Université René Descartes Paris V

Document de synthèse
pour l'Habilitation à Diriger des Recherches

Contributions à l'étude du serpent brownien et applications au super-mouvement brownien

Laurent Serlet

10 février 2004

Table des matières

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Résumé de ce mémoire

Les travaux que ce mémoire expose se situent tous dans le vaste domaine des super-processus, qui a connu dans ces vingt dernières années une extension spectaculaire. L'objet central de ce domaine est le super-mouvement brownien sur lequel nous fournissons des résultats nouveaux : dimension de Hausdorff des temps de visite d'un ensemble, mesure de Hausdorff des ensembles de points multiples et des points de collision. Nous étudions aussi le "serpent brownien" qui entretient des liens étroits avec le super-mouvement brownien et qui peut être vu comme une généralisation des arbres continus. Nous utilisons ce serpent brownien pour démontrer des résultats sur le super-mouvement brownien, comme ceux évoqués précédemment. Nous décrivons des propriétés de grandes déviations du serpent brownien (qui peuvent se formuler en termes de super-mouvement brownien). Nous en déduisons des lois du logarithme itéré pour le serpent brownien. Nous développons aussi des outils de calcul stochastique, comme une formule d'Itô, spécifiques au serpent brownien. Ces outils nous permettent de donner des nouvelles preuves de la construction de super-processus par le serpent brownien ou ses généralisations. Notamment, nous introduisons un serpent brownien avec dérive dont nous donnons de nombreuses représentations. En utilisant ces résultats nous montrons comment utiliser un serpent "de Poisson" pour représenter un des processus fondamentaux de fragmentation et donnons une approche par le calcul stochastique des résultats relatifs à cette fragmentation. Nous présentons également divers conditionnements du super-mouvement brownien (ou de façon équivalente du serpent brownien) : conditionnement à ne pas mourir, conditionnement à rester dans un domaine, conditionnement à avoir une masse totale donnée. Nous donnons des représentations de ces processus conditionnés et certaines propriétés.

1.2 Organisation du document et des références

Les références personnelles sur lesquelles est basé ce mémoire sont numérotées comme suit :

1 Quelques propriétés du super-mouvement brownien.
Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1994.

2 Some dimension results for super-Brownian motion.
Probab. Th. Relat. Fields 101, 371-391, 1995.

3 On the Hausdorff measure of multiple points and collision points of super-Brownian motion.
Stochastics and stochastic Reports 54, 169-198, 1995.

4 The occupation measure of super Brownian motion conditioned to nonextinction.
Journal of Th. Probab. 9 (3), 561-578,1996.

5 A large deviation principle for the Brownian snake.
Stoch. Proc. and their Appl. 67, 101-115, 1997.

6 Laws of the iterated logarithm for the Brownian snake.
Séminaire de Probabilités XXXIV, Lect. Notes Math 1729, 302-312, Springer, 2000.

7 avec J.S. Dhersin. A stochastic calculus approach for the Brownian snake.
Can. J. Math. 52 (1), 92-118, 2000.

8 avec R. Abraham. Representations of the Brownian snake with drift.
Stochastics and stochastic Reports 73, 287-308, 2002.

9 avec R. Abraham. Poisson snake and fragmentation.
Electronic Journal of Probability Vol. 7, 2002.

10 Super-Brownian motion conditioned to its total mass, 2004.

La totalité de ces travaux est annexée à la suite du mémoire avec rappel de la numérotation. Les références non personnelles auxquelles le texte renvoie sont repérées par les initiales des auteurs et listées dans le chapitre de bibliographie. Les sujets abordés ayant donné lieu à un nombre considérable de publications, nous avons limité notre liste à celles qui ont un rapport direct avec nos travaux. Bien d'autres publications devraient être citées si on voulait rendre compte des contributions majeures de certains auteurs au domaine des super-processus. Des listes plus complètes peuvent être trouvées dans [Da], [Dy2], [Et], [Pe2], [Lg5].

Ce premier chapitre fait quelques rappels sur les objets étudiés dans les travaux que nous présentons. Les cinq chapitres suivants présentent les rśultats obtenus et nous donnons parfois des éléments sur les preuves de ces résultats afin de donner une idée des méthodes employées et de montrer les interactions entre les différents travaux.

1.3 Rappels sur le super-mouvement brownien

Le super-mouvement brownien est le modèle limite qui décrit l'évolution temporelle d'un nuage de particules qui, d'une part, se déplacent au hasard dans $\mathbb{R}^d$ et, d'autre part, se divisent ou meurent selon un certain taux. Nous décrirons plus précisément ci-dessous ce modèle particulaire. Le super-mouvement brownien appartient à la catégorie des processus à valeurs mesures, que l'on appelle super-processus. La littérature développée sur le sujet en une vingtaine d'années est très importante. Elle s'attache à décrire les propriétés de ces super-processus et à développer les applications. Parmi celles-ci, il faut citer la représentation des solutions de certaines équations aux dérivées partielles (typiquement $\Delta u = u^\alpha$), les liens avec les modèles de particules en interaction comme le modèle du votant ou le processus de contact, l'utilisation en biologie et génétique. Les quelques références suivantes donnent une vision synthétique du sujet et de ses applications : [Da], [Pe2], [Dy2], [Et].

Revenons à la description par un modèle de particules qui constitue d'ailleurs l'origine historique. On considère un paramètre entier N puis K_0^N particules situées en des points $X_1^N(0), \ldots, X_{K_0^N}^N(0)$ de $\mathbb{R}^d$. Ces particules vont se déplacer indépendamment dans $\mathbb{R}^d$ selon des mouvements browniens. A chaque date $1/N, 2/N, \ldots$ chaque particule peut, avec équi-probabilité, soit mourir soit donner naissance à deux particules qui vont alors ensuite évoluer indépendamment. En notant K_t^N le nombre de particules à l'instant t et $X_1^N(t), \ldots, X_{K_t^N}^N(t)$ leurs positions dans $\mathbb{R}^d$, on pose

$$Y_t^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K_t^N} \delta_{X_k^N(t)}.$$

Alors [Wt1] prouve que si Y_0^N converge étroitement vers la mesure finie μ alors $(Y_t^N)_{t\geq 0}$ converge en loi vers un processus qui est appelé super-mouvement brownien issu de μ. La famille P^μ de lois ainsi obtenue est celle d'un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, ensemble des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$.

Sur cette construction très simple nous pouvons faire quelques remarques.

- Il est possible de remplacer le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ que nous appellerons le "déplacement spatial" par un autre processus de Markov satisfaisant certaines propriétés de régularité. Suivant les auteurs on trouvera diverses classes d'hypothèses ; voir par exemple [Pe2] II.2. Pour la plupart des résultats énoncés dans ce mémoire on pourra supposer, par exemple, que le déplacement spatial est une diffusion de générateur A.

- On ne change pas le processus limite si on remplace la "loi de branchement" qui donne le nombre de descendants d'une particule (jusqu'ici 0 ou 2 particules avec équi-probabilité) par toute autre loi critique (i.e. de moyenne 1) et de variance finie. Par contre, on peut généraliser le modèle en supposant que cette loi de branchement ν^N dépend du point de $\mathbb{R}^d$ où la particule se situe au moment où elle branche, tout en restant toujours de variance finie. On notera alors $\nu^N(x,\cdot)$ et on note $c(x)$ sa variance :

  $$c(x) = \int k^2\ \nu^N(x,dk) - \left(\int k\ \nu^N(x,dk)\right)^2. \tag{1.1}$$

  Une généralisation supplémentaire est de supposer que le branchement n'est qu'asymptotiquement critique. Ainsi, nous considèrerons dans ce qui suit une loi de branchement satisfaisant

  $$\int k\nu^N(x,dk) = 1 + \frac{b(x)}{N}. \tag{1.2}$$

  Suivant [Pe2], on fera en plus l'hypothèse technique suivante

  $$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int k^{2+\varepsilon}\ \nu^N(x,dk) < +\infty$$

  pour un certain $\varepsilon > 0$.

- Des généralisations plus radicales, puisque basées sur des lois de branchement de variance infinie, ont été souvent décrites et utilisées mais cela ne concerne aucun des travaux décrits dans ce mémoire.

- Il est utile de considérer un processus qui garde la trace des trajectoires des particules sans se contenter de leurs positions en cours. Ce sont les processus historiques étudiés notamment dans [Dy1] et [DP]. On définit les $\tilde{X}_k^N(t)$, $k \leq K_t^N$ comme étant les trajectoires des particules en vie à l'instant t depuis le temps origine 0 et stoppées au temps t. On peut voir une telle trajectoire comme un élément de $\mathcal{W}$ défini comme l'ensemble des $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ constants après un temps ζ_w, qui est ici égal à t . Alors le processus historique $(H_t)_{t\geq 0}$ est le processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathcal{W})$ donné, pour tout $t \geq 0$, et toute fonction test mesurable $\phi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_+$, par

$$H_t(\phi) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K_t^N} \phi(\tilde{X}_k^N(t)).$$

Le super-mouvement brownien se déduit du processus historique par

$$Y_t(\phi) = \int_{\mathcal{W}} H_t(dw)\ \phi(w(t))$$

où maintenant $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$.

- La construction ci-dessus qui sert de définition au super-mouvement brownien n'en donne pas une caractérisation utilisable. Pour cela plusieurs directions sont possibles :
  - description par le générateur, toutefois compliquée par le fait qu'il s'agit d'un processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, voir [Da].
  - description des fonctionnelles de Laplace pour $(Y_{t_1}(\phi_1), \ldots, Y_{t_k}(\phi_k))$, approche fructueuse qui établit déja le lien avec certaines équations aux dérivées partielles.
  - caractérisation par un problème de martingale bien posé.

C'est ce dernier point que nous allons préciser maintenant. Nous appellerons $(A, c(\cdot)z^2, b(\cdot))$-super-processus le processus limite obtenu avec les généralisations sur la loi de branchement décrites ci-dessus par les équations 1.1, 1.2 et déplacement spatial des particules régi par A, et $(A, c(\cdot)z^2, b(\cdot))$-processus historique, le processus historique correspondant. La convergence du modèle particulaire avec ces hypothèses élargies est prouvée par exemple dans [Pe2] et il y est prouvé que le $(A, c(\cdot)z^2, b(\cdot))$-super-processus est l'unique solution (X_t) du problème de martingale suivant : pour toute fonction ψ bornée et dans le domaine du générateur A,

$$M_t(\psi) = X_t(\psi) - \int_0^t ds\ X_s(A\psi) - \int_0^t ds\ X_s(b\, c\, \psi), \quad t \geq 0 \tag{1.3}$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M(\psi)\rangle_t = \int_0^t ds\ X_s(c\,\psi^2). \tag{1.4}$$

Il est aussi possible d'écrire un problème de martingale pour le $(A, c(\cdot)z^2, b(\cdot))$-processus historique ; nous l'écrirons plus tard. Rappelons que le super-mouvement brownien "standard" correspond à $b = 0,\ c = 1$. D'une manière générale, la caractérisation par des problèmes de martingale s'est révélée fructueuse, notamment pour identifier le super-mouvement brownien comme limite des systèmes de particules en interaction (par exemple [CDP], [DuP]). Toutefois, certaines propriétés du super-mouvement brownien nécessitent de disposer d'une description où persiste une certaine notion de particules et de leurs trajectoires. Plusieurs auteurs ont utilisé un modèle non-standard. Une alternative est le serpent brownien introduit par Le Gall que nous décrivons dans la section qui suit.

1.4 Définition du serpent brownien

C'est l'objet central de ce mémoire. Ce processus, introduit par Le Gall ([Lg1,Lg2]) et dénommé par Dynkin et Kutznetsov ([DK]), permet de donner une description continue d'un arbre de trajectoires browniennes. Le super-mouvement brownien est une fonction de ce processus et ainsi de nombreuses propriétés du super-mouvement brownien ont pu être obtenues ; voir par exemple [LP]. De plus les liens entre super-mouvement brownien et équations aux dérivées partielles se reformulent en termes de serpent brownien et des résultats importants ont été obtenus par ce biais ; voir [Lg5] et [Ms].

Nous rappelons rapidement la définition du serpent brownien et renvoyons à [Lg5] pour un traitement complet. A ce stade, nous allons nous placer dans le cadre général d'un espace polonais (E, d_E). Comme introduit ci-dessus, nous notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des chemins arrêtés, c'est à dire des couples (w, ζ), où $\zeta \geq 0$ est le temps de vie du chemin et $w : \mathbb{R}_+ \to E$ est une application continue, constante sur $[\zeta, +\infty)$. Bien souvent nous notons simplement w au lieu de (w, ζ), et écrivons alors $\zeta(w)$ ou ζ_w pour le temps de vie. Nous munissons $\mathcal{W}$ de la distance donnée par $d_{\mathcal{W}}(w, w') = \sup_{t\geq 0} d_E(w(t), w'(t)) + |\zeta_w - \zeta_{w'}|$. On utilise la notation $\hat{w} = w(\zeta_w)$ pour le point terminal de w et $\tilde{x}$ pour le chemin de temps de vie nul constamment égal à $x \in E$. Enfin, la notation $w_{\leq r}$ désigne le chemin de temps de vie $\zeta_w \wedge r$ tel que pour $u \geq 0$, $w_{\leq r}(u) = w(u \wedge r)$.

Nous choisissons ensuite un déplacement spatial dans E selon un processus de Markov continu de générateur A. Le serpent brownien (standard) dans E, issu de $\tilde{x}$, de déplacement spatial régi par A, est le processus de Markov $W = (W_s, s \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{W}$ et dont la loi est caractérisée par :

1. Le processus des temps de vie $\zeta_s = \zeta(W_s)$ est un mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+$.
2. Conditionnellement à $(\zeta_s, s \geq 0)$, la loi de $(W_s, s \geq 0)$ est celle d'un processus de Markov inhomogène dont les noyaux de transition sont donnés, pour $s < s'$, par
   - $W_{s'}(t) = W_s(t)$ pour tout $t \leq m(s, s') = \inf_{r \in [s,s']} \zeta_r$.
   - $(W_{s'}(m(s, s') + t), 0 \leq t \leq \zeta_{s'} - m(s, s'))$ est indépendant de W_s conditionnellement à $W_s(m(s, s'))$ et a la loi du A-processus de Markov, issu de $W_s(m(s, s'))$ et arrêté au temps $\zeta_{s'} - m(s, s')$).

Cette définition de la loi conditionnelle du serpent brownien sachant son temps de vie peut se commenter de la manière informelle suivante. Un serpent brownien est une trajectoire du A-processus de Markov qu'on efface à partir de son point terminal quand le temps de vie diminue et qu'on rallonge par un morceau indépendant de trajectoire du A-processus de Markov quand le temps de vie augmente.

En faisant une hypothèse de régularité supplémentaire sur le A-processus de Markov qui dirige le déplacement spatial, satisfaite par exemple pour une diffusion, on obtient la continuité de $(W_s)_{s \geq 0}$; voir [Lg5] IV.4.

Dans ce qui suit on envisagera plusieurs variantes de la définition cidessus en modifiant la loi du temps de vie. Notamment, on considérera le cas où le temps de vie est un mouvement brownien issu de ζ_0 et, dans ce cas, le serpent démarre en un chemin à préciser w_0 de temps de vie ζ_0. Nous envisagerons aussi le serpent brownien dont le temps de vie est une excursion brownienne normalisée à avoir la longueur 1. De l'intérêt a été porté sur ce cas, notamment par ce qu'il est lié à la mesure aléatoire I appelée Integrated Super-Brownian Excursion et qui peut être définie par

$$I(\phi) = \int_0^1 \phi(\hat{W}_s) \, ds.$$

En remarquant que $\tilde{x}$ est régulier pour le serpent brownien (standard), on peut définir une mesure d'excursion $\mathbb{N}_x$ hors de $\tilde{x}$, sous laquelle nous serons souvent amenés à travailler. Sous $\mathbb{N}_x$, le serpent brownien a un temps de vie qui suit la mesure d'Itô des excursions positives du mouvement brownien et la loi conditionnelle du serpent sachant son temps de vie reste celle décrite précédemment.

Rappelons maintenant comment on peut reconstruire le super-mouvement brownien à partir du serpent brownien. Nous allons ici considérer un super-mouvement brownien standard i.e., dans les notations ci-dessus, un $(A, z^2, 0)$-superprocessus, c'est à dire que la loi de branchement est exactement critique (de variance finie) non spatiallement dépendante, que le déplacement spatial se fait dans $E = \mathbb{R}^d$ suivant une diffusion de générateur A. Pour la simplicité nous allons traiter le cas où la mesure initiale est $\rho\ \delta_{x_0}$. Dans ce cas, le super-mouvement brownien $(X_t)_{t\geq 0}$ peut être obtenu à partir d'un serpent brownien $(W_s)_{s\geq 0}$ issu de $\tilde{x}_0$ de déplacement spatial associé à A par la formule

$$X_t(\phi) = \frac{1}{4}\int_0^{\tau_{4\rho}} d_s L_s^t(\zeta)\ \phi(\hat{W}_s)$$

où $L_s^t(\zeta)$ désigne le temps local de $(\zeta_.)$ au niveau t et à l'instant s, et $\tau_{4\rho} = \inf\{s \geq 0; L_s^0(\zeta) > 4\rho\}$.

1.5 Marginales fini-dimensionnelles du serpent brownien

Un nombre important de résultas parmi ceux présentés dans ce rapport reposent, au moins partiellement, sur des calculs effectués à partir d'une expression explicite des densités marginales du serpent brownien. Pour écrire de telles densités, il faut rappeler qu'un échantillonage à des dates fixées du serpent revient à considérer un arbre de trajectoires browniennes. Il apparaît une structure d'arbre qui est dictée par le processus des temps de vie. Sur ce squellette de branchement s'ajoutent des déplacements spatiaux browniens ou plus généralement selon une diffusion admettant pour famille de densités de transition $(p_t(\cdot,\cdot))$. La loi des arbres finis qui sont, comme ici, obtenus par échantillonage de la trajectoire brownienne est en particulier décrite dans [Lg3] ou [Lg5] chap. III. Plus généralement, l'idée de coder un arbre continu à partir d'une trajectoire brownienne a été largement exploitée, en premier lieu par Aldous [Al1],[Al2],[Al3].

En ce qui concerne les travaux décrits ici nous avons utilisé un formalisme de description de l'arbre de branchement qui permet une écriture assez commode des densités marginales du serpent brownien, cf th. 3 de [1] ou th. 6 de [3]. Nous en déduisons en particulier des expressions explicites des moments de la mesure d'occupation $Z(B)$ du borélien B définie par

$$Z(B) = \int_0^{\tau} \mathbf{1}_B(\hat{W}_s)\ ds$$

où τ est un temps aléatoire à préciser. Ces expressions des moments peuvent être majorées par un processus itératif et donner ainsi des estimations utiles de $Z(B)$. Ces résultats sont essentiels dans [1],[2],[3],[4]. Par ailleurs, l'expression explicite des densités marginales est fondamentale dans [5],[6].

Chapitre 2

Résultats de mesure de Hausdorff

2.1 Temps de visite d'un ensemble

Nous commençons par nous intéresser aux instants de visite d'un borélien fixé H de $\mathbb{R}^d$ par le support d'un super-mouvement brownien standard (Y_t) c'est à dire à l'ensemble $\{t \geq 0;\ \mathrm{Supp}(Y_t) \cap H \neq \emptyset\}$. Nous calculons la dimension de Hausdorff de cet ensemble en fonction de la dimension de Hausdorff de H. Nous améliorons ainsi un travail de Krone ([Kr]) qui donne un résultat partiel dans le cas où H est un singleton.

Théorème 1 (th. 1 de [2]) *Soit H un borélien non vide de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) et*

$$D = \left(2 - \frac{d}{2} + \frac{\dim H}{2}\right)_+ \wedge 1$$

Alors, presque sûrement,

$$\dim\{t;\ \mathrm{Supp}(Y_t) \cap H \neq \emptyset\} \leq D$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, avec probabilité positive,

$$\dim\{t;\ \mathrm{Supp}(Y_t) \cap H \neq \emptyset\} \geq D - \varepsilon$$

Un exemple montre que le résultat donné avec probabilité positive n'est pas vrai en général presque sûrement. La traduction de ce théorème en terme de serpent revient à étudier $\{\zeta_s;\ \hat{W}_s \in H\}$. Nous construisons alors une fonctionnelle additive A :

$$A((p,q)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(p,q)} dr \int \mu(dx) p_\varepsilon(x, \hat{W}_r)$$

où μ est une mesure portée par H. Ici $p_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ est une approximation de la mesure de Dirac ; nous avons simplement considéré la densité de transition brownienne. Le calcul montre alors que nous pouvons contrôler l'espérance de

$$\iint |\zeta_s - \zeta_t|^\theta \ A(ds)\ A(dt)$$

par l'énergie de μ et le lemme de Frostman fournit alors une minoration de la dimension de l'ensemble étudié. La majoration de la dimension est un peu plus technique. Un ingrédient essentiel est une estimation du temps d'occupation d'une boule par le serpent brownien

$$Z(B(x,\varepsilon)) = \int_0^{+\infty} 1_{B(x,\varepsilon)}(\hat{W}_s)\ ds$$

qui est obtenue grâce au calcul des moments de cette variable (lemme 8 de [2]).

Le théorème 1 avait déja été prouvé par Krone ([Kr]) dans le cas où H est un singleton (en dimension 2 ou 3). Dans ce cas nous pouvons apporter une amélioration :

Théorème 2 (th. 2 de [2]) *Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $d \in \{2,3\}$, on a presque sûrement, dès que $\{t;\ \mathrm{Supp}(Y_t) \ni x\} \neq \emptyset$,*

$$\dim\{t;\ \mathrm{Supp}(Y_t) \ni x\} = 2 - \frac{d}{2}$$

Cela provient essentiellement du comportement local du serpent au point terminal où le serpent touche x, selon un résultat de [Lg4].

2.2 Un résultat uniforme sur l'image

Les arguments développés dans la preuve du théorème 1 conduisent rapidement au résultat suivant sur le serpent.

Théorème 3 (th. 10 de [2]) *En dimension ≥ 4, presque sûrement, pour tout A : $\dim\{\hat{W}_s;\ s \in A\} = 4 \dim A$*

Grâce à un petit lemme de dimension sur le mouvement brownien linéaire, prouvé en annexe dans [2], nous en déduisons un résultat sur $\dim\{\hat{W}_s;\ \zeta_s \in B\}$ dont la traduction en termes de super-mouvement brownien est la suivante

Théorème 4 (th. 3 de [2]) *Soit* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *super-mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^d$ *avec* $d \geq 4$*, de temps d'extinction* τ*. Alors, presque sûrement, pour tout borélien non vide* B *de* $(0,\tau)$*, on a*

$$\dim\left(\bigcup_{t\in B}\mathrm{Supp}(Y_t)\right) = 2 + 2\dim B$$

Nous retrouvons ainsi un résultat déjà obtenu par Tribe ([Tr]) en utilisant des techniques d'analyse non-standard.

2.3 Points multiples

L'image $\mathcal{R}$ du super-mouvement brownien (Y_t) dans $\mathbb{R}^d$, définie par

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{t\geq\varepsilon}\mathrm{Supp}(Y_t)}$$

a été intensément étudiée, notamment en ce qui concerne ses propriétés de Hausdorff. En dimension $d \leq 3$, il est bien connu que $\mathcal{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. En dimension $d > 4$, nous savons par [DIP] que la bonne fonction de mesure de Hausdorff de $\mathcal{R}$, est $\psi_1(r) = r^4\ \log\log(1/r)$. Cela signifie que la ψ_1-mesure de Hausdorff de $\mathcal{R}$ vérifie : $\psi_1 - m(\mathcal{R}) \in (0,+\infty)$. Dans [DIP] est aussi défini l'ensemble des points k-multiples de (Y_t) par

$$\mathcal{R}_k = \bigcup_{I_1,\ldots,I_k}\bigcap_{j=1}^{k}\overline{\bigcup_{t\in I_j}\mathrm{Supp}(Y_t)}$$

où la première réunion est étendue à $I_1,\ldots,I_k$ intervalles compacts disjoints de $(0,+\infty)$ et il est prouvé que cet ensemble est presque sûrement non vide si $k < d/(d-4)$. De plus une conjecture est énoncée concernant la bonne fonction de mesure de Hausdorff. Nous prouvons cette conjecture :

Théorème 5 (th. 1 de [3]) *Soit* $d > 4$ *et* $k < d/(d-4)$ *et*

$$\psi_k = r^{d+k(4-d)}\ \left(\log\log\frac{1}{r}\right)^k$$

Alors la ψ_k*-mesure de* $\mathcal{R}_k$ *est strictement positive et* σ*-finie.*

En dimension critique $d = 4$, nous donnons également un résultat de mesure de Hausdorff mais sans identifier la bonne fonction de mesure de Hausdorff.

On voit assez facilement que la preuve de ce théorème se ramène à montrer que ψ_k est la bonne fonction de mesure de Hausdorff de l'intersection des images de k serpents browniens dans $\mathbb{R}^d$ indépendants $W^1, \ldots, W^k$ (th.4 de [3]). Nous construisons alors une mesure de collision T sur $\mathbb{R}^d$ portée par cette intersection et donnons une expression explicite des moments des variables $T(B)$ (pour B borélien de $\mathbb{R}^d$). Ce calcul repose l'expression des marginales fini-dimensionnelles du serpent comme évoqué dans le chapitre de présentation. Une technique itérative permet alors de majorer les moments de $T(B)$ et cela conduit ensuite à ce que T et la ψ_k-mesure de Hausdorff soient comparables, à des constantes multiplicatives près.

Notons que le théorème ci-dessus est aussi valable dans le cas $k = 1$ et fournit ainsi une nouvelle preuve de la fonction de mesure de l'image en dimension $d > 4$, comme énoncé dans [DIP].

2.4 Points de collision

Les résultats obtenus dans l'étude des points multiples peuvent aussi s'appliquer aux points de collision de k super-mouvements browniens indépendants $Y^1, \ldots, Y^k$ dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Nous définissons le graphe d'un super-mouvement brownien par

$$G(Y) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup_{t \geq \varepsilon} \{t\} \times \mathrm{Supp}(Y_t)}$$

Par [BEP] nous savons que $G(Y^1) \cap \ldots \cap G(Y^k)$ est non vide presque sûrement si et seulement si $2 + d + k(2 - d) > 0$ c'est à dire par exemple si $d < 6$ quand $k = 2$. Nous montrons alors dans ce cas la positivité de la mesure de Hausdorff de cet ensemble, pour la fonction de Hausdorff

$$h(r) = r^{2+d+k(2-d)} \left(\log \log \frac{1}{r} \right)^k$$

Voir le th. 3 de [3]. Nous améliorons ainsi le résultat donné dans [BEP]. Nous conjecturons que h est la bonne fonction de mesure de Hausdorff. Dans cette étude, pour tenir compte d'une homogénéité différente en temps et espace, il faut prendre une définition spéciale de la mesure de Hausdorff, comme expliqué dans [BEP].

Chapitre 3

Grandes déviations

3.1 Obtention d'un principe de grandes déviations

Un des théorèmes de grandes déviations les plus connus est certainement le théorème de Schilder. Il affirme que si $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ alors la loi de $(\varepsilon B_t)_{t\in[0,1]}$ satisfait un principe de grandes déviations de vitesse ε^{-2} et de fonction de taux donnée par

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot\varphi(s)|^2\, ds$$

si $\varphi(t) = \int_0^t \dot\varphi(s)\, ds$ avec $\dot\varphi \in L^2([0,1])$ et par $I(\varphi) = +\infty$ sinon. Cela signifie que pour $A \subset C([0,1],\mathbb{R}^d)$ ouvert pour la topologie de la convergence uniforme,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathrm{P}[(\varepsilon B_t) \in A] \geq -\inf\{I(\varphi);\ \varphi \in A\}$$

et que, pour $A \subset C([0,1],\mathbb{R}^d)$ fermé,

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathrm{P}[(\varepsilon B_t) \in A] \leq -\inf\{I(\varphi);\ \varphi \in A\}.$$

Rappelons que la représentation $\varphi(t) = \int_0^t \dot\varphi(s)\, ds$ est possible si et seulement si φ est une fonction absolument continue au sens où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$ et tous $0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n < 1$ satisfaisant $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \alpha$, on a $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Nous proposons de donner un principe de grandes déviations pour le serpent brownien. Le serpent brownien que nous considérons maintenant a un temps de vie qui est une excursion brownienne normalisée (à avoir la longueur 1) et le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Commencons par quelques estimations très grossières de la probabilité d'un événement de grandes déviations au sens le plus littéral du terme, à savoir $\mathrm{P}\left[\sup_{s\in[0,1]}|W_s(\zeta_s)| \geq R\right]$. Nous savons par le théorème de Schilder et dans un langage informel, que si $(B(s))$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{P}\left[\sup_{s\in[0,T]}|B(s)| \geq R\right] \approx \exp -\frac{R^2}{2T}.$$

Ainsi il n'est pas déraisonable de penser que

$$\mathrm{P}\left[\sup_{s\in[0,1]}|W_s(\zeta_s)| \geq R \;\Big|\; \sup_{s\in[0,1]}|\zeta_s| \approx R^\alpha\right] \approx \exp -c\,\frac{R^2}{R^\alpha}$$

puisque nous avons affaire à un arbre de trajectoires browniennes de durées de vie de l'ordre de R^α. Comme le temps de vie obéit au même genre d'estimation :

$$\mathrm{P}\left[\sup_{s\in[0,1]}|\zeta_s| \approx R^\alpha\right] \approx \exp -c\,R^{2\alpha}$$

on peut penser que

$$\mathrm{P}\left[\sup_{s\in[0,1]}|W_s(\zeta_s)| \geq R\right] \approx \exp -c\,\left(\frac{R^2}{R^\alpha} + R^{2\alpha}\right).$$

L'ordre minimal de $(R^2/R^\alpha) + R^{2\alpha}$ est atteint pour $2-\alpha = 2\alpha$ i.e. $\alpha = 2/3$.

Ainsi on est amené à formuler un principe de grandes déviations pour la loi de

$$\Big((\varepsilon\, W_s(\zeta_s), \varepsilon^{2/3}\,\zeta_s),\ s\in[0,1]\Big)$$

quand ε tend vers 0. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $s \to (U_s, \eta_s)$ de $[0,1]$ dans $\mathcal{W}$ c'est à dire que $\eta_s \geq 0$ et U_s est une fonction continue sur $[0,+\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ constante après η_s et on demande en plus à ces fonctions d'avoir la "propriété de serpent" au sens suivant $\eta_0 = \eta_1 = 0$, $U_s(0) = 0$ pour tout $s\in[0,1]$ et pour tous $0\leq s\leq t\leq 1$, tout $u \leq \inf_{[s,t]}\eta$, $U_t(u) = U_s(u)$. La topologie mise sur $\mathcal{E}$ est la topologie de la convergence uniforme, $\mathcal{W}$ étant pour sa part muni de sa topologie usuelle décrite précédemment.

Théorème 6 (th. 1 de [5]) *La loi de* $\Big((\varepsilon\, W_s(\zeta_s), \varepsilon^{2/3}\,\zeta_s),\ s\in[0,1]\Big)$ *satisfait quand* ε *tend vers 0 un principe de grandes déviations de vitesse* $\varepsilon^{4/3}$ *et de bonne fonction de taux* J *donnée par la formule*

$$J(T,\eta) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot\eta_s^2\,ds + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|\dot T_s|^2}{|\dot\eta_s|}ds$$

quand $T_s = U_s(\eta_s)$ *avec* $(U,\eta) \in \mathcal{E}$ *et qu'en plus* $s \to \eta_s$ *et* $s \to T_s$ *sont absolument continues et on pose* $J(T,\eta) = +\infty$ *si les conditions précédentes sur* (T,η) *ne sont pas réunies.*

Ce théorème signifie que

- pour tout $L \in [0,+\infty)$, l'ensemble $J^{-1}([L,+\infty))$ est compact,
- pour tout ouvert Ω de $\mathcal{E}$,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{4/3} \ \ln \mathrm{P}\left[(\varepsilon \hat{W}_s, \varepsilon^{2/3}\zeta_s)_{s\in[0,1]} \in \{(U_s(\eta_s),\eta_s)_{s\in[0,1]};\ (U,\eta)\in\Omega\}\right] \geq -\inf_{\Omega} J$$

- pour tout fermé K de $\mathcal{E}$,

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{4/3} \ \ln \mathrm{P}\left[(\varepsilon \hat{W}_s, \varepsilon^{2/3}\zeta_s)_{s\in[0,1]} \in \{(U_s(\eta_s),\eta_s)_{s\in[0,1]};\ (U,\eta)\in K\}\right] \leq -\inf_{K} J.$$

Nous allons décrire brièvement le schéma de la preuve. Nous commençons par donner un principe de grandes déviations pour les marginales fini-dimensionnelles du processus considéré, c'est à dire

$$(\varepsilon\, \hat{W}_{u_1}, \ldots, \varepsilon\, \hat{W}_{u_n}, \varepsilon^{2/3}\, \zeta_{u_1}, \ldots, \varepsilon^{2/3}\, \zeta_{u_n})$$

où $0 < u_1 < \cdots < u_n < 1$ sont fixés. Toutefois, la loi du serpent brownien est telle qu'il est plus commode de faire intervenir simultanément les points de branchement et de regarder

$$(\varepsilon\, \hat{W}_{u_1}, \ldots, \varepsilon\, \hat{W}_{u_n}, \varepsilon^{2/3}\, \zeta_{u_1}, \ldots, \varepsilon^{2/3}\, \zeta_{u_n},$$
$$\varepsilon^{2/3}\, \zeta_{m_1}, \ldots, \varepsilon^{2/3}\, \zeta_{m_{n-1}}, \varepsilon \hat{W}_{m_1}, \ldots, \varepsilon \hat{W}_{m_{n-1}})$$

où m_i est l'unique instant tel que $\zeta_{m_i} = \inf_{[u_i,u_{i+1}]} \zeta$. La densité de ce $(4n-2)$–uple peut parfaitement être explicitée. Cette expression conduit, par une application de la traditionelle méthode de Laplace, à une fonction de taux

$$I_\sigma(y_1,\ldots,y_n,\beta_1,\ldots,\beta_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},z_1,\ldots,z_{n-1})$$
$$= \frac{\beta_1^2}{2\,u_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\beta_i+\beta_{i+1}-2\alpha_i)^2}{2\,(u_{i+1}-u_i)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|z_i - z_{a(i)}|^2}{2\,(\alpha_i - \alpha_{a(i)})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - z_{v_a(i)}|^2}{2\,(\beta_i - \alpha_{v_a(i)})}$$

si $0 < \alpha_i < \beta_i \wedge \beta_{i+1}$ pour tout i et $+\infty$ sinon. Dans cette écriture, a et v sont des fonctions descriptives de l'arbre binaire engendré par les trajectoires $W_{u_1}, \ldots, W_{u_n}$, cf section 2 de [5].

L'étape suivante est la preuve de la tension exponentielle du processus $((\varepsilon \hat{W}_s, \varepsilon^{2/3}\zeta_s);\ s\in[0,1])$ puis nous montrons comment le principe de grandes déviations pour les marginales fini-dimensionnelles conduit au résultat global avec la fonction de taux précisée.

3.2 Application aux grandes déviations du support

Une première application est l'estimation de la probabilité que le serpent brownien sorte d'une "grosse boule". Nous supposons toujours que $(W_s)_{s\in[0,1]}$ est un serpent brownien dont le temps de vie est une excursion brownienne normalisée et le déplacement spatial un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 7 (prop. 14 de [5]) *Quand $R \to +\infty$,*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{4/3} \ln \mathrm{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} |W_s(\zeta_s)| \ge \frac{1}{\varepsilon}\right] = -\frac{3}{2}.$$

Ce résultat s'applique en particulier au support de l'ISE, Integrated Super-Brownian Excursion dont nous rappelons la définition en fonction du serpent étudié :

$$I(\phi) = \int_0^1 \phi(W_s(\zeta_s))\, ds$$

Cette mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ décrite par Aldous comme un modèle fondamental de répartition de masse ([Al4]) a un support qui est précisément l'ensemble des valeurs prises par le point terminal du serpent. Elle s'obtient en particulier comme limite en grande dimension d'arbres uniformes sur un réseau ([DS]).

Nous donnons une seconde application qui a déjà été prouvée par [DZ], ce résultat étant d'ailleurs ce qui a suscité ma recherche du principe de grandes déviations sous-jacent.

Théorème 8 (th. 15 de [5]) *Soit n boules disjointes $\mathrm{B}(x_1,\delta),\ldots,\mathrm{B}(x_n,\delta)$ dans $\mathbb{R}^d$ de rayon $\delta > 0$. On note $ST^\delta(\underline{x})$ l'infimum de la somme des longueurs des côtés des arbres binaires dans $\mathbb{R}^d$ qui intersectent les n boules fixées appelée distance de Steiner. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{4/3} \ln \mathrm{P}\left[\forall i,\ \{\varepsilon\, W_s(\zeta_s);\ s\in[0,1]\} \cap \mathrm{B}(x_i,\delta) \neq \emptyset\right] = -\frac{3}{2}\ \left(ST^\delta(\underline{x})\right)^{\frac{4}{3}}.$$

3.3 Lois du logarithme itéré

Nous revenons maintenant à un serpent brownien dont le temps de vie est simplement un mouvement brownien réfléchi. Le déplacement spatial est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0. Les méthodes utilisées précédemment quand le temps de vie était une excursion browniene normalisée s'appliquent aussi sans difficulté à ce cadre. En particulier il est facile d'écrire un principe de grandes déviations pour les marginales finidimensionnelles de $((\varepsilon \hat{W}_s, \varepsilon^{2/3}\zeta_s))$ et d'en déduire l'estimation suivante (th. 1 de [6]) :

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{4/3}} \ln \mathrm{P}\left[\sup_{s \in [0,1]} |\hat{W}_s| \geq A\right] = -3\,.2^{-5/3}$$

Ces estimations conduisent, via un lemme de Borel-Cantelli pour des événements corrélés, aux lois du logarithme itéré suivantes.

Théorème 9 (th. 2 et 3 de [6]) *Soit* $h(s) = s^{1/4}\,(\ln \ln s)^{3/4}$*. Alors, presque sûrement,*

$$\limsup_{s \uparrow +\infty} \frac{|\hat{W}_s|}{h(s)} = 2^{5/4}\,.\,3^{-3/4}$$

Soit $\psi(s) = s^{1/4}\,(\ln \ln(1/s))^{3/4}$*. Alors, presque sûrement,*

$$\limsup_{s \downarrow 0} \frac{|\hat{W}_s|}{\psi(s)} = 2^{5/4}\,.\,3^{-3/4}$$

Il est surprenant de constater que d'après [CC], une loi du logarithme itéré totalement similaire est vérifiée pour le brownien itéré. Dans ce modèle, une trajectoire brownienne (B_t) dans $\mathbb{R}^d$ est parcourue selon un brownien réfléchi linéaire ζ_t c'est à dire que l'on considère (B_{ζ_t}). Ce modèle semble bien différent du serpent brownien où les accroissements du temps de vie se répercutent spatialement en une prolongation par un nouveau morceau indépendant du passé alors que, dans le cas du brownien itéré, c'est toujours la même trajectoire spatiale qui est parcourue.

Chapitre 4

Calcul stochastique pour le serpent

Ce chapitre résume les resultats obtenus dans [7] qui développe quelques outils de calcul stochastique relativement au serpent brownien comme l'expression du générateur, la définition en problème de martingale, une formule de type Itô. Comme application, nous montrons comment utiliser ces outils pour retrouver le problème de martingale pour le super-mouvement brownien ou plus généralement un $(A, c\,z^2, b)$–super-processus.

4.1 Générateur du serpent brownien

Dans cette section, nous voulons décrire le générateur infinitésimal G du serpent brownien qui est un processus de Markov homogène dans l'espace $\mathcal{W}$ des chemins arrêtés. Nous considérons ici le serpent brownien standard, c'est à dire dont le temps de vie est un mouvement brownien réfléchi et dont le déplacement spatial est régi par un certain processus de Markov homogène dans $\mathbb{R}^d$ de générateur A. L'exemple le plus simple d'un processus de Markov dans $\mathcal{W}$ est le processus dit "du A–chemin". Un tel processus démarrant en $w \in \mathcal{W}$, est tel qu'au temps $s \geq 0$, on a $\zeta_s = \zeta_w + s$, $W_s^{\leq \zeta_w} = w$ et la loi $(W_s(\zeta_w + u), u \in [0, s))$ est celle du processus de Markov de générateur A issu $\hat{w}$. Nous noterons L son générateur. Par exemple si $F(w) = h(\zeta, \hat{w})$ où $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) h$ existe et est bornée, alors

$$LF(w) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) h(\zeta, \hat{w}).$$

Si F est donnée par $F(w) = \int_0^\zeta g(w_{\le r})\, dr$ où $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $LF(w) = g(w)$. Pour le calcul du générateur G du serpent brownien, nous utilisons l'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions $F : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ données par

$$F(w) = \int_0^{\zeta(w)} g(w_{\le r})\, dr,$$

où $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ est dans le domaine de L avec g et Lg bornées.

Théorème 10 (th. 1 de [7]) *Soit $F \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathcal{W}$ avec $\zeta(w) > 0$. Alors*

$$GF(w) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s}\ (\mathbb{E}_w[F(W_s)] - F(w)) = \frac{1}{2}\, Lg(w).$$

Le résultat est aussi valable si $\zeta(w) = 0$ et $g(w_{\le 0}) = 0$.

4.2 Problème de martingale pour le serpent brownien et formule d'Itô

Il résulte du calcul précédent de générateur que, pour tout $F \in \mathcal{D}$, le processus

$$M_s(F) = F(W_s) - F(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^s Lg(W_r)\, dr$$

est une martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_s)$ engendrée par le serpent. Nous pouvons énoncer un problème de martingale pour le serpent. Nous noterons, pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{W}_x$ l'ensemble des chemins qui démarrent en x et $\mathcal{D}_x$ l'ensemble des fonctions

$$F\ :\ w \to \int_0^\zeta g(w_{\le r})\, dr \quad \in \mathcal{D} \text{ avec } g(\tilde{x}) = 0.$$

Théorème 11 (th.3 de [7]) *Soit $w \in \mathcal{W}$ et $x = w(0)$. Le serpent brownien issu de w est l'unique processus $(W_s, s \ge 0)$ à valeurs dans $\mathcal{W}_x$ solution du problème de martingale suivant :*

$$W_0 = w_0, \quad \forall F \in \mathcal{D}_x,\ \ M(F)_s = F(W_s) - \frac{1}{2}\int_0^s Lg(W_r)\, dr$$

est une martingale de variation quadratique

$$< M(F) >_s = \int_0^s g^2(W_r)\, dr.$$

Nous donnons ensuite une représentation des martingales $M(F)$ intervenant dans ce problème de martingale et obtenons une formule de type Itô.

Théorème 12 (th.2 de [7]) *Soit $F \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathcal{W}$. Alors le serpent brownien $(W_s, s \geq 0)$ issu de w vérifie, pour tout $s \geq 0$,*

$$F(W_s) = F(W_0) + \int_0^s g(W_r)\, d\zeta_r + \frac{1}{2}\int_0^s Lg(W_r)\, dr.$$

4.3 Lien avec le problème de martingale du super-mouvement brownien standard

A titre d'application de la formule d'Itô obtenue précédement nous donnons une nouvelle preuve de la représentation du super-mouvement brownien à l'aide du serpent brownien. Nous avons explicité cette représentation à la section 1.4. Nous allons l'écrire ici en termes de processus historique ; nous considèrons le processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathcal{W})$ donné, pour $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, par

$$H_t(g) = \int_0^{\tau_1} d_s L_s^t(\zeta)\, g(W_s)$$

où (W_s) est un serpent brownien issu d'un certain $\tilde{x}$ et τ_1 est le temps d'atteinte de 1 par le temps local au niveau 0 du temps de vie brownien réfléchi (ζ_s). Nous adoptons ici la définition choisie dans [7] pour simplifier les écritures. Elle diffère simplement d'un facteur 4 de la définition classique donnée dans la section 1.4. Alors (H_t) est le processus historique du super-mouvement brownien (à la petite renormalisation ci-dessus près). Dans les notations de la section 1.4 c'est le $(A, 4\,z^2, 0)$–processus historique, c'est à dire l'unique solution à valeur initiale fixée du problème de martingale qui s'exprime comme suit : pour toute fonction $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R}_+$ dans le domaine de L avec g et Lg bornées,

$$M_t(g) = H_t(g) - H_0(g) - \int_0^t ds\, H_s(Lg), \quad t \geq 0$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M(g) \rangle_t = 4 \int_0^t ds\, H_s(g^2).$$

Ce résultat est prouvé dans [Lg2] en comparant un modèle discret qui approxime le serpent brownien et l'arbre des trajectoires des particules qui approximent le super-mouvement brownien. Nous donnons dans [7] une preuve basée sur le calcul stochastique. L'idée est d'utiliser la formule d'Itô du théorème 12 pour des fonctions F_ε appropriées et de faire apparaître ainsi $M_t(g)$ sous la forme

$$M_t(g) = 2 \int_0^{\tau_\rho} \mathbf{1}_{[0,t]}(\zeta_s)\, g(W_s)\, d\zeta_s$$

dont nous prouvons le caractère martingale en la variable t.

Nous pouvons étendre le champ d'application du serpent brownien à la construction du $(A, c(\cdot)\, z^2, b(\cdot))$–super-processus. C'est l'objet de la section suivante.

4.4 Construction du $(A, c\, z^2, b)$–super-processus

Rappelons que le $(A, c(\cdot)\, 4\, z^2, b(\cdot))$–processus historique est la solution (Z_t) à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathcal{W})$ du problème de martingale PM(b, c) suivant : pour tout $\psi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ bornée dans le domaine de L,

$$M_t(\psi) = Z_t(\psi) - \int_0^t ds\ (Z_s, L\psi) - \int_0^t ds\ Z_s(b\, c\, \psi), \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

est une martingale de variation quadratique

$$\langle M(\psi)\rangle_t = 4 \int_0^t ds\ Z_s(c\, \psi^2). \tag{4.2}$$

Nous pouvons obtenir un tel processus à partir du serpent brownien de la façon suivante. Nous suivons les directions données par [Wt2] et [Wt3]. Nous commençons par effectuer un changement de temps sur chaque trajectoire du serpent. On pose, pour $w \in \mathcal{W}$,

$$\phi(w, s) = \int_0^s \frac{dr}{c(w(r))}$$

On considère alors un serpent brownien (ζ_s^*, W_s^*) dont le déplacement spatial est le processus de Markov de générateur $\frac{1}{c}\, A$. On pose alors

$$\zeta_s = \phi(W_s^*, \zeta_s^*), \quad W_s = W_s^* \circ \phi^{-1}(W_s^*, \cdot).$$

En utilisant la formule d'Itô énoncée précédemment, il est facile d'identifier la loi de ce processus ($\mathbb{P}^{0,c}$ dans la prop. 15 de [7]). On introduit alors les temps locaux du temps de vie,

$$L_s^t(\zeta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\zeta_r \in (t, t+\varepsilon)\}}\, d\langle \zeta \rangle_r.$$

et le processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathcal{W})$ défini, sur une fonction test $F : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ bornée, par

$$H_t(F) = \int_0^{\tau_1} dL_s^t(\zeta)\; c(\hat{W}_s)\; F(W_s)$$

où

$$\tau_1 = \inf\{s; = \int_0^s dL_r^0(\zeta)\; c(\hat{W}_r) > 1\}$$

Alors celui-ci est un $(A, c\,4\,z^2, 0)$–processus historique identifié comme solution du problème de martingale PM$(0, c)$. explicité ci-dessus.

Pour faire intervenir le paramètre b qui apparaît dans PM(b,c) nous modifions le serpent brownien en faisant subir une dérive à son temps de vie. Comme ce sujet est le thème du prochain chapitre, nous ne détaillons pas ici. Nous renvoyons le lecteur à la prop. 15 de [7] qui précise la loi du serpent obtenu ainsi et au th. 17 de [7] qui montre qu'on obtient alors comme processus historique une solution de PM(b,c), c'est à dire le $(A, c(\cdot)\,4\,z^2, b(\cdot))$–super-processus.

L'idée de transformer les trajectoires du serpent brownien par des changements de temps sophistiqués a été développée par [DD]. Ils en déduisent des super-processus en intégrant par rapport au temps local selon une courbe aléatoire et donnent un problème de martingale vérifié par ces super-processus "avec interactions".

Chapitre 5

Serpent avec dérive : représentation et utilisation

5.1 Définition du serpent avec dérive

Le serpent brownien avec dérive $b : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ diffère du serpent brownien standard par le fait que son temps de vie (ζ_s) est non pas un mouvement brownien réfléchi mais un mouvement brownien avec dérive, toujours réfléchi en 0, c'est à dire que sur $\{\zeta_s > 0\}$, on a l'équation

$$d\zeta_s = d\gamma_s - b(W_s)\ ds$$

où (γ_s) est un mouvement brownien. Comme on autorise le terme de dérive $-b(W_s)\ ds$ à dépendre de la trajectoire spatiale, il ne paraît possible de construire d'abord le temps de vie puis de rajouter le déplacement spatial.

On peut définir le b-serpent brownien (issu de w_0 et de déplacement spatial de générateur A) comme la solution (W_s) du problème de martingale suivant : $W_0 = w_0$ et, en suivant les notations du chapitre précédent, pour toute

$$F : \left(w \mapsto \int_0^\zeta g(w_{\leq r})\ dr \right) \in \mathcal{D}_x,$$

$$M(F)_s = F(W_s) - \frac{1}{2} \int_0^s Lg(W_r)\ dr - \int_0^s b(W_r)\ g(W_r)\ dr$$

est une martingale de variation quadratique

$$< M(F) >_s = \int_0^s g^2(W_r)\ dr.$$

Pour montrer que ce problème de martingale admet une solution unique, il est naturel d'utiliser le théorème de Girsanov. Si P_w désigne la loi du serpent brownien standard, issu de w, on veut définir des lois P^b_w ($w \in \mathcal{W}$) sur l'espace canonique $C([0,+\infty),\mathcal{W})$ par :

$$\frac{d\mathrm{P}^b_w}{d\mathrm{P}_w}\Big|_{\mathcal{F}_s} = \exp\left(-\int_0^s b(W_r)\, d\beta_r - \frac{1}{2}\int_0^s b^2(W_r)\, dr\right)$$

où maintenant $(W_s)_{s\geq 0}$ désigne le processus canonique, $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u,\ u \leq s)$, et β est le mouvement brownien qui apparaît dans la représentation de Tanaka $\zeta_s = \beta_s - \frac{1}{2}\ell^0_s(\zeta)$. Cette définition est licite si la martingale locale exponentielle qui apparait au membre de droite est une martingale, c'est à dire a l'espérance 1 pour tout s. Nous devons à ce point faire une hypothèse sur b. Nous supposerons comme dans [8] que b est bornée. D'autres conditions suffisantes peuvent être formulées comme dans la proposition 13 de [7] en utilisant les critères de Kazamaki et Novikov.

5.2 Représentations du serpent avec dérive

Nous donnons dans [8] diverses représentations du b-serpent. Pour la première de ces représentations nous supposerons que b est positive et du type $b(w) = \hat{b}(\hat{w})$. On part d'un serpent brownien $(\tilde{W}_s)_{s\geq 0}$ standard au sens où son temps de vie est un mouvement brownien réfléchi mais avec un déplacement spatial dirigé par le processus de Markov de générateur A, tué selon le taux $2\,b$, c'est à dire que le déplacement spatial a maintenant lieu dans $\mathbb{R}^d$ auquel on a rajouté un point cimetière ∂. On efface alors les intervalles de temps où le point terminal du serpent est au point cimetière. On pose

$$A_s = \inf\{r;\ \int_0^r du\, \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_u(\tilde{\zeta}_u)\neq\partial\}}\ > s\} \text{ et } W_s = \tilde{W}_{A_s}$$

alors $(W_s)_{s\geq 0}$ est le b-serpent (th.1 de [8]). Ainsi le meurtre spatial se traduit par une dérive sur le temps de vie.

Pour la seconde représentation du b-serpent nous supposons que b est continue et positive. L'idée est d'élaguer, de façon poissonnienne, l'arbre associé au processus des temps de vie. Plus précisément, on part là encore d'un serpent brownien standard $(\tilde{W}_s)$ de temps de vie $(\tilde{\zeta}_s)$ mouvement brownien réfléchi et de déplacement spatial dans $\mathbb{R}^d$ gouverné par le processus de Markov de générateur A. On définit l'épigraphe de $(\tilde{\zeta}_s)$ par

$$\Lambda = \{(s,t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty);\ t < \tilde{\zeta}_s\}.$$

Chaque $(s,t) \in \Lambda$ détermine une excursion du processus des temps de vie $(\tilde{\zeta}_s)_{s\geq 0}$ au dessus du niveau t et contenant le temps s. Cette excursion est $[\alpha(s,t), \beta(s,t)]$ avec les notations :

$$\alpha(s,t) = \sup\{s' \leq s;\ \tilde{\zeta}_{s'} = t\} \text{ et } \beta(s,t) = \inf\{s' \geq s;\ \tilde{\zeta}_{s'} = t\}.$$

On définit une mesure ponctuelle aléatoire $\mathcal{N}$ dont la loi conditionnelle sachant $(\tilde{W}_s, \tilde{\zeta}_s)_{s\geq 0}$ est une mesure de Poisson

$$\mathcal{N}(ds\,dt) = \sum_i \delta_{(s_i,t_i)}(ds\,dt)$$

sur $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ d'intensité

$$\mathbf{1}_\Lambda(s,t)\ \frac{2\,b(\tilde{W}_s^{\leq t})}{\beta(s,t) - \alpha(s,t)}\ ds\,dt.$$

On rappelle que, pour $w \in \mathcal{W}$, la notation $w^{\leq t}$ désigne le chemin arrêté $w(\cdot \wedge t)$ de temps de vie $\zeta(w) \wedge t$. Ensuite on efface les branches qui correspondent aux sous-excursions basées sur les intervalles $[\alpha(s_i,t_i), \beta(s_i,t_i)]$ associés aux atomes de la mesure de Poisson. Ces intervalles étant loin d'être disjoints, cet "élagage" est très redondant. Formellement, tout cela consiste en un changement de temps. En notant Leb la mesure de Lebesgue et $(\cdot)^{\mathrm{c}}$ le complémentaire, on pose

$$C_s = \mathrm{Leb}\left[[0,s] \cap \left(\bigcup_i [\alpha(s_i,t_i), \beta(s_i,t_i)]\right)^{\mathrm{c}}\right],$$
$$A_s = \inf\{r;\ C_r > s\};\ \ W_s = \tilde{W}_{A_s}$$

Alors $(W_s)_{s\geq 0}$ est un b-serpent (th 2 de [8]). Notons, à titre de corollaire, qu'en oubliant toute notion de déplacement spatial ce résultat peut être vu comme le moyen de faire apparaître "par effacement" une dérive sur un mouvement brownien.

Une troisième approche du b-serpent est l'approximation par des modèles discrets. Par le très célèbre théorème de Donsker, le mouvement brownien réfléchi est la limite quand $N \uparrow +\infty$ d'une marche aléatoire non biaisée réfléchie et rééchelonnée par un facteur $1/N$ en abscisse et $1/\sqrt{N}$ en ordonnée. Ceci s'applique bien-sûr au temps de vie du serpent brownien. Il n'est donc pas surprenant que le serpent brownien soit la limite quand $N \uparrow +\infty$ d'une suite de "serpents discrets" standard $(W_t^N)_{t\geq 0}$ qui sont tels que : le temps de vie $(\zeta_t^N)_{t\in\frac{1}{N}\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{N}$, réfléchie en 0, ce temps de vie est affine entre deux temps consécutifs de $\frac{1}{N}\mathbb{N}$ et, enfin, la loi conditionnelle de $(W_t^N)_{t\geq 0}$ sachant $(\zeta_t^N)_{t\geq 0}$ est celle du serpent brownien standard. De façon identique, le b-serpent $(W_t)_{t\geq 0}$ peut être obtenu comme la limite quand $N \uparrow +\infty$ d'une suite de "b–serpents discrets" $(W_t^N)_{t\geq 0}$ qui sont tels que : le temps de vie $(\zeta_t^N)_{t\in \frac{1}{N}\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire biaisée selon b c'est à dire que les probabilités de montée ou de descente au temps $t \in \frac{1}{N}\mathbb{N}$ sont données respectivement par $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}b(W_t^N))$ et $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}b(W_t^N))$. C'est la proposition 4 de [8].

Nous pouvons interpréter ce résultat en termes d'élagage poissonien comme évoqué précédemment. Par souci de simplicité, supposons que b est constant et raisonnons sur les modèles discrets approximant. Un serpent discret standard est associé canoniquement à un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction géométrique de paramètre 1/2, au sens où son temps de vie est le processus de contour d'un tel arbre. L'élagage poissonien dont il est question précédemment consiste à faire une percolation sur cet arbre de Galton-Watson et à regarder l'arbre associé à la composante connexe de la racine. Il s'agit encore d'un arbre de Galton-Watson géométrique mais avec un paramètre qui n'est plus 1/2 et le processus de contour devient biaisé.

En résumé,

Théorème 13 (th. 1,2,3 de [8]) *Selon les procédures détaillées ci-dessus le b-serpent peut s'obtenir*

- *à partir d'un serpent brownien standard dont le déplacement spatial est tué selon b*
- *par élagage poissonien du temps de vie d'un serpent brownien standard*
- *comme limite de serpents discrets "biaisés"*

5.3 Obtention d'une e.d.p.

La représentation de certaines e.d.p. semi-linéaires du type $\Delta u = u^2$ par le super-mouvement brownien ou de façon équivalente par le serpent brownien est l'objet d'une abondante littérature, voir [Lg5] et [Ms] pour un traitement centré sur le serpent brownien ou les nombreux travaux de Dynkin et Kuznetsov.

Dans ces liens avec les e.d.p, un objet central est celui de mesure de sortie. Pour D ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, le temps local de sortie de D pour le serpent brownien standard (W_s) est défini par

$$L_s^D = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{\tau(W_u)\leq \zeta_u < \tau(W_u)+\varepsilon\}} du$$

où $\forall w \in \mathcal{W}, \tau(w) = \inf\{t \geq 0,\ w_t \notin D\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Les solutions positives de $\Delta u = 4\,u^2$ dans D avec diverses conditions aux frontières finies ou infinies s'expriment alors à l'aide de la mesure de sortie X^D définie par

$$X^D(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(\hat{W}_s)\, dL_s^D.$$

Ces objets peuvent encore être définis si on remplace le serpent brownien standard par le b-serpent et on prouve le résultat suivant.

Proposition 14 (prop. 7 de [8]) *Pour D domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $b : D \to \mathbb{R}_+$ continue et $\mathbb{N}_x$ désignant la mesure d'excursion d'un $\tilde{b}$-serpent issu de x, où $\tilde{b}(w) = b(\hat{w})$, on pose*

$$u_1(x) = \mathbb{N}_x\left[1 - \exp\left(-X^D(f)\right)\right],$$

$$u_2(x) = \mathbb{N}_x\left[X^D \neq 0\right],$$

$$u_3(x) = \mathbb{N}_x\left[\{\hat{W}_s;\ s \geq 0\} \cap D^{\mathrm{c}} \neq \emptyset\right].$$

Alors les fonctions u_1, u_2, u_3 sont des solutions positives de $\Delta u = 4\,u^2 - 2b\,u$ dans D. La fonction u_1 satisfait la condition frontière

$$\lim_{x \to y,\, x \in D} u_1(x) = f(y), \quad y \in \partial D$$

Les fonctions u_2 et u_3 satisfont la condition aux limites infinie

$$\lim_{x \to y,\, x \in D} u_i(x) = +\infty, \quad y \in \partial D,\ i \in \{2, 3\}$$

et elles sont les solutions respectivement minimale et maximale avec cette condition aux limites infinie.

5.4 Serpent de Poisson et fragmentation

Il est possible de considérer un serpent brownien dont le déplacement spatial est un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$, le temps de vie restant brownien, dans notre cas une excursion brownienne normalisée. Nous avions pour le moment considéré des déplacements spatiaux continus, mais la définition d'un serpent brownien avec ce type de déplacement spatial est également possible, voir [Lg5] chap.4. Cet objet a été considéré par [Wa] et [Wt3] et appelé serpent de Poisson. Nous utilisons une famille de tels serpents de Poisson en faisant varier la valeur du paramètre α. Pour être plus précis, nous faisons une construction cohérente de ces différents serpents de Poisson pour que l'augmentation du paramètre α consiste sur ces serpents en l'ajout de sauts supplémentaires sur les processus de Poisson qui constituent le déplacement spatial.

Théorème 15 (th. 1 de [9]) *On peut construire une famille* $(\zeta_s, N_s^\alpha(u);\ u, s \geq 0,\ \alpha > 0)$ *de façon que :*

- $(\zeta_s,\ s \geq 0)$ *est une excursion brownienne normalisée*
- *Pour tout* $\alpha > 0$ $(N_s^\alpha;\ s \geq 0)$ *est un processus de trajectoires arrêtées selon le temps de vie* $(\zeta_s,\ s \geq 0)$, *ayant la propriété de serpent*
- *Pour tous* $s \geq 0$, $\alpha > 0$, $(N_s^\alpha(u);\ u \geq 0)$ *est un processus de Poisson d'intensité* 2α.
- *Pour* $0 < \alpha \leq \beta$ *et* $s > 0$, *les instants de saut de* $N_s^\alpha(\cdot)$ *sont des instants de saut de* $N_s^\beta(\cdot)$ *et* $N_s^\beta(\cdot) - N_s^\alpha(\cdot)$ *est indépendant de* $N_s^\alpha(\cdot)$

Alors cette famille de serpents de Poisson permet de définir un processus de fragmentation. Les processus de fragmentation ont été étudiés en profondeur ces dernières années, notamment par Bertoin, voir par exemple [Be] pour le type fragmentation concerné par notre travail. De manière informelle, un processus de fragmentation est un processus de Markov qui décrit la façon dont une masse se casse en petits morceaux, en satisfaisant une propriété d'indépendance dans la désagrégation des différents fragments et, dans notre cas, une propriété d'auto-similarité au sens où chaque fragment créé se désagrège de la même façon que le processus initial, à une multiplication près du taux de désagrégation.

Le processus de fragmentation que nous obtenons est celui décrit par Aldous et Pitman ([AP]) comme processus dual de la coalescence additive. Ils procèdent par fragmentation poissonienne de l'arbre continu d'Aldous. Notre modèle de serpent de Poisson est en fait une reformulation, avec un formalisme assez différent du travail d'Aldous et Pitman. L'intérêt de notre approche est de permettre l'utilisation des résultats donnés sur le serpent pour obtenir une description de cette fragmentation, alors que les preuves d'Aldous et Pitman consistent à se ramener aux arbres finis.

De façon plus précise, nous définissons un processus $(F(\alpha);\ \alpha \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites décroissantes positives de somme ≤ 1. On pose $F(0) = (1, 0, \ldots)$. Pour tout $\alpha > 0$ on introduit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\alpha$ sur $[0,1]$ donnée par

$$u \mathcal{R}_\alpha v \iff \left(\hat{N}_u^\alpha = \hat{N}_v^\alpha \leq \hat{N}_s^\alpha \text{ for all } s \in [u, v] \right).$$

Alors $F(\alpha)$ est défini comme la suite décroissante des longueurs des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_\alpha$.

Proposition 16 (th. 2 de [9]) $(F(\alpha);\ \alpha \geq 0)$ *est une fragmentation auto-similaire d'indice 1/2 c'est à dire que* $(F(\alpha))$ *est un processus de Markov à valeurs dans* $\mathcal{S}$ *tel que, si* p_α *désigne la loi de* $F(\alpha)$*, pour* $0 < \alpha < \beta$*, la loi conditionnelle* $F(\beta)$ *sachant* $F(\alpha) = s = (s_1, s_2, \ldots)$ *est la loi du réarragement décroissant de* $\bigcup_{i \geq 1} s_i F_i$ *où les* F_i *sont des variables indépendantes à valeurs dans* $\mathcal{S}$ *et de lois respectives* $p_{(\beta-\alpha)\, s_i^{1/2}}$.

Dans notre modèle, les propriétés d'auto-similarité découlent des propriétés des accroissements du mouvement brownien et du processus de Poisson. L'indice 1/2 correspond à l'indice de changement d'échelle du mouvement brownien.

Comme il est prouvé dans [Be], une telle fragmentation auto-similaire d'indice 1/2 est déterminée par 2 paramètres : le coefficient d'érosion qui décrit l'érosion continue de masse et qui est nul ici et la mesure de fragmentation ν qui décrit comment un fragment se brise. Dans notre cas, cela correspond à un nouvel atome du processus de Poisson et cela conduit à la dislocation d'une masse en deux masses, c'est à dire que la fragmentation est binaire. Alors d'après [Be], on peut caractériser la fragmentation en donnant la loi d'un "fragment marqué" ce qui, dans notre cas, consiste à choisir U uniforme sur [0,1] et à regarder la loi de

$$\lambda^U(\alpha) = \mathrm{Leb}\left(\{s;\ s\,\mathcal{R}_\alpha\, U\}\right).$$

Proposition 17 (prop. 3 de [9]) $(\lambda^U(\alpha))$ *a même loi que* $(1/(1+\sigma_\alpha))$ *où* (σ_α) *est un subordinateur stable d'indice 1/2.*

Ce résultat est essentiellement le théorème 6 de [AP]. Voir aussi la fin de [Be]. Toutefois nous donnons une preuve complètement différente. Nous montrons d'abord que ce processus a même loi que si U est identiquement nul, c'est une propriété de déplacement de la racine. Alors les résultats sur le meurtre donnés dans [8] et décrits dans ce chapitre entrainent que le processus étudié a même loi que $(e(s) - \alpha\, s; s \geq 0)$ arrêté au premier retour en zéro, où e a la loi de l'excursion brownienne normalisée et le résultat en découle.

A titre d'application de notre représentation nous donnons un calcul direct de la mesure de dislocation ν. Nous prouvons qu'elle est donnée par

$$\int F(s_1)\ \nu(ds) = \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}\ z^{3/2}\ (1-z)^{3/2}}\quad F(z)$$

Dans notre modèle cela se ramène au calcul de la longueur de la sous-excursion du temps de vie au-dessus du niveau t et qui contient le temps s où (s,t) est distribué aléatoirement.

Chapitre 6

Conditionnements du super-mouvement brownien

6.1 Super-mouvement brownien conditionné à ne pas mourir

Pour $(Y_t)_{t\geq 0}$ super-mouvement brownien issu de μ sous P^μ, l'événement $\{\forall t \geq 0,\ \ Y_t \neq 0\}$ est de probabilité nulle mais la loi $\tilde{P}$ du super-mouvement brownien conditionné à ne pas mourir a été définie ([EP]) au sens où, pour tout $T > 0$ et toute $\Phi :\ \Omega \to [0, +\infty)$ continue et $\sigma(Y_s;\ s \leq T)$−mesurable,

$$\tilde{P}(\Phi) = \lim_{H \to +\infty} P^\mu(\Phi | Y_H \neq 0).$$

Une représentation de cette loi a été donnée dans [Ev], en faisant intervenir notamment la contribution d'une particule immortelle. L'usage du serpent brownien rend la description de $\tilde{P}$ aisée. En effet, considérons un super-mouvement brownien $(Y_t)_{t\geq 0}$ construit à partir d'un serpent brownien (W_s) comme expliqué dans la section 1.4. Pour simplifier la présente explication supposons par exemple que la mesure initiale est δ_{x_0}. Nous savons bien que la construction de $(Y_t)_{t\geq 0}$ se fait à partir de $(W_s,\ \ s \leq \tau_4)$ où τ_4 est le temps d'atteinte de 4 par le temps local en 0 du temps de vie (ζ_s). Alors le temps d'extinction $H = \inf\{t > 0,\ Y_t = 0\}$ est simplement $\sup_{s \leq \tau_4} \zeta_s$. Conditionner par $H = h$ revient donc à conditionner la mesure de Poisson des excursions du temps de vie à avoir une excursion de hauteur h, les autres excursions étant de hauteurs plus petites que h. Les théorèmes classiques sur le conditionnement d'une mesure de Poisson s'appliquent alors. Pour décrire l'excursion du serpent associé à l'excursion du temps de vie de hauteur h, on utilise la décomposition de Williams. Cela conduit à distinguer la trajectoire du serpent à l'instant où la hauteur h est atteinte ; c'est une trajectoire brownienne dans $\mathbb{R}^d$ disons $(\omega(s),\ s \leq h)$. Les autres trajectoires du serpent pendant l'excursion de hauteur h peuvent être vues comme branchant sur cette trajectoire et on les décrit par une mesure de Poisson (cf prop. 2.1 de [4]) ; cela provient de la description des excursions du temps de vie au-dessus de son minimum.

Quand $h \to +\infty$, la trajectoire $(\omega(s),\ s \leq h)$ devient celle de la "particule immortelle" ; les contributions des excursions de hauteurs inférieures à h donnent à nouveau un super-mouvement brownien. On obtient la description suivante, que l'on peut voir comme une traduction en termes de serpent brownien du th. 3.4 de [Ev].

Théorème 18 (th. 1.1 de [4]) *La loi $\tilde{P}^{\delta_{x_0}}$ du super-mouvement brownien issu de δ_{x_0} et conditionné à ne pas mourir est la loi de $Y' + \tilde{Y}$ où Y' est un super-mouvement brownien issu de δ_{x_0} et $\tilde{Y}$ est un procesus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ indépendant de Y' et dont la loi est décrite par la formule suivante*

$$E(\Phi(\tilde{Y})) = \int dP_{x_0}(\omega)\ E^{(\omega)}\left[\Phi\left(\int_{\{s<t\}} \mathcal{N}(ds\, dW)\, X_{t-s}(W);\ t \geq 0\right)\right] \tag{6.1}$$

pour toute $\Phi : C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Ici P_{x_0} désigne la loi du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de x_0 et $\mathcal{N}$ est, sous $P^{(\omega)}$ une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathcal{W})$ d'intensité $4\, ds\, N_{\omega(s)}(dW)$. La notation $X_{t-s}(W)$ désigne le processus à valeurs dans $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ associé à W selon le procédé habituel.

6.2 Mesure d'occupation du super-mouvement brownien éternel

Pour un super-mouvement brownien $(Y_t)_{t\geq 0}$ ordinaire, la mesure d'occupation Z sur $\mathbb{R}^d$ définie par $Z(\cdot) = \int_0^{+\infty} Y_t(\cdot)\, dt$ est tout bonnement finie presque sûrement. Si maintenant $(Y_t)_{t\geq 0}$ désigne un super-mouvement brownien conditionné à ne pas mourir, on peut se demander si Z est finie sur les compacts. Un problème de même nature a été traité dans [SW] pour un sytème de branchement critique de particules browniennes.

Théorème 19 (th. 1.2 de [4]) *Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un super-mouvement brownien conditionné à ne pas mourir et issu de δ_{x_0}. Alors* *(i) si $d \geq 5$, pour tout borélien borné $B \subset \mathbb{R}^d$, presque sûrement,*

$$Z(B) = \int_0^{+\infty} Y_t(B)\, dt < +\infty.$$

(ii) Si $d \leq 4$, presque sûrement,

$$Z(B) = \int_0^{+\infty} Y_t(B)\, dt = +\infty$$

pour toute boule ouverte B.

Le cas (i) se traite facilement par un calcul du premier moment. Le cas (ii) est plus technique. Il utilise bien sûr la représentation obtenue ci-dessus puis une estimation assez précise des moments de la mesure d'occupation d'une petite boule pour le super-mouvement brownien ordinaire (lemme 3.1 de [4]).

6.3 Conditionnement à rester dans un domaine

Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Nous avons déjà introduit

$$\mathcal{R} = \{\hat{W}_s, s \geq 0\}$$

ensemble image du serpent brownien standard $(W_s)_{s\geq 0}$. Cet ensemble $\mathcal{R}$ est aussi l'image du super-mouvement brownien.

Théorème 20 (th. 8 de [8]) *La loi du serpent brownien standard conditionné à rester dans l'ouvert D i.e. $\mathcal{R} \subset D$ est un b-serpent où $b(x) = \mathbb{N}_x(\mathcal{R} \cap D^c \neq \emptyset)$.*

Ce résultat peut bien sûr se traduire en termes de super-mouvement brownien. Notons qu'il est étonnant que le confinement spatial à l'intérieur de D se traduise par une dérive sur le temps de vie sans changer la loi des trajectoires. Le principe de la preuve est le suivant : nous utilisons la représentation poissonienne des excursions du temps de vie au-dessus de son minimum pour un serpent brownien issu de w afin d'obtenir une expression de la probabilité que le serpent brownien, issu de w et tué à son premier retour en zéro, reste dans D. Il se trouve que cette fonction de w est $\exp -F(w)$ où on peut appliquer à F la formule d'Itô énoncée au théorème 12. On voit alors apparaître une densité exponentielle de type Girsanov entre la loi du serpent standard et celle du serpent confiné, d'où l'apparition du terme de dérive.

Ce résultat de conditionnement spatial est à rapprocher de [SV] qui étudie le conditionnement du super-mouvement brownien par sa mesure de sortie.

6.4 Conditionnement par la masse totale

Nous nous intéressons maintenant à un super-mouvement brownien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ issu de $\mu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ dont le déplacement spatial est une diffusion de générateur A. Le processus des masses $(X_t(1))_{t\geq 0}$ est un carré de processus de Bessel de dimension 0 issu de $\mu(1)$ parfois appelé "processus de Feller". Nous appelons masse totale Z la quantité $Z = \int_0^{+\infty} X_t(1)\, dt$. Si on considère, dans le cas $\mu = \hat{\mu}\delta_{x_0}$ pour simplifier, la représentation en termes d'un serpent brownien standard (ζ_s, W_s) :

$$X_t = \frac{1}{4}\int_0^{\tau_{4\hat{\mu}}} \delta_{W_s(\zeta_s)}\, dL_s^t(\zeta)$$

où, comme d'habitude, τ est l'inverse de $L^0_\cdot(\zeta)$ temps local en 0 du temps de vie ζ, le résultat précédent sur le comportement de $X_t(1) = \frac{1}{4}L^t_{\tau_{4\hat{\mu}}}$ est simplement le théorème de Ray-Knight et la formule de densité des temps d'occupation s'écrit

$$Z = \int_0^{+\infty} X_t(1)\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} L^t_{\tau_{4\hat{\mu}}}\, dt = \frac{1}{4}\tau_{4\hat{\mu}}$$

En termes de serpent, conditionner (X_t) par Z revient à conditonner le temps de vie du serpent sous-jacent à $\tau_{4\hat{\mu}} = 4Z$, c'est à dire qu'un tel super-mouvement brownien conditionné peut être fabriqué à partir d'un serpent dont le temps de vie $\tilde{\zeta}$ est un pont brownien réfléchi entre 0 et $4Z$ conditonné à $L^0_{4Z}(\tilde{\zeta}) = 4\hat{\mu}$. Notons que ce temps de vie peut se représenter sous la forme $\tilde{\zeta} = (B_s - \inf_{r\leq s} B_r)_{s\in[0,4Z]}$ où B est un mouvement brownien conditionné à $B_{4Z} = -2\hat{\mu}$ et $B_s > -2\hat{\mu}$ pour $s \in [0, 4Z]$.

Indépendamment de cette interprétation en termes de serpent, il semble intéressant de regarder ce conditionnement à la masse totale du point de vue du système approximant de particules. Nous savons qu'un tel système qui approxime le super-mouvement brownien est construit à partir d'une structure de branchement qui est une forêt de Galton-Watson, dont la loi de reproduction est critique de variance finie. L'approximant discret de la masse totale est, au facteur de normalisation près, le nombre total d'individus de cette forêt de Galton-Watson. Le conditionnement revient donc à imposer le nombre d'individus de cette forêt. Si par exemple la loi de reproduction est la loi géométrique cela revient à considérer une forêt de loi uniforme parmi celles ayant un nombre fixé d'individus. Pour faciliter les calculs nous avons, dans [10], préféré travailler avec une loi de reproduction de type Bernoulli et ainsi avec une forêt binaire uniforme. L'analyse du système de particules conduit alors au résultat suivant.

Théorème 21 (th. 1,2 de [10]) *Le processus à valeurs mesures* (X_t^N) *associé à un système de particules dont le déplacement spatial dans* $\mathbb{R}^d$ *suit une diffusion de générateur* A *et dont les branchements sont régis par une loi de reproduction binaire critique et qui de plus est conditionné à un nombre total* $[L\,N^2]$ *de particules, converge en loi vers l'unique solution du problème de martingale suivant :*

$$\mathrm{CMP}_{(L)} \begin{cases} X_0 = \mu \\ \forall \phi \in \mathcal{D}(A), \quad X_t(\phi) = X_0(\phi) + \int_0^t X_s(A\phi)\, ds \\ \qquad - \int_0^t \left(\frac{1}{X_s(1)} - \frac{X_s(1)}{L - \int_0^s X_r(1)\, dr} \right) \; X_s(\phi)\, ds + M_t(\phi) \\ \text{où } M(\phi) \text{ est une martingale de variation quadratique} \\ \langle M(\phi) \rangle_t = \int_0^t X_s(\phi^2)\, ds \end{cases}$$

La famille des lois solutions de ces problèmes de martingale $\left(\mathrm{CMP}_{(L)}, \;\; L \in \mathbb{R}_+\right)$ *est une version des lois conditionnelles* $(\,(X\,|Z = L), \;\; L \in \mathbb{R}_+)$ *où* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *est un super-mouvement brownien standard issu de* $\mu \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ *et dont le déplacement spatial est une diffusion de générateur* A*.*

Chapitre 7

Bibliographie

Al1 D. Aldous.
The continuum random tree I.
Ann. Probab. 19, 1-28, 1991.

Al2 D. Aldous.
The continuum random tree II.
In *Proc. Durham Symp. Stochastic Analysis 1990.* Cambridge University Press, 1992.

Al3 D. Aldous.
The continuum random tree III.
Ann. Probab. 21, 248-289, 1993.

Al4 D. Aldous.
Tree based models for random distribution of mass.
J. Statist. Phys. 73, 625-641, 1993.

AP D. Aldous, J. Pitman.
The standard additive coalescent.
Ann. Probab. 26, 1703-1726, 1998.

BEP M.T. Barlow, S.N. Evans, E.A. Perkins.
Collision local times and measure valued processes.
Canadian J. Math. 43, 897-938, 1991.

Be J. Bertoin.
Self-similar fragmentations.
Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat 38 (3), 319-340, 2002.

CC E. Csaki, M. Csorgo, A. Foldes, P. Revesz.
Global Strassen-type theorems for iterated Brownian motions.
Stoc. Proc. App. 59, 321-341, 1995.

CDP T. Cox, R. Durrett, and E. Perkins.
Rescaled voter model converges to super-Brownian motion.
Ann. Probab. 28, 185-234, 2000.

Da D.A. Dawson.
Measure-valued Markov processes.
In École d'été de probabilités de Saint-Flour 1991, *Lect. Notes Math.* 1541, 1-260. Springer, 1993.

DD J.-F. Delmas, J.-S. Dhersin.
Super-Brownian motion with interactions.
Stoc. Proc. App. 107, 301-325, 2003.

DIP D.A. Dawson, I. Iscoe, and E.A. Perkins.
Super-Brownian motion : Path properties and hitting probabilities.
Probab. Th. Rel. Fields 83, 135-205, 1989.

DP D.A. Dawson, E.A. Perkins.
Historical processes.
Memoirs Amer.Math. Soc. 454, 1991.

DS E. Derbez, G. Slade.
The scaling limit of lattice trees in high dimensions.
Commun. Math. Phys. 193, 69-104, 1998

DuP R. Durrett, E.A. Perkins.
Rescaled contact process converge to super-Brownian motion for $d \geq 2$.
Probab. Th. Rel. Fields 114, 309-399, 1999.

Dy1 E.B. Dynkin.
Path process and historical superprocesses.
Probab. Th. rel. Fields 90, 1-36, 1991.

Dy2 E.B. Dynkin.
An introduction to Branching Measure-Valued Processes.
In *CRM Monograph Series*, volume 6. Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

DK E.B. Dynkin and S.E. Kuznetsov.
Markov snakes and superprocesses.
Prob. Th. Rel. Fields 103, 433-473, 1995.

DZ A. Dembo and O. Zeitouni.
Large deviations for random distribution of mass.
In *Proceedings of the IMA workshop on random discrete structure* 76, 45-53. Springer, 1994.

Et A. Etheridge.
An introduction to super-processes.
University Lecture Series 20. *Amer. Math. Soc.*, 2000

Ev S.N. Evans.
Two representations of a conditioned superprocess.
Proc. Royal Society Edinburgh 123, 959-971,1993

EP S.N. Evans, E.A. Perkins.
Measure-valued Markov branching processes conditioned to non-extinction.
Israel J. Math 71, 329-337, 1990.

Kr S.M. Krone.
Local times for super-diffusions.
Ann. Probab. 21 (3), 1599-1623, 1993.

Lg1 J.F. Le Gall.
Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes.
Ann. Probab. 19, 1399–1439, 1991.

Lg2 J.F. Le Gall.
A class of path-valued Markov processes and its applications to super-processes.
Probab. Th. Rel. Fields 95, 25–46, 1993.

Lg3 J.F. Le Gall.
The uniform random tree in a Brownian excursion.
Probab. Th. Rel. Fields 96, 369-383, 1994.

Lg4 J.F. Le Gall.
A lemma on super-Brownian motion with some applications.
Festchrift in honor of E.B. Dynkin, 237-251, Birkhauser, 1994.

Lg5 J. F. Le Gall.
Spatial Branching Processes, random snakes and partial differential equations.
Lectures in Math. ETH Zurich, Birkhauser, 1999.

LP J.F. Le Gall, E.A. Perkins.
The Hausdorff measure of the support of two-dimensional super-Brownian motion.
Ann. Probab. 23,1719-1747, 1995.

Ms B. Mselati.
Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine. Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 2002.

Ov L. Overbeck.
Pathwise construction of additive H-transforms of super-Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* 100, 429-437, 1994.

Pe1 E.A. Perkins.
Polar sets and multiple points of super-Brownian motion.
Ann. Probab. 18, 453-491, 1990.

Pe2 E. Perkins.
Dawson-Watanabe superprocesses and measure-valued diffusions.
In École d'été de probabilités de Saint-Flour XXIX, *Lecture Notes Math.* 1781, Springer, Berlin, 1999.

RY D. Revuz, M.Yor
Continuous martingales and Brownian motion, third edition.
Springer, 1999.

Sc A. Schied A.
Sample path large deviations for super-Brownian motion.
Probab. Th. Rel. Fields 104 (3), 319-347, 1996.

SV T. Salisbury, J.Verzani.
On the conditioned exit measures of super-Brownian motion.
Probab. Th. Rel. Fields 115, 237-285, 1999.

SW A. Stockl, A. Wakolbinger.
On clan-recurrence and -transience in time stationary branching Brownian particle systems.
CRM Proc. Lecture Notes 5, 213-219, 1993.

Tr R. Tribe.
Path properties of superprocess.
Ph. D. Thesis, University of British Colombia, 1989.

Wa J. Warren.
The noise made by a Poisson snake.
Electronic Journal of Probability Vol. 7, 2002.

Wt1 S. Watanabe.
A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes.
J. Math. Kyoto Univ., 8, 141-167, 1969.

Wt2 S. Watanabe.
Branching diffusions (superdiffusions) and random snakes.
Trends in Prob. Relat. Analysis, Proc. SAP'96, 289-304, 1997.

Wt3 S. Watanabe.
Killing method for measure-valued branching diffusion processes using a Brownian snake.
RIMS Kokyuroku, 1089, 61-73, 1999.

We A.D. Wentzell.
Infinetesimal characteristics of Markov processes in a function space which describes the past.
Th. Prob. Appl. 30, 661-676, 1985.