MATHÉMATIQUES POUR L'ÉLÈVE INGÉNIEUR

Table des matières

Chapitre 1

Mesure et Intégration

La théorie de la mesure et la théorie dite "abstraite" de l'intégration sont à la base même de toute l'analyse moderne. Elles autorisent bien des développements qui sont impossibles dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Malheureusement cette théorie nécessite parfois une argumentation technique un peu volumineuse. Dans le cadre de ce cours, destiné aux éléves ingénieurs, nous énoncerons donc beaucoup de résultats sans démonstration.

1.1 La mesure de Lebesgue

La mesure de Lebesgue[1] sur $\mathbf{R}$ est la généralisation naturelle de la notion de longueur. Sur $\mathbf{R}^2$ la mesure de Lebesgue formalise la notion d'aire et sur $\mathbf{R}^3$ la notion de volume. En particulier, elle est construite de telle sorte qu'elle préserve la propriété fondamentale des notions qu'elle généralise, à savoir que la mesure de la réunion de deux parties disjointes est égale à la somme des mesures de ces deux parties.

Nous commençons par définir la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$. Nous passerons à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{R}^3$ dans un paragraphe ultérieur. Pour un intervalle ouvert $]a,b[$ $(a<b)$ de $\mathbf{R}$ il est naturel de poser $\lambda(]a,b[)=b-a$. Par extension on pose $\lambda(\emptyset)=0$. Le cours de topologie de la droite réelle nous permet d'affirmer que, pour tout ouvert O de $\mathbf{R}$, il existe une famille dénombrable $(]a_i,b_i[;i\in I)$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints tels que $O=\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$. Ces intervalles sont les composantes connexes de O. On notera qu'éventuellement l'un des a_i peut être égal à $-\infty$ et l'un des b_i à $+\infty$. On pose alors $\lambda(O)=\sum_{i\in I}(b_i-a_i)\in[0,+\infty]$. La question qui se pose ensuite est : comment étendre λ aux parties quelconques de $\mathbf{R}$. Une idée

[1] Henri Lebesgue : Beauvais 1875-Paris 1941

naturelle est de procéder par approximation à partir de la mesure des ouverts et de poser, pour A partie de $\mathbf{R}$, $\lambda(A) = \inf\{\lambda(O); A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbf{R}\}$, cette définition ayant toujours un sens (éventuellement cette quantité vaut $+\infty$). Malheureusement si on étend ainsi la mesure de Lebesgue à *toutes* les parties de $\mathbf{R}$, on ne dispose plus de toutes les propriétés souhaitées. Il faut se restreindre à une classe de parties que l'on appelle *boréliens*. Précisons d'ores et déja que tous les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ rencontrés par l'ingénieur ou le physicien sont des boréliens. En fait il est assez difficile de construire une partie qui n'est pas borélienne. Nous donnons le théorème fondamental d'existence de la mesure de Lebesgue sans démonstration. Celle ci est trop technique pour être incluse ici. En outre elle n'est pas très instructive en ce qui concerne la mesure de Lebesgue.

Théorème 1 *La mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$*, jusqu'à présent définie pour les ouverts de* $\mathbf{R}$*, peut être étendue à une famille de parties que l'on appelle boréliens. L'ensemble des boréliens vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Les ouverts sont des boréliens.*
2. *Si A est un borélien, $A^c = \mathbf{R} \setminus A$ est un borélien.*
3. *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de boréliens alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est un borélien.*

En fait l'ensemble des boréliens est le plus petit ensemble de parties de $\mathbf{R}$ *qui vérifie les propriétés ci-dessus. Sur l'ensemble des boréliens, la mesure de Lebesgue λ vérifie la propriété suivante : si les parties $(A_n)_{n\geq 1}$ sont des boréliens deux à deux disjoints (ie $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$) alors*

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \lambda(A_n).$$

En outre pour tout borélien A on a

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \inf\{\lambda(O);\ A \subset O,\ O \textit{ ouvert de } \mathbf{R}\} \\ &= \sup\{\lambda(K);\ K \subset A, K \textit{ compact de } \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Remarques. Ce théorème implique trivialement que les fermés de $\mathbf{R}$ sont des boréliens. En particulier tout singleton $\{x_0\}$ est borélien. En écrivant $\{x_0\} \subset]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[$ on voit que $\lambda(\{x_0\}) \leq 2/n$ pour tout entier n et donc $\lambda(\{x_0\}) = 0$. Il s'en suit que toute partie dénombrable, c'est à dire toute réunion dénombrable de singletons, est borélienne et que sa mesure est nulle. Par exemple on a $\lambda(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$. Réciproquement nous pouvons nous demander si tout borélien de mesure nulle est dénombrable. La réponse est négative comme le montre l'exexcice 24.

L'égalité $\mathbf{R} = \bigcup_{n \in bfZ} [n, n+1[$ montre que, bien que $\lambda(\mathbf{R}) = +\infty$, on peut écrire $\mathbf{R}$ comme une réunion dénombrable de boréliens de mesure de Lebesgue finie. On dit que la mesure de Lebesgue est σ –finie sur $\mathbf{R}$.

1.2 Mesures abstraites

Nous allons maintenant donner la définition générale d'une mesure sur un ensemble quelconque. La mesure de Lebesgue nous donne déjà un exemple d'un tel objet. Ensuite nous étudierons la mesure de Dirac. Elle est d'une grande utilité dans les applications car elle modélise la notion d'*impulsion.* Notons que beaucoup d'ouvrages appliqués, pour éviter le recours à la notion de mesure, font apparaitre la mesure de Dirac comme une énigmatique "fonction" à laquelle est attaché un calcul symbolique qui prête à confusion. Les outils développés dans ce chapitre évitent le recours à ces artifices. Enfin nous définirons la mesure de comptage qui permettra d'appliquer les théorèmes limites de ce chapitre aux séries.

Définition 1 *Soit X un ensemble. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de parties de X est une tribu si*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire i. e. pour tout $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable i. e. si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \in \mathcal{F}$.*

Les parties de X qui sont dans $\mathcal{F}$ sont appelées parties mesurables.
On dit que μ est une mesure σ –finie sur $(X, \mathcal{F})$ si μ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, +\infty]$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- *Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{F}$*
$$\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$
- *On peut écrire $X = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ où $F_n \in \mathcal{F}$ et $\mu(F_n) < +\infty$.*

Exemple 2 Ainsi l'ensemble des boréliens de $\mathbf{R}$ est une tribu et la mesure de Lebesgue est une mesure σ –finie sur cette tribu.

Exemple 3 L'ensemble $\{\emptyset, X\}$ est une tribu. L'ensemble de toutes les parties de X est également une tribu appelée tribu discrète sur X.

Définition 4 *Soit X un ensemble muni de la tribu discrète et $x_0 \in X$. On appelle mesure de Dirac en x_0 et on note δ_{x_0} la mesure donnée, pour tout $A \subset X$, par*

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0 & si\ x_0 \notin A \\ 1 & si\ x_0 \in A \end{cases}$$

Définition 5 *Considèrons $\mathbf{R}$ muni de sa tribu discrète. On appelle mesure de comptage relative à $\mathbf{N}$ la mesure $\nu_{\mathbf{N}}$ donnée pour tout $A \subset R$ par $\nu_{\mathbf{N}}(A) = Card(A \cap \mathbf{N})$*

Exercice 1 Vérifier que les deux définitions conduisent bien à des mesures.

Exercice 2 Montrer que la somme $\mu + \nu$ de deux mesures μ et ν donnée par $(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ est une mesure. Généraliser à la somme d'une infinité dénombrable de mesures. Comparer $\nu_{\mathbf{N}}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \delta_n$.

En plus des propriétés énoncées dans la définition même, toute mesure σ–finie vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 2 *Soit X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une mesure σ–finie μ.*

1. *Si $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathcal{F}$, on a*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

3. *Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathcal{F}$* croissante *(i. e. $A_n \subset A_{n+1}$) on a*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

4. *Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathcal{F}$* décroissante *(i. e. $A_n \supset A_{n+1}$) et vérifiant de plus $\mu(A_1) < +\infty$ on a*

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Preuve (succinte). Pour la propriété 1, on écrit $B = A \cup (B \setminus A)$, cette réunion étant disjointe. On applique ensuite la mesure μ en sachant que la mesure de la réunion de deux parties disjointes est la somme des mesures de ces parties. Pour la propriété 2, on pose $U_0 = \emptyset$, $U_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$,

($n \geq 1$) et $B_n = A_n \setminus U_{n-1} = U_n \setminus U_{n-1}$. On constate aisément que $\cup_n B_n = \cup_n A_n$ et donc $\mu(\cup_n B_n) = \mu(\cup_n A_n)$. Cette dernière quantité vaut $\sum_n \mu(B_n)$ car les B_n sont disjoints. Cette somme est elle même plus petite que $\sum_n \mu(A_n)$ puisque $B_n \subset A_n$ ce qui achève la preuve de cette propriété. Pour la propriété 3 on reprend les notations précédentes. Ici $U_n = A_n$, $\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$ et $\sum_n \mu(B_n) = \lim_n \mu(A_n)$ d'où le résultat. Enfin, pour la propriété 4 on se ramène à la propriété 3 en posant $C_n = A_1 \setminus A_n$.

Exercice 3 Donner un contre-exemple à l'assertion 4 de la propriété 2.

Définition 6 *Soit X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une mesure μ. On dit qu'une partie $A \in \mathcal{F}$ est négligeable pour μ si $\mu(A) = 0$. On dira qu'une propriété est vraie presque partout pour μ sur X si l'ensemble des $x \in X$ qui ne vérifient pas cette propriété est négligeable pour μ. On note abréviativement μ–pp. Quand on travaille sur $\mathbf{R}$ et qu'on ne précise pas la mesure de référence, il est sous entendu qu'il s'agit de la mesure de Lebesgue.*

Exemple 7 L'ensemble des rationnels est négligeable. La propriété $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est vraie presque partout. Presque tout réel est irrationnel !

1.3 Intégration par rapport à une mesure

Considèrons un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une mesure μ. Si f est une fonction de X dans $\mathbf{R}$ nous allons définir $\int_X f\,d\mu$. Comme dans la théorie de l'intégrale de Riemann, nous commençons par définir l'intégrale sur une classe de fonctions simples. Dans la théorie de l'intégrale de Riemann il s'agit des fonctions en escalier. Ici il s'agit des fonctions étagées.

1.3.1 Fonctions étagées

Définition 8 *On dit qu'une fonction φ de X dans $\mathbf{R}$ est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs $y_1, \ldots, y_n$*[2]*. En posant $\{\varphi = y_i\} = \{x \in X; \varphi(x) = y_i\}$ on peut écrire*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mathbf{1}_{\{\varphi = y_i\}}.$$

[2] et si les ensembles $\{x \in X; \varphi(x) = y_i\}$ sont mesurables.

On note $\mathcal{E}$ *l'ensemble des fonctions étagées et* $\mathcal{E}^+$ *l'ensemble des fonctions étagées positives. Pour* $\varphi \in \mathcal{E}^+$ *on pose*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mu(\{\varphi = y_i\})$$

avec la convention $0. + \infty = 0$.

Par exemple pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{1}_A$ est étagée et $\int_X \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A)$. Le lecteur pourra vérifier en exercice que l' intégration des fonctions étagées présente les propriétés usuelles de linéarité et de monotonie : pour $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+$ et $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$, $\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu + \beta \int_X \psi d\mu$ et, si $\varphi \leq \psi$ on a $\int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X \psi \, d\mu$. Nous pouvons maintenant passer à des fonctions plus générales. Il y a malgré tout une limite. Nous ne pourrons pas intégrer n'importe quelle fonction mais seulement les fonctions *mesurables*. On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ est mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$. Dans la pratique cette question de la mesurabilité ne pose pas de problème. Toutes les fonctions rencontrées par le physicien ou l'ingénieur sont mesurables. L'exercice suivant précise quelque peu cette assertion.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable est mesurable.
2. Montrer que si les fonctions $\{f_n\}$ sont mesurables alors $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables. En déduire que la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.
3. On munit $\mathbf{R}$ de sa tribu borélienne. Montrer qu'un application continue f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est mesurable.

On admettra également, même si cela n'apparait pas clairement pour l'instant, que la somme et le produit de fonctions mesurables est mesurable.

1.3.2 Intégration des fonctions positives

Définition 9 *Soit* f *une fonction mesurable positive de* X *dans* $[0, +\infty]$. *On pose alors*

$$\int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X \varphi \, d\mu; \varphi \in \mathcal{E}, \, \varphi \leq f\} \in [0, +\infty]$$

On écrit parfois simplement $\int f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$. *Si* $F \in \mathcal{F}$ *on pose*

$$\int_F f \, d\mu = \int_X f \, \mathbf{1}_F \, d\mu$$

Proposition 3

1. *Si f et g sont deux fonctions mesurables positives de X dans $[0, +\infty]$ et α et β deux réels positifs alors*
$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$
2. *Si f et g sont deux fonctions mesurables positives de X dans $[0, +\infty]$ et si $f \leq g$ alors $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.*
3. *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives qui est* croissante *c'est à dire $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n alors*
$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$
4. *Si (g_n) est une suite de fonctions mesurables positives alors*
$$\int (\sum_n g_n)\, d\mu = \sum_n \int g_n\, d\mu$$

Preuve. La propriété 2 résulte de la définition de l'intégrale d'une fonction positive à partir des fonctions étagées. Passons maintenant à la propriété 3. Notons $f = \lim_{n\to+\infty} f_n = \sup_n f_n$. $f_n \leq f_{n+1}$ entraine $\int f_n\, d\mu \leq \int f_{n+1}\, d\mu$ par la propriété 2 et la suite $(\int f_n\, d\mu)$ est croissante. Par ailleurs on a trivialement $f_n \leq f$ d'ou $\int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$. En passant à la limite on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$. Il reste à démontrer l'autre inégalité. Soit a un réel de $]0, 1[$ et φ une fonction étagée plus petite que f. Posons $F_n = \{x; a\,\varphi(x) \leq f_n(x)\}$. La suite (F_n) est une suite croissante de parties de X de réunion égale à X. En notant $y_1, \ldots, y_n$ les valeurs prises par φ on obtient
$$\int_{F_n} \varphi\, d\mu = \sum_i y_i\, \mu(\{f = y_i\} \cap F_n).$$
Par la propriété 3 de la proposition 2, $\mu(\{f = y_i\} \cap F_n)$ converge vers $\mu(\{f = y_i\})$ et par conséquent $\int_{F_n} \varphi\, d\mu$ converge vers $\int \varphi\, d\mu$. Or on a trivialement $a \int_{F_n} \varphi\, d\mu = \int_{F_n} a\,\varphi\, d\mu \leq \int_{F_n} f_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu$. En passant à la limite $n \to +\infty$ puis à la limite $a \to 1$ on obtient $\int \varphi\, d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu$. comme ceci est vraie pout toute φ étagée plus petite que f on en déduit $\int f\, d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu$ ce qui achève la preuve de la propriété 3.

La propriété 4 s'obtient en appliquant la propriété 3 à la suite $f_n = \sum_{i=1}^n g_i$.

Pour démontrer la propriété 1 nous avons besoin d'un résultat d'intérêt général.

Proposition 4 *Toute fonction mesurable f à valeurs dans $[0,+\infty]$ est la limite simple d'une suite croissante (φ_n) de fonctions étagées.*

En effet il suffit de prendre

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{4^n} \frac{k-1}{2^n}\, \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}} + 2^n\, \mathbf{1}_{\{f \geq 2^n\}}.$$

Pour achever le preuve de la propriété 1 de la proposition 3 il suffit de considérer deux suites croissantes (φ_n) et (ψ_n) de fonctions étagées convergeant respectivement vers f et g. Ensuite on utilise la propriété 3 pour passer à la limite dans $\int (\alpha\,\varphi_n + \beta\,\psi_n)\, d\mu = \alpha \int \varphi_n\, d\mu + \beta \int \psi_n\, d\mu$.

1.3.3 Intégration des fonctions réelles ou complexes

Définition 10 *Soit un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et d'une mesure μ. On dit qu'une fonction f de X dans $\mathbf{R}$ est intégrable sur X ou sommable sur X si elle est mesurable et si $\int |f|\, d\mu < +\infty$. Si tel est le cas et si $f = f_+ - f_-$ est la décomposition de f en parties positive et négative, f_+ et f_- sont intégrables et on pose*

$$\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu.$$

Si f est une application à valeurs complexes et $f = u + i\,v$ sa décomposition en parties réelles et imaginaires, on dit que f est sommable si u et v le sont ou, ce qui revient au même, si u et v sont mesurables et $\int |f|\, d\mu < +\infty$. Dans ce cas on pose $\int f\, d\mu = \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu$.

Exemple 11 (Cas de la mesure de Dirac) On considère un ensemble X muni de la tribu discrète (donc toute fonction définie sur X est mesurable) et on se donne un point $x_0 \in X$ et une fonction f de X dans $\mathbf{R}$. Que vaut alors $\int_X f\, d\delta_{x_0}$? Commençons par calculer $\int_X \varphi\, d\delta_{x_0}$ quand φ est une fonction étagée. En notant $y_1, \ldots, y_n$ les valeurs prises par φ on obtient $\int \varphi\, d\delta_{x_0} = \sum_i y_i\, \delta_{x_0}(\{\varphi = y_i\})$. Or $\delta_{x_0}(\{\varphi = y_i\})$ est nul sauf si $x_0 \in \{\varphi = y_i\}$ auquel cas $\delta_{x_0}(\{\varphi = y_i\}) = 1$ et $y_i = \varphi(x_0)$. On obtient donc $\int \varphi\, d\delta_{x_0} = \varphi(x_0)$. Alors pour toute $f \geq 0$ on a $\int_X f\, d\delta_{x_0} = \sup\{\varphi(x_0); \varphi \in \mathcal{E}^+, \varphi \leq f\} = f(x_0)$. En découpant ensuite une fonction quelconque f en sa partie positive et sa partie négative, on obtient en définitive :

$$\int_X f\, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Proposition 5 *1. Si f et g sont deux fonctions sommables de X dans $\mathbf{C}$ et α et β deux complexes alors $\alpha f + \beta g$ est une fonction sommable et*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

2. *Pour toute fonction f sommable on a $|\int f\, d\mu| \leq \int |f| d\mu$.*
3. *Si f est une fonction mesurable, g une fonction sommable et si $|f| \leq |g|$ alors f est sommable.*
4. *Si f et g sont deux fonctions sommables à valeurs réelles et $f \leq g$ alors $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.*

Toutes ces propriétés sont élémentaires et se prouvent à partir de la proposition 3. Nous engageons vivement le lecteur à le vérifier par lui-même. Par ailleurs, nous continuons à poser, comme dans le cas positif, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\int_A f\, d\mu = \int f\, \mathbf{1}_A\, d\mu$.

Proposition 6 *Soit f une fonction mesurable positive telle que $\int f\, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ–presque partout.*

Preuve. On écrit $0 = \int f\, d\mu \geq \frac{1}{n}\, \mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \geq 0$ d'où on déduit $\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\} = 0$ pour tout n. Finalement $\mu(\{f > 0\}) = \mu(\cup_n \{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$ comme annoncé.

Exercice 5 Montrer qu'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est sommable pour $\nu_{\mathbf{N}}$ si et seulement si la série $\sum f(n)$ est absolument convergente et expliciter dans ce cas $\int f\, d\nu_{\mathbf{N}}$.

1.3.4 Intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue

C'est l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue que nous utiliserons le plus dans les applications. Comment calculer une telle intégrale ? Quel est le lien avec l'intégrale de Riemann ?

Théorème 7 *Si une fonction f est Riemann-intégrable sur un intervalle $[a, b]$ alors elle est Lebesgue–intégrable sur cet intervalle c'est à dire qu'on peut définir $\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ et on a*

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exercice 6 Soit f une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ Riemann–intégrable sur tout compact de $[0,+\infty[$. Montrer que f est Lebesgue–intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente. Y a-t-il des cas où l'intégrale de Riemann est définie mais pas l'intégrale de Lebesgue correspondante ?

Exercice 7 Calculer $\int_{\mathbf{R}} \frac{d\lambda(x)}{1+x^2}$.

En vertu du théorème 7 et de l'exercice précédent on note dorénavant l'intégrale de Lebesgue comme l'intégrale de Riemann à savoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ au lieu de $\int_{\mathbf{R}} f\,d\lambda$ et $\int_a^b f(x)\,dx$ au lieu de $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$.

Exercice 8 Donner un exemple de fonction Lebesgue–intégrable sur $[0,1]$ mais pas Riemann–intégrable sur cet intervalle.

En fait la théorie de la mesure donne une intéressante caractérisation des fonctions Riemann–intégrable. On révisera la solution de l'exercice précédent au vu de ce théorème.

Théorème 8 *Une application de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si f est bornée et ses points de discontinuité forment un ensemble négligeable.*

1.4 Intégrale dépendant d'un paramètre

Nous commençons par donner deux théorèmes importants de passage à la limite sous l'intégrale. Ces deux résultats montrent la supériorité de l'intégrale de Lebesgue sur l'intégrale de Riemann. Le premier n'est autre que la propriété 3 de la proposition 3. Le cadre général des théorèmes suivant est toujours le même : *X est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu et μ une mesure σ–finie.* Un tel triplet $(X,\mathcal{F},\mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Théorème 9 (Théorème de Beppo-Levi) *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables de X dans $[0,+\infty]$ qui est* croissante *c'est à dire $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n alors on a*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Théorème 10 (Théorème de la convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{C}$ telle que*

– *pour μ–presque tout $x \in X$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n \to +\infty$,*
– *il existe une fonction g de X dans* $[0, +\infty]$ sommable *telle que pour tout n et pour μ–presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors f est sommable et

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Exercice 9 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}\,(1 + \frac{\sin x\; x^2}{\sqrt{n}})\,dx$$

$$\lim_{a\to0^+} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{(1-x)(1+ax)}}\,dx$$

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{x} + \frac{\arctan x\; x^2}{a+\log a}}$$

.

Ces calculs sont il faciles avec l'intégrale de Riemann ? Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}(1 + \frac{\sqrt{k}}{n + \sin n}).$$

Nous abordons maintenant le problème de la régularité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 11 *Soit I un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$, *$y_0 \in I$ et f une fonction de $X \times I$ dans* $\mathbf{C}$ *telle que*

– *pour μ–presque tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue en y_0,*
– *il existe une fonction sommable g de X dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tout $y \in I$, $|f(x, y)| \leq g(x)$ pour μ–presque tout x.*

Alors l'application $y \mapsto \int_X f(x, y)\,d\mu(x)$ est continue en y_0.

Théorème 12 *Soit I un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$ *et f une fonction de $X \times I$ dans* $\mathbf{C}$ *telle que*

– *pour μ–presque tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I,*

– *il existe une fonction sommable g de X dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tout $y \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq g(x)$ pour μ–presque tout x.*

Alors l'application $F : y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ est dérivable sur I et la dérivée est donnée en tout point $y_0 \in I$ par

$$\frac{df}{dy}(y_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, d\mu(x).$$

Exercice 10 Etudier la régularité de la fonction gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$.

Exercice 11 Etudier la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\, du$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.

1.5 Espaces L^p

Définition 12 *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction mesurable de X dans $\mathbf{C}$ et p un réel supérieur ou égal à 1. On note $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ si $\int_X |f|^p\, d\mu < +\infty$. Quand X est une partie de $\mathbf{R}$ et μ la mesure de Lebesgue sur cette partie on note simplement $\mathcal{L}^p(X)$.*

Exercice 12 Quelles relations vérifient les espaces suivants $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$, $\mathcal{L}^p([0, +\infty[)$, $\mathcal{L}^p([1, +\infty[)$, $\mathcal{L}^p([0, 1])$ quand $p \geq 1$ est fixé ?

Parmi les espaces suivants : $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$, $\mathcal{L}^1([1, +\infty[)$, $\mathcal{L}^1([0, 1])$, $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, $\mathcal{L}^2([1, +\infty[)$, $\mathcal{L}^2([0, 1])$, dire lesquels contiennent les fonctions suivantes

$$x \mapsto 1/x$$
$$x \mapsto 1/\sqrt{x}$$
$$x \mapsto e^{i\omega x},\ \omega \in \mathbf{R}$$
$$x \mapsto e^{ix}\, e^{-x}.$$

Comparer les espaces $\mathcal{L}^p([0, 1])$ quand p varie dans $[1, +\infty[$. Comparer $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ on pose

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p\, d\mu)^{1/p}.$$

Cette application n'est pas à proprement parler une norme car $\|f\|_p = (\int_X |f|^p\, d\mu)^{1/p} = 0$ entraine simplement $f = 0$ μ–presque partout et pas $f = 0$. On supprime cette petite difficulté facilement. On remarque que, sur les fonctions la relation "être égal presque partout" est une relation d'équivalence. On note $L^2(X, \mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation dans $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Sur $L^p(X, \mu)$ la définition $\|f\|_p = (\int_X |f|^p\, d\mu)^{1/p}$ a toujours un sens et l'application obtenue est une norme. Le point qui reste à vérifier est l'inégalité triangulaire. Ce résultat constitue une inégalité appelée inégalité de Minkowski que nous admettrons.

Un espace particulièrement interessant est $L^2(X, \mu)$. Sur cet espace la forme $(f, g) \mapsto \int_X f\, \overline{g}\, d\mu$ est un produit scalaire. On a donc affaire à un espace préhilbertien. En fait il s'agit plus encore d'un *espace de Hilbert*. Cela veut dire que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_2$ est compléte (toute suite de Cauchy converge).

Dans la language de la théorie du signal un signal de $L^1(X, \mu)$ est dit *stable* et un signal s de $L^2(X, \mu)$ est dit d'*énergie finie*, l'énergie étant alors égale à $\|s\|_2$. On parle également de moyenne pour la norme $\|\cdot\|_1$ et de moyenne quadratique pour la norme $\|\cdot\|_2$. En conséquence la convergence dans $L^1(X, \mu)$ est appelée convergence en moyenne et la convergence dans $L^2(X, \mu)$ est appelée convergence en moyenne quadratique.

Exercice 13 Etudier la convergence dans $L^1(\mathbf{R})$ et $L^2(\mathbf{R})$ des suites (f_n) données par

$$f_n(t) = \sqrt{n}\, e^{-n^2 t^2}$$

$$f_n(t) = \frac{n^2 \sin nt}{2\pi}\, \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]}(t)$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi n^2} \sqrt{n^2 - t^2}\, \mathbf{1}_{[-n, +n]}(t).$$

1.6 Intégrales multiples

Nous abordons ici le problème de l'intégration sur $\mathbf{R}^d$ avec $d > 1$. nous commençons par le probléme de construction de la mesure.

Théorème 13 *Soit $d > 1$. Il existe une unique mesure σ–finie λ_d sur $\mathbf{R}^d$ telle que, pour tous $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$,*

$$\lambda_d(\prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$*. Elle est définie sur une tribu appelée tribu des boréliens de* $\mathbf{R}^d$*. Cette tribu vérifie les propriétés des boréliens de* $\mathbf{R}$ *énoncées au théorème 1.*

Quand $d = 2$ il s'agit d'une formalisation de la notion d'aire et quand $d = 3$ de la notion de volume. La manière de calculer une intégrale vis à vis de cette mesure est décrite par les théorèmes suivants. Pour simplifier les écritures on se place d'abord dans le cas $d = 2$.

Théorème 14 (Fubini-Tonelli) *Soit une application mesurable* g *de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $[0, +\infty]$*. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^2} g\,d\lambda_2 = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} g(x,y)\,dx)\,dy = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} g(x,y)\,dy)\,dx.$$

On notera que l'égalité précédente s'entend dans $[0, +\infty]$.

Théorème 15 (Fubini) *Soit une application* f *de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{C}$ *intégrable (ie* $\int_{\mathbf{R}^2} |f|\,d\lambda_2 < +\infty$*). Alors on a*

$$\int_{\mathbf{R}^2} f\,d\lambda_2 = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx)\,dy = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy)\,dx.$$

Dans la pratique du calcul des intégrales multiples il s'avère commode de faire apparaitre le symbole d'intégration dx_i juste derrière le signe intégral auquel il est relatif. Ainsi on note $\int_{\mathbf{R}} dy \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx$ pour $\int_{\mathbf{R}}(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx)\,dy$. Par ailleurs on note $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,dxdy$ pour $\int_{\mathbf{R}^2} f\,d\lambda_2$.

Exercice 14 Pour les fonctions f données ci dessous calculer $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$, $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$, $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$:

$$f(x,y) = y\,e^{xy},$$

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\,\mathbf{1}_{[0,y]}(x),$$

$$f(x,y) = (x - \frac{1}{2})^{-3} \text{ si } 0 < y < |x - \frac{1}{2}| \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les théorèmes de Fubini et Fubini-Tonnelli sont également valables dans $\mathbf{R}^d$. Autrement dit, pour calculer l'intégrale sur $\mathbf{R}^d$ d'une application mesurable positive g on peut intégrer succesivement par rapport à chacune des variables et dans un ordre quelconque : pour tout σ permutation de $\{1, \ldots, d\}$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} g \, d\lambda_d = \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(1)} \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(2)} \ldots \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(d)} \; g(x_1, \ldots, x_d),$$

cette égalité étant vraie dans $[0, +\infty]$. Si f est une application sommable de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ on a une formule identique à la précédente :

$$\int_{\mathbf{R}^d} f \, d\lambda_d = \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(1)} \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(2)} \ldots \int_{\mathbf{R}} dx_{\sigma(d)} \; f(x_1, \ldots, x_d),$$

Pour calculer les intégrales dans $\mathbf{R}^d$, comme dans le cas unidimensionnel, une des techniques usuelles est le changement de variables.

Théorème 16 *Soit U,U' deux ouverts de $\mathbf{R}^d$, ϕ un C^1–difféomorphisme de U sur U' et g une application mesurable de U' dans $[0, +\infty]$. Alors $g \circ \phi$ est mesurable positive sur U et*

$$\int_{U'} g(y) \, dy = \int_U g \circ \phi(x) \, |J_\phi(x)| \, dx.$$

Ici $J_\phi(x)$ désigne le jacobien de ϕ en x c'est à dire :

$$J_\phi(x) = \det(\phi'(x)) = \det((\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j})_{i,j}).$$

En outre si f est une application de U' dans $\mathbf{C}$ alors f est intégrable si et seulement si $f \circ \phi \; J_\phi$ est intégrable sur U et alors

$$\int_{U'} f(y) \, dy = \int_U f \circ \phi(x) \, |J_\phi(x)| \, dx.$$

Un changement de variables courant est le passage en coordonnées sphèriques. Il s'appuie sur le résulat suivant (que le lecteur démontrera en exercice) : l'application φ :

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{d-2} & \to & \mathbf{R}^d \setminus \{x_2 = 0, x_1 \geq 0\} \\ (r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) & \mapsto & \left(\begin{array}{ccrr} x_1 & = & r & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{d-1} \\ x_2 & = & r & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{d-1} \\ x_3 & = & r & \sin\theta_2 \ldots \cos\theta_{d-1} \\ & \vdots & & \\ x_{d-1} & = & r & \sin\theta_{d-2} \cos\theta_{d-1} \\ x_d & = & r & \sin\theta_{d-1} \end{array} \right. \end{array}$$

est un C^1–difféomorphisme de jacobien $r^{d-1}\prod_{j=1}^{d-1}(\cos\theta_j)^{j-1}$. On peut alors énoncer le résultat suivant.

Proposition 17 *Soit f une application de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ sommable. On pose $\tilde f(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1}) = f\circ\varphi(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,dx = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^{d-2}} \tilde f(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1}) r^{d-1}\prod_{j=1}^{d-1}(\cos\theta_j)^{j-1}\,dr\,d\theta_1\dots\theta_{d-1}.$$

Un cas usuel d'application est celui où la fonction f est radiale c'est à dire que $\tilde f$ ne dépend que de r. Pour la simplicité de l'énoncé nous nous plaçons dans le cas positif.

Proposition 18 *Soit f une application mesurable positive de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ radiale donc de telle sorte que $f(x) = \tilde f(\|x\|)$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,dx = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^{+\infty}\tilde f(r)\,r^{d-1}\,dr.$$

Preuve. Nous utilisons le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}/2$. Cela a déjà été prouvé en exercice. On peut en donner une nouvelle preuve très rapide basée sur le théorème de Fubini et un changement de variables en coordonnées polaires (coordonnées sphèriques en dimension 2) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2+y^2}\,dxdy &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\\ &= \int_0 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Passons maintenant à la preuve de la proposition. Par la proposition 17 on sait qu'il existe une constante c telle que

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,dx = c\int_0^{+\infty}\tilde f(r)\,r^{d-1}\,dr.$$

Nous prenons $\tilde f(r) = e^{-r^2}$. On obtient

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,dx = c\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r^{d-1}\,dr.$$

Pour le membre de gauche nous utilisons le théorème de Fubini-Tonnelli. Dans le membre de droite nous effectuons le changement de variable $u = r^2$. On trouve

$$\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2}\, dx_i = \frac{c}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{d}{2}-1}\, du$$

ce qui donne bien la valeur $c = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$.

1.7 Exercices

Exercice 15 Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n\, t^{3/2}\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^3 t^2\, e^{-n^2 t^2}\, dt.$$

Exercice 16 Etudier la fonction F donnée par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(t^2+x^2)}{1+t^2}\, dt$.

Exercice 17 On définit la fonction de Bessel d'ordre 0 par $J_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u \sin\theta)\, d\theta$. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle $u\, J_0'' + J_0' + u\, J_0 = 0$.

Exercice 18 La fonction donnée par $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\delta(0) = +\infty$ est elle intégrable ? Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx$ a-t-elle un sens ? Que vaut elle ?

Exercice 19 calculer $\int_0^{+\infty} (\int_y^{+\infty} e^{-x^2}\, dx) dy$.

Exercice 20 Calculer, pour n entier, $\iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(x+y)}\, (x+y)^n\, dxdy$.

Exercice 21 Calculer la mesure de Lebesgue de $\{x \in \mathbf{R}^d; \|x\| \leq R\}$ où $R \geq 0$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Vérifier le résultat obtenu en dimension 2 et 3.

Exercice 22 (Mesures à densité) Soit h une application mesurable de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty]$ sommable sur tout sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$. Montrer que l'on définit une mesure σ–finie μ en posant, pour tout borélien A de $\mathbf{R}$: $\mu(A) = \int_A h\, d\lambda$. On dit que cette mesure a la densité h. On appelle masse totale d'une mesure μ sur $\mathbf{R}$ la quantité $\mu(\mathbf{R})$. Dans les cas suivants determiner la constante c pour que la mesure de densité h ait une masse totale égale à 1 : $h(x) = \frac{c}{a^2+x^2}$, $h(x) = c \exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$.

Exercice 23 (Convergence des mesures) Soit (μ_n) une suite de mesures définies sur $\mathbf{R}$ muni de sa tribu borélienne. On dit que μ_n converge vers μ quand n tend vers $+\infty$ si pour toute application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n \to +\infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu.$$

1. Que dire de la convergence de δ_{a_n} quand $a_n \to a$?
2. Convergence de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n}$.
3. Y a-t-il convergence de la suite des mesures dont les densités (h_n) sont données par

$$h_n = n \, \mathbf{1}_{[a, a+\frac{1}{n}]}$$

$$h_n = \frac{1}{n} \, \mathbf{1}_{[0,n]}$$

$$h_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp(-n(x-a)^2).$$

Exercice 24 (Ensemble de Cantor) On construit une suite (F_n) de fermés de $[0,1]$ par le procédé itératif suivant. Pour obtenir F_1 on retire le tiers du milieu i. e. $F_1 = [0,1] \setminus]1/3, 2/3[$. On obtient ensuite F_2 en retirant des deux segments formant F_1 les tiers du milieu i. e. $F_2 = F_1 \setminus (]1/9, 2/9[\cup]7/9, 8/9[)$. d'une manière générale, F_n est une réunion de 2^n segments de même longueur et F_{n+1} s'obtient en retirant de chacun des segments composant F_n le tiers du milieu. On pose $K = \cap_{n \geq 1} F_n$. Montrer que $K = \{x \in [0,1]; x = \sum_{i \geq 1} a_i / 3^i \,; \forall i \geq 1, \, a_i \in \{0,2\}\}$. Montrer que K est compact totalement discontinu, de mesure nulle, non dénombrable.

Exercice 25 Trouver une suite (f_n) d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ convergeant vers 0 dans $L^1([0,1])$ et $L^2([0,1])$ mais telle que $(f_n(x))$ diverge pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 26 (Fonction $\beta(p,q)$) On pose $\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} \, du$. Montrer que

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \, \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Indication. On peut partir de

$$\Gamma(p) \, \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, t^{p-1} \, dt \int_0^{+\infty} e^{-s} \, s^{q-1} \, ds$$

puis effectuer les changements de variables $s = tv$ puis $y = t(v+1)$.

Chapitre 2

Fonctions de la variable complexe

2.1 Rappels sur les séries entières

On appelle *série entière* une série d'applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, z^k$ où (a_k) est une suite de nombres complexes. Pour une telle série il existe un réel $R \in [0, +\infty]$ appelé rayon de convergence de la série et qui vérifie les propriétés suivantes. Pour tout $\rho < R$, la série converge normalement sur le disque $D(0,\rho)$. Pour tout z tel que $|z| > R$ la série diverge trivialement au point z et plus précisement $(a_k\, z^k)$ est non bornée. Le rayon de convergence R est donnée par la célèbre formule de Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Les fonctions qui sont sommes de telles séries sont nombreuses, la plus utile de toutes étant peut-être la fonction exponentielle exp : $\mathbf{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbf{C}$ définie par une série entière de rayon de convergence infini :

$$\exp(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{z^k}{k!}.$$

A partir de cette fonction sont définis

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Signalons également

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{z^k}{a^k}$$

avec rayon de convergence égal à $|a|$. Par ailleurs les polynomes rentrent trivialement dans la catégorie des fonctions sommes de séries entières. Bref, les exemples ne manquent pas ...

Nous ne rappelons pas les opérations sur les séries entières telles que somme, produit etc. Si $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, z^k$ est une série entière de rayon de convergence R, on appelle série dérivée la série entière $\sum_{k\in\mathbf{N}}(k+1)\, a_{k+1}\, z^k$. Elle a aussi pour rayon de convergence R.

On dit que la fonction f est développable en série entière au voisinage de $a \in \mathbf{C}$ si la fonction $z \mapsto f(z+a)$ est égale sur un voisinage de 0 à la somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif. Autrement dit f est développable en série entière en $a \in \mathbf{C}$ s'il existe une suite (a_k) de complexes et un réel $r > 0$ tels que la série entière $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, z^k$ a un rayon de convergence plus grand que r et pour tout $z \in D(a,r)$, $f(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, (z-a)^k$.

2.2 Fonctions holomorphes

Définition 13 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, f une application de Ω dans $\mathbf{C}$ et $a \in \Omega$. On dit que f est holomorphe en a (ou $\mathbf{C}$–dérivable en a) si la quantité $(f(z)-f(a))/(z-a)$ a une limite finie quand z tend vers a et dans ce cas on note*

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Si f est holomorphe en tout point de Ω on dit que f est holomorphe sur Ω. On note alors $f \in H(\Omega)$.

A titre d'exemple le lecteur pourra vérifier que toute fonction polynome est holomorphe sur $\mathbf{C}$ de dérivée le polynome dérivé. Mais il y a un résultat plus général donné dans la proposition suivante.

Proposition 19 *Si $f(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\,(z-a)^k$ pour tout $z \in D(a,r)$ où $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$ alors f est holomorphe sur $D(a,r)$ et on a $f'(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}}(k+1)\, a_{k+1}\,(z-a)^k$. On peut même affirmer que f est indéfiniment $\mathbf{C}$–dérivable sur $D(a,r)$ et que pour tout entier k, $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$.*

Schéma de la preuve. On établit d'abord le lemme technique suivant : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $|(\alpha+\beta)^n - \alpha^n| \le n\,|\beta|\,(|\alpha|+|\beta|)^{n-1}$. Ensuite on suppose $a = 0$ pour simplifier les écritures. On choisit $z \in D(a,r)$ et on écrit, pour $h \neq 0$,

$$|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k\, z^{k-1}| = |\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, (\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k\, z^{k-1})|$$

On scinde cette dernière somme en deux. Le second morceau est controlé indépendamment de h petit grâce au lemme. Le premier qui ne comporte qu'un nombre fini de termes tend vers 0 quand h tend vers 0.

Ainsi nous connaissons en fait un grand nombre de fonction holomorphe : toutes les fonctions qui sont sommes de séries entières. Nous établirons ultérieurement que ce sont en fait toutes les fonctions holomorphes, c'est à dire que toute fonction holomorphe est developpable en série entière au voisinage de tous les points de son domaine d'holomorphie.

Exercice 27 Montrer que si f et g sont $\mathbf{C}$–dérivables en a, alors $f+g$, $f\,g$ le sont également. Si de plus h est dérivable en $f(a)$ montrer que $h \circ f$ est dérivable en a. Dans les différents cas exprimer les dérivées.

2.3 Intégration suivant un chemin

Définition 1 *On appelle chemin toute application continue γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Si $\gamma(a)=\gamma(b)$ on dit que le chemin est fermé. On appelle image de γ l'ensemble $\gamma([a,b])$.*

Exercice 28 Donner les expressions de chemins dont les images sont respectivement un segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbf{C}$, un cercle de centre a et de rayon r.

Définition 2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, f une application continue de Ω dans $\mathbf{C}$ et $\gamma :\ [a,b] \to \Omega$ un chemin de classe C^1 par morceaux dans Ω. On pose*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Exercice 29 Montrer que si γ_2 s'obtient à partir de γ_1 par reparamétrage différentiable i. e. $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$ où ϕ dérivable alors $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Exercice 30 Montrer que dans le cadre de la définition précédente on a $\int_\gamma f(z)\,dz \le (\sup_{\gamma([a,b])} |f|)\, L(\gamma)$ où $L(\gamma)$ désigne la longueur de γ.

Exercice 31 Soit $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$, n un entier non nul, γ le chemin donné par $\gamma(t) = a + r\,e^{i2\pi t}$ pour $t \in [0,1]$ et b un point intérieur au cercle de centre a et de rayon r. Calculer

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-b}.$$

Théorème 20 (Cauchy) *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{C}$, a un point de Ω et f une application continue de Ω dans $\mathbf{C}$ holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

pour tout chemin fermé C^1 par morceaux dans Ω.

Proposition 21 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, f une application holomorphe de Ω dans $\mathbf{C}$, $\overline{D}(a,r)$ un disque inclus dans Ω et γ le chemin $\gamma(t) = a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors pour tout $z \in D(a,r)$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

2.4 Propriétés des fonctions holomorphes

Théorème 22 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et f une application holomorphe de Ω dans $\mathbf{C}$. Alors f est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω. Plus précisement f est indéfiniement $\mathbf{C}$–dérivable sur Ω et si $a \in \Omega$ et r est tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ alors la série entière $\sum_n (f^{(n)}(a)/n!)\,\zeta^n$ a un rayon de convergence supérieur à r et pour tout $z \in D(a,r)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n.$$

De plus pour tout entier n,

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\xi$$

où γ_r est le chemin fermé $\gamma_r(t) = a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Proposition 23 *Si f est une application holomorphe sur un ouvert connexe Ω non identiquement nulle alors les zéros de f sont isolés c'est à dire que si $f(a) = 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(a,r) \cap \Omega \setminus \{a\}$, $f(z) \neq 0$.*

2.5 Développements en séries de Laurent

On appelle *anneau* autour de $a \in \mathbf{C}$ tout sous ensemble de $\mathbf{C}$ de la forme $\{z;\ r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \le r_1 \le r_2 \le +\infty$.

Théorème 24 *Soit Ω un anneau autour de a et $f \in H(\Omega)$. Alors il existe une suite (c_n) telle que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$ converge uniformément sur les compacts de Ω et pour tout $z \in \Omega$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n.$$

De plus la suite (c_n) est unique et

$$c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi$$

où $r \in]r_1, r_2[$ et γ_r est le chemin donné par $\gamma_r(t) = a + r\,e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

2.6 Formule des résidus

Définition 3 *On dit qu'un chemin $\gamma :\ [a,b] \to \mathbf{C}$ est simple si, pour tout $s, t \in]a,b[$ tels que $s \ne t$, $\gamma(s) \ne \gamma(t)$.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Alors on sait que f admet un developpement en série de Laurent au voisinage de a c'est à dire que, pour z dans un voisinage de a, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n$.

Définition 14 *Le coefficient c_{-1} est appelé résidu de f en a et noté* $\mathrm{Res}(f,a)$.

Exercice 32 Calculer le résidu en chacun de ses poles de

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6}.$$

Théorème 25 (Théorème des résidus) *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, f une application holomorphe sur Ω sauf éventuelement sur un ensemble fini E et γ un chemin fermé simple dans $\Omega \setminus E$, C^1 par morceaux tel que l'intérieur de γ est dans Ω. On désigne par E' les points de E qui sont à l'intérieur de γ. Alors on a*

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{a \in E'} \mathrm{Res}(f,a).$$

Exercice 33 Calculer
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{2+\cos s}.$$

Exercice 34 Calculer
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

On pourra intégrer sur un chemin dont l'image est la réunion du segment $[-R, R]$ et d'un demi-cercle de rayon R et de centre 0.

2.7 Exercices

Exercice 35 (Equations de Cauchy-Riemann) Soit f une application holomorphe d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et $a \in \Omega$. On décompose f en sa partie réelle et imaginaire : $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $\frac{\partial u}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(a)$, f est-elle $\mathbf{C}$–dérivable en a ? En déduire que si $f \in H(\Omega)$ alors u et v sont harmoniques sur Ω.

Exercice 36 (Liouville, Cauchy, d'Alembert et Cie ...) Soit $f \in H(\Omega)$, $D(a,r) \subset \Omega$ et $M(\rho) = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|$. Prouver les inégalités suivantes dites inégalité de Cauchy :
$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leq \frac{M(\rho)}{r^n}.$$

En déduire que toute fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ et bornée est constante (théorème de Liouville).
Prouver le théorème de d'Alembert qui affirme que tout polynome à coefficients complexes non constant admet une racine complexe. Indication : sinon considérer $1/P$.

Exercice 37 Calculer
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx.$$

On pourra intégrer $\exp(iz)/(1+z^2)$ sur le chemin de l'exercice 34.

Exercice 38 Calculer
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
On pourra intégrer $\exp(iz)/z$ sur un chemin semblable au chemin de l'exercice précédent mais qui évite 0 par un petit demi-cercle de rayon ε.

Chapitre 3

Filtrage linéare, convolution

3.1 Les différentes représentations d'un filtre linéaire

Considérons le circuit électrique suivant comportant simplement une résistance R et un condensateur de capacité C. La tension de sortie $y(t)$,

mesurée aux bornes du condensateur vaut $q(t)/C$ où $q(t)$ désigne la charge du condensateur. La tension aux bornes de la résistance est égale à $R\,i(t)$ où $i(t)$ désigne l'intensité qui la traverse. Cette intensité est d'ailleurs égale à celle qui traverse le condensateur. On a donc $i(t) = q'(t) = C\,y(t)$ et la tension aux bornes de la résistance est $RC\,y'(t)$. Par la célèbre loi d'addition des tensions on trouve $x(t) = y(t) + RC\,y'(t)$. Ainsi $y(t)$ est solution de l'équation différentielle très simple suivante :

$$RC\,y' + y = x(t). \tag{3.1}$$

On résout cette équation par la méthode de la variation de la constante. On note $\tau = 1/RC$ et on suppose que le signal d'entrée $x(t)$ est nul pour $t \geq 0$.

Alors on obtient facilement la formule

$$y(t) = \int_{\mathbf{R}} h(t-s)\, x(s)\, ds \tag{3.2}$$

où $h(u) = \tau\, e^{-\tau u}\, \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u)$. La transformation $x(\cdot) \to y(\cdot)$ décrite par la formule ci-dessus sera étudiée en détail dans le prochain paragraphe. Elle porte le nom de *convolution*. Remarquons d'ores et déja les trois propriétés suivantes

- *linéarité*. Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont les sorties correspondant respectivement aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et si λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes, alors $\lambda_1\, y_1(t) + \lambda_2\, y_2(t)$ est la sortie correspondant à l'entrée $\lambda_1\, x_1(t) + \lambda_2\, x_2(t)$.
- *invariance dans le temps*. Si on translate le signal d'entrée de θ c'est à dire si on remplace $x(t)$ par $x(t+\theta)$ alors la sortie subit la même transformation.
- *continuité*. Dans un sens à préciser ultérieurement on voit que la transformation $x(\cdot) \to y(\cdot)$ est continue par rapport à x.

Ces trois propriétés sont caractéristiques des systèmes que l'on appelle *filtres linéaires*. En théorie du signal on démontre que ces filtres sont décrit par une équation telle que 3.2, éventuellement généralisée au cadre des distributions (cela sera développé dans un chapitre ultérieur). Les calculs sont particulièrement simples quand le signal d'entrée est sinusoidal. En fait on a l'habitude dans ce cas de travailler avec des signaux à valeurs complexes afin d'exploiter les propriétés opératoires des exponentielles complexes. Physiquement il faut comprendre que les tensions mesurées sont les parties réelles de ces signaux complexes. Ainsi un signal d'entrée sinusoidal est un signal de la forme $x(t) = e^{i2\pi\nu t}$. Dans ce cas l'équation 3.2 donne

$$y(t) = \frac{1}{1 + i\, 2\pi RC\nu}\, (e^{i\, 2\pi\nu t} - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

En régime permanent (t grand par rapport à $RC = 1/\tau$), le signal de sortie est donc égal à $T(\nu)\, e^{i\, 2\pi\nu t}$ avec $T(\nu) = 1/(1 + i\, 2\pi RC\nu)$, quantité dénommée *transmittance* du filtre. Il est naturel alors d'espérer, compte tenu de la linéarité du système, que si le signal d'entrée admet une décomposition de la forme

$$x(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\nu)\, e^{i\, 2\pi\nu t}\, d\nu \tag{3.3}$$

alors le signal de sortie se mettra sous la forme

$$y(t) = \int_{\mathbf{R}} T(\nu)\, \hat{x}(\nu)\, e^{i\, 2\pi\nu t}\, d\nu$$

puisque la contribution infinitésimale $\hat{x}(\nu)\,d\nu\,e^{i\,2\pi\nu t}$ est transformée en

$$T(\nu)\,\hat{x}(\nu)\,d\nu\,e^{i\,2\pi\nu t}.$$

C'est ce que nous prouverons à partir de l'équation 3.2 dans les paragraphes suivants. Autrement dit quand on connait la décomposition de $x(t)$ en fréquences, c'est à dire quand on a déterminé $\hat{x}(t)$, on obtient la décomposition en fréquence de $y(t)$ par la formule

$$\hat{y}(\nu) = T(\nu)\,\hat{x}(\nu). \tag{3.4}$$

Pour résumer le circuit que nous considèrons peut être décrit de trois manières :

- par l'équation différentielle linéaire 3.1,
- par l'équation de convolution 3.2,
- par l'équation fréquentielle 3.4.

Dans ce chapitre nous commençons par étudier les aspects mathématiques de l'opération de convolution. Nous cherchons ensuite à obtenir des représentations spectrales telles que 3.3. Elles s'obtiennent au moyen de la transformation de Fourier. Nous montrerons que cette transformation peut se définir sur plusieurs espaces de fonctions (et même en fait pour les distributions comme nous le verrons dans un prochain chapitre). Nous étudierons les propriétés opératoires de la transformation de Fourier en particulier son lien avec la convolution.

3.2 La convolution des fonctions

Théorème 26 *Soit f et g deux applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. La définition de la convolée de f et g :*

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,dt$$

a un sens dans les cas suivants

- *$f, g \in L^1(\mathbf{R})$ et dans ce cas $f * g \in L^1$ et plus précisement $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$*
- *$f, g \in L^2(\mathbf{R})$ et dans ce cas $f * g$ est bornée par $\|f\|_2\,\|g\|_2$*
- *$f \in L^1(\mathbf{R})$ et g est bornée et dans ce cas $f * g$ est bornée par $\|f\|_1\,\|g\|_\infty$*
- *f, g sont bornées et nulles sur $]-\infty, 0[$ et dans ce cas $f * g$ est bornée*
- *$f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in L^2(\mathbf{R})$ et dans ce cas $f * g \in L^2$ et plus précisement $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1\,\|g\|_2$.*

Cette opération de convolution a les propriétés suivantes :

- commutativité. *Si $f * g$ existe alors $g * f$ aussi et ces deux fonctions sont égales.*
- linéarité. *Quand les quantités écrites ont un sens, pour tous λ_1, λ_2 nombres complexes*

$$f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 f * g_1 + \lambda_2 f * g_2.$$

- associativité. *Quand les fonctions écrites ont un sens,*

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Supposons $f \in L^1(\mathbf{R})$ et g bornée ou si $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, alors $f * g$ est uniformément continue. Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ et g bornée n fois dérivable ($n \geq 1$) à dérivée n-ième bornée alors $f * g$ est n fois dérivable et $f * g^{(n)} = f * g^{(n)}$.

Exercice 39 On considère les trois fonctions $f(t) = e^{-|t|}$, $g(t) = \sin t$ et $h(t) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(a > 0)$. Préciser les convolutions que l'on peut réaliser, dire à quels espaces ces convolées appartiennent et les calculer.

Exercice 40 On pose

$$f_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\; e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Calculer $f_{m,\sigma} * f_{m',\sigma'}$.

Proposition 27 *Notons*

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\; e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ alors $f * \varphi_\varepsilon$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{R})$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ est continue alors $f * \varphi_\varepsilon \to f$ simplement. Si f est de plus uniformément continue et bornée alors la convergence est uniforme sur $\mathbf{R}$.

Exercice 41 Les mesures de densités φ_ε convergent-elles quand $\varepsilon \downarrow 0$? Quel résultat de densité est donnée par la proposition précédente ?

3.3 Transformation de Fourier des fonctions

Théorème 28 (Transformation de Fourier dans L^1) *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ donnée par*

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt.$$

On note aussi cette fonction $\mathcal{F}(f)$. Elle est continue et bornée. Plus précisement on a $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$. De plus $\mathcal{F}(f)$ tend vers 0 à l'infini. L'application $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est linéaire : on a

$$\mathcal{F}(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, \mathcal{F}(f) + \beta\, \mathcal{F}(g)$$

pour tous α, β complexes et $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. De plus pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g).$$

L'application $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est injective *: Si $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ et $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ alors $f = g$ presque partout. De plus si $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, on a la formule suivante dite* formule d'inversion*, valable pour presque tout t*

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu.$$

De plus si f admet des limites à droite et à gauche en t, notées respectivement $f(t^+)$ et $f(t^-)$, alors

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Exercice 42 Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f et expliciter quand c'est possible la formule d'inversion dans les cas suivants

$$f(t) = \mathbf{1}_{[-a,a]} \text{ (fonction porte)},$$

$$f(t) = (1 - \frac{|t|}{a})\, \mathbf{1}_{[-a,a]} \text{ (fonction triangle)},$$

$$f(t) = e^{-at}\, \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}},$$

$$f(t) = e^{-a|t|},$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma}\, e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Exercice 43 A quelle condition la transformée de Fourier d'une fonction réelle est-elle réelle ?

Proposition 29 (Propriétés de la transformation de Fourier) *Pour tout $f \in L^1(\mathbf{R})$, $a > 0$ et $\nu_0 \in \mathbf{R}$, on a*

$$\mathcal{F}(f(a \times \cdot))(\nu) = \frac{1}{a}\,\mathcal{F}(f)(\frac{\nu}{a}),$$

$$\mathcal{F}(f(\cdot - a))(\nu) = e^{-i2\pi a\nu}\mathcal{F}(f)(\nu),$$
$$\mathcal{F}(e^{i2\pi\nu_0\cdot}\, f(\cdot)) = \mathcal{F}(f)(\nu - \nu_0).$$

Si $f, g, fg, \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L^1(\mathbf{R})$ alors

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ est p fois dérivable ($p \geq 1$) et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p sont dans $L^1(\mathbf{R})$ alors

$$\mathcal{F}(f^{(p)})(\nu) = (i2\pi\nu)^p\, \mathcal{F}(f)(\nu).$$

En particulier $|\hat{f}(\nu)| \leq |2\pi\nu|^{-p}\ \|f^{(p)}\|_1$ et $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini au moins aussi vite que $1/\nu^p$.

Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ est telle que $t^p\, f(t)$ est sommable ($p \geq 1$) alors $\hat{f}$ est p fois dérivable et

$$\frac{d^p}{d\nu^p}\hat{f} = (-i2\pi)^p\, \mathcal{F}(t^p\, f(t)).$$

Remarque. Si $f \in L^1(\mathbf{R})$ est nulle en dehors d'un borné $[-T, T]$ alors $\mathcal{F}(f)$ est C^∞.

Exercice 44 Calculer la transformée de Fourier de $t^2\, e^{-t}\, \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t),\ 1/(1+t^2), 1/(2-2t+t^2),\ t/(1+t^2)^2$

Exercice 45 (Propagation de la chaleur dans une barre infinie) On considère une barre de longueur assimilable à l'infini et on désigne par $u(x,t)$ la température à l'instant $t > 0$ et au point $x \in \mathbf{R}$. On sait que cette fonction satisfait l'équation suivante, dite équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Par ailleurs la température dans la barre à l'instant 0 est connue et décrite par une certaine fonction φ : $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \varphi(x)$.

On pose $F(\nu,t) = \int e^{-i2\pi\nu x}\, u(x,t)\, dx$. Donner une relation entre F et $\partial F/\partial t$. En déduire une expresion de F. Montrer que u s'écrit comme la convolée de φ avec une certaine fonction.
N.B. On fera sur les fonctions que l'on étudie toutes les hypothèses mathématiques nécessaires pour effectuer les opérations adaptées.

Théorème 30 (Transformation de Fourier dans L^2) *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ et l'égalité suivante, dite* égalité de Plancherel *est vérifiée :*

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\nu)|^2\, d\nu = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\, dt$$

ce qui peut aussi s'écrire $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Cela permet de définir la transformée de Fourier de $f \in L^2$. En effet, quand $f \in L^2(\mathbf{R})$ la transformée de Fourier de f peut être définie par

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{+N} e^{-i2\pi\nu t}\, f(t)\, dt$$

cette limite devant être interprétée dans $L^2(\mathbf{R})$. Alors on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ c'est à dire

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\nu)|^2\, d\nu = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\, dt.$$

La fonction $\nu \mapsto |\hat{f}(\nu)|^2$ est appelée densité spectrale d'énergie.

On notera que f peut être obtenu à partir de $\hat{f}$ par la formule d'inversion suivante :

$$f(t) = \lim_{L^2;\ N\to+\infty} \int_{-N}^{+N} e^{i2\pi\nu t}\, \hat{f}(\nu)\, d\nu.$$

On définit la fonction d'auto-corrélation de $f \in L^2(\mathbf{R})$ par

$$K(\tau) = \int_{\mathbf{R}} f(s+\tau)\, \overline{f}(s)\, ds.$$

Elle est uniformément continue. Quand elle appartient à L^1 ou L^2 sa transformée de Fourier est la densité spectrale d'énergie.

Exercice 46 Calculer la transformée de Fourier de $\sin \pi a x/\pi x$. En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du.$$

Calculer le produit de convolution $\frac{\sin \pi a t}{\pi t} * \frac{\sin \pi b t}{\pi t}$.

Exercice 47 Calculer la fonction d'autocorrélation de $e^{-at}\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Vérifier que sa transformée de Fourier est la densité spectrale d'énergie.

Définition 4 (Espace de Schwartz) *On appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ indéfiniment dérivables, à décroissance rapide à l'infini ainsi que ses dérivées ; cela signifie que $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si pour tout n, p entiers*

$$\lim_{|t|\to+\infty} |t|^n\, |f^{(p)}(t)| = 0.$$

où comme d'habitude $f^{(0)} = f$. Cet espace peut être muni d'une topologie telle que l'on ait le critère de convergence suivant : la suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ converge vers $f \in \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ si et seulement si pour tout m, p entier $t^m\, f_n^{(p)}(t)$ converge uniformément vers $t^m\, f^{(p)}(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 15 Les applications indéfiniement dérivables à support compact appartiennent à $\mathcal{S}$. Sont également dans $\mathcal{S}$ les applications $e^{-a\,t^2}$ $(a > 0)$.

Proposition 31 *La transformation de Fourier est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ continue.*

3.4 Analyse spectrale des fonctions périodiques

On étudie maintenant les applications périodiques de période T. Dans toute cette section on désigne par L^p $(p \geq 1)$ l'ensemble des applications mesurables T–périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que $\int_0^T |f(t)|^p\, dt < +\infty$ et on pose

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Dans le cas $p = 2$ cette norme est associée au produit scalaire donné par

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \overline{g}(t)\, dt.$$

On notera que $L^2 \subset L^1$ et plus précisement on obtient facilement que pour tout f, $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

Définition 5 *Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on pose $e_k(t) = e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$. La famille $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une famille orthonormale de L^2. Pour tout $f \in L^1$ et tout $k \in \mathbf{Z}$ on pose*

$$c_k(f) = (f|e_k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

appelé k-ième coefficient de Fourier de f. On appelle série de Fourier la série de fonctions $\sum_{k\in\mathcal{Z}} c_k(f)\, e_k$. On note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f. On voit facilement qu'il s'agit, quand $f \in L^2$ de la projection dans L^2 de f sur Vect$\{e_k; -n \leq k \leq n\}$.

Théorème 32 (Convergence pour une fonction régulière) *Si f est de classe C^1 par morceaux alors pour tout t, $S_n(f)(t)$ converge vers $(f(t^+) + f(t^-))/2$. Si de plus f est continue alors la convergence de $S_n(f)$ vers f est uniforme.*

Théorème 33 (Convergence en moyenne quadratique) *Si f appartient à L^2 alors $S_n(f)$ converge vers f dans L^2 et on a la formule suivante, dite égalité de Bessel-Parseval*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathcal{Z}} |c_k(f)|^2$$

et de plus, pour tout $f, g \in L^2$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \overline{g}(t)\, dt = \sum_{k\in\mathcal{Z}} c_k(f)\, \overline{c_k(g)}$$

Théorème 34 (Convergence en moyenne) *Si f appartient à L^1 et si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty$ alors $S_n(f)$ converge vers f dans L^1.*

Une preuve de ce théorème est donnée à l'exercice 52

3.5 Exercices

Exercice 48 Calculer la transformée de Fourier de $t\, e^{-at^2}$.

Exercice 49 Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos \omega t\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t\, \cos \omega t}{t^2}\, dt.$$

Exercice 50 (Equation des cordes vibrantes) On considère une solution $u(x,t)$ de l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,+\infty[$ et répondant aux conditions initiales

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Par la méthode utilisée pour traiter l'équation de la chaleur, montrer que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(u)\,du.$$

Exercice 51 Donner, par son expression analytique, un exemple d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ indéfiniment différentiable à support compact.

Exercice 52 On considère une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π–périodique telle que $\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt < +\infty$ et on note $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt$. On suppose $f \in L^1$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty$. Montrer que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikt}$$

pour presque tout t. Indication Montrer que, pour tout $r \in]0,1[$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,r^{|k|}\,e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,P_r(t-s)ds$$

où $P_r(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\,e^{iku}$. Calculer P_r et étudier ses propriétés. Faire tendre r vers 1.

Exercice 53 (Formule sommatoire de Poisson) Soit une application f : $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sommable et $T > 0$. Montrer que pour presque tout $u, v \in \mathbf{R}$,

$$T\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(kT-u)\,e^{i2\pi kv} = e^{i2\pi\frac{uv}{t}} \sum_{k\in\mathcal{Z}} \hat{f}(\frac{k-v}{T})\,e^{-i2\pi\frac{k}{T}u}.$$

Indication On montrera que la fonction

$$F(u,v) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(kT-u)\,e^{i2\pi(kT-u)\frac{v}{T}}$$

est bien définie, de période T et on calculera ses coefficients de Fourier.Puis on utilisera l'exercice 52

Exercice 54 En appliquant la formule sommatoire de Poisson à la fonction $e^{-2\pi a|t|}$, montrer que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a^2+n^2}=\frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}-\frac{1}{2a^2}.$$

En déduire que $\sum_{n\geq 1}(1/n^2)=\pi^2/6$.

Exercice 55 Soit f l'application de période T définie sur $[0,T[$ par $f(t)=a\,t\,(T-t)$ $(a>0)$. Calculer sa série de Fourier et préciser la nature de la convergence de cette série vers f.

Calculer $\sum_1^{+\infty}(1/k^2)$, $\sum_1^{+\infty}((-1)^k/k^2)$, $\sum_1^{+\infty}(1/k^4)$.

Exercice 56 Soit f une application de période T, *continue.* On pose, avec les notations habituelles,

$$\Sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_n(f).$$

Montrer que $\Sigma_n(f)$ converge uniformément vers f.

3.6 Indications et réponses aux exercices

Exercice 39 $f*g(t)=\sin t$. $f*f(t)=(1+|t|)\,\exp(-|t|)$ (faire le calcul pour $t\geq 0$ et utiliser $f*f$ paire puisque f est paire). $f*h$: à calculer ! $g*h(t)=2\,\sin t\,\sin a$. $g*g$: impossible. $h*h(t)=\lambda([-a,a]\cap[t-a,t+a])=2a(1-\frac{|t|}{2a})=$ fonction triangle nulle sur $]-\infty,2a]\cup[2a,+\infty[$ et valant $2a$ en 0.

Exercice 40 Par changement de variable on peut se ramener au cas $m'=0$, $\sigma'=1$. On trouve $f_{m,\sigma}*f_{m',\sigma'}=f_{m+m',\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}$.

Exercice 41 Les mesures de densité φ_ε convergent vers la mesure de Dirac en 0. La proposition précédente prouve que les fonctions de classe C^∞ sont denses dans L^1 pour la norme de L^1. Elles sont également denses dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini pour la norme uniforme.

Exercice 42 $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-a,a]})(\nu)=(\sin(2a\pi\,\nu))/\pi\nu$, $\mathcal{F}((1-|t|/a)\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(t))(\nu)=(\sin^2(\pi\,a\,\nu)/(\pi^2\,a\,\nu^2)$ (utiliser un résultat précédent qui écrit un triangle comme carré de convolution d'une porte), $\mathcal{F}(e^{-at}\,\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}})(\nu)=1/(a+i2\pi\,\nu)$, $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\nu)=2a/(a^2+4\pi^2\,\nu^2)$, $\mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}))(\nu)=\exp(-i2\pi\,m\,\nu-$

$2\pi^2\sigma^2\,\nu^2)$.

Exercice 43 si et seulement si elle est paire ($f(t) = f(-t)$ pour presque tout t).

Exercice 44 Utiliser les propriétés de la proposition précédente en remarquant que $1/(t^2-2t+2) = 1/((t-1)^2+1)$ et que $t/(t^2+1)^2$ est la dérivée d'une fonction simple. On notera qu'une application de la formule d'inversion donne $\mathcal{F}(1/(t^2+1))(\nu) = \pi\,\exp(-2\pi\,|\nu|)$.

Exercice 45

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 4\pi^2\,\nu^2\,F = 0$$

d'où $F(\nu,t) = \exp(-4\pi^2\,\nu^2\,t)\,\hat{\varphi}(\nu)$ et

$$F(\nu,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\,\varphi(y)\,dy.$$

Exercice 46 On appliquera la formule d'inversion. L'égalité de Plancherel donne $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \pi$. Pour calculer le produit de convolution on applique la transformation de Fourier et on obtient facilement $\frac{\sin\pi at}{\pi t} * \frac{\sin\pi bt}{\pi t} = \frac{\sin\pi ct}{\pi t}$ avec $c = \min(a,b)$.

Exercice 47 $K(t) = \exp(-a|t|)/2a$.

Exercice 49 $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\cos\omega t\,dt = a/(a^2+\omega^2)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t\,\cos\omega t}{t^2}\,dt = \pi\,(1-|\omega|/2)\,\mathbf{1}_{[-2,2]}(\omega)$.

Exercice 51 L'application $t\mapsto\exp(-1/(1-t^2))\,\mathbf{1}_{]-1,1[}(t)$ est indéfiniment différentiable à support égal à $[-1,1]$.

Exercice 52 $P_r(u) = (1-r^2)/|1-r\,\exp(iu)|^2$. C'est une application positive d'intégrale 1 sur $[-\pi,\pi]$ et dont l'intégrale sur $[-\pi,\pi]\setminus[-\alpha,\alpha]$ $(\alpha>0)$ tend vers 0 quand r tend vers 1. Dans l'égalité fournie en indication il faut faire tendre r vers 1. Le membre de droite tend vers f dans L^1 par les techniques usuelles (voir théorèmes sur la convolution) et celui de gauche se traite par convergence dominée.

Exercice 55

$$f(t) = a\,T^2\,(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\,\cos(k\frac{2\pi}{T}\,t)).$$

Les séries proposées ont pour sommes $\pi^2/6, -\pi^2/12, -\pi^4/90$.

Exercice 56 Ecrire $\Sigma_n(f)$ comme la convolée de f et d'un noyau positif (noyau de Fejer).

Chapitre 4

Les distributions

4.1 Les distributions tempérées

Comme précédemment, on appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ indéfiniment différentiables, à décroissance rapide à l'infini ainsi que ses dérivées ; cela signifie que $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si pour tout m, p entiers

$$\lim_{|t| \to +\infty} |t|^m \, |f^{(p)}(t)| = 0.$$

où comme d'habitude $f^{(0)} = f$. Il s'agit bien sûr d'un espace vectoriel. Cet espace peut être muni d'une topologie telle que l'on ait le critère de convergence suivant : la suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ converge vers $f \in \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ si et seulement si pour tout m, p entier $t^m \, f_n^{(p)}(t)$ converge uniformément vers $t^m \, f^{(p)}(t)$ quand n tend vers $+\infty$. Par exemple, les applications indéfiniement différentiable à support compact appartiennent à $\mathcal{S}$. Sont également dans $\mathcal{S}$ les applications $e^{-a\,t^2}$ $(a > 0)$. Il est important de remarquer, comme cela a déja été souligné, que si une fonction appartient à l'espace de Schwartz sa dérivée et sa transformée de Fourier appartiennent aussi à l'espace de Schwartz.

Définition 6 *On appelle distribution tempérée toute application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{C}$. Autrement dit, $T : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ est une distribution si*
(i) pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$,

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \, T(\varphi) + \beta \, T(\psi).$$

(ii) pour toute suite (φ_n) *d'éléments de* $\mathcal{S}$ *qui converge dans* $\mathcal{S}$ *vers* φ *(voir la définition ci-dessus),* $T(\varphi_n)$ *converge dans* $\mathbf{C}$ *vers* $T(\varphi)$*.*

Dans la pratique on utilisera la notation $\langle T, \varphi \rangle$ *au lieu de* $T(\varphi)$ *et on appellera fonction test la fonction* φ *apparaissant dans ces expressions.*
L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{S}'$*.*

De nombreux objets usuels sont en fait des distributions. Donnons quelques exemples.

1. Si $f \in L^1$, f définit une distribution tempérée, notée $[f]$, par la formule

$$\langle [f], \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{4.1}$$

valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

2. La formule 4.1 a aussi un sens si $f \in L^2$ comme le montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou plus généralement si $f \in L^p$ $(p > 1)$ comme le montre l'inégalité de Holder.

3. La formule 4.1 a un sens si f est une application localement intégrable (c'est à dire intégrable sur tout borné) et à croissance modérée au sens suivant : il existe un polynome P tel que, au voisinage de l'infini, $|f(t)| \leq P(t)$.

4. Si μ est une mesure finie sur $\mathbf{R}$, la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi d\mu \tag{4.2}$$

a un sens pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ et définit une distribution. Par exemple la mesure de Dirac en a, δ_a, est une disribution tempérée et $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$.

Si μ est une mesure de densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue) on a alors

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu = \int \varphi(t)\, f(t)\, dt$$

et on retombe dans le cas précédent dont on sait qu'il conduit à une distribution tempérée par exemple si $f \in L^p$ $(p \geq 1)$ ou si f est localement intégrable à croissance modérée.

L'équation 4.2 peut avoir un sens et définir une distribution dans d'autres cas que les mesures finies ou à densité. Nous rencontrerons de tels exemples dans la suite.

Exercice 57 Parmi les formules suivantes, dire lesquelles définissent une distribution tempérée : $\langle T,\varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$, $\langle T,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, $\langle T,\varphi\rangle = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$, $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ (peigne de Dirac), $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,\varphi(\frac{1}{k})$, $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{N_0} \varphi^{(k)}(0)$, $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(0)$, $\langle T,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln t\,\varphi(t)\,dt$, $\langle T,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(t)\,\varphi(t)\,dt$.

Exercice 58 Montrer que la formule

$$\langle T,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

définit une distribution tempérée. Cette distribution est appelée pseudo-fonction $\frac{1}{t}$ et notée $p.f.\ \frac{1}{t}$.

Définition 7 *On dit que la distribution T est nulle sur l'ntervalle ouvert $]a,b[$ si $\langle T,\varphi\rangle = 0$ pour toute fonction φ C^∞ à support dans $]a,b[$. On appelle support de T le complémentaire de la réunion des intervalles ouverts surlesquels T est nulle.*

Par exemple le support de la distribution mesure de Dirac en a est le singleton $\{a\}$. Le support du peigne de Dirac $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_k$ est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$.

Proposition 35 *Soit f une application continue qui définit une distribution tempérée $[f]$. Le support de la distribution $[f]$ coincide avec le support de la fonction f :*

$$supp\ [f] = \overline{\{x; f(x)\neq 0\}}.$$

Exercice 59 Déterminer les supports des distributions donnés dans les exemples précédents.

On remarquera que l'on peut avoir $\varphi\in\mathcal{S}$ nulle sur le support de $T\in\mathcal{S}'$ et néanmoins $\langle T,\varphi\rangle\neq 0$. Considérer par exemple T donnée par $\langle T,\varphi\rangle = \varphi'(0)$ et $\varphi\in\mathcal{S}$ telle que $\varphi(t)=t$ sur un voisinage de 0.

On peut effectuer sur les distributions les opérations élémentaires telles que somme et produit par un réel. Si T et U sont dans $\mathcal{S}'$ et $\lambda\in\mathbf{C}$ on pose, pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle T+U,\varphi\rangle &= \langle T,\varphi\rangle + \langle U,\varphi\rangle\\ \langle\lambda T,\varphi\rangle &= \lambda\,\langle T,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

On peut effectuer sur les distributions d'autres opérations plus sophistiquées. Elles sont décrites dans les paragraphes suivants. Avant cela on étudie en exercice –mais cette notion sera utilisée dans ce qui suit– le produit d'une distribution par une fonction.

Exercice 60 Soit $T \in \mathcal{S}'$ et g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞ à croissance modérée ainsi que ses dérivées. Montrer que l'on définit une distribution tempérée $g.T$ en posant, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle g.T, \varphi \rangle = \langle T, g.\varphi \rangle.$$

4.2 Dérivation des distributions

Définition 8 *Soit T une distribution tempérée. On définit une distribution T' en posant, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

Cette distribution T' est appelée dérivée de T.

Remarque Si $T = [f]$ où f est dérivable on a $T' = [f']$ c'est à dire que la notion de dérivation des distributions généralise la notion de dérivation des fonctions.

Proposition 36 *Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle qu'il existe un nombre fini de points $a_1 < \cdots < a_n$ tels que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, f coincide sur $]a_i, a_{i+1}[$ avec la restriction à cet intervalle d'une fonction de classe C^1 sur un voisinage de $[a_i, a_{i+1}]$ (avec les conventions $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$). Ainsi l'application f' est définie presque partout. On suppose de plus que f et f' sont à croissance modérée.*
Alors la dérivée de la distribution $[f]$ est donnée par la formule

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\, \delta_{a_i}.$$

Exercice 61 Calculer les dérivées des distributions $[1]$, $[\mathbf{1}_{[0,+\infty[}]$ (fonction de Heavyside), $[\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\, \mathbf{1}_{[k,k+1[}]$, $[\ln|t|]$.

Exercice 62 Pour $T \in \mathcal{S}'$ et g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞ à croissance modérée ainsi que ses dérivées, calculer $(g.T)'$.

Exercice 63 A quelle condition sur $T \in \mathcal{S}'$ a-t-on $T' = 0$?

4.3 Transformation de Fourier des distributions

Définition 9 *Soit $T \in \mathcal{S}'$. On définit la transformée de Fourier de T, notée $\hat{T}$ ou $\mathcal{F}(T)$ en posant, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$,*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

Le lecteur vérifiera en exercice que l'objet $\hat{T}$ ainsi défini est bien une distribution tempérée.

Proposition 37 *Pour tout $T \in \mathcal{S}'$ on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)) = \check{T}$ où $\check{T}$ est défini par $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ et $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$. Pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et tout entier p, on a*

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(T))^{(p)} &= \mathcal{F}((-i2\pi\, t)^p\, T) \\ \mathcal{F}(T^{(p)}) &= (i2\pi\, \nu)^p\, \mathcal{F}(T). \end{aligned}$$

Exercice 64 Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes : $\delta = \delta_0$, δ_a, $[1]$, $[\exp(i2\pi at)]$, δ', $[t]$, $[t^p]$, $p.f.\, \frac{1}{t}$, $[\operatorname{sgn} t]$ ainsi que du peigne de Dirac $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{k\theta}$.

4.4 Convolution des distributions

Définition 10 *Soit $T, U \in \mathcal{S}'$. On définit quand cela est possible, la convolée de T et U noté $T * U$ par la formule*

$$\langle T * U, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle U_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Remarques. Comment lire la formule ci-dessus ? Il faut d'abord remarquer que si $\varphi \in \mathcal{S}$, l'application $y \mapsto \varphi(x+y)$ appartient également à $\mathcal{S}$ ce qui autorise à lui appliquer la distribution U. Le résultat est une fonction de x. Dans les "bons cas", cette fonction appartient à $\mathcal{S}$ et on peut faire agir sur elle la distribution T. Le résultat final est alors $\langle T * U, \varphi \rangle$. Il est important de noter que la définition précédente n'a pas toujours de sens. *La convolution de deux distributions tempérées n'est pas toujours définie.* Plutôt que de donner des conditions générales assurant l'existence de la convolée nous allons étudier quelques exemples.

Exercice 65 Calculer si c'est possible $T * \delta$, $T * \delta'$ ($T \in \mathcal{S}'$), $[f] * [g]$ où $f, g \in L^1$, $[\mathbf{1}_{[0,+\infty[}] * [\mathbf{1}_{[0,+\infty[}]$, $T * [1]$.

Proposition 38 *Quand les expressions écrites ont un sens, on a, pour tout* T, U, U_1, $U_2 \in \mathcal{S}'$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{C}$, $f \in \mathcal{S}$, p *entier,*
(1) $T * U = U * T$,
(2) $T * (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) = \alpha_1 T * U_1 + \alpha_2 T * U_2$,
(3) $(T * U)' = T * U' = T' * U$,
(4) $\delta * T = T$, $\delta^{(p)} * T = T^{(p)}$,
(5) $\mathcal{F}(f * T) = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(T)$,
(6) $\mathcal{F}(f.T) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T)$.

4.5 Exercices

Exercice 66 (Convergence des distributions) On peut munir l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérés d'une topologie telle que l'on ait le critère de convergence suivant. La suite de distributions (T_n) tend vers T si et seulement si, pour tout fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.
1. Si la suite de distributions (T_n) tend vers T, que dire des suites de distributions (T_n'), $(\hat{T_n})$?
2. Si pour tout n, $T_n = [f_n]$ où f_n est une fonction, étudier les liens entre la convergence au sens des distributions de (T_n) et la convergence de la suite de fonctions (f_n) au sens des divers modes de convergence étudiés dans les chapitres précédents.
3. Soit (ψ_n) une suite d'applications sommables de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty[$ telle que $\int_{\mathbf{R}} \psi_n = 1$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|t|>\alpha\}} \psi_n(t)\, dt = 0$ pour tout $\alpha > 0$. Que dire de la convergence de la suite de distributions $([\psi_n])$? Donner plusieurs exemples de telles suites (ψ_n).
4. On considère l'unique application 1–périodique g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $g(t) = 1 - 2t$ pour tout $t \in [0, 1[$.
a) Developper g en série de Fourier.
b) Calculer la dérivée de $[g]$.
c) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}[\exp(i2\pi kt)]$ converge dans $\mathcal{S}'$ vers une distribution que l'on précisera.
d) Déduire de ce qui précède une nouvelle preuve de la formule sommatoire de Poisson : $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{\varphi}(k)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.

Exercice 67 (Transformation de Laplace des distributions) On appelle distribution causale toute distribution tempérée à support inclus dans $[0, +\infty[$. On note $\mathcal{D}'_+$ leur ensemble.
1. S'agit-il d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'$? Donner des exemples de distributions causales.

2. Si T est une distribution causale, comment donner, pour $p > 0$, un sens à l'expression $\langle T, \exp(-pt)\rangle$? Cette dernière quantité est dénotée $\mathcal{L}(T)(p)$ et l'application $\mathcal{L}(T) : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ est appelée transformée de Laplace de T. Calculer, pour tout n entier et tout a réel positif, $\mathcal{L}([t^n \mathbf{1}_{[0,+\infty[}])$, $\mathcal{L}([\delta_a^{(n)}])$.

Chapitre 5

Calcul des probabilités

5.1 Des problèmes concrets

Le calcul des probabilités est une discipline particulière des mathématiques dans la mesure où elle est née et continue à se nourrir de problèmes concrets. Aussi nous préférons donner en préambule à tout développement théorique quelques questions issues de la réalité et qui pourront être résolues avec les outils que nous allons décrire.

1. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot à un tirage du loto ?
2. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? Un collègue a également deux enfants. Le plus agé est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
3. Un jeux populaire à la télévision américaine appelé "Gates of fortune" se déroule comme suit. Sur le plateau sont disposées trois portes. Cachés derrière l'une de ces portes se trouvent de somptueux cadeaux. A l'issue du jeux, le gagnant doit choisir une des portes. Une fois ce choix accompli le présentateur ouvre une porte différente de celle choisie par le candidat et derrière laquelle il n'y a pas de cadeaux (le présentateur connait la porte gagnante). Le candidat a alors deux possibilités : ou bien il maintient son premier choix ou bien il peut changer d'avis et reporter son choix sur la porte non ouverte restante. Pour conclure le candidat ouvre la porte finalement choisie et, si c'est la bonne, repart couvert de cadeaux. Quelle serait votre stratégie dans ce jeux ?
4. Un fabriquant de balles de tennis estime que 2 % des balles produites dans son usine sont défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une boite de 2 balles contienne au moins une balle défectueuse ?

5. Dans un pays sévit une terrible épidémie. Un test a été élaboré par un laboratoire pharmaceutique. Si la personne testée est malade le test est positif. Si la personne testée n'est pas malade le test est bien négatif dans 98 % des cas. L'Organisation Mondiale de la Santé estime que 1 personne sur 500 est malade. Un médecin vient d'effectuer le test sur un de ces patients et il se révéle positif. Quelle est la probabilité que le patient soit malade ?

5.2 Le modèle probabiliste

Le modèle probabiliste repose sur la notion d'espace probabilisé.

Définition 11 *On appelle* espace probabilisé *un triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *où* Ω *est un ensemble appelé univers des possibles,* $\mathcal{A}$ *est une tribu,* P *est une* probabilité *c'est à dire une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *de masse totale égale à 1. Autrement dit* P *est une application de* $\mathcal{A}$ *dans* $[0, +\infty[$ *telle que, pour toute suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints,*

$$P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

(propriété de σ*–additivité) et de plus*

$$P(\Omega) = 1.$$

Les éléments de $\mathcal{A}$ *sont appelés* événements*. Ce sont les parties de* Ω *dont on peut calculer la probabilité.*

Il résulte des définitions précédentes quelques propriétés élémentaires. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, Ω est la réunion disjointe de A et de A^c et la propriété de σ–additivité donne alors

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

En particulier pour tout $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Exercice 68 Si A et B sont deux événements, montrer que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Comment le modèle théorique abstrait d'espace probabilisé peut-il servir dans la modélisation d'une expérience aléatoire concrète ?

L'univers des possibles Ω décrit l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire. Dans les cas simples, il est fini, la tribu $\mathcal{A}$ est simplement $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω) et la probabilité P est la probabilité uniforme sur Ω donnée, pour tout $A \subset \Omega$, par

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

ou, de manière équivalente, par

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#(\Omega)}$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Ce cas de figure correspond à une expérience aléatoire dont les issues possibles sont en nombre fini et *équiprobables*.

Prenons le problème 1. Un tirage du loto correspond au choix aléatoire de six nombres dans l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$. L'univers des possibles Ω_1 associé à cette expérience est l'ensemble des parties à six éléments dans $\{1, \dots, 49\}$. De plus la probabilité naturellement associée à cette expérience est la probabilité uniforme : chaque tirage a la même chance de sortir à savoir

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#(\Omega)} = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

pour tout $\omega \in \Omega_1$.

Passons au problème 2. Mon voisin a deux enfants. Si le sexe de ces enfants est pour moi inconnu je peux considérer le sexe de ces enfants comme le résultat d'un phénomène aléatoire. L'univers des possibles est

$$\Omega = \{(f, f),\ (f, g),\ (g, f),\ (g, g)\}$$

où dans chaque couple la première composante désigne le sexe de l'ainé et la seconde le sexe du cadet. Il est naturel de munir Ω de la probabilité uniforme.

En fait je sais que mon voisin a une fille ce qui réduit l'univers des possibles à $\Omega_1 = \{(f, f),\ (f, g),\ (g, f)\}$ que l'on munit de la probabilité P_1 uniforme. Il s'agit alors de déterminer la probabilité que l'autre enfant soit un garçon c'est à dire la probabilité de l'événement $A_1 = \{(f, g),\ (g, f)\}$. On a alors

$$P_1(A_1) = \frac{\#(A_1)}{\#(\Omega_1)} = \frac{2}{3}.$$

Par ailleurs je sais qu'un de mes collègues a également deux enfants et que l'ainé est une fille. L'univers des possibles est $\Omega_2 = \{(f,f),\ (f,g)\}$. On le munit de la probabilité uniforme P_2. On cherche la probabilité que l'autre enfant soit un garçon, c'est à dire la probabilité de l'événement $A_2 = \{(f,g)\}$. Alors

$$P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 69 On désire former un jury composé de 3 enseignants et 2 professionnels choisis parmi 5 enseignants et 7 professionnels. Parmi les 5 enseignants il y a un professeur de mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie du jury ?

Les cas d'équiprobabilité ne sont pas les seuls cas à considérer. Prenons par exemple le cas 4. On considère une boite de 2 balles de tennis éventuellement défectueuses. On sort les balles en examinant si elles sont oui ou non défectueuses. Cela constitue une expérience dont l'issue est aléatoire. On note par exemple (d,n) si la première balle sortie est défectueuse et pas la seconde. L'univers des possibles a donc $2 \times 2 = 4$ éléments. Visiblement la probabilité uniforme ne convient pas pour traiter ce cas. On sait en effet que $P(\{(d,n),\ (d,d)\}) = P(\{(d,d),\ (n,d)\}) = 0.02$. On se convainc facilement que la probabilité qui décrit cette expérience aléatoire est donnée par $P(\{(d,d)\}) = 0.02 \times 0.02$, $P(\{(d,n)\}) = 0.02 \times 0.98$, $P(\{n,d)\}) = 0.98 \times 0.02$, $P(\{(n,n)\}) = 0.98 \times 0.98$. La probabilité que l'une au moins des balles soit défectueuse est

$$P(\{d,n),\ (n,d),\ (d,d)\}) = P(\{(n,n)\}^c) = 1 - P(\{n,n)\}) = 1 - (0.98)^2.$$

Remarquons que l'exemple 2 nous a obligé à changer d'univers des possibles pour tenir compte des informations dont on dispose. Cela peut être évité si on utilise la notion de conditionnement.

5.3 Probabilités conditionnelles et indépendance

Définition 12 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé et A, B deux événements avec $P(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Traitons le problème 5. Notons M l'événement "être malade" et T l'événement "être de test positif". On sait que $P(T|M) = 1$, $P(T^c|M^c) = 0.98$ et $P(M) = 1/500$. On cherche $P(M|T)$. On écrit

$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)\, P(M)}{P(T)}.$$

De plus, en écrivant que T est la réunion disjointe de $T \cap M$ et $T \cap M^c$, on obtient

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap M^c) = P(T|M)\, P(M) + P(T|M^c)\, P(M^c).$$

On trouve finalement $P(M|T) \simeq 1/11$.

Exercice 70 Reprendre l'exemple 2 en utilisant cette notion.

Exercice 71 M. Untel vit dans une ville où il fait beau 7 jours sur 10. Dans cette ville deux stations de radio FM, "Fréquence 1" et "Fréquence 2", diffusent chaque matin des prévisions météorologiques pour la journée. Une longue étude statistique a montré à M. Untel que "Fréquence 1" a raison 95 fois sur 100, tandis que "Fréquence 2" voit juste dans 90 % des cas. Un matin, M. Untel qui doit partir au travail écoute les deux stations. "Fréquence 1" annonce qu'il pleuvra et "Fréquence 2" prévoit du beau temps.

M. Untel doit-il prendre son parapluie ?

Il se peut que l'information donnée par un événement B n'apporte rien pour le calcul de $P(A)$ c'est à dire $P(A|B) = P(A)$. Dans ce cas on dit que A et$B$ sont indépendants comme le précise la définition suivante.

Définition 13 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espace probabilisé et* A, B *deux événements. On dit que* A *et* B *sont indépendants si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exercice 72 On jette sucessivement deux dés. On introduit les événements suivants : $A =$"le premier chiffre obtenu est 3", $B =$"le second chiffre obtenu est supérieur à 4", $C =$"la somme des chiffres obtenus est paire". Trouver un espace probabilisé qui rende compte de cette expérience aléatoire et déterminer les couples d'événements indépendants.

5.4 Variables aléatoires

Définition 14 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espace probabilisé. On appelle* variable aléatoire réelle *toute application* X *de* Ω *dans* $\mathbf{R}$ *mesurable c'est à dire telle que* $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *pour tout* B *borélien de* $\mathbf{R}$.

On dira que cette variable est *entière* si elle prend toutes ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels.

Toute grandeur réelle décrivant un phénomène aléatoire est une variable aléatoire réelle. Par exemple le numéro qui sortira en premier au prochain loto, le nombre d'appels reçu par le central téléphonique de Yamoussoukro dans l'heure prochaine, le nombre d'as que j'aurai dans ma prochaine partie de carte, le nombre de voitures passant au péage d'une certaine autoroute entre deux dates données, l'age que Platini aura le jour de sa mort, le nombre de personnes qui voteront pour Jacques Chirac à la prochaine élection présidentielle sont des variables aléatoires et plus précisement des variables aléatoires entières. La hauteur de pluie qui tombera à Yamoussoukro au mois de mars prochain, la résistance exacte d'une poutre métallique à la flexion, la hauteur maximale atteinte par une pierre que l'on jette au ciel sont des variables aléatoires réelles.

Définition 15 *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle loi de X la probabilité P_X sur $\mathbf{R}$ donnée par*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega;\, X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$$

pour tout partie borélienne B de $\mathbf{R}$.

Par exemple dans le cas d'une variable X prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ la loi P_X est une probabilité sur $\mathbf{R}$ qui ne charge que $x_1, \ldots, x_n$: $P_X(\{x_1, \ldots, x_n\}) = P(X^{-1}(\{x_1, \ldots, x_n\})) = P(\Omega) = 1$. Elle s'écrit $P_X = \sum_{i=1}^n P_X(\{x_i\})\, \delta_{x_i}$ et en tout état de cause est parfaitement déterminée par la donnée des n quantités $P_X(\{x_i\}) = P(X = x_i)$.

Exercice 73 On jette sucessivement deux dés. Calculer la loi de la variable X qui donne la somme des deux chiffres obtenus.

Dans le cas d'une variable entière X la loi s'écrit

$$P_X = \sum_{n \geq 0} P(X = n)\, \delta_n.$$

Le tableau suivant donne le nom de quelques lois usuelles.

Nom de la loi	Notation	Ensemble image $X(\Omega)$	Formule
Loi de Bernoulli de paramètre p	$\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$, $P(X=1)=p$
Loi binomiale de paramètre n et p	$\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
Loi de Poisson de paramètre λ	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbf{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$
Loi géomètrique de paramètre ρ	$\mathcal{G}(\rho)$	$\mathbf{N}\setminus\{\mathbf{0}\}$	$P(X=k)=\rho\,(1-\rho)^{k-1}$

Exercice 74 Le nombre d'appels reçus par le standard de l'INSET entre 12H et 12H30 suit une loi de Poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité que le nombre d'appels reçus soit supérieur à 3.

Exercice 75 Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs croissantes numérotées $1,\dots,n,\dots$ On suppose que la probabilité de succés à la hauteur numéro n est $1/n$. Les sauts sont indépendants. Le sauteur est éliminé à son premier échec. Trouver la loi de la variable X donnant le numéro du dernier saut réussi.

Un second type de variables aléatoire apparaissant dans la modélisation de phénomènes aléatoires consiste en les variables à densité. On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet pour densité l'application $f:\mathbf{R}\to[0,+\infty[$ si sa loi P_X est une probabilité de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. En d'autres termes cela signifie que pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$,

$$P(X\in I)=\int_I f(x)\,dx.$$

On notera qu'ainsi une densité est une application mesurable positive telle que $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx=1$. Les lois à densité usuelles sont données dans le tableau suivant.

Nom de la loi	Notation	Densité $f(x) =$
Loi uniforme sur $[a,b]$ $-\infty < a < b < +\infty$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{1}{b-a}\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$)	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$
Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss ou loi gaussienne)	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$
Loi gamma	$\gamma(p,\theta)$ $p>0,\,\theta>0$	$\frac{\theta^p}{\Gamma(p)}\,x^{p-1}\,e^{-\theta\,x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$

Exercice 76 Représenter les graphes des densités précédentes.

Une fonction importante pour le calcul des probabilités relative à une variable X est la *fonction de répartition* de cette variable définie par

$$F_X(r) = P(X \leq r) = P_X(]-\infty, r]).$$

On notera que la fonction de répartion d'une variable ne dépend que de la loi de cette variable. On peut donc parler de fonction de répartion d'une loi. D'une manière générale il s'agit d'une fonction croissante, continue à droite, admettant en $-\infty$ et $+\infty$ les limites respectives 0 et 1 (à vérifier en utilisant les théorèmes de théorie de la mesure). Dans le cas d'une variable X de densité f, la fonction de répartition n'est autre que la primitive de f qui s'annulle en $-\infty$:

$$F_X(r) = \int_{-\infty}^{r} f(x)\,dx$$

et dans ce cas la fonction de répartion est dérivable de dérivée f. On ne peut calculer explicitement la fonction de répartition de la loi normale mais des tables ont été élaborées. En revanche le calcul des fonctions de répartition des lois exponentielle et uniforme est facile et laissé en exercice au lecteur.

5.5 Caractéristiques d'une variable aléatoire

Définition 16 *Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit, quand cela est possible, l'espérance de Z (ou* *moyenne) par la formule*

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, dP(\omega).$$

Proposition 39 *Pour toute variable aléatoire X et toute fonction mesurable φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (intégrable pour P_X), on a*

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dP_X(x).$$

Pour une variable aléatoire entière on a donc

$$E(\varphi(X)) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \varphi(k)\, P(X=k)$$

et pour une variable aléatoire de densité f

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, f(x)\, dx.$$

On notera d'ailleurs que la donnée de cette formule pour tout φ mesurable est équivalente au fait que la variable X a pour densité f. Cette remarque est à la base de la méthode de calcul de loi par "fonction muette" expliqué dans la preuve d'une des propositions suivantes.

On notera que l'espérance de X (quand elle est définie) est simplement

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x\, dP_X(x).$$

Par ailleurs la *variance* d'une variable X est définie par

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

et elle vaut : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. On dit qu'une variable est *centrée* si elle est d'espérance nulle et *réduite* si elle est de variance 1.

A l'issue de ces définitions il faut encore remarquer que les quantités définies, en particulier espérance et variance, ne dépendent que de la loi de la variable. Le lecteur peut s'exercer en calculant l'espérance et la variance des lois usuelles définies précédemment et vérifier ses résultats dans le tableau suivant

Loi	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$	p	$p\,(1-p)$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$n\,p\,(1-p)$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	m	σ^2
Loi gamma $\gamma(p,\theta)$	$\frac{p}{\theta}$	$\frac{p}{\theta^2}$

Proposition 40 *Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = m + \sigma X$ suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Inversement si Y suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $X = (Y-m)/\sigma$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

Preuve. On note $f_{m,\sigma}$ la densité de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On va utiliser la méthode de la fonction muette. Pour φ fonction borélienne positive quelconque on écrit

$$E(\varphi(Y)) = E(\varphi(m+\sigma X)) = \int \varphi(m+\sigma x)\, f_{0,1}(x)\, dx.$$

Puis on effectue le changement de variable $y = m + \sigma x$. On trouve

$$E(\varphi(Y)) = \int \varphi(y)\, f_{0,1}(\frac{y-m}{\sigma})\, \frac{dy}{\sigma} = \int \varphi(y)\, f_{m,\sigma}(y)\, dy$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Exercice 77 Le nombre de kilomètre parcourus en une journée par un camion de la solibra suit une loi $\mathcal{N}(110, 100)$. Quelle est la probabilité qu'il parcourt en une journée entre 105 et 120 kilomètres ?

Exercice 78 (Loi log-normale) En finance on est souvement amené à considerer des variables qui sont du type $Y = e^X$ où X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer la loi, l'espérance et la variance d'une telle variable.

On a vu dans le cours d'analyse que toute distribution et donc en particulier toute probabilité est caractérisée par sa transformée de Fourier. En probabilité cette transformée de Fourier est appelée fonction caratéristique. Elle est définie d'une manière un peu différente de celle des analystes.

Définition 16 *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction*

$$\phi_X(t) = \int e^{itx}\, dP_X(x) = E(e^{itX}).$$

Cette fonction caractérise la loi de X. Le tableau suivant donne quelques fonctions caractéristiques intéressantes.

Loi	Fonction caractéristique
Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$(p\, e^{it} + 1 - p)^n$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\exp(\lambda(e^{it} - 1))$
Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\exp(itm - \frac{\sigma^2}{2}t^2)$

5.6 Loi de plusieurs variables aléatoires

Souvent il est interessant d'observer plusieurs variables aléatoires découlant d'un même phénomène aléatoire. La question qui se pose alors est d'estimer les liens entre ces variables aléatoires.

Définition 17 *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X et Y sont indépendantes si, pour tous A, B borélien de $\mathbf{R}$,*

$$P(X \in A; Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

ou, ce qui est équivalent, pour toutes applications φ, ψ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,

$$E(\varphi(X)\, \psi(Y)) = E(\varphi(X))\, E(\psi(Y)).$$

De même on définit l'indépendance de n variables $X_1, \ldots, X_n$ par $P(\forall i,\ X_i \in A_i) = \prod_i P(X_I \in A_i)$ ou par la forme fonctionnelle $E[\prod_i \varphi_i(X_i)] = \prod_i E[\varphi_i(X_i)]$.

Proposition 41 *La variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y vérifie*

$$Var\ (X+Y) = Var\ (X) + Var\ (Y) + 2Cov(X,Y)$$

avec $Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY) - EX\, EY$ appelée covariance de X et Y. Si X et Y sont indépendantes $Cov(X,Y) = 0$. On dit que X et Y sont non-corrélées. Dans ce cas on a

$$Var\ (X+Y) = Var\ (X) + Var\ (Y).$$

La fonction caractéristique de la somme $X+Y$ de deux variables aléatoires X et Y indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques de X et Y.

Proposition 42 *La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre n et p. La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi normales d'espérances respectives $m_1, \ldots, m_n$ et de variances respectives $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ suit une loi normale d'espérance $m_1 + \cdots + m_n$ et de variance $\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$.*

Exercice 79 Un représentant en ordinateurs visite 20 clients potentiels par mois. La probabilité qu'une visite se concrétise en un achat est de $2/7$. Quelle est la loi du nombre N d'ordinateurs vendus chaque mois ? Quelle est sa moyenne et son écart-type ?

Exercice 80 Un grossiste fournit en viande trois supermarchés. Les demandes quotidiennes de chacun de ces supermarchés suivent des lois normales d'espérances respectives 550 kg, 650 kg, 300kg et d'écart-type respectifs 40 kg, 100 kg, 35 kg. Calculer la quantité de viandes dont le grossiste doit disposer pour que le risque de ne pouvoir satisfaire les demandes soit inférieur à 5%.

La situation d'indépendance n'est pas la seule situation que l'on rencontre dans les cas concrets. Cela conduit à la définition suivante. On appelle *loi du couple* de variables aléatoires (X, Y) la probabilité $P_{(X,Y)}$ sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A; Y \in B)$$

pour A, B borélien de $\mathbf{R}$.

Par exemple dans le cas où X et Y sont deux variables aléatoires entières, la loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée dès que l'on connait $P(X = x; Y = y)$ pour tout x et y entiers.

Notons que dans le cas où X et Y sont indépendantes on a simplement

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)\ P_Y(B)$$

et on dit que la probabilité $P_{(X,Y)}$ est la probabilité produit de P_X et P_Y.

Un cas interessant de loi d'un couple est le cas d'un couple admettant une densité. On dit que le couple (X, Y) admet pour densité l'application $f;\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ si pour tous A, B borélien de $\mathbf{R}$,

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A; Y \in B) = \iint_{A\times B} f(x, y)\ dx\,dy.$$

Dans ce cas on remarque en utilisant le théorème de Fubini que $P_X(A) = P_{(X,Y)}(A \times \mathbf{R}) = \int_A(\int_{\mathbf{R}} f(x, y)\,dy)\ dx$ ce qui prouve que X admet la densité $f_X\ :\ \ x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y)\,dy$. De même Y admet la densité $f_Y\ :\ \ y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y)\,dx$. On remarque d'ailleurs que X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si*

$$f(x, y) = f_X(x)\ f_Y(y).$$

On obtient failement à partir de la définition de loi d'un couple à densité que, si (X, Y) a la densité $f(x, y)$ alors pour "toute" application $\varphi :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$E[\varphi(X, Y)] = \iint_{\mathbf{R}^2} \varphi(x, y)\ f(x, y)\ dx\,dy.$$

Exercice 81 Deux amis se donnent rendez-vous au café entre 12H00 et 13H00. Compte tenu des inévitables aléas (circulation, rencontres imprévues) les instants d'arrivée X et Y des deux amis sont des variables aléatoires uniformément réparties entre 12H00 et 13H00. Chacun des amis n'attend pas plus de 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Exercice 82 Soit X et Y deux variables indépendantes de loi respectives $\gamma(p, \theta)$ et $\gamma(q, \theta)$. Quelle est la loi de $X + Y$

Exercice 83 Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y, alors la densité de $X + Y$ est la convolée $f_X * f_Y$.

5.7 Exercices

Exercice 84 (Formule de Poincaré) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, prouver que

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}).$$

Exercice 85 Afin de réduire le pénible travail des corrections un professeur a mis au point le procédé d'auto-correction suivant : à la fin de la composition, il ramasse les copies des n éléves, les mélange puis en redistribue une à chaque éléve pour correction. Quelle est la probabilité qu'un éléve corrige sa propre copie ?

Exercice 86 Quelle est la probabilité que, dans un groupe de 40 personnes il y ait deux personnes qui ont leur anniversaire le même jour ? Même question avec 49 personnes.

Exercice 87 Un joueur se rend dans un casino, Il a décidé d'appliquer la stratégie suivante en jouant sur le rouge ou le noir de la roulette (chacune de ces deux possibilités a la probabilité 1/2 de sortir à chaque tour). Il commence par miser 1 FF sur le noir. Si le noir sort il empoche 2 FF (sa mise est doublée) et rentre chez lui. Si le rouge sort il mise ensuite 2 FF sur le noir. Si le noir sort il empoche son gain et rentre chez lui. Sinon il mise au tour suivant 4 FF sur le noir et ainsi de suite : Il parie sur le noir et double sa mise à chaque tour jusqu'à temps que le noir sorte. A ce moment l empoche son gain et rentre chez lui.

Quelle est la loi suivie par le gain de ce joueur ? Que pensez vous de cette stratégie ?

Exercice 88 Un "ami" vous propose de jouer au jeu suivant. Vous lancez une piéce non-biaisée. Si elle tombe sur pile vous donnez 1 FF à votre "ami". Si elle tombe sur face vous la relancez. Cette fois, si elle tombe sur pile vous donnez 2 FF. D'une manière générale si pile apparaît au k-ième lancer votre "ami" recoit 2^k FF. A partir que quelle mise initiale acquittée par votre "ami" êtes vous prêt à jouer à ce jeu ?

Exercice 89 Un fabriquant produit et commercialise des résistances de valeur nominale 100Ω. En fait la résistance exacte d'un composant produit est une variable aléatoire de loi normale d'espérance 100Ω et d'écart-type σ. Quelle est la valeur maximale pour σ qui assure que dans une boite de 50 résistances, il y en ait, avec probabilité 95%, au plus 2 dont la résistance est inférieure à 80Ω.

Exercice 90 Un système électronique fait intervenir deux composants montés en série de durée de vie respectives X et Y. Ces deux variables suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Quelle est la loi de la durée de vie du système ? sa moyenne ?

Exercice 91 Combien faut-il mettre de raisins secs dans un kilogramme de pâte pour que, en mangeant une part de gateau de 50g, on ait au moins 99 chances sur 100 de manger du raisin ?

Exercice 92 Deux joueurs A et B jouent une suite de parties d'awalé indépendantes. A chaque partie la probabilité que A gagne est p. Le vainqueur est le premier des deux joueurs qui gagne deux parties consécutives. Quelle est la probabilité que A soit vainqueur ?

Exercice 93 **1)** Montrer que si T est une variable aléatoire entière, son espérance est donnée par

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n).$$

2) Monsieur Untel veut vendre sa voiture au prix minimum de a francs. Chaque jour on lui fait une nouvelle offre. Ces offres sont des variables aléatoires X_1, X_2, $X_3, \ldots$ indépendantes et de même fonction de répartition F. On désigne par T le nombre de jours nécessaires pour que M. Untel recoive une offre qui le satisfasse :

$$T = \inf\{i \geq 1;\ X_i > a\}.$$

Calculer $E(T)$.
3) Calculer la valeur numérique de $E(T)$ si les X_i suivent la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 700\,000$ Fcfa et $\sigma = 170\,000$ Fcfa.
4)(difficile) Si M. Untel décide plutôt de vendre sa voiture dès qu'il obtient une offre meilleur que la première, quel va être alors son temps d'attente moyen ?

Exercice 94 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Determiner la loi des varibles X_i^2 puis de la variable $X_1 + \cdots + X_n$. Cette loi est appelée loi du chi-deux à n degrés de liberté et notée $\chi^2(n)$. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 95 Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln (1 - X)$, où λ est un paramètre strictement positif ?

Exercice 96 Dans un salon de coiffure travaillent 5 coiffeurs. Une coupe dure 20 minutes. Mme Untel entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent. Quelle est la loi du temps d'attente T de Mme Untel ? son espérance ?

On admettra que les coupes ont débuté en des instants indépendants uniformément répartis sur les 20 minutes qui précèdent l'arrivée de Mme Untel.

Exercice 97 Une puce se déplace sur un plan par sauts de longueur 1. Son point de départ est noté O. On fixe dans le plan un repère orthonormé. Par rapport à l'axe des abscisses de ce repère les sauts de la puce se font dans des directions aléatoires $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots$. Ainsi, les coordonnées de la puce après n sauts forment un couple (X_n, Y_n) de variables aléatoires données par $X_n = \sum_{k=1}^n \cos\theta_k$, $Y_n = \sum_{k=1}^n \sin\theta_k$. On supposera que les variables $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots$ sont indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi[$.
a) Calculer l'espérance et la variance de X_n et Y_n.
b) Calculer la covariance de X_n et Y_n.

c) Calculer l'espérance du carré de la distance de la puce à l'origine O à l'issue du n-ième saut.

Exercice 98 Une région comporte dix hopitaux, chacun ayant un capacité opératoire journalière de 11 patients. Le nombre de personnes se présentant chaque jour pour être opérées dans chacun de ces hôpitaux suit une loi de Poisson de paramètre 8, ces nombres étant indépendants d'un hôpital à l'autre. On note F_8 la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre 8. On considère un jour donné.
a) Exprimer en fonction de F_8 la probabilité qu'un hôpital donné soit obligé de refuser un patient.
b) Exprimer en fonction de F_8 la probabilité que l'un au moins des hôpitaux soit obligé de refuser un patient.
c) On suppose maintenant qu'un hôpital saturé a la posibilité de se délester sur un autre qui ne l'est pas. Donner une valeur numérique de la probabilité qu'un patient ne puisse se faire opérer ce jour.

Exercice 99 On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1. Quelle est la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? A l'aide du théorème centrale limite montrer que, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}.$$

5.8 Indications et réponses aux exercices

Exercice 69. Le choix des professionnels est hors calcul. On trouve $C_4^2/C_5^3 = 3/5$.
Exercice 71. Un calcul de probabilités conditionnelles montre que la probabilité qu'il fasse beau est 21/40. M. Untel peut laisser son parapluie chez lui et croire "Fréquence 2", radio pourtant statistiquement moins fiable !
Exercice 75. $P(X = n) = n/(n + 1)!$.

Exercice 78.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\log y - m)^2}{2\sigma^2}) \frac{1}{y} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

et $E(Y) = \exp(m + (\sigma^2/2))$, $\mathrm{Var}\ (Y) = \exp(2m + \sigma^2)\,(\exp(\sigma^2) - 1)$.
Exercice 79. N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20, 2/7)$.

Exercice 84. Partir de

$$1 - P(\cup_{i=1}^n A_i) = E[\mathbf{1}_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}] = E[\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i^c}] = \cdots$$

Exercice 85. Trouver un espace probabilisé qui rende compte de cette expérience aléatoire. Utiliser la formule de Poincare en prenant pour événement A_i : "l'éléve recoit sa propre copie". On trouve comme résultat $1-\sum_{p=0}^n (-1)^p/p! \approx 1/e$ pour n de l'ordre d'une vingtaine.

Question subsidiaire : quelle est la probabilité qu'exactement k éléves corrigent leurs propres copies ?

Exercice 91. Il faut mettre au moins 90 raisins secs.

Exercice 92. Réponse : $p^2\,(2-p)/(1-p+p^2)$.