87 EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES

posés à l'oral des concours 1994 et 1995

des écoles d'ingénieurs de Yamoussoukro.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Prouver que

•si $f \neq 0$ et $f^2 = 0$ alors la matrice de f (dans une base quelconque) est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

•si $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ alors la matrice de f (dans une base quelconque) est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ de dimension 3 et f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que g est une combinaison linéaire de id, f, f^2.

<u>Exercice 3</u>. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$.
a) Soit deux endomorphismes f et g de E tels que $f \circ g - g \circ f = id_E$ (1).

Montrer que, pour tout entier n≥1, $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^{n-1}$.

b) Si E est de dimension finie, montrer qu'il est impossible de trouver f et g vérifiant (1).
c) Sur $\mathbf{K}[X]$, on définit f et g par: f: $P \mapsto P'$, g: $P \mapsto XP$.

Calculer $f \circ g - g \circ f$

<u>Exercice 4</u>. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ de dimension p. On considère (n+1) formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$ sur E.

Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{n} ker\, f_i \subset ker\, f \Rightarrow \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i .$$

Si n=p, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soit une base de E^*.

<u>Exercice 5</u>. On considère une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $S = (p_{ij})$ et on suppose que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $p_{ij} \geq 0$ et que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.
a) Montrer que 1 est valeur propre de S.
b) Montrer que si $\lambda \neq 1$ est valeur propre de S, alors $|\lambda| < 1$.

<u>Exercice 6</u>. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2 + pX + q}{(X^2 - 1)^2}$. Déterminer p et q pour que les résidus en 1 et -1 soient nuls.
Rappel: : Dans une décomposition en éléments simples, on appelle résidu relatif au pole a le coefficient de $\dfrac{1}{X - a}$.

<u>Exercice 7</u>. Étudier la loi $*$ définie sur $\mathbf{R}$ par:

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a * b = a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2} .$$

Exercice 8. Soit T la loi définie sur $I = \left]-1,1\right[$ par

$$\forall (x,y)\in I^2,\ x\,T\,y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que (I,T) est un groupe abélien.

Exercice 9. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi$.

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = -2,\ v_0 = 1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n},\ v_{n+1} = 2\,v_n.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \sqrt{2-u_n} = \pi$. En déduire une méthode de calcul de π.

Exercice 10. On considère deux réels a et b tels que $b > a > 0$. Étudier les suites (u_n) et (v_n) définies par $v_0 = a$, $u_0 = b$ et, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Exercice 11. Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$ ne dépend pas de l'entier n. Calculer I_n. Calculer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\sin(2n+1)x\,dx$. En déduire la valeur (après en avoir montré l'existence) de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Exercice 12. Pour $a\in\left]0,1\right[$ et $D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,a]$, calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{y\cos x+1}$.

En déduire $\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cos t)}{\cos t}\,dt$.

Exercice 13. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \left(x^2-y\right)\left(3x^2-y\right).$$

a) Pour tout réel λ, on pose $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$. Montrer que g_λ admet un minimum en 0.
b) f admet elle un minimum en $(0,0)$?

<u>Exercice 14</u>. Pour tout entier n≥1, on pose $a_n = \ln n$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Soit $S(x)$ sa somme sur $]-R, R[$. Montrer que $S(x)$ est équivalent à $-\ln(1-x)/(1-x)$ quand x tend vers 1^-.
Indication : on peut par exemple commencer par écrire $(1-x)S(x)$ sous forme d'une série entière dont on cherchera ensuite un équivalent.

<u>Exercice 15</u>. Montrer que la dérivée n$^{\text{ième}}$ de e^{-x^2} est de la forme $e^{-x^2}P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n ayant n racines réelles.

<u>Exercice 16</u>. Calculer l'inverse de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 17</u>. Soit t un réel et n un entier. Calculer l'inverse de la matrice carrée d'ordre n+1, $M = (m_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$, donnée par

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \ si \ i > j \\ C_j^i \, t^{j-i} \ si \ i \leq j. \end{cases}$$

<u>Exercice 18</u>. Pour tout élément P de l'ensemble $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes, on pose:

$$L(P)(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n .$$

Montrer que L définit un isomorphisme de $\mathbf{C}[X]$ sur lui-même.

<u>Exercice 19</u>. Calculer

$$det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 20</u>. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux sous espaces vectoriels A et B de même dimension. Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel X tel que

$$E = A \oplus X = B \oplus X .$$

Indication: on pourra s'inspirer, en dimension quelconque, du cas de la dimension 2.

<u>Exercice 21</u>. Résoudre $\begin{cases} x' = -7x + 9y - 6z + e^{-t} \\ y' = \ \ 6x - 10y + 6z \\ z' = 18x - 27y + 17z \end{cases}$.

<u>Exercice 22</u>. Calculer $\displaystyle \inf_{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3} \int_0^{+\infty} \left(x^3 + a x^2 + b x + c\right)^2 e^{-x}\, dx$.

<u>Exercice 23</u>. Soit f une application de classe C^1 de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + 2 f'(x)\right) = 0$. Montrer que $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication: on pourra utiliser la fonction donnée par $g(x) = e^{\frac{x}{2}} f(x)$.

<u>Exercice 24</u>. Determiner le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1} .$$

<u>Exercice 25</u>. Nature de la série $\displaystyle \sum \frac{cos\left(\sqrt{n}\right)}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1/2)$. *Indication:* on pourra faire une comparaison avec une intégrale impropre.

<u>Exercice 26</u>. Donner un équivalent, quand $x \to 1^-$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. *Indication:* on pourra faire un encadrement à l'aide d'une intégrale impropre.

<u>Exercice 27</u>. Résoudre l'équation différentielle $(2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0$. *Indication:* on pourra essayer une solution de la forme $y(x) = e^{ax}$.

<u>Exercice 28</u>. Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$. En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

<u>Exercice 29</u>. Soit une matrice à coefficients réels $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} m_{ij} \right| \leq n .$$

<u>Exercice 30</u>. Montrer que $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

<u>Exercice 31</u>. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt$.

<u>Exercice 32</u>. Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 33</u>. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

<u>Exercice 34</u>. Calculer le déterminant de la matrice A d'ordre n et de terme général

$$a_{ij} = |i - j|.$$

<u>Exercice 35</u>. Déterminer les puissances et les racines carrées de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 36</u>. Préciser la transformation de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est:

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 37</u>. **a)** On considère les 3 formes linéaires $2x - y + 3z$, $3x - 5y + z$, $4x - 7y + z$ sur $\mathbf{R}^3$. Forment-elles une base duale de $\mathbf{R}^3$?
b) Soit **K** un corps et $f_1,...,f_n$ des formes linéaires sur le **K**-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$. Montrer que pour que celles-ci forment une base du dual de $\mathbf{K}^n$ il faut et il suffit qu'il existe des vecteurs $x_1,...,x_n$ de $\mathbf{K}^n$ tels que l'on ait $f_i(x_j) = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$.

<u>Exercice 38</u>. Soit $P = (p_{ij})$ une matrice carrée réelle d'ordre n telle que, pour tout $i \geq j$, $p_{ij} = 0$.
a) Montrer que $P^n = 0$.
b) Soit $A = I_n + P$ où I_n désigne la matrice unité d'ordre n. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

<u>Exercice 39</u>. Soit E l'espace vectoriel des applications polynomiales en la variable x, de degré inférieur ou égal à n (n≥1). Montrer que l'application

$$P \mapsto \|P\| = \sup_{0 \leq k \leq n} \left|P^{(k)}(0)\right|$$

est une norme sur E.

<u>Exercice 40</u>. Calculer la somme des carrés des distances entre un sommet du polygone régulier d'ordre n inscrit dans le cercle trigonométrique et les autres sommets.

Exercice 41. On considère une application continue f de **R** dans **R**. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes:

i) L'image réciproque de tout compact est un compact.

ii) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

Exercice 42. On fixe un réel $a > 0$. Montrer qu'il existe une application $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 + a^2}.$$

Former une équation différentielle vérifiée par f. En déduire une expression de $f(t)$.

Exercice 43. On munit **R** de la distance $d(x,y) = |Arctg\, x - Arctg\, y|$.

a) Comparer cette distance à $d_1(x, y) = |x - y|$.

b) Montrer que $(\mathbf{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 44. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par:

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x, y) = \dfrac{|x\, y|^\alpha}{x^2 - x y + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 45. Calculer

$$I = \iint_D \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

où $D = \left\{ (x, y) \text{ tel que } y^2 \leq 2x \text{ et } 0 \leq x \leq 2 \right\}$.

Exercice 46. On considère une application $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue bornée. On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n f(x)}{1 + n^2 x^2}\, dx.$$

a) Montrer que I_n existe pour toute valeur de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (on pourra effectuer un changement de variable).

<u>Exercice 47</u>. On considère une application continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$f(a+b-x)=f(x).$$

a) Exprimer $\int_a^b x\ f(x)\,dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Calculer $\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+\sin x}$.

<u>Exercice 48</u>. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$f_n(x)=\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$$

pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in\mathbf{R}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

<u>Exercice 49</u>. Développer en série entière l'application $x\mapsto \ln\left(x^2-5x+6\right)$.

<u>Exercice 50</u>. Soit la fonction définie pour $x\in\mathbf{R}$ par

$$J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin t)\,dt.$$

a) Soit n un entier naturel. Établir la formule

$$\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{2n}\,dt=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

b) Donner un développement en série entière de J.

<u>Exercice 51</u>. On considère deux endomorphismes f et g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ tels que

$$f\circ g-g\circ f=f.$$

a) Montrer que $\det(f)=0$.

b) En déduire que $f^2 = 0$.

Exercice 52. Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, et symétrique. On suppose qu'il existe un entier k≥2 tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 53. Soit A une matrice (m,n) à coefficients réels et B une matrice (n,m) `a coefficients réels, avec $n \neq m$.

Montrer que l'on a $det(AB) = 0$ ou $det(BA) = 0$.

Exercice 54. Les matrices suivantes sont-elles semblables?, diagonalisables?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 55. Etant données $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, résoudre l'équation $M + Tr(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 56. On définit l'application q de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ par: $q(A) = Tr\left(A^2\right)$. Montrer que q est une forme quadratique dont on déterminera la signature.
indication : on pourra démontrer et utiliser le fait que $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est la somme directe orthogonale (pour q) du sous espace des matrices symétriques et du sous espace des matrices antisymétriques.

Exercice 57. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = e^{-t}$.

Exercice 58. Déterminer le volume dans $\mathbf{R}^n$ de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R>0. On pourra commencer par les ca n=2 et n=3 puis envisager le cas général.

Exercice 59. Soit une application $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue, différente de l'application nulle et vérifiant $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. On considère les suites d'applications (f_n) et (g_n) définies par $f_n(t) = f(nt)$ et $g_n(t) = f\left(\frac{t}{n}\right)$.

Montrer que (f_n) et (g_n) convergent simplement sans converger uniformément.

<u>Exercice 60</u>. Calculer $\sup\limits_{\substack{z\in\mathbf{C}\\|z|\leq 1}} |\sin z|$.

<u>Exercice 61</u>. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes réels positifs ou nuls, décroissante et telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que pensez vous de la réciproque?

<u>Exercice 62</u>. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ et ω une forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\omega = \sum_{1\leq i,\, j\leq 3} a_{ij} x_i\, dx_j .$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que ω soit exacte.
b) Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le segment OM dans le sens de O vers M où $M = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

<u>Exercice 63</u>. Combien faut-il calculer de termes pour avoir la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ avec deux décimales exactes?

Calculer φ telle que $\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \varphi(n)$.

En déduire une valeur approchée de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à 10^{-2} près.

<u>Exercice 64</u>. Calculer

$$I = \iint_\Delta \frac{dx\, dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } |x| \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

<u>Exercice 65</u>. Soit une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-périodique de classe C^1 et telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} (f'(t))^2\, dt .$$

Étudier le cas d'égalité.

<u>Exercice 66</u>. Trouver le point M du plan tel que la somme des carrés des distances de M aux sommets d'un triangle fixé soit minimale.

On présentera une solution analytique et une solution géométrique.

Exercice 67. Soit $T = (t_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure inversible. Déterminer le nombre d'additions, de multiplications, de divisions, nécessaires pour résoudre le système $T(x) = b$.

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ inversible, on utilise la méthode de Gauss pour résoudre le système $M(x) = b$. Déterminer le nombre d'additions, de multiplications, de divisions, nécessaires pour résoudre le système $M(x) = b$ (on supposera les pivots non nuls).

Exercice 68. Pour $0 < \alpha \leq 1/2$ étudier la convergence de la série de fonctions

$$\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}.$$

Cette série peut-elle être le développement en série de Fourier d'une fonction numérique impaire 2π-périodique continue par morceaux ?

Exercice 69. Etudier la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.

Exercice 70. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Arc}\cos(1-x)}\, dx$.

Exercice 71. Si N est une matrice nilpotente et A une matrice de même ordre que N qui commute avec A, montrer que $\det(A + M) = \det(A)$.
Indication: on pourra d'abord montrer que si H est nilpotente, $\det(I + H) = 1$.

Exercice 72. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2n} \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \iddots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ?

Exercice 73. Trouver les applications de classe C^2 de **R** dans **R** telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f''(x) = f(-x).$$

Exercice 74. Soit une application f de classe C^2 de $[0, +\infty[$ dans **R** telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f''^2(t)\, dt$ convergent. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'^2(t)\, dt$ converge.

Exercice 75. Soit f une application continue de [0,1] dans **R** et g une application continue de **R** dans **R**, de période 1. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\, g(nt)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt\,.$$

Exercice 76. Déterminer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout n≥2,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k\, u_{n-k}\,.$$

Exercice 77. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien. Pour $x_1,\dots,x_p$ vecteurs de E on note $DG(x_1,\dots, x_p)$ le déterminant de la matrice $((x_i|x_j))_{1\leq i,\, j\leq p}$. Soit V un sous-espace vectoriel de E de base $(b_1,\dots,b_k)$et $f \in E$. Montrer que la distance de f à V vaut

$$\operatorname{dist}(f,V) = \left(\frac{DG(b_1,\dots,b_k,f)}{DG(b_1,\dots, b_k)}\right)^{1/2}.$$

Application: calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + a x^2 + b x + c)\, e^{-x}\, dx\,.$

Exercice 78. Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence infini où $a_n \in]0,+\infty[$. On suppose que (b_n) est une suite de réels telle que b_n / a_n tend vers une limite finie L.

Montrer que la série $\sum b_n\, t^n$ a un rayon de convergence infini et que

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, t^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} L\,.$$

Exercice 79. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que, pour toute matrice A réelle, carrée d'ordre n, on a

$$\sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\sup\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } {}^t\!A A\}}\,.$$

<u>Exercice 80</u>. Calculer $\int_0^1 \ln t \ \ln(1-t)\ dt$. On pourra utiliser un développement en série entière.

<u>Exercice 81</u>. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$.

<u>Exercice 82</u>. a) Pour M matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, montrer que l'on peut définir l'exponentielle de M par la formule

$$\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

b) Calculer l'exponentielle d'une matrice diagonale.

c) Si P est inversible montrer que $\exp\left(P^{-1}MP\right) = P^{-1} \exp(M)\, P$.

d) Montrer que l'application exponentielle réalise une bijection continue de l'ensemble des matrices symétriques sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

<u>Exercice 83</u>. a) Pour M matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, montrer que l'on peut définir l'exponentielle de M par la formule

$$\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

b) Montrer que si deux matrices A et B commutent, $e^{A+B} = e^A . e^B$.

c) Calculer, pour $\theta \in \mathbf{R}$, $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$

d) Montrer que l'application exponentielle réalise une surjection continue de l'ensemble des matrices anti-symétriques sur l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.

<u>Exercice 84</u>. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Indication : on pourra utiliser une série entière.

<u>Exercice 85</u>. Déterminer les extréma locaux de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

<u>Exercice 86</u>. Soit θ un paramètre réel fixé différent de $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Déterminer la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n!} x^n .$$

Indication : on montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (ne dépendant que de θ).

<u>Exercice 87</u>. Résoudre dans **C** l'équation $\cos z = 2$.