'(V)-g'(V^n))G_{t-s}(x,y)\,dsdy\Big|^p\Big\}$$

$$\le \frac{C}{n^p}+C'\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d}\mathbb{P}\{|V-V^n|\ge 1/n\}^{1/q}.$$

On obtient donc une nouvelle fois :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbf{R}^d} \mathbb{E}\Big\{\Big|\iint W(s,y)\,(g'(V)-g'(V^n))G_{t-s}(x,y)\,dsdy\Big|^p\Big\}\le\varepsilon'_n \tag{2.3.35}$$

avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon'_n=0$. En reportant les majorations (2.3.34) et (2.3.35) dans (2.3.33), on obtient donc qu'il existe un $\alpha>-1$, une constante C et une suite u_n convergeant vers 0, tels que, pour tout entier n, et tout $t\in[0,T]$:

$$H_n(t)\le u_n+C\int_0^t H_{n-1}(s)\,(t-s)^\alpha\,ds. \tag{2.3.36}$$

Cette formule permet d'appliquer le lemme 2.3.4.1. La suite $H_n(t)$ converge donc uniformément sur $[0,T]$ vers la fonction nulle. La suite de processus V^n converge donc dans l'espace $\mathbb{C}^{1,p}_{b,\psi}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.3.2.1.□

Avant d'étudier quelques exemples d'application du théorème 2.3.3.1, nous comparons ces résultats avec ceux existant pour le problème analogue dans le cas de l'EDPS de Walsh (1.0.1). Si on note u la solution de cette équation, le problème de l'existence d'une densité pour la loi de $u(t,x)$, a été résolu par Pardoux et Zhang [15] en utilisant le calcul de Malliavin gaussien (*cf.* par exemple [14]). On montre que le gradient de Malliavin au point (s,y), de la variable aléatoire $u(t,x)$: $D_{s,y}u(t,x)$, est la solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} D_{s,y}u(t,x) &= \Gamma_{t-s}(x,y)f(u(s,y),s,y) \\ &\quad + \int_s^t \int_0^L \Gamma_{t-\theta}(x,\eta)\, f'(u(\theta,\eta),\theta,\eta)\, D_{s,y}u(\theta,\eta)\, W(d\theta d\eta), \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

où W est un bruit blanc gaussien sur $[0,T]\times[0,L]$, et où $\Gamma_t(x,y)$ est la fonction de Green de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \mathrm{Id}$ sur $[0,T]\times[0,L]$, avec des conditions de Dirichlet aux bords.
A partir de l'équation (2.3.37), Pardoux et Zhang montrent que, s'il existe un $y \in]0,L[$ tel que $f(V_0(y),0,y) \neq 0$, alors la loi de $u(t,x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. La démonstration utilise notamment la continuité, pour $t > s$, de l'application $(t,x) \mapsto D_{s,y}(u(t,x))$, ainsi qu'un théorème de comparaison pour les EDPS de type parabolique (*cf.* par exemple [5]).

Dans le cas d'une E.D.P.S. conduite par une mesure aléatoire de Poisson, aucun de ces deux théorèmes n'a d'équivalent. En effet, si (s,y,h) est un atome de la mesure de Poisson, alors le processus V, solution de (2.3.23), devient non borné au voisinage de (s,y,h). Ceci interdit donc une continuité conjointe en t et en x pour V ou pour $D_\psi V$, et exclut également d'obtenir un théorème de comparaison aussi général que celui qui existe pour les E.D.P.S. conduites par un bruit blanc gaussien. Les résultats d'absolue continuité que l'on obtient dans notre étude sont donc beaucoup plus restreints que ceux existant pour l'équation de Walsh.

Etude de quelques exemples

Nous présentons maintenant quelques exemples de cas où le théorème 2.3.3.1 permet de conclure à l'existence d'une densité pour la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$, le couple $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ étant fixé. Nous nous intéressons d'abord aux cas où la fonction $f(v,s,y,h)$, intervenant dans (2.3.23), ne dépend pas de V, puis nous présentons certains cas où f dépend de V, et où il est encore possible d'appliquer le théorème 2.3.3.1, pour obtenir la même conclusion.

Théorème 2.3.3.2 *Si les hypothèses du théorème 2.3.3.1 sont vérifiées, que la fonction f vérifie $f'(v) = 0$, et que :*

$$\lambda^-(\{\nabla_U f(s,y,h) \neq 0\} \cap \{[0,t]\}) = +\infty, \tag{2.3.38}$$

alors, la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration du théorème 2.3.3.2.
D'après le théorème 2.3.3.1, la dérivée de $V(t,x)$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned} D_\psi V(t,x) = & \iint D_\psi V\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ & + \iiint (\!(\nabla_U f(V_-,h) \| \psi(h))\!)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+. \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Par ailleurs, quitte à remplacer $g(v,s,y)$ par $g(v,s,y)+cv$ et $G_t(x,y)$ par $G_t(x,y)e^{-ct}$, pour un $c \geq 0$, on peut supposer que $g' \geq 0$.
Nous utilisons maintenant l'hypothèse (2.3.38). Soit $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^r$. On note, pour $1 \leq i \leq r$, $e_{-i} = -e_i$, et $e_0 = 0_{\mathbb{R}^r}$. On a alors :

$$\sum_{i=-r}^{r} \lambda^-(\{(\!(\nabla_U f(s,y,h) \| e_i)\!) > 0\} \cap \{[0,t]\}) = +\infty.$$

Donc, il existe un indice i_0 tel que :

$$\lambda^-(\{(\!(\nabla_U f(s,y,h) \| e_{i_0})\!) > 0\} \cap \{[0,t]\}) = +\infty. \tag{2.3.40}$$

Pour un tel indice i_0, notons I l'ensemble ci-dessus. On désigne par $\psi_{s,y}$ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r$ vérifiant $(\mathrm{H}_{2.3})$ et telle que, $\operatorname{supp}\psi = K \subset I$ $\psi_{s,y}(h) = \alpha(s,y,h)\, e_i$, avec $\alpha \geq 0$. Alors, on a le lemme suivant.

Lemme 2.3.3.2 *Presque sûrement pour $\mathbb{P}$, si $\lambda^+(K) \geq 1$, alors $D_\psi V > 0$.*

Preuve du lemme 2.3.3.2.
Considérons la suite de processus W^n définie par récurrence selon :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W^0 & = & \iiint (\!(\nabla_U f(V_-,h) \| \psi(h))\!)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+, \\ W^{n+1} & = & W^0 + \iint W^n\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy. \end{array} \right. \tag{2.3.41}$$

La suite W^n converge alors dans E_p vers $D_\psi V$. De plus $W^1 \geq W^0$, et si $W^{n-1} \leq W^n$, alors $W^n \leq W^{n+1}$. Par récurrence, on a donc $D_\psi V \geq W^0$. Or si $\lambda^+(K) \geq 1$, $W^0 > 0$ presque sûrement. Le lemme 2.3.3.2 est donc démontré. $\square$

Par suite, la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ possède donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, conditionnellement à l'événement $\lambda^+(K) > 0$. Pour conclure la preuve du théorème 2.3.3.2, on réitére le même processus pour d'autres compacts

K_j, $1 \leq j \leq n$, inclus dans I. On en déduit l'existence d'une densité pour la loi de $V(t,x)$, conditionnellement à l'événement :

$$\lambda^+\Big(\bigcup_{1\leq j\leq n} K_j\Big) \geq 1.$$

Comme $\lambda^-(I) = +\infty$, la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. □

Dans le cas où $f(v,s,y,h)$ dépend aussi de v, il est nécessaire d'imposer des hypothèses supplémentaires. On suppose d'abord que :

($\mathrm{H}_{2.16}$). La fonction l vérifie : $\sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{h\in\mathbb{R}^r} |h|\, l(y,h)\, dh < \infty.$

et on réécrit l'équation (2.3.23) avec une intégrale non compensée, selon :

$$\begin{aligned} V(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y)\, dy + \iiint f(V_-(s,y),s,y,h)\, G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \\ + \iint g(V(s,y),s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy, \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

avec une fonction g différente par conséquent de la fonction g de (2.3.23). La dérivée $D_\psi V$ du processus solution est alors donnée, si le théorème 2.3.3.1 s'applique, comme la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} D_\psi V(t,x) = \iint D_\psi V\, g'(V)\, G_{t-s}(x,y)\, dsdy \\ + \iiint G_{t-s}(x,y) \Big((\!(\nabla_U f(V_-,h) | \psi(h))\!) + D_\psi V_-\, f'(V_-,h) \Big)\, d\lambda^+. \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

On fait alors les hypothèses suivantes sur la fonction f.

($\mathrm{H}_{2.17}$). Pour tout (v,s,y,h) dans $\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^r$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(v,s,y,h) \geq 0.$

($\mathrm{H}_{2.18}$). Pour tout $A \geq 0$, il existe une famille de champs de vecteurs vérifiant ($\mathrm{H}_{2.3}$), telle que $\lambda^-(\operatorname{supp}\psi \cap [0,t]) \geq A$, et telle que, avec probabilité égale à 1 :

$$\lambda^-\Big(\operatorname{supp}\psi\ \cap\ \Big\{ (\!(\nabla_U f(V_-(s,y),s,y,h) | \psi_{s,y}(h))\!)\ \leq 0 \Big\}\Big) = 0.$$

Notons que, de même que dans la démonstration du théorème 2.3.3.2, on peut supposer que :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(v, s, y) \geq 0.$$

Le théorème suivant se montre alors de la même manière que le théorème 2.3.3.2.

Théorème 2.3.3.3 *Si les hypothèses du théorème 2.3.3.1 sont satisfaites, que la fonction l vérifie en outre* ($\mathrm{H}_{2.16}$)*, et que la fonction f satisfait* ($\mathrm{H}_{2.17}$) *et* ($\mathrm{H}_{2.18}$)*, alors la loi de la variable aléatoire $V(t,x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Ce théorème permet par exemple de traiter l'exemple suivant. Nous supposons que $h \in \mathbb{R}^+$, que $u_0(y) \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, et que f et g sont données respectivement par :

$$f(v, s, y, h) = (F_1(s, y) + F_2(s, y)v)\, h,$$

avec des fonctions F_1 et F_2 positives et bornées, et

$$g(v, s, y) = G_1(s, y) + G_2(s, y)v,$$

avec des fonctions G_1 et G_2 positives et bornées.
Dans ce cas en effet, le processus V, solution de l'équation (2.3.42) est strictement positif, et les hypothèses du théorème 2.3.3.3 sont donc vérifiées.

Ce résultat, est cependant assez restreint, car l'hypothèse ($\mathrm{H}_{2.17}$) est relativement contraignante. Le théorème 2.3.3.3 ne s'applique pas, par exemple dans le cas simple où $r = 1 = d$, où la mesure λ^- est donnée par :

$$d\lambda^-(s, y, h) = \frac{e^{-|h|}}{|h|^{3-\alpha}}\, dsdydh$$

et où $f(v, s, y, h) = vh$. On ne sait donc pas dans ce cas, si la loi de $V(t,x)$ possède une densité.

2.3.4 Appendice : Théorèmes techniques

Le premier théorème de cet appendice généralise le lemme de Walsh présenté en appendice du premier chapitre (lemme A1.) Cette généralisation est utile pour dériver des solutions d'équations différentielles stochastiques, ou d'équations aux dérivées partielles stochastiques.
Le deuxième théorème de cet appendice concerne les équations différentielles stochastiques, conduites par des mesures aléatoires de Poisson. Ce résultat est donné sans faire intervenir de variable d'espace ($y \in \mathbb{R}^d$). Son adaptation au cas où une telle

variable intervient ne pose toutefois pas de difficulté.
Les trois derniers lemmes de cet appendice présentent des estimations sur le noyau de la chaleur $G_t(x,y)$. Ils reprennent et complètent des résultats montrés dans l'appendice du premier chapitre.

Généralisation du lemme A1

Lemme 2.3.4.1 *Soit H_n une suite de fonctions réelles, définies et croissantes sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe un $\alpha > -1$, un réel C, et une suite u_n tendant vers 0 tels que, pour tout entier n :*

$$H_n(t) \;\leq\; u_n + C \int_0^t H_{n-1}(s)(t-s)^\alpha \, ds. \tag{2.3.44}$$

Alors la suite de fonctions H_n converge uniformément sur $[0,T]$ vers la fonction nulle.

Preuve du lemme 2.3.4.1.
Notons d'abord que, quitte à remplacer la suite u_n par la suite $\sup_{k\geq n}|u_k|$, on peut supposer que la suite u_n est positive et décroissante. Si $\alpha \geq 0$, on a, quitte à modifier la valeur de C,

$$H_n(t) \leq u_n + C \int_0^t H_{n-1}(s)\, ds. \tag{2.3.45}$$

Si $-1 < \alpha < 0$, on opère comme dans la démonstration du lemme A1, en posant $\alpha = -1+\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(t) \;&\leq\; u_{n+1} + C\int_0^t H_n(s)(t-s)^\alpha \, ds \;; \\
&\leq\; u_{n+1} + Cu_nT + C\int_0^t (t-s)^\alpha \Big(\int_0^s H_{n-1}(u)(s-u)^\alpha \, du\Big)\, ds \;; \\
&\leq\; u_{n+1} + Cu_nT + C\int_0^t H_{n-1}(u) \Big(\int_0^s (t-s)^\alpha (s-u)^\alpha \, ds\Big)\, du \;; \\
&\leq\; u_{n+1} + Cu_nT + \frac{C4}{\varepsilon}\int_0^t H_{n-1}(u)(t-u)^{-1+2\varepsilon}\, ds.
\end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{-1}{2}$, il existe donc une suite v_n, positive, décroissante, tendant vers 0 et une constante C, telles que :

$$H_{n+1}(t) \;\leq\; v_n + C\int_0^t H_{n-1}(s)\, ds.$$

Si $\alpha < \frac{-1}{2}$, on réitère, comme dans la démonstration du lemme A1, le même procédé, jusqu'à obtenir un exposant positif pour $(t-s)$ dans l'intégrale du membre de droite. Il existe donc un entier k, une suite v_n positive, décroissante, et convergeant vers zéro, et une constante C tels que, pour tout n entier et pour tout $t \in [0,T]$:

$$H_{n+k}(t) \;\le\; v_n + C \int_0^t H_n(s)\,ds. \tag{2.3.46}$$

Alors,

$$H_{n+2k}(t) \;\le\; v_{n+k} + v_n CT + C^2 \int_0^t H_n(s)\,(t-s)\,ds,$$

et, par récurrence :

$$H_{n+mk}(t) \;\le\; \sum_{i=0}^{m-1} v_{n+ik} \frac{(CT)^{m-1-i}}{(m-1-i)!} \;+\; C^m \int_0^t H_n(s)\,\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\,ds,$$

donc :

$$H_{n+mk}(t) \;\le\; v_n e^{CT} \;+\; \frac{(CT)^m}{m!}\,H_n(T). \tag{2.3.47}$$

En particulier, on a donc pour tout entier j, $0 \le j \le k-1$, pour tout m, et tout $t \in [0,T]$:

$$H_{j+mk}(t) \;\le\; v_j e^{CT} \;+\; H_j(T)\,\frac{(CT)^m}{m!}$$

et, par conséquent

$$H_{j+mk}(t) \;\le\; \Big(v_0 + \sup_{0\le j\le k-1} H_j(T)\Big)\,e^{CT}. \tag{2.3.48}$$

La suite de fonctions H_n est donc uniformément bornée sur $[0,T]$. Si l'entier n est choisi supérieur à un entier n_0, on a donc, pour tout entier m et tout $t \le T$:

$$H_{n+mk}(t) \le v_{n_0} e^{CT} + C' \frac{(CT)^m}{m!},$$

ce qui implique bien que la suite de fonctions H_n converge uniformément sur $[0,T]$ vers la fonction nulle. La preuve du lemme est donc achevée. □

Théorème de résolution

Dans ce paragraphe donc, λ^+ représente une mesure aléatoire sur $[0,T] \times \mathbb{R}^r$, d'intensité $d\lambda^- = l(y)\,dsdh$, avec une fonction l satisfaisant l'hypothèse $(\mathrm{H}_{2.7})(p)$, pour un $p \in]1,2]$. On note par $E_{p,u}$ l'espace vectoriel des processus adaptés et tels que :

$$\|V\|_{E_{p,u}} = \mathbb{E}\{\sup_{[0,T]} |V(s)|^p\}^{1/p}. \tag{2.3.49}$$

Nous présentons maintenant une résolution, dans l'espace $E_{p,u}$, de l'équation :

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} A_s d\lambda^+ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} X_{s^-} b'_s d\lambda + \int_0^t X_s a'_s ds, \tag{2.3.50}$$

les fonctions A, b', et a', vérifiant les hypothèses suivantes.

($\mathrm{H}_{2.19}$). La fonction A est prévisible, et il existe une variable aléatoire $C \in L^1(\Omega)$, telle que, pour tout (s, h, ω) :

$$|A(s,h,\omega)| \leq C(\omega)|h|^p.$$

($\mathrm{H}_{2.20}$). L'application b' est prévisible, et, il existe une constante C, telle que :

(1) $b'(s,h,\omega) \neq -1$;
(2) $|b'(s,h,\omega)| \leq C|h|$.

($\mathrm{H}_{2.21}$). L'application a' est adaptée et bornée.

C'est ce type d'équation, que l'on obtient en dérivant formellement une équation différentielle stochastique dans la direction d'une famille ψ de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^r$ (*cf.* théorèmes 2.3.2.1 et 2.3.2.2).
On note par Y_t le processus solution, dans $E_{p,u}$, de l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t = 1 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} Y_{s^-} b'_s d\lambda + \int_0^t Y_s a'_s ds. \tag{2.3.51}$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.3.4.1 *Nous supposons que la fonction l vérifie l'hypothèse* ($\mathrm{H}_{2.2}$)(p), *pour un $p \in]1,2]$. Alors, l'unique solution, dans l'espace $E_{p,u}$ de l'équation différentielle stochastique (2.3.50) est donnée par :*

$$X_t = \Big(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \frac{A_s \quad d\lambda^+}{Y_{s^-}(1 + b'_s)} \Big) Y_t. \tag{2.3.52}$$

Démonstration du théorème 2.3.4.1.
Si $X \in E_{p,u}$, est une solution de (2.3.50), alors X est une semimartingale. Comme la fonction b' est différente de -1, le processus Y_t ne peut pas s'annuler. Ce processus est encore une semimartingale, et donc, si on pose $Z_t = X_t Y_t^{-1}$, le processus Z est une nouvelle semimartingale, et $X_t = Y_t Z_t$, donc,

$$dX_t = Y_{t^-} dZ_t + Z_{t^-} dY_t + [Y, Z]_t,$$

si $[Y, Z]_t$ représente la covariation quadratique des semimartingales Y et Z (*cf* [8]). On a donc alors :

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t Y_{s^-} dZ_s + \int_0^t Z_{s^-} dY_s + \int_0^t d[Y, Z]_s, \\ &= \int_0^t Y_{s^-} dZ_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'_s Y_{s^-} Z_{s^-}\, d\lambda + \int_0^t a'_s Y_s Z_{s^-}\, ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'_s Y_{s^-} \Delta Z_s\, d\lambda^+. \end{aligned}$$

D'autre part, si $X = YZ$ est solution de (2.3.50),

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} A_s d\lambda^+ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'_s Y_{s^-} Z_{s^-} d\lambda + \int_0^t a'_s X_s Z_{s^-} ds.$$

En égalant les deux expressions ainsi obtenues pour X_t, il vient :

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} A_s d\lambda^+ = \int_0^t Y_{s^-} dZ_s + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} b'_s Y_{s^-} \Delta Z_s\, d\lambda^+,$$

ce qui impose donc :

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \frac{A_s \quad d\lambda^+}{Y_{s^-}(1 + b'_s)},$$

et :

$$X_t = \Big(\int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \frac{A_s \quad d\lambda^+}{Y_{s^-}(1 + b'_s)} \Big) Y_t.$$

Le théorème est donc démontré. □

Estimations sur le noyau de la chaleur

Nous présentons ici quelques estimations sur le noyau de la chaleur $G_t(x, y)$, qui sont nécessaires dans la démonstration du théorème 2.3.3.1. Les deux premiers lemmes

sont tirés de l'appendice du premier chapitre, et le troisième s'en déduit.
Le premier lemme correspond au Lemme A3 du premier chapitre.

Lemme 2.3.4.2 *Il existe une constante C dépendant uniquement de d, T, et p telle que, si $\|x - x'\| \leq 1/2$, alors :*

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |G_s(x,y) - G_s(x',y)|^p \, dsdy \;\leq\; C\,\zeta_p(\|x - x'\|),$$

où la fonction ζ est donnée, par :

$$\begin{array}{rcll} \zeta_p(r) & = & |r|^p & \text{si} \;\; 0 < p < 1 + \frac{1}{d+1}, \\ & = & |r|^p \ln(|r|) \vee |r|^p & \text{si} \;\; p = 1 + \frac{1}{d+1}, \\ & = & |r|^{2-d(p-1)} & \text{si} \;\; 1 + \frac{1}{d+1} < p < 2. \end{array}$$

Le second lemme reprend le lemme A4 du premier chapitre.

Lemme 2.3.4.3 *Il existe une constante C, dépendant uniquement de d, et T, telle que, si t et t' sont dans $[0,T]$, et $|t - t'| \leq 1/2$, on a :*

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)| \, dsdy \;\leq\; C|t' - t|\,|\ln(|t - t'|)|.$$

Outre les deux lemmes ci-dessus, on a le suivant.

Lemme 2.3.4.4 *Il existe une constante C dépendant uniquement de T, p, et d, telle que, si $1 \leq p < 1 + 2/d$, $|t - t'| \leq 1/2$ (t et t' étant dans $[0,T]$), alors :*

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} |G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)|^p \, dsdy \;\leq\; C\,\zeta_p(\sqrt{|t' - t|}), \tag{2.3.53}$$

où ζ_p est la fonction définie dans le lemme 2.3.4.2.

<u>Démonstration du lemme 2.3.4.4.</u>
Supposons par exemple $t \leq t'$. Par la relation de Chapman-Kolmogoroff, on a :

$$G_{t'-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y) = \int_{z \in \mathbf{R}^d} G_{t'-t}(x,z)\,(G_{t-s}(z,y) - G_{t-s}(x,y))\,dz,$$

et donc, par l'inégalité de Jensen :

$$|G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)|^p \leq \int_{z\in\mathbb{R}^d} G_{t'-t}(x,z)\,|G_{t-s}(z,y) - G_{t-s}(x,y)|^p\,dz.$$

Pour obtenir (2.3.53), on utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_y |G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)|^p\,dsdy \\
&\qquad\qquad \leq \int_z G_{t'-t}(x,z)\int_0^T\int_y |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^p\,dsdydz, \\
&\qquad\qquad \leq C\int_{z\in\mathbb{R}^d} G_{t'-t}(x,z)\,\zeta_p(\|x-z\|)\,dz.,
\end{aligned}$$

grâce au lemme 2.3.4.2, qu'on peut toujours appliquer, même si $\|z-x\| > 1/2$, car l'intégrale :

$$\int_0^T\int_{y\in\mathbb{R}^d} |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^p\,dsdy$$

est bornée uniformément en $z \in \mathbb{R}^d$. Enfin compte tenu de la définition de ζ_p (dans le Lemme 2.3.4.2), si $\mathbb{E}^W$ représente une espérance par rapport à la mesure de Wiener sur $C([0,T],\mathbb{R}^d)$, et B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$, issu de 0,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{y\in\mathbb{R}^d} |G_{t-s}(x,y) - G_{t'-s}(x,y)|^p\,dsdy &\leq \mathbb{E}^W\{\zeta_p(B(t'-t))\}, \\
&\leq \mathbb{E}^W\{\zeta_p(\sqrt{t-t'}B(1))\}, \\
&\leq C\,\zeta_p(\sqrt{t-t'}).
\end{aligned}$$

Le Lemme 2.3.4.4 est donc démontré. □

Bibliographie

[1] Jean-Michel BISMUT. Calcul des variations stochastique, et processus de sauts. *Zeitschrift für Warscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 63:147–235, 1983.

[2] Nicolas BOULEAU and Francis HIRSCH. *Dirichlet forms and analysis in Wiener spaces.* Studies in Mathematics. Wolgang de Gruyter, 1991.

[3] Eric A. CARLEN and Etienne PARDOUX. Differential calculus and integration by parts on Poisson spaces. In Kluwer, editor, *Stochastic Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics*, pages 63–73, 1990.

[4] Claude DELLACHERIE and Paul-André MEYER. *Probabilités et potentiel- Tome 2.* Number 1385 in Actualités scientifiques et industrielles. Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann edition, 1980.

[5] Catherine DONATI-MARTIN and Etienne PARDOUX. White noise driven SPDE's with reflection. *Probability Theory and Related Fields*, 95:1–24, 1993.

[6] Herbert FEDERER. *Geometric measure Theory.* Number 153 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer-Verlag, 1969.

[7] Istvan GYÖNGY and Nicolai V. KRYLOV. On stochastic equation with respect to semimartingales I. *Stochastics and stochastics reports*, 4:1–21, 1980.

[8] Jean JACOD and Albert N. SHYRYAEV. *Limit Theorems for stochastic processes.* Number 288 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer-Verlag, 1987.

[9] Stéphane JAFFARD. The multifractal nature of Lévy processes. *Universite de Paris XII*, 1994.

[10] G. KALLIANPUR, J. XIONG, G. HARDY, and S. RAMASUBRAMANIAN. The existence and uniqueness of solutions of nuclear-space valued Stochastic Differential Equations driven by Poisson random measures. *Stochastics and stochastics reports*, 50:85–122, 1994.

[11] Jean-Bernard GRAVEREAUX Klaus BICHTELER and Jean JACOD. *Malliavin Calculus for processes wih jumps.* Number 2 in Stochastic monographs. Theory and application of stochastic processes. Gordon and Breach, Science publishers, 1987.

[12] Yuri KONDRATIEV, Sergio ALBEVERIO, and RÖCKNER. Differential geometry on poisson spaces. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 323-I(10):1129–1134, 1996.

[13] David NUALART. Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. In Pierre BERNARD, editor, *Ecole d'été de probabilités de St-Flour*, to appear in LNM. Springer-Verlag, 1995.

[14] David NUALART. *Malliavin Calculus and related topics.* Probability and its applications. Springer Verlag, 1995.

[15] Etienne PARDOUX and Tusheng ZHANG. Absolute continuity of the law of the solution of a parabolic SPDE. *Journal of functional Analysis*, 112:447–458, 1993.

[16] Jean PICARD. Formules de dualité sur l'espace de Poisson. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et statistiques*, 32 (4)(4):509–548, 1996.

[17] Jean PICARD. On the existence of smooth densities for jump processes. *Probability Theory and Related Fields*, 105:481–511, 1996.

[18] Nicolas PRIVAUT. *Calcul chaotique et variationnel pour le processus de Poisson.* PhD thesis, Université de Paris VI, 1994.

[19] Daniel REVUZ and Marc YOR. *Continuous Martingales and Brownian motion.* Number 293 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer-Verlag, 1994.

[20] John B. WALSH. An introduction to SPDEs. In P.L. Hennequin, editor, *Ecole d'été de probabilité de St-Flour XIV*, number 1180 in LNM, pages 265 – 439. Springer-Verlag, 1984.