Séminaires & Congrès
12, 2005, p. 1–117

FORMES MODULAIRES ET PÉRIODES

par

François Martin & Emmanuel Royer

Résumé. — L'objet de ce cours est de présenter la théorie des formes modulaires et certains de ses développements récents. Dans un premier chapitre, on développe la théorie des formes modulaires sur les sous-groupes de congruence $\Gamma_0(N)$. Dans un deuxième chapitre, on présente la notion de périodes de formes modulaires sur le groupe modulaire. On en déduit des résultats concernant les structures rationnelles des espaces de formes modulaires. Dans une troisième partie, on étudie les structures différentielles sur les espaces de formes modulaires. C'est l'occasion de développer les notions de forme quasimodulaire et forme modulaire presque holomorphe introduites par Zagier. Enfin, en annexe, on étudie la théorie des formes modulaires avec systèmes multiplicatifs.

***Abstract* (Periods and modular forms).** — The aim of this course is the presentation of the theory of modular forms and some of its recent developments. In the first chapter, we develop the theory of modular forms on the congruence subgroups $\Gamma_0(N)$. In the second chapter, we present the notion of periods of modular forms on the modular group. We deduce some results concerning the rational structures on the spaces of modular forms. In a third chapter, we study the differential structures on spaces of modular forms. We introduce, in that occasion, the notions of quasimodular forms and quasi holomorphic modular forms developped by Zagier. In an appendix, we study the modular forms with multiplicative systems.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F03, 11F06, 11F11, 11F25, 11F30, 11F37, 11F67.
Mots clefs. — Forme modulaire, période de forme parabolique, période de forme non parabolique, produit scalaire de Petersson, crochet de Rankin-Cohen, fonction L, isomorphisme d'Eichler-Shimura, structure rationnelle, structure différentielle, forme quasimodulaire, forme modulaire presque holomorphe, valeur spéciale, système multiplicatif.

Le second auteur est en partie subventionné par l'ACI jeunes chercheurs « arithmétique des fonctions L » de l'Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (Université Montpellier II, UMR 5149).

Table des matières

Notations – conventions. — Si x est un nombre réel, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On adopte les conventions suivantes

$$\#X \text{ est le cardinal de l'ensemble } X,$$
$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \geqslant 0\}, \quad \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{Z} \colon n > 0\},$$
$$\sum_{d|N} f(d) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d|N}} f(d), \qquad \prod_{p|N} f(p) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} f(p),$$

avec $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

$$\langle X\rangle \text{ est le groupe engendré par les éléments de } X,$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\quad V=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$\delta(E)=\begin{cases}1 & \text{si la propriété } E \text{ est vraie}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si u et v sont des entiers, (u,v) est le plus grand diviseur commun de u et v.

Si $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n, comptés sans multiplicité :

$$\omega(n)=\#\{p\in\mathcal{P}\colon p\mid n\}$$

et $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs de n :

$$\sigma_0(n)=\#\{d\in\mathbb{N}^*\colon d\mid n\}.$$

Plus généralement, si $s\in\mathbb{C}$, on pose

$$\sigma_s(n)=\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\ d\mid n}} d^s.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note

$$\nu(n)=n\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid n}}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

La fonction φ est la fonction indicatrice d'Euler, définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$\varphi(n)=n\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid n}}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Si $z\in\mathbb{C}$, on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire : $z=x+iy$. On note aussi

$$q=e(z)=\exp(2i\pi z).$$

Pour tout entier $d\geqslant 0$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d est noté $\mathbb{C}_d[X]$. Si $d\geqslant 2$, on note aussi $V_d=\mathbb{C}_{d-2}[X]$.

On note B_k le k^{e} nombre de Bernoulli, défini par

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\frac{t^n}{n!}.$$

Remerciements. — Au printemps de l'année 1997, un général nous a demandé de faire une promenade dans le monde scientifique. Nous avons rencontré un guide : Jean-Benoît Bost, qui nous a conduits en bordure du pays modulaire. Bon guide celui qui donne envie d'aller au-delà ! Il nous a confiés à de nouveaux guides qui nous ont accompagnés durant quatre années et firent de nous des marcheurs autonomes : Étienne Fouvry, Philippe Michel et Loïc Merel. Nous voilà maintenant seuls (pas complètement...) dans le pays modulaire et il y a là-bas une forêt immense, pleine de promesses (de dangers ?). Merci à tous nos guides !

Nos remerciements vont aussi à Henryk Iwaniec et Don Zagier. Chaque moment qu'ils nous ont consacré reste une lumière dans nos cœurs et nos esprits. Les cours de Don Zagier au Collège de France ont été une source d'inspiration essentielle pour ce travail. Nous le remercions pour sa présentation enthousiaste d'un aspect original du monde modulaire.

Nous remercions les membres de l'ACI jeunes chercheurs « arithmétique des fonctions L », et notamment Philippe Elbaz–Vincent, pour leur soutien. Enfin, nous exprimons notre gratitude aux organisateurs du colloque « Jeunes » *Formes modulaires et transcendance* organisé au Centre International de Recherche Mathématique en mai 2003 : Stéphane Fischler, Éric Gaudron, Samy Khémira pour leur relecture de versions préliminaires de ce texte. Nous adressons nos remerciements sincères au rapporteur pour ses riches remarques.

PARTIE I
FORMES MODULAIRES

1. Préliminaires sur les sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Z})$

1.1. Action homographique et domaine fondamental. — Soit $\mathscr{H}$ le *demi-plan de Poincaré* défini par $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im m\, z > 0\}$. Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathscr{H}$ par l'action homographique

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{R}) \times \mathscr{H} &\longrightarrow \mathscr{H} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned} \tag{1}$$

On s'intéresse dans ce texte à l'action de sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Q})$, aussi on restreint désormais l'étude à $SL(2,\mathbb{Q})$.

On définit un point ∞ (qu'on identifiera géométriquement au point $i\infty$) et on étend l'action (1) restreinte à $SL(2,\mathbb{Q})$ en une action sur $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{H} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ avec

$\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ en posant

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \frac{-d}{c} = \infty$$
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \infty = \frac{a}{c}.$$

Cette action n'est pas fidèle puisque $-I$ agit trivialement. Cependant, $-I$ et I sont les seules matrices à agir trivialement. Autrement dit, l'action induite par

$$PSL(2, \mathbb{Q}) = SL(2, \mathbb{Q})/_{\{\pm I\}}$$

est fidèle.

Si Γ est un sous-groupe discret[(1)] de $SL(2, \mathbb{R})$, on appelle *domaine fondamental* un ensemble qui satisfait à la définition suivante.

Définition 1. — Soit Γ un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$. On dit que $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental de Γ si

– l'ensemble $\mathcal{F}$ contient au moins un point de chaque orbite de $\mathscr{H}$ par l'action de Γ ;
– l'ensemble $\mathcal{F}$ est fermé ;
– l'intérieur de $\mathcal{F}$ ne contient qu'un point de chaque orbite de $\mathscr{H}$ par l'action du quotient $\Gamma/_{\Gamma \cap \{\pm I\}}$.

Tout sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$ admet un domaine fondamental connexe [**Miy89**, § 1.6]. On trouve dans [**Ser77**, chapitre VII, § 1] la preuve des deux propositions suivantes :

Proposition 2. — *Le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. — *Un domaine fondamental de $SL(2, \mathbb{Z})$ est*

$$F_1 = \left\{ z \in \mathscr{H} : \, -\frac{1}{2} \leqslant \Re e\, z \leqslant \frac{1}{2}, \, |z| \geqslant 1 \right\}.$$

(1) Ayant muni Γ d'une norme, par exemple $\| \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$, on dit que Γ est discret si toutes les boules sont finies.

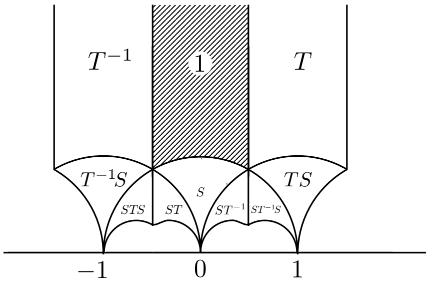

FIGURE 1. Domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$ et quelques transformées de ce domaine

1.2. Sous-groupes de congruence. — Si $N>0$ est un entier, on appelle *sous-groupe principal de congruence* de niveau N le sous-groupe distingué de $SL(2,\mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma(N)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})\colon a\equiv d\equiv 1[N],\ b\equiv c\equiv 0[N]\right\}.$$

On appelle *sous-groupe de congruence* de niveau[(2)] N un sous-groupe Γ de $SL(2,\mathbb{Z})$ contenant $\Gamma(N)$. Un tel sous-groupe est d'indice fini, noté $\nu[\Gamma]$, dans $SL(2,\mathbb{Z})$. Dans ce texte, on utilise le sous-groupe

$$\Gamma_0(N)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})\colon c\equiv 0[N]\right\}.$$

On note dès maintenant que $-I\in\Gamma_0(N)$.

1.3. Géométrie des quotients $_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$. — Soit Γ un sous-groupe de congruence. On rappelle des résultats utiles sur la géométrie des quotients $_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$, qui est celle de Lobatchevski-Poincaré.

On étend la topologie naturelle de $\mathscr{H}$ en une topologie sur $\overline{\mathscr{H}}$ de la façon suivante :

– Les voisinages des points de $\mathscr{H}$ sont ceux donnés par la topologie usuelle de $\mathbb{C}$;

– Un système fondamental de voisinages du point ∞ est donné par les demi-plans

$$\{z\in\mathbb{C}\colon\ \Im m(z)>M\}\cup\{i\infty\};$$

– Un système fondamental de voisinages d'un point $x\in\mathbb{Q}$ est donné par les $C\cup\{x\}$, où C est un disque ouvert contenu dans $\mathscr{H}$ tangent à l'axe réel en x.

On munit $_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ de la topologie quotient. L'espace $_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ est séparé et compact [**Miy89**, § 1.7]. On sait munir $_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ d'une structure analytique qui en fait une surface de Riemann compacte $X(\Gamma)$ [**Miy89**, § 1.8].

Les voisinages fondamentaux des nombres rationnels et du point ∞ sont appelés des *horocycles*. L'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\overline{\mathscr{H}}$ transforme un horocycle en un horocycle.

(2) Remarquer que le niveau d'un sous-groupe de congruence n'est pas défini de façon unique.

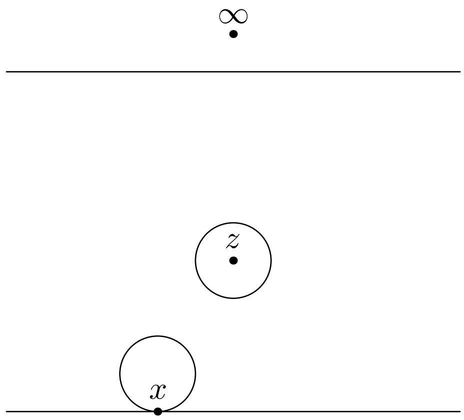

Figure 2. Systèmes de voisinages dans la géométrie de Lobatchevski-Poincaré

Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2,\mathbb{Q})^+$ (le sous-ensemble de $GL(2,\mathbb{Q})$ constitué des matrices à déterminant positif) et $z \in \mathscr{H}$, on définit

$$j(\gamma, z) = \frac{cz+d}{\sqrt{\det \gamma}}.$$

La normalisation par le déterminant implique

$$j(\alpha\gamma, z) = j(\gamma, z)$$

pour toute matrice $\gamma \in GL(2,\mathbb{Q})^+$ et tout réel $\alpha > 0$. Pour $\gamma \in GL(2,\mathbb{Q})^+$, on a les relations suivantes :

$$\Im m(\gamma z) = \frac{\Im m(z)}{|j(\gamma,z)|^2}, \quad \gamma z - \gamma w = \frac{z-w}{j(\gamma,z)j(\gamma,w)}, \quad j(\gamma_1\gamma_2, z) = j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z). \tag{2}$$

La deuxième relation montre que $\mathrm{d}(\gamma z) = \dfrac{\mathrm{d}z}{j(\gamma,z)^2}$. Ainsi, la métrique sur $\mathscr{H}$ définie par

$$\left(\frac{2i}{z-\overline{z}}\right)^2 \mathrm{d}z\overline{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

et appelée *métrique hyperbolique* est invariante sous l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ et induit une métrique sur $X(1) = X(SL(2,\mathbb{Z}))$. On pose $\lambda(z) = \dfrac{2i}{z-\overline{z}} = \dfrac{1}{\Im m\, z}$. La longueur d'un arc c de $\mathscr{H}$ paramétré par la fonction $\gamma\colon [0,1] \mapsto \mathscr{H}$ de classe C^∞ est donnée par

$$L(c) = \int_c \lambda(z)|\,\mathrm{d}z| = \int_0^1 \lambda\left[\gamma(t)\right] |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Le volume d'une partie mesurable $A \subset \mathscr{H}$ est

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A \lambda(z)^2 \frac{i}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = \int_A \lambda(x+iy)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si F_1 est un domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$, on a $\mathrm{Vol}(F_1) = \pi/3$. Le groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ est le groupe des isométries de $\mathscr{H}$ pour la métrique hyperbolique [**Jos97**, Lemma 2.3.5]. Les géodésiques (les courbes minimisant l'énergie, *cf.* [**Jos97**, § 2.3]) pour la métrique hyperbolique sont les arcs de cercle euclidiens de centre réel et les segments de droites orthogonales à l'axe réel ([**Jos97**, Lemma 2.3.6, page 31] ou [**Miy89**, Lemma 1.4.1]). La distance de $z \in \mathscr{H}$ à $w \in \mathscr{H}$ est la longueur de la géodésique reliant ces points. Elle est donnée par

$$\rho(z,w) = \inf\{L(c),\ c \text{ chemin } C^\infty \text{ de } z \text{ à } w\} = \operatorname{argch}\left(1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\Im m\, z\, \Im m\, w}\right)$$

(voir, par exemple, [**Rat94**, § 4.6]).

1.4. Pointes. — Soit $\varGamma$ un sous-groupe de congruence. On note

$$SL(2,\mathbb{Z})_\infty = \{\pm T^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

le stabilisateur de ∞ par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$. Il résulte de la transitivité de l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ que l'application

$$\begin{aligned} {}_{\varGamma}\backslash^{SL(2,\mathbb{Z})}/_{SL(2,\mathbb{Z})_\infty} &\longrightarrow {}_{\varGamma}\backslash^{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})} \\ \varGamma M SL(2,\mathbb{Z})_\infty &\longmapsto \varGamma M \infty \end{aligned} \tag{3}$$

est bijective. On appelle *pointe* de $\varGamma$ tout élément de ${}_{\varGamma}\backslash^{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}$, et on note $\nu_\infty[\varGamma]$ le nombre de pointes de $\varGamma$. Ainsi, $\nu_\infty[SL(2,\mathbb{Z})] = 1$, et on a

$$\nu_\infty[\varGamma] = \#\, {}_{\varGamma}\backslash^{SL(2,\mathbb{Z})}/_{SL(2,\mathbb{Z})_\infty} \leqslant \nu[\varGamma].$$

1.5. Quelques résultats sur les groupes $\varGamma(N), \varGamma_0(N)$. — On trouve dans [**Miy89**, Theorem 4.2.4 et 4.2.5] le calcul de l'indice des groupes rencontrés dans les parties précédentes.

Proposition 4. — *Si $N > 0$ est un entier, l'indice de $\varGamma(N)$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$ est donné par*

$$\nu\left[\varGamma(N)\right] = \# SL\left(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right) = N^3 \prod_{p\mid N}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

l'indice de $\varGamma_0(N)$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$ est

$$\nu\left[\varGamma_0(N)\right] = \nu(N) = N \prod_{p\mid N}\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

On trouve dans [**Miy89**, Theorem 4.2.7 et 4.2.10] le décompte des pointes de ces groupes.

Proposition 5. — *Soit $N>1$ un entier. Le nombre de pointes de $\Gamma(N)$ est*

$$\nu_\infty[\Gamma(N)] = \begin{cases} \dfrac{N^2}{2}\displaystyle\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) & \text{si } N\geqslant 3 \\ 3 & \text{si } N=2. \end{cases}$$

Le nombre de pointes de $\Gamma_0(N)$ est

$$\nu_\infty[\Gamma_0(N)] = \sum_{d\mid N}\varphi\left(\left(d,\frac{N}{d}\right)\right).$$

Remarque 6. — Les fonctions rencontrées dans les propositions 4 et 5 sont multiplicatives. Une fonction $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ est dite *multiplicative* lorsque $f(nn')=f(n)f(n')$ pour tout couple d'entiers $n>0$ et $n'>0$ premiers entre eux (voir, par exemple, [**Ten95**] pour les propriétés élémentaires de ces fonctions).

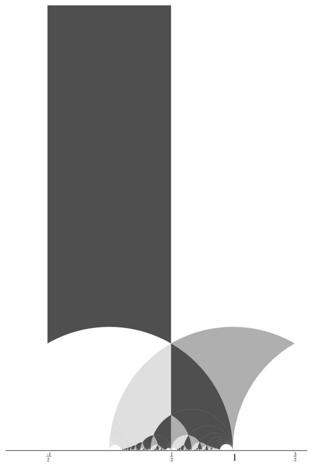

FIGURE 3. Un domaine fondamental de $\Gamma_0(256)$.

2. Définition des formes modulaires

Dans cette partie, on ne définit que les formes modulaires sur $\Gamma_0(N)$. Il existe des notions plus générales : formes modulaires avec un caractère, formes modulaires avec un système multiplicatif. On retiendra que la situation des formes modulaires avec un caractère est très semblable à celle décrite ici (voir, par exemple, [**Miy89**]) alors que très peu de résultats sont connus dans le cadre des formes modulaires avec système multiplicatif (voir annexe).

Soit $k \geqslant 2$ un entier pair. Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit sur l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$ grâce à l'action

$$(f\underset{k}{|}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right))(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right). \tag{4}$$

On dit que f vérifie la *condition de modularité* sur $\Gamma_0(N)$ si

$$(f\underset{k}{|}M) = f \quad \text{pour toute matrice } M \in \Gamma_0(N).$$

Remarque 7. — Le choix de $M = -I$ justifie la restriction aux entiers pairs de k : il montre qu'il n'y a pas de forme modulaire de poids impair hors la fonction nulle. Cette restriction n'est donc pas nécessaire si l'on remplace $\Gamma_0(N)$ par un groupe ne contenant pas $-I$. Dans ce cas, les formes modulaires de poids 1 prennent une importance particulière. En particulier, on ne sait pas grand chose de la dimension de l'espace qu'elles constituent (voir [**DS74**] et [**MV02**] et l'annexe F pour la définition des formes modulaires associées à des caractères).

Soit $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, on définit

$$u_M = \inf\{u \in \mathbb{N}^* \colon T^u \in M^{-1}\Gamma_0(N)M\}.$$

Si une fonction f holomorphe sur $\mathscr{H}$ vérifie la condition de modularité sur $\Gamma_0(N)$ alors $(f\underset{k}{|}M)$ est périodique de période u_M et elle admet un développement de Fourier de la forme

$$(f\underset{k}{|}M)(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_M}(n) e\left(\frac{nz}{u_M}\right) \tag{5}$$

qui converge uniformément sur tout compact de $\mathscr{H}$. On dit que f est *holomorphe aux pointes* si

$$\widehat{f_M}(n) = 0 \quad \text{pour toute } M \in SL(2,\mathbb{Z}) \text{ et tout } n < 0.$$

Une fonction holomorphe sur $\mathscr{H}$, vérifiant la condition de modularité sur $\Gamma_0(N)$ et holomorphe aux pointes est une *forme modulaire* de poids k et de niveau N.

Lorsque $M \in \Gamma_0(N)$ on a $u_M = 1$ et on écrira $\widehat{f}(n)$ au lieu de $\widehat{f_M}(n)$. Cette écriture ne prête pas à confusion puisque, si M et M' sont deux matrices de $\Gamma_0(N)$, la condition de modularité implique

$$(f\underset{k}{|}M) = (f\underset{k}{|}M') = f. \tag{6}$$

D'autre part, si M et M' sont deux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ telles que $M\infty = M'\infty$, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $M' = \pm MT^h$. On a alors $u_M = u_{M'}$ et les coefficients de Fourier de $(f\underset{k}{|}M)$ et $(f\underset{k}{|}M')$ ne diffèrent que d'une racine de l'unité : pour tout n, on a $\widehat{f_{M'}}(n) = \widehat{f_M}(n)e(nh/u_M)$. Malgré cette ambiguïté, on parle de *développement de f en la pointe $M\infty$*.

Une forme modulaire de poids k et de niveau N qui vérifie la condition supplémentaire

$$\widehat{f_M}(0) = 0 \quad \text{pour toute } M \in SL(2,\mathbb{Z})$$

est une *forme parabolique de poids k et de niveau N*. Le lemme suivant permet de caractériser les formes paraboliques parmi les formes modulaires par une condition de croissance.

Lemme 8. — *Soit f une forme modulaire de poids k et de niveau N. C'est une forme parabolique de poids k et de niveau N si et seulement si la fonction $z \mapsto (\Im m\, z)^{k/2}\,|f(z)|$ est bornée sur $\mathscr{H}$.*

Démonstration. — On pose $F(z) = (\Im m\, z)^{k/2}\,|f(z)|$, alors F est invariante par l'action de $\Gamma_0(N)$. Si f est parabolique, les fonctions $(f \underset{k}{|} M)$ sont à décroissance exponentielle au voisinage de l'infini pour toutes les matrices M de $SL(2,\mathbb{Z})$. Donc, la fonction f est bornée sur ${}_{\Gamma_0(N)}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ puis sur $\mathscr{H}$. Réciproquement, supposons F bornée. Si $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ on a $|(f \underset{k}{|} M)(z)| = (\Im m\, z)^{-k/2}\,|F(Mz)|$ et donc le premier coefficient de Fourier de $(f \underset{k}{|} M)$ est nul. □

On peut majorer les coefficients des développements de Fourier.

Lemme 9. — *Soit f une forme modulaire de poids k et de niveau N et M une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout entier $n > 0$ on a $|\widehat{f_M}(n)| \leqslant cn^{k-1+\varepsilon}$. Si de plus f est parabolique, alors il existe $c > 0$ tel que pour tout entier $n > 0$ on a $|\widehat{f_M}(n)| \leqslant cn^{k/2}$.*

Remarque 10. — La démonstration de ce lemme est assez élémentaire pour le cas des formes paraboliques [**Miy89**, Corollary 2.1.6]. Pour le cas des formes modulaires non paraboliques, la preuve est plus délicate. Elle résulte d'une connaissance explicite, dans notre cas, du complémentaire des formes paraboliques dans les formes modulaires [**Miy89**, Theorem 4.7.3].

Remarque 11. — Il y a des formes paraboliques (les formes primitives, *cf.* § 7) pour lesquelles on dispose d'une meilleure majoration (voir la proposition 56), *i.e.* on peut remplacer $cn^{k/2}$ par $\sigma_0(n)n^{(k-1)/2}$. Il en résulte que, pour toutes les formes paraboliques, on peut remplacer $cn^{k/2}$ par $cn^{(k-1)/2+\varepsilon}$, la constante c dépendant de $\varepsilon > 0$, k et N.

Le lemme 8 n'est pas de grande utilité lorsque y devient grand. Mais la condition de modularité permet d'en déduire le lemme 9. On déduit de ce lemme le résultat suivant auquel on fait référence en parlant de « *décroissance exponentielle aux pointes* ».

Lemme 12. — *Soit f une forme modulaire de poids k et de niveau N et M une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour tout réel y_0, il existe $C>0$ tel que, pour tout réel x et tout réel $y\geqslant y_0$, on a*

$$\left|(f\underset{k}{|}M)(z)-\widehat{f_M}(0)\right|\leqslant C\exp(-2\pi y/u_M).$$

On note $M_k\left(N\right)$ l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k et de niveau N et $S_k\left(N\right)$ le sous-espace vectoriel des formes paraboliques de poids k et de niveau N. On note aussi $M_*\left(N\right)$ l'espace vectoriel somme des $M_k\left(N\right)$ lorsque k parcourt les entiers pairs.

Lemme 13. — *Les espaces vectoriels de formes modulaires de même niveau sont en somme directe :*

$$M_*\left(N\right)=\bigoplus_{k\in 2\mathbb{N}}M_k\left(N\right).$$

Démonstration. — Soit $\{f_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$ une famille de formes modulaires de niveau N, chaque forme f_j étant de poids k_j, les poids étant distincts deux à deux. On suppose que

$$\sum_{j=1}^r f_j=0.$$

Pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathit{\Gamma}_0(N)$, et tout $z\in\mathscr{H}$, on a

$$\sum_{j=1}^r f_j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=0,\quad \textit{i.e.}\quad \sum_{j=1}^r(cz+d)^{k_j}f_j(z)=0.$$

On fixe $z\in\mathscr{H}$. Le polynôme $\sum_{j=1}^r f_j(z)X^j$ s'annule une infinité de fois et, pour tout j, on a $f_j(z)=0$. □

Remarque 14. — On pose $\mathscr{H}^-=\{z\in\mathbb{C}\colon\ \Im m\, z<0\}$. On définit la notion de forme modulaire sur $\mathscr{H}^-$ en remplaçant $\mathscr{H}$ par $\mathscr{H}^-$: plus précisément, l'espace $M_k\left(N\right)^-$ des formes modulaires de poids k et de niveau N sur $\mathscr{H}^-$ est l'image de $M_k\left(N\right)$ par l'application linéaire $f\mapsto[z\mapsto f(-z)]$. On note $s\colon M_k\left(N\right)^-\to M_k\left(N\right)$ la réciproque de cette application. On définit l'espace des formes paraboliques sur $\mathscr{H}^-$ comme l'image de $S_k\left(N\right)$ par s^{-1}. On définit ensuite $M_k\left(N\right)^\pm$ comme le sous-espace de $M_k\left(N\right)\times M_k\left(N\right)^-$ constitué des couples (f,f^-) tels que, pour toute matrice $M\in SL(2,\mathbb{Z})$, on a $\widehat{f_M}(0)=\widehat{s(f^-)_M}(0)$. Cet espace est en bijection avec $M_k\left(N\right)\times S_k\left(N\right)$ *via* $(f,f^-)\mapsto(f_1,f_2)$ avec $f_1(z)=[f(z)+f^-(-z)]/2$ et $f_2(z)=[f(z)-f^-(-z)]/2$. Il est aussi en bijection avec l'espace des formes modulaires sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$ (*i.e.* une fonction holomorphe F sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}$ dont la restriction $F_{|_{\mathscr{H}}}$ à $\mathscr{H}$ appartient à $M_k\left(N\right)$ et la restriction $F_{|_{\mathscr{H}^-}}$ à $\mathscr{H}^-$ appartient à $M_k\left(N\right)^-$) dont les restrictions à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^-$ ont mêmes coefficients de Fourier constants : si F est une telle forme modulaire, alors $(F_{|_{\mathscr{H}}},F_{|_{\mathscr{H}^-}})\in M_k\left(N\right)^\pm$.

Remarque 15. — On peut aussi définir l'espace des formes modulaires *antiholomorphes* sur $\mathscr{H}$ en remplaçant dans la définition l'holomorphie par l'antiholomorphie[(3)] et l'action $(f \underset{k}{|} \gamma)$ par l'action $(f \underset{k}{|} \overline{\gamma})$ définie par

$$(f \underset{k}{|} \overline{\gamma})(z) = (c\overline{z} + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$ et toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. Une fonction f est donc une forme modulaire antiholomorphe si et seulement si la fonction conjuguée $\overline{f}$ est une forme modulaire. On note $\overline{M_k(N)}$ l'ensemble de ces formes et $\overline{S_k(N)}$ l'espace des formes paraboliques associé.

3. Exemples sur $SL(2,\mathbb{Z})$

Pour k pair supérieur ou égal à 4, on pose[(4)]

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}. \tag{7}$$

Cette série est analytique sur $\mathscr{H}$, puisqu'il y a convergence uniforme de cette série sur les compacts de $\mathscr{H}$ pour tout $k > 2$. Cela résulte d'une comparaison avec une intégrale grâce à la majoration uniforme du

Lemme 16. — *Soit $K > 0$ et $T > 0$ des réels. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et tout nombre complexe z vérifiant*

$$-K \leqslant \Re e\, z \leqslant K, \quad \Im m\, z \geqslant T$$

on a

$$|mz+n| \geqslant \varepsilon\sqrt{m^2+n^2}.$$

Démonstration. — Le résultat est juste pour $(m,n) = (0,0)$. Par homogénéité, il suffit de prouver le résultat pour les réels (m,n) tels que $m^2+n^2 = 1$. On a $|mz+n| \geqslant |m(x+iT)+n|$ et le résultat est conséquence de la continuité et de la stricte positivité de la fonction

$$(m,n,x) \longmapsto |m(x+iT)+n|$$

sur le compact $\big\{(m,n)\in\mathbb{R}^2 : m^2+n^2 = 1\big\} \times [-K,K]$. □

---

(3) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ on dit que $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est *antiholomorphe* si $\overline{f}\colon z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe sur Ω.

(4) Chez certains auteurs, la définition de G_k diffère du facteur $\frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k}$. Grâce à la normalisation choisie ici la fonction G_k est une forme de Hecke (voir paragraphe 7.3).

On vérifie que cette fonction est modulaire de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$: soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned}\frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}(G_k \underset{k}{|} \gamma)(z) &= (cz+d)^{-k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\frac{az+b}{cz+d}+n)^k} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{[(am+cn)z+(bm+dn)]^k} \\ &= \sum_{(m',n')\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m'z+n')^k}\end{aligned}$$

puisque l'ensemble $\{(am+cn, bm+dn), (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ est égal à $\mathbb{Z}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, grâce à la bijection

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\ (m,n) &\longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On peut calculer le développement de Fourier de G_k : en posant $q = e^{2i\pi z}$, on a

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \tag{8}$$

où B_k est le k^{e} nombre de Bernoulli. Ces nombres sont rationnels, pour $k > 0$, on a $B_{2k+1} = 0$ et on donne les premiers coefficients des développements de Fourier des premières séries d'Eisenstein :

k	2	4	6	8	10	12
$-\frac{B_k}{2k}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{504}$	$\frac{1}{480}$	$-\frac{1}{264}$	$\frac{691}{65520}$
$\sigma_{k-1}(1)$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{k-1}(2)$	3	9	33	129	513	2049
$\sigma_{k-1}(3)$	4	28	244	2188	19684	177148
$\sigma_{k-1}(4)$	7	73	1057	16513	262657	4196353

k	14	16	18	20
$-\frac{B_k}{2k}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{3617}{16320}$	$-\frac{43867}{28728}$	$\frac{174611}{13200}$
$\sigma_{k-1}(1)$	1	1	1	1
$\sigma_{k-1}(2)$	8193	32769	131073	524289
$\sigma_{k-1}(3)$	1594324	14348908	129140164	1162261468
$\sigma_{k-1}(4)$	67117057	1073774593	17180000257	274878431233

Avant de poursuivre, on rappelle quelques données nécessaires sur la fonction Γ.

Remarque 17. — La fonction Γ est la fonction Γ d'Euler définie, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\, s > 0$, par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En développant en série entière la fonction exponentielle entre 0 et 1 puis en échangeant l'ordre de l'intégration et de la sommation, on obtient la formule de Prym

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{9}$$

L'intégrale converge quelque soit la valeur de s et la somme quelque soit s non entier négatif ou nul. Ainsi, la formule (9) définit un prolongement analytique de Γ à $\mathbb{C}$ privé des entiers négatifs ou nul. Soit $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive, la suite de fonctions f_n définies sur $]0, +\infty[$ par $f_n(t) = (1 - t/n)^n t^s \delta(t \leqslant n)$ converge vers $x \mapsto e^{-x} x^s$ en restant dominée par cette fonction de sorte que

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{s} e^{s\left(\log n - \sum_{j=1}^n 1/j\right)} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{s}{j}\right)^{-1} e^{s/j}.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{j}\right) e^{-s/j}$$

où γ est la constante d'Euler. Cette formule se prolonge à $\mathbb{C}$ puisque le membre de droite est défini pour tout $s \in \mathbb{C}$. On en déduit que $1/\Gamma$ est entière. Si $n > 0$ est entier, une intégration par parties donne $\Gamma(n) = (n-1)!$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a la relation de Legendre (voir, par exemple [**FB95**, § IV.1])

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{s-1} \Gamma(s). \tag{10}$$

Enfin, la formule de Stirling donne

$$\Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi}\, t^{\sigma - 1/2} e^{-\pi t/2} \left(\frac{t}{e}\right)^{it} \left[1 + \varepsilon_\sigma(t)\right], \quad (t > 0)$$

où ε_σ est une fonction dépendant de σ et telle que la fonction $t \mapsto |t\varepsilon_\sigma(t)|$ est bornée [**Ten96**, II.3.1].

Remarque 18. — Pour démontrer la formule (8), on aura besoin de la fonction ζ de Riemann. On rappelle quelques faits sur cette fonction. Elle est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\, s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ admettant un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. Elle satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s) \tag{11}$$

où ξ est la fonction entière

$$\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

(voir, par exemple, [**Ten95**, § II.3] ou [**KR01**]).

On démontre la formule (8) grâce à la formule de sommation de Poisson [**Ten96**, ex. I.4.5] : si ϕ est une fonction continue, à variations bornées et telle que $\int_{\mathbb{R}} |\phi| < \infty$, de transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ définie par

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \exp(-2i\pi\xi t)\, \mathrm{d}t,$$

alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(x+n) = \lim_{R\to+\infty} \sum_{r\in\mathbb{Z}\cap[-R,R]} \widehat{\phi}(r)e^{2i\pi rx}.$$

On applique cette formule à la fonction $\phi_y(x) = \dfrac{1}{(x+iy)^k}$ pour $y > 0$, dont la transformée de Fourier (calculable grâce à la formule des résidus) est

$$\widehat{\phi_y}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \leqslant 0 \\ \dfrac{(-2i\pi)^k\xi^{k-1}}{(k-1)!}\exp(-2\pi\xi y) & \text{si } \xi > 0. \end{cases}$$

On en déduit la formule de Lipschitz

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (mz+n)^{-k} = \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{+\infty} r^{k-1}e(rmz) \quad (mz \in \mathscr{H},\, k > 1). \tag{12}$$

(On pourra se reporter à [**KR01**] et [**PP01**] pour une intéressante discussion et généralisation de la formule de Lipschitz). On en tire

$$\begin{aligned} 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}G_k(z) &= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (mz+n)^{-k} \\ &= 2\zeta(k) + 2\frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n)e(nz). \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité

$$\frac{(-1)^{k/2}(k-1)!}{(2\pi)^k}\zeta(k) = -\frac{B_k}{2k}$$

(valable car k est pair, voir [**Ten95**, théorème II.4]). La fonction G_k est donc une forme modulaire non parabolique de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$ pour tout $k > 2$ pair.

On remarque que ses coefficients de Fourier sont tous rationnels, et multiplicatifs[5] (puisque la fonction arithmétique $n \mapsto \sigma_{k-1}(n)$ est multiplicative).

Le terme de droite de la formule (8) est défini également pour $k = 2$. On pose

$$G_2(z) = -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) q^n.$$

Cette fonction n'est pas une forme modulaire (on verra proposition 25 qu'il n'y a pas de forme modulaire de poids 2 sur $SL(2,\mathbb{Z})$ hors la fonction nulle). On connaît cependant sa relation de transformation.

Lemme 19. — *Soit* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. *On a*

$$(G_2 \underset{2}{|} \gamma)(z) = G_2(z) - \frac{c}{4i\pi(cz+d)}. \tag{13}$$

La preuve qui suit n'est ni la plus courte, ni la plus simple (voir [**Ser77**, § 4.4]). Elle est cependant instructive en vue de la théorie des séries d'Eisenstein (voir [**Sar90**, § 1.4] et [**Iwa02**, § 3.2]) et est due à Maaß [**Maa64**, p208–214] (voir aussi [**Sch74**, § III.2]).

Démonstration du lemme 19. — Le nœud de la preuve est le calcul du développement de Fourier de la somme de droite de (7) après ajout d'un facteur de convergence (suivant Hecke [**Hec26**])

$$\frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}. \tag{14}$$

Ce développement permet de donner un prolongement analytique de (14) en $s = 0$ (et même en $s \in \mathbb{C}$).

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\Re e(\alpha+\beta) > 2$ et $z = x+iy \in \mathscr{H}$. La formule de Lipschitz (12) se généralise en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^\alpha(\overline{z}+n)^\beta} = (-i)^{\alpha-\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n(y;\alpha,\beta) e(nx) \tag{15}$$

où

$$h_n(y;\alpha,\beta) = \begin{cases} 2\pi(2y)^{1-\alpha-\beta} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & \text{si } n = 0\,; \\ \dfrac{\pi^{(\alpha+\beta)/2} y^{-(\alpha+\beta)/2} n^{(\alpha+\beta)/2-1}}{\Gamma(\alpha)} W_{(\alpha-\beta)/2,(\alpha+\beta-1)/2}(4\pi n y) & \text{si } n > 0\,; \\ \dfrac{\pi^{(\alpha+\beta)/2} y^{-(\alpha+\beta)/2} (-n)^{(\alpha+\beta)/2-1}}{\Gamma(\beta)} W_{(\beta-\alpha)/2,(\alpha+\beta-1)/2}(-4\pi n y) & \\ & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

[5] Une raison non anecdotique de ce fait est que G_k est une forme de Hecke, voir § 7.3.

On a utilisé la fonction de Whittaker définie, pour tout $(\lambda,\mu,z)\in\mathbb{C}^3$ tel que $\Re e(\mu-\lambda+1/2)>0$ et $\Re e(z)\in\mathscr{H}$, par

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{z^{\mu+1/2}e^{-z/2}}{\Gamma(\mu-\lambda+1/2)}\int_0^{+\infty}t^{\mu-\lambda-1/2}(1+t)^{\mu+\lambda-1/2}e^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction admet un prolongement en fonction entière de λ et μ [**WW96**, § 16.12]. Soit $k\in\mathbb{Z}^*$ et $v\in\mathbb{C}$ tel que $\Re e(v)>2$. On définit

$$\varphi_k(z;v)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(mz+n)^{v/2+k}(m\overline{z}+n)^{v/2-k}}.$$

Grâce à (15), on a

$$\varphi_k(z;v)=X_0(v)+X_1(v)+X_2(v)$$

avec

$$X_0(v)=2\zeta(v)+(-1)^k2^{3-v}\pi y^{1-v}\zeta(v-1)\frac{\Gamma(v-1)}{\Gamma(v/2+k)\Gamma(v/2-k)},$$

$$X_1(v)=2\frac{(-1)^k\pi^{v/2}y^{-v/2}}{\Gamma(v/2+k)}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\sigma_{v-1}(\ell)\ell^{-v/2}W_{k,(v-1)/2}(4\pi\ell y)e(\ell x)$$

et

$$X_2(v)=2\frac{(-1)^k\pi^{v/2}y^{-v/2}}{\Gamma(v/2-k)}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\sigma_{v-1}(\ell)\ell^{-v/2}W_{-k,(v-1)/2}(4\pi\ell y)e(-\ell x).$$

On peut prolonger X_1 et X_2 en fonctions entières grâce à la majoration

$$|W_{\lambda,\mu}(z)|\leqslant C|z|^{\lambda}e^{-y/2}\qquad(|\lambda|\leqslant M,\ |\mu|\leqslant M\text{ et }y>y_0)$$

valable pour tout $M>0$ et $y_0>0$, le réel $C>0$ ne dépendant que de M et y_0 [**WW96**, § 16.3]. De plus, la fonction X_0 est entière sauf éventuellement à cause d'un pôle en $v=1$. On montre maintenant que ce pôle n'existe pas. En utilisant la fonction ξ (voir la remarque 18), on récrit

$$\begin{aligned}X_0(v)=\frac{\pi^{v/2}}{\Gamma(v/2+1)}\frac{\xi(v)}{1-v}&+(-1)^k\frac{\pi^{v/2}\Gamma(v/2-1)}{\Gamma(v/2-k)\Gamma(v/2+k)}\frac{\xi(v-1)}{1-v}\\&+(-1)^k\frac{\pi^{v/2}\Gamma(v/2-1)}{\Gamma(v/2-k)\Gamma(v/2+k)}\xi(v-1)\frac{y^{1-v}-1}{1-v}.\end{aligned}$$

Le prolongement de X_0 en fonction entière résulte des développements asymptotiques

$$\begin{aligned}\frac{\xi(v)}{1-v}&=\frac{1}{v-1}+\gamma+O(v-1)\\\frac{\xi(v-1)}{1-v}&=\frac{1}{v-1}+\frac{1}{2}(\gamma-1)+O(v-1).\end{aligned}$$

La fonction $v \mapsto \varphi_k(z;v)$ est donc entière et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s} = \varphi_1(z,s+2).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s} &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{y} - 8\pi^2\sum_{\ell=1}^{+\infty}\sigma_1(\ell)e(\ell z)\\ &= -8\pi^2 G_2(z) - \frac{\pi}{y}.\end{aligned}$$

On a utilisé $W_{1,1/2}(z) = ze^{-z/2}$ (voir [**GR00**, 9.237.3 et 8.970.3]). Puisque pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned}&\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{\left(m\frac{az+b}{cz+d}+n\right)^2\left|m\frac{az+b}{cz+d}+n\right|^s}\\ &\qquad\qquad = (cz+d)^2|cz+d|^s \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}\end{aligned}$$

on obtient, en faisant tendre s vers 0, l'égalité

$$-8\pi^2 G_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \frac{\pi}{y}|cz+d|^2 = (cz+d)^2\left[-8\pi^2 G_2(z) - \frac{\pi}{y}\right]$$

qui conduit au résultat. $\square$

Remarque 20. — Les résultats obtenus dans la preuve du lemme 19 peuvent être utilisés pour construire des formes modulaires de poids 2 de niveau $N > 1$. Posons en effet

$$G_2^*(z) = G_2(z) + \frac{1}{8\pi y} = -\frac{1}{8\pi^2}\lim_{s\to 0}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}.$$

Alors, G_2^* vérifie certes la condition de modularité de poids 2 mais elle n'est pas holomorphe. Pour retrouver l'holomorphie, on considère une suite $(c_d)_{d|N}$ telle que

$$\sum_{d|N}\frac{c_d}{d} = 0.$$

On a alors

$$\sum_{d|N} c_d G_2^*(dz) = \sum_{d|N} c_d G_2(dz)$$

et la fonction

$$z \longmapsto \sum_{d|N} c_d G_2^*(dz)$$

est une forme modulaire de $M_2(N)$, qu'on peut construire distincte de la fonction nulle (dès que $N > 1$).

Plutôt que la multiplicativité des coefficients, on privilégie parfois le fait que le premier coefficient (appelé coefficient constant) du développement de Fourier soit égal à 1. On introduit, pour tout $k \geqslant 2$, les fonctions

$$E_k = -\frac{2k}{B_k} G_k.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
E_2(z) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) q^n \\
&= 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - 144q^5 - 288q^6 + O(q^7) \\
E_4(z) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_3(n) q^n \\
&= 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + O(q^7) \\
E_6(z) &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_5(n) q^n \\
&= 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - 4058208q^6 + O(q^7).
\end{aligned}$$

En niveau 1, le plus petit poids pour lequel existe une forme parabolique est $k = 12$. On définit la fonction Δ sur $\mathscr{H}$ par[(6)]

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}. \tag{16}$$

Par dérivée logarithmique, on a

$$\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} = 2i\pi\biggl(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}\biggr) = -48i\pi\biggl(-\frac{1}{24} + \sum_{m=1}^{\infty} \bigl(\sum_{n|m} n\bigr) q^m\biggr) = -48i\pi G_2(z).$$

Posant $\widetilde{\Delta}(z) = \Delta\left(-\frac{1}{z}\right)$, on a

$$\frac{\widetilde{\Delta}'}{\widetilde{\Delta}}(z) = \frac{1}{z^2} \frac{\Delta'}{\Delta}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{48i\pi}{z^2} G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = -48i\pi\left[G_2(z) - \frac{1}{4i\pi z}\right] = \frac{\Delta'}{\Delta}(z) + \frac{12}{z}.$$

On en déduit l'existence d'un nombre complexe C tel que $\widetilde{\Delta}(z) = Cz^{12}\Delta(z)$ pour tout $z \in \mathscr{H}$. Si $z = i$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $q^n = \exp(-2\pi n) \neq 1$ donc $\Delta(i) \neq 0$. Le choix de $z = i$ implique $C = 1$ et on obtient

$$(\Delta \underset{12}{|} T) = \Delta, \quad (\Delta \underset{12}{|} S) = \Delta, \quad \Delta(\infty) = 0.$$

Puisque S et T engendrent $SL(2, \mathbb{Z})$ cela montre que $\Delta \in S_{12}(1)$. Pour une preuve spectrale de ce résultat, voir [**Sar90**, Appendix 1.1] ; pour une preuve analytique

(6) Certains auteurs utilisent une définition de Δ différant d'un facteur $(2\pi)^{12}$.

directe, voir [**Sie54**]. (Au moyen de ces preuves, on peut retrouver le développement de Fourier de G_2 et son équation de modularité à partir de la définition de G_2 comme double somme.) On appelle *fonction de Ramanujan* la fonction τ définie par le développement de Fourier : $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$. Cette fonction, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est multiplicative et vérifie pour p premier et n strictement positif, l'égalité $\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1})$. (La fonction Δ est une forme primitive et l'égalité de multiplicativité est conséquence de la théorie des opérateurs de Hecke, voir la proposition 45.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480	-113643	-115920	534612

Une conjecture due à Lehmer affirme que τ ne s'annule pas. Vérifiée jusqu'à de très grandes valeurs, cette conjecture n'est toujours pas démontrée. Il suffit de vérifier que pour tout nombre premier p, la fonction τ ne s'annule pas en p : un lemme de Kowalski, Robert & Wu montre que, pour $p \in \mathcal{P}$, si $\tau(p) \neq 0$, alors $\tau(p^\nu) \neq 0$ pour tout entier $\nu \geqslant 1$ (voir [**KRW03**] mais aussi [**Ser81**, pages 178-180] ce lemme s'applique dans le cadre plus général des formes primitives à coefficients entiers). Une autre conjecture liée à la fonction de Ramanujan (et plus généralement aux coefficients de Fourier des formes primitives, voir § 7) est la conjecture de Sato–Tate. Cette conjecture affirme l'équirépartition des valeurs $\tau(p)/p^{11/2}$ lorsque p varie parmi les nombres premiers pour la mesure de Sato–Tate : autrement dit, pour tous nombres réels (pour comprendre pourquoi on se restreint à $]-2,2[$, voir la proposition 56) $-2 < a < b < 2$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\#\{p \in \mathcal{P} \colon p < x\}} \#\{p \in \mathcal{P} \colon p < x \text{ et } ap^{11/2} < \tau(p) < bp^{11/2}\} \\ = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, \mathrm{d}x.$$

La figure 4 représente l'histogramme des valeurs $\tau(p)/p^{11/2}$ pour $p < 10^5$ comparé à la fonction $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Remarque 21. — De la formule

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = -48 i\pi G_2$$

on déduit

$$\tau(n) = -\frac{24}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \tau(m)\sigma_1(n-m).$$

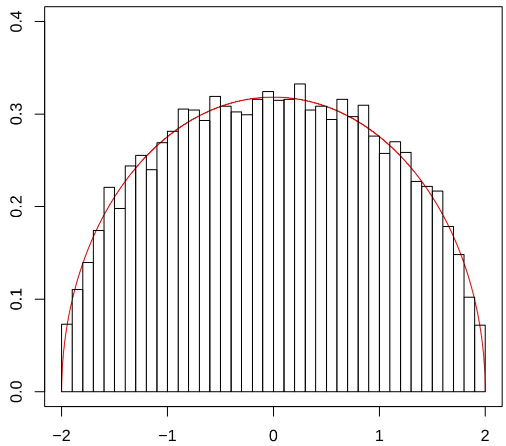

FIGURE 4. Loi de Sato–Tate

4. Dimensions des espaces de formes modulaires

Dans cette partie, on donne les dimensions des espaces $M_k(N)$ et $S_k(N)$. Il existe une démonstration élémentaire du fait que ces espaces sont de dimension finie. Puisque la preuve est valable dans le cas le plus général, on la donne dans l'annexe (proposition 161).

4.1. Dimensions des espaces de formes modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z})$. — Si f est une fonction méromorphe sur $\mathscr{H}$ et si $z_0 \in \mathscr{H}$, on note $v_{z_0}(f)$ l'ordre de f en z_0. C'est l'entier n tel que $z \mapsto f(z)/(z-z_0)^n$ est holomorphe et non nulle en z_0. Si f vérifie la condition de modularité pour le poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$, cet ordre ne dépend que de la classe de z_0 modulo $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour la pointe $SL(2,\mathbb{Z})\infty$, l'entier $v_\infty(f)$ est le plus petit entier n tel que $\widehat{f}(n) \neq 0$. Pour décrire la structure vectorielle de $M_k(1)$, on utilise la « formule $\frac{k}{12}$ » [**Ser77**, chapitre 7, théorème 3]. Pour l'énoncer, on pose $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note F_1 le domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$ vu à la proposition 3.

Lemme 22. — *Soit $k \geqslant 2$ un entier et f une fonction méromorphe distincte de la fonction nulle vérifiant la condition de modularité de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$, on a*

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}\, v_i(f) + \frac{1}{3}\, v_\rho(f) + \sum_{z \in F_1 \smallsetminus \{i,\rho,-\overline{\rho}\}} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Remarque 23. — Il n'y avait *a priori* aucune raison de se limiter à des poids $k \geqslant 0$. En étendant la définition des formes modulaires aux poids négatifs, le lemme 22 demeure vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ce lemme implique alors qu'il n'existe pas de forme modulaire de poids strictement négatif sur $SL(2,\mathbb{Z})$ sauf la fonction constante égale à 0. Puisque les formes paraboliques s'annulent à l'infini, la seule forme parabolique de poids 0 sur $SL(2,\mathbb{Z})$ est 0. Si f est une forme modulaire de poids 0 sur $SL(2,\mathbb{Z})$, on construit une forme parabolique de poids 0 sur $SL(2,\mathbb{Z})$ en retranchant à f sa limite en l'infini et donc f est constante.

Remarque 24. — Le lemme 22 implique que G_4 n'a qu'un seul zéro, il est en ρ et est simple. De même, G_6 n'a qu'un seul zéro, il est en i et est simple.

Proposition 25. — – *Si $k=2$ alors $M_2\,(1) = S_2\,(1) = \{0\}$*
– *Si $k \in \{4,6,8,10,14\}$ alors $M_k\,(1) = \mathbb{C}G_k$ et $S_k\,(1) = \{0\}$*
– *Si $k \geqslant 4$ alors $M_k\,(1) = S_k\,(1) + \mathbb{C}G_k$*
– *L'espace $S_{12}\,(1)$ est engendré par Δ ;*
– *Si $k \geqslant 16$ alors $S_k\,(1) = \Delta M_{k-12}\,(1)$.*

Démonstration. — La formule $k/12$ équivaut à $6v_\infty + 3v_i + 2v_\rho + 6n = k/2$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $k=2$, cette équation n'a pas de solution en entiers naturels. Cela prouve le premier point. Si $k \geqslant 4$ alors $G_k \in M_k\,(1)$ donc si $f \in M_k\,(1)$ alors $f - \dfrac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G_k}(0)} G_k \in S_k\,(1)$. Cela prouve le troisième point. Si $k < 12$ ou $k = 14$, on a nécessairement $v_\infty = 0$ donc $S_k\,(1) = \{0\}$. Cela prouve le deuxième point. Enfin, le dernier point est conséquence du fait que Δ est parabolique de poids 12 et ne s'annule pas (grâce à la formule $k/12$ puisque $v_\infty(\Delta) \geqslant 1$). □

Corollaire 26. — *Soit $k \geqslant 2$ un entier pair, on a*

$$\dim M_k\,(1) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2[12] \\ \left\lfloor \dfrac{k}{12} + 1 \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 27. — Le corollaire 26 a de nombreuses conséquences arithmétiques. Par exemple, les fonctions E_4^2 et E_8 appartiennent toutes deux à l'espace $M_8\,(1)$ qui est de dimension 1 ; elles sont donc proportionnelles, et en comparant les développements de Fourier, on obtient la formule

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m). \tag{17}$$

De la même façon, on a $E_{14} = E_4E_{10} = E_6E_8$ qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(n) &= -10\sigma_3(n) + 11\sigma_9(n) + 2640 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_9(n-m) \\ &= 21\sigma_5(n) - 20\sigma_7(n) + 10080 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_5(m)\sigma_7(n-m). \end{aligned}$$

On peut aussi raisonner sur les valeurs de k pour lesquelles $S_k\,(1)$ est de dimension 1. Pour ces valeurs, *i.e.* pour $k \in \{12,16,18,20,22,26\}$, on note F_k un vecteur engendrant $S_k\,(1)$ normalisé par $\widehat{F_k}(1) = 1$. En particulier, on choisit $F_{12} = \Delta$. On obtient les factorisations suivantes, et chacune donne une identité de type (17) :

$$E_8 = E_4^2, \quad E_{10} = E_4E_6, \quad E_{14} = E_4E_{10} = E_6E_{10}$$

pour les formes non paraboliques, puis

$$F_{16} = E_4\Delta, \quad F_{18} = E_6\Delta, \quad F_{20} = E_8\Delta = E_4F_{16},$$
$$F_{22} = E_{10}\Delta = E_6F_{16} = E_4F_{18}$$

et

$$F_{26} = E_{14}\Delta = E_{10}F_{16} = E_8F_{18} = E_6F_{20} = E_4F_{22}$$

pour les formes paraboliques. Ces factorisations sont les seules en un sens plus large que de simplement remarquer qu'elles ne concernent que des espaces de dimension 1. Ce sens est expliqué dans la remarque 59.

On peut aussi utiliser des raisonnements de ce type pour tenter de capturer les propriétés de la fonction τ de Ramanujan. Par exemple, Δ et $E_{12} - E_6^2$ sont toutes deux paraboliques de poids 12. Puisque $S_{12}(1)$ est de dimension 1, la considération des premiers coefficients de Fourier conduit à

$$E_{12} - E_6^2 = \frac{762048}{691}\Delta.$$

On en déduit

$$756\tau(n) = 65\sigma_{11}(n) + 691\sigma_5(n) - 174132\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_5(m)\sigma_5(n-m).$$

En particulier, $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n)[691]$.

On voit aussi que $(240G_4)^3 - (504G_6)^2$ et Δ sont deux éléments de $S_{12}(1)$; il en résulte que

$$\Delta = \frac{(240G_4)^3 - (504G_6)^2}{1728}. \tag{18}$$

Corollaire 28. — *Soit $k \geqslant 2$ un entier pair. L'ensemble des fonctions $G_4^\alpha G_6^\beta$ lorsque (α, β) parcourt les couples d'entiers naturels tels que $4\alpha + 6\beta = k$ est une base de $M_k(1)$.*

Démonstration. — La première étape est de montrer par récurrence sur k et grâce au corollaire 26 que le nombre de solutions de l'équation $4\alpha + 6\beta = k$ est $\dim M_k(1)$. La deuxième étape est de montrer, de nouveau par récurrence sur k, que les fonctions $G_4^\alpha G_6^\beta$ avec $4\alpha + 6\beta = k$ engendrent $M_k(1)$. Pour les valeurs $k < 12$, cela résulte de la proposition 25. Pour $k \geqslant 12$, cette même proposition implique que si $f \in M_k(1)$ et si $4\alpha + 6\beta = k$ alors il existe $c \in \mathbb{C}$ et $h \in M_{k-12}(1)$ tels que $f - cG_4^\alpha G_6^\beta = \Delta h$. Le résultat est conséquence de (18). □

Lemme 29. — *Les fonctions G_4 et G_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$: soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que $P(G_4, G_6) = 0$, alors $P = 0$.*

Démonstration. — Par regroupement des termes de P, on peut écrire

$$P(X,Y)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta.$$

D'après le lemme 13, l'égalité $P(G_4,G_6)=0$ implique que chaque terme

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta}G_4^\alpha G_6^\beta$$

est nul et le corollaire 28 implique la nullité de chacun des coefficients $p_{\alpha\beta}$ et donc de P. □

On en déduit que $M_*(1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X,Y]$ *via* l'isomorphisme $X\mapsto G_4$, $Y\mapsto G_6$.

Il peut être intéressant d'avoir une autre paramétrisation des formes de $M_k(1)$. Pour cela, on introduit

$$j=2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^3\frac{G_4^3}{\Delta},\quad j(z)=\frac{1}{q}+744+\cdots \tag{19}$$

Cette fonction est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$, est holomorphe sur $\mathscr{H}$, admet un pôle simple à l'infini et définit une surjection sur $\mathbb{C}$ [**Ser77**, Proposition VII.5]. On trouve dans [**Ser77**, Proposition VII.6] une preuve de la

Proposition 30. — *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathscr{H}$. Elle est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ et méromorphe à l'infini si, et seulement si, elle est fonction rationnelle (sur $\mathbb{C}$) de la fonction j.*

Proposition 31. — *Soit f une forme modulaire de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$, il existe des entiers $m\in\mathbb{N}$, $\delta\in\{0,1,2\}$ et $\varepsilon\in\{0,1\}$ et un polynôme $\widetilde{f}$ de degré au plus m tel que*

$$f=\Delta^m G_4^\delta G_6^\varepsilon\widetilde{f}(j).$$

Le triplet (m,δ,ε) est l'unique triplet de $\mathbb{N}\times\{0,1,2\}\times\{0,1\}$ vérifiant $k=12m+4\delta+6\varepsilon$.

Démonstration. — Puisque tout entier pair $k\geqslant 4$ s'écrit de façon unique sous la forme $k=12m+4\delta+6\varepsilon$ avec $m\in\mathbb{N}$, $\delta\in\{0,1,2\}$ et $\varepsilon\in\{0,1\}$, le lemme 22 implique que l'ordre d'annulation de f en i est au moins ε et que l'ordre d'annulation de f en ρ est au moins δ. Il s'en suit, grâce à la remarque 24 que la fonction $\dfrac{f}{\Delta^m G_4^\delta G_6^\varepsilon}$ est holomorphe sur $\mathscr{H}$ (la définition (16) de Δ montre qu'elle ne s'annule pas). De plus, elle est invariante par action de $SL(2,\mathbb{Z})$. Par la proposition 30, il existe une fonction rationnelle $\widetilde{f}$ telle que $f=\Delta^m G_4^\delta G_6^\varepsilon\widetilde{f}(j)$. Supposons, par l'absurde, que $\widetilde{f}$ n'est pas un polynôme. Puisque j est surjective, les pôles de $\widetilde{f}$ conduisent à des pôles de $\dfrac{f}{\Delta^m G_4^\delta G_6^\varepsilon}$ ce qui est contradictoire. Pour montrer que le degré de $\widetilde{f}$ est au plus m, on remplace j par sa définition et on utilise le fait que f est holomorphe en la pointe infinie (où Δ s'annule mais pas G_4 ni G_6). $\square$

4.2. Cas général. — On introduit les notations

$$\nu_2(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } 4 \mid N \\ \prod_{p \mid N} \left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\nu_3(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } 9 \mid N \\ \prod_{p \mid N} \left[1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right] & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\nu_\infty(N) = \nu_\infty[\Gamma_0(N)] = \sum_{d \mid N} \varphi\left(\left(d, \frac{N}{d}\right)\right).$$

Si $p = 2$, on définit $\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$ et $\left(\frac{-3}{2}\right) = -1$ (7). Si p est premier impair, $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{-3}{p}\right)$ sont donnés par le symbole de Legendre.

Remarque 32. — Si p est un nombre premier impair, le symbole de Legendre est défini par

$$\begin{aligned} \left(\frac{-}{p}\right) : \ \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} &\to \{-1, 0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est inversible et si c'est un carré modulo } p \\ -1 & \text{si } x \text{ est inversible et si ce n'est pas un carré modulo } p \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est pas inversible modulo } p \end{cases} \end{aligned}$$

Ce symbole se calcule par applications successives de la multiplicativité : pour tous x et y, on a

$$\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{xy}{p}\right) ;$$

et de la loi de réciprocité quadratique : si p et q sont deux entiers premiers impairs distincts,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)\varepsilon(q)} \left(\frac{p}{q}\right)$$

où, pour tout n entier impair,

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 1[4] ; \\ 1 & \text{si } n \equiv -1[4]. \end{cases} \tag{20}$$

On a les formules

$$\left(\frac{1}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\varpi(p)}$$

(7) Si l'on connaît la définition du symbole de Kronecker, il faut faire attention au fait que la définition de $\left(\frac{-}{2}\right)$ n'est pas celle du symbole de Kronecker [**Hua82**].

avec pour tout n entier impair,

$$\varpi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv \pm 1[8]\,; \\ 1 & \text{si } n \equiv \pm 5[8]. \end{cases} \tag{21}$$

Pour les détails, on peut consulter [**Ser77**, § I.3.2].

On trouve dans [**Miy89**, § 2.5 et § 4.2] une preuve, à l'aide du théorème de Riemann-Roch, du résultat suivant.

Proposition 33. — *Soit $k \geqslant 2$ un entier pair et $N \geqslant 1$ un entier. La dimension de l'espace des formes modulaires de poids k et de niveau N est*

$$\dim M_k\,(N) = \frac{k-1}{12}\nu(N) + \left(\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor - \frac{k-1}{4}\right)\nu_2(N) + \left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - \frac{k-1}{3}\right)\nu_3(N) + \frac{1}{2}\nu_\infty(N).$$

Si $k \geqslant 4$, la dimension de l'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau N est

$$\dim S_k\,(N) = \frac{k-1}{12}\nu(N) + \left(\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor - \frac{k-1}{4}\right)\nu_2(N) + \left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - \frac{k-1}{3}\right)\nu_3(N) - \frac{1}{2}\nu_\infty(N)$$

et si $k = 2$,

$$\dim S_2\,(N) = \frac{1}{12}\nu(N) - \frac{1}{4}\nu_2(N) - \frac{1}{3}\nu_3(N) - \frac{1}{2}\nu_\infty(N) + 1.$$

Remarque 34. — On a $\nu_2(N), \nu_3(N) \leqslant 2^{\omega(N)} \leqslant \sigma_0(N)$ et, pour $d \mid N$,

$$\varphi\left(\left(d, \frac{N}{d}\right)\right) \leqslant \sqrt{N}$$

de sorte que, si $\dim(k, N)$ est n'importe laquelle des dimensions calculées ci-dessus alors

$$\left|\dim(k, N) - \frac{k-1}{12}\nu(N)\right| \leqslant \frac{25}{12}\sqrt{N}\,\sigma_0(N) \leqslant C_\varepsilon N^{1/2+\varepsilon}$$

où C_ε est un réel strictement positif ne dépendant que de ε.

5. Produit scalaire de Petersson et séries d'Eisenstein

Soit N un entier, f un élément de $S_k\,(N)$, et g un élément de $M_k\,(N)$. Soit $\mathcal{F}(N)$ un domaine fondamental pour $\varGamma_0(N)$.

Définition 35. — Pour $(f, g) \in S_k\,(N) \times M_k\,(N)$, on définit le *produit scalaire de Petersson* de f et g par[8]

$$(f, g) = \frac{1}{\nu(N)} \iint_{\mathcal{F}(N)} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[8] Parfois la définition du produit scalaire de Petersson diffère du facteur $\dfrac{1}{\nu(N)}$.

Cette intégrale est absolument convergente : ${}_{\Gamma}\backslash\mathscr{H}$ est de volume fini pour la mesure $\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}$, et $\Im m(z)^k f(z)\overline{g(z)}$ est bornée sur $\mathscr{H}$ d'après le lemme 8, car fg appartient à $S_{2k}\,(N)$. De plus, la condition de modularité de f et g montre que cette intégrale ne dépend pas du choix de $\mathcal{F}(N)$. L'espace vectoriel $S_k\,(N)$ muni de ce produit hermitien est un espace de Hilbert.

Remarques 36

(1) Cette définition se généralise aux formes modulaires sur un sous-groupe de congruence Γ quelconque ;

(2) Ce produit hermitien est indépendant du sous-groupe de congruence Γ pour lequel les formes sont modulaires (c'est la raison pour laquelle on divise par l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$).

Définition 37. — Une *série d'Eisenstein* de poids k pour $\Gamma_0(N)$ est un élément g de $M_k\,(N)$ vérifiant

$$(f,g) = 0 \qquad \text{pour tout } f \in S_k\,(N)\,.$$

Remarque 38. — On va montrer que les séries G_k pour $k \geqslant 4$ sont des séries d'Eisenstein, d'où leur nom. Le résultat étant évident pour les poids sans forme parabolique hors la fonction nulle, on suppose $k \geqslant 12$. Soit

$$\mathcal{E}_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} j(\gamma, z)^{-k}$$

avec

$$\Gamma_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

et $f \in S_k\,(1)$. On calcule

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{E}_k, f) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \iint_{F_1} j(\gamma, z)^{-k} \overline{f(z)} y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \iint_{F_1} \overline{f(\gamma z)} |j(\gamma, z)|^{-2k} y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \iint_{F_1} F[\varphi(z)] |\varphi'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

où $\varphi(z) = \gamma z$ et $F(z) = \overline{f(z)}(\Im m\, z)^{k-2}$. Ainsi

$$2(\mathcal{E}_k, f) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \iint_{\gamma F_1} \overline{f(z)} y^{k-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Or

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \gamma F_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leqslant \Re e\, s \leqslant 1\} \bigsqcup \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leqslant \Re e\, s \leqslant 1\}$$

(les deux copies venant de l'action triviale de $-I$) donc

$$(\mathcal{E}_k, f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\widehat{f}(n)} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi n y} y^{k-2}\, \mathrm{d}y \int_0^1 e^{-2i\pi n x}\, \mathrm{d}x = 0.$$

De la bijection

$$\begin{aligned} \gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL(2,\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\sim} \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (c,d) = 1\} \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &\longmapsto (c,d) \end{aligned}$$

on déduit

$$\mathcal{E}_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} (cz+d)^{-k}$$

et donc

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \zeta(k) \mathcal{E}_k(z)$$

puis $(G_k, f) = 0$.

L'ensemble $\mathcal{E}_k(N)$ des séries d'Eisenstein de poids k pour Γ forme un sous-espace vectoriel de $M_k(N)$, et on a $M_k(N) = \mathcal{E}_k(N) \oplus S_k(N)$.

La proposition 33 permet de calculer la dimension de $\mathcal{E}_k(N)$.

Lemme 39. — *On a les formules :*

- *Si* $k \geqslant 4$, $\dim \mathcal{E}_k(N) = \nu_\infty(N)$ *;*
- *Si* $k = 2$, $\dim \mathcal{E}_2(N) = \nu_\infty(N) - 1$.

Remarque 40. — Une série d'Eisenstein non nulle est non parabolique : si f est une série d'Eisenstein parabolique, alors $(f, f) = 0$ et donc $f = 0$.

Remarque 41. — On explique de façon heuristique pourquoi, dans le cas $k = 2$, la dimension de l'espace des séries d'Eisenstein est inférieure au nombre de pointes : pour $f \in M_2(N)$, la fonction $h = \sum_{\Gamma_0(N) g \in \mathcal{R}_0(N)} (f \underset{2}{|} g)$ (où $\mathcal{R}_0(N)$ désigne un ensemble de représentants de ${}_{\Gamma_0(N)}\backslash SL(2,\mathbb{Z})$) est une forme modulaire de poids 2 pour $SL(2,\mathbb{Z})$, donc est la fonction nulle, ce qui entraîne

$$\sum_{\Gamma_0(N) g \in \mathcal{R}_0(N)} \widehat{(f \underset{2}{|} g)}(0) = 0.$$

Il y a donc une relation de dépendance linéaire entre les valeurs aux pointes. Cette relation de dépendance n'est autre que la formule des résidus pour la différentielle $f(z)\,\mathrm{d}z$ sur ${}_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ (voir [**Jos97**, Lemma 5.3.1]). En effet, cette différentielle est holomorphe sur ${}_{\Gamma}\backslash\mathscr{H}$ et a des pôles au plus simples aux pointes. La surface de Riemann ${}_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ étant compacte, on en déduit la relation de dépendance des valeurs aux pointes de f.

6. Crochets de Rankin-Cohen

Soit N un entier et $k \geqslant 2$ un entier pair. L'ensemble $M_k(N)$ des formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(N)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, le produit d'une forme modulaire de poids k et d'une forme modulaire de poids l pour le groupe $\Gamma_0(N)$ est une forme modulaire de poids $k+l$ sur $\Gamma_0(N)$ (c'est ainsi qu'on a montré que toute forme modulaire sur $SL(2,\mathbb{Z})$ est un polynôme en G_4 et G_6). L'espace $M_*(N) = \bigoplus_{k\geqslant 0} M_k(N)$ est donc muni d'une structure d'algèbre graduée. Par exemple, $M_*(1)$ est la $\mathbb{C}$-algèbre libre engendrée par G_4 et G_6 (voir corollaire 28). De façon générale, la somme directe des espaces de formes modulaires sur un sous-groupe de congruence Γ fixé n'est pas une $\mathbb{C}$-algèbre libre, on peut montrer que c'est le cas si et seulement si la surface de Riemann ${}_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$ est de genre nul[9].

On peut en fait définir pour tout $n \geqslant 0$ des opérateurs de degré n, qui envoient $M_k(N) \times M_l(N)$ dans $M_{k+l+2n}(N)$. Cela généralise la multiplication, qui est l'opérateur de degré 0. Soit $f \in M_k(N)$ et $g \in M_l(N)$. On définit[10]

$$[f,g]_n = \frac{1}{(2i\pi)^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{k+n-1}{n-r}\binom{l+n-1}{r}f^{(r)}g^{(n-r)} \tag{22}$$

où $f^{(m)} = \dfrac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}z^m}$ désigne la dérivée d'ordre m de f.

Ainsi, on a par exemple $[f,g]_0 = fg$, et $[f,g]_1 = \dfrac{1}{2i\pi}(kfg^{(1)} - lf^{(1)}g)$. Le crochet $[\ ,\ ]_1$ est antisymétrique, satisfait l'identité de Jacobi (si f, g et h sont trois formes modulaires, $[[f,g]_1,h]_1+[[h,f]_1,g]_1+[[g,h]_1,f]_1 = 0$), et envoie $M_k(N)\times M_l(N)$ dans $M_{k+l+2}(N)$. Ainsi, en posant $T_k(N) = M_{k-2}(N)$, l'espace $T_*(N) = \bigoplus_{k\geqslant 2} T_k(N)$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie.

Proposition 42. — *Soit n un entier. Le crochet de Rankin-Cohen $[\ ,\ ]_n$ envoie $M_k(N) \times M_l(N)$ dans $M_{k+l+2n}(N)$. De plus, si $n > 0$, la forme modulaire $[f,g]_n$ appartient à $S_{k+l+2n}(N)$.*

Démonstration. — Soit $f \in M_k(N)$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$. Par récurrence, la formule

$$f^{(m)}(\gamma z) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{(k+m-1)!}{(k+i-1)!}c^{m-i}(cz+d)^{k+m+i}f^{(i)}(z) \tag{23}$$

est valide pour tous $m \geqslant 0$ et $z \in \mathscr{H}$. (L'initialisation de la récurrence utilise la modularité de f sur $\Gamma_0(N)$, et on utilise l'égalité $f^{(m+1)}(\gamma z) = (cz+d)^2[f^{(m)}(\gamma z)]'$).

---

(9) Lorsque $\Gamma = \Gamma_0(N)$, la surface est de genre nul si et seulement si $N \in [1,10] \cup \{12,13,16,18,25\}$. Voir [**Miy89**, § 4.2] : les formules données permettent de minorer le genre par $(N - 5\sqrt{N} - 8)/12$ (voir [**CWZ05**]). Pour $N \geqslant 40$, cette quantité est strictement positive et on calcule le genre pour chacune des valeurs inférieures [**Miy89**, Table A et theorem 2.5.2].

(10) Selon les auteurs, le crochet de Rankin-Cohen d'ordre n est défini à un facteur $(-1)^n$ près.

On introduit la fonction génératrice $h_f : \mathscr{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$h_f(z,X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z)}{m!(k+m-1)!} X^m.$$

Grâce à la formule (23), la fonction h_f vérifie l'équation

$$h_f\left(\gamma z, \frac{X}{(cz+d)^2}\right) = (cz+d)^k e^{cX/(cz+d)} h_f(z,X) \tag{24}$$

(en utilisant $e^{cX/(cz+d)} = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{1}{b!}\left(\frac{cX}{cz+d}\right)^b$).

Soit $f \in M_k(N)$ et $g \in M_l(N)$. On a donc

$$\begin{aligned} h_f(z,-X)h_g(z,X) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m f^{(m)}(z) g^{(j-m)}(z) X^j}{m!(k+m-1)!(j-m)!(l+j-m-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^j [f,g]_j(z) X^j}{(k+j-1)!(l+j-1)!}. \end{aligned}$$

D'après l'équation (24) vérifiée par h_f et h_g, on en déduit l'égalité

$$h_f\left(\gamma z, \frac{-X}{(cz+d)^2}\right) h_g\left(\gamma z, \frac{X}{(cz+d)^2}\right) = (cz+d)^{k+l} h_f(z,-X) h_g(z,X),$$

ce qui montre que pour tout $j \geqslant 0$ on a $[f,g]_j(\gamma z) = (cz+d)^{k+l+2j}[f,g]_j(z)$, pour tout $z \in \mathscr{H}$. La fonction $[f,g]_j$ est donc modulaire de poids $k+l+2j$ sur $\Gamma_0(N)$. De plus, si le développement de Fourier de f est $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nz}$, on a pour tout $m \geqslant 1$ la formule $\dfrac{f^{(m)}(z)}{(2i\pi)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} n^m \widehat{f}(n) e^{2i\pi nz}$, ce qui montre que les fonctions $f^{(m)}$ et $g^{(m)}$ sont sans terme constant si $m \geqslant 1$, donc que la forme $[f,g]_j$ est parabolique, pour tout $j \geqslant 1$. □

Remarques 43

(1) On voit que le crochet de Rankin-Cohen préserve la structure rationnelle des coefficients de Fourier des formes modulaires : si K est un corps de nombres, si f et g ont tous leurs coefficients de Fourier dans K, alors pour tout $n \geqslant 0$ la forme modulaire $[f,g]_n$ a tous ses coefficients de Fourier dans K également. Cette constatation jouera un rôle important par la suite (c'est la raison pour laquelle on introduit le facteur de normalisation $\dfrac{1}{(2i\pi)^n}$).

(2) Les crochets de Rankin-Cohen fournissent de nouvelles identités arithmétiques entre les coefficients de Fourier de différentes formes modulaires. Par exemple, Δ et $[G_4, G_6]_1$ sont deux formes de la droite $S_{12}(1)$, elles sont donc proportionnelles. Par comparaison des premiers coefficients de Fourier,

$$\frac{1}{2i\pi}\left(4G_4G_6^{(1)} - 6G_4^{(1)}G_6\right) = \frac{1}{35}\Delta.$$

On en déduit la formule

$$12\tau(n) = 5n\sigma_3(n) + 7n\sigma_5(n) - 840\sum_{m=1}^{n-1}(5m-2n)\sigma_3(m)\sigma_5(n-m).$$

De même, $[\Delta, G_{12}]_1$ et $\Delta G_4^2 G_6$ sont deux formes de la droite $S_{26}\,(1)$. On en déduit

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\Delta G_{12}^{(1)} - \Delta^{(1)}G_{12}\right) = \frac{3980160}{13}\Delta G_4^2 G_6.$$

On a besoin, dans le deuxième chapitre, des opérateurs de Rankin-Cohen généralisés. Pour les construire, on considère la fonction G_2 définie page 17. C'est une fonction holomorphe mais elle n'est pas modulaire de poids 2 sur $SL(2,\mathbb{Z})$, puisqu'elle vérifie l'équation $G_2(\gamma z) = (cz+d)^2 G_2(z) - \dfrac{c(cz+d)}{4i\pi}$ pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Si $f \in M_k\,(N)$, on pose[11] $\vartheta_k(f) = \dfrac{1}{2i\pi}f^{(1)} + 2kG_2 f$. On a, pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$

$$\vartheta_k(f)(\gamma z) = \frac{1}{2i\pi}\left[(cz+d)^{k+2}f^{(1)}(z) + kc(cz+d)^{k+1}f(z)\right]$$

$$+ 2k[(cz+d)^2G_2(z) - \frac{c(cz+d)}{4i\pi}](cz+d)^k f(z) \tag{25}$$

$$= (cz+d)^{k+2}\vartheta_k(f)(z) \tag{26}$$

ce qui montre que $\vartheta_k(f) \in M_{k+2}\,(N)$. On définit, pour $f \in M_k\,(N)$,

$$[f, G_2]_0^* = fG_2 + \frac{1}{4i\pi k}f^{(1)} = [f, G_2]_0 + \frac{1}{4i\pi k}f^{(1)} \in M_{k+2}\,(N)\,.$$

De la même façon, pour $f \in M_k\,(N)$, la fonction $[f, G_2]_n^*$ définie par

$$[f, G_2]_n^* = [f, G_2]_n + \frac{(-1)^n}{2(2i\pi)^{n+1}(k+n)}f^{(n+1)}$$

(en prenant $g = G_2$ et $l = 2$ dans l'équation (22) pour définir $[f, G_2]_n$) est un élément de $M_{k+2+2n}\,(N)$. On définit $[G_2, f]_n^* = (-1)^n[f, G_2]_n^*$.

De façon plus générale, posons $M_k\,(N)' = M_k\,(N) \oplus \delta(k=2)\mathbb{C}G_2$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_2\,(N) \longrightarrow M_2\,(N)' \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

où si $f + cG_2 \in M_2\,(N)'$ avec $f \in M_2\,(N)$, alors $\varepsilon(f + cG_2) = c/2$ (et $\varepsilon(f) = 0$ si f est modulaire de poids k quelconque). On définit, pour $(f, g) \in M_k\,(N)' \times M_l\,(N)'$ et pour $n \geqslant 0$,

$$[f, g]_n^* = [f, g]_n + \frac{\varepsilon(f)g^{(n+1)}}{(2i\pi)^{n+1}(l+n)} + (-1)^n\frac{\varepsilon(g)f^{(n+1)}}{(2i\pi)^{n+1}(k+n)}.$$

On peut vérifier que $[f, g]_n^* \in M_{k+l+2n}\,(N)$ (la seule chose restant à voir est que cette fonction est bien modulaire pour $f = g = G_2$, ce qu'on vérifie grâce à (13)). Il est clair que si f et g sont modulaires, $[f, g]_n^* = [f, g]_n$.

[11] Voir § 17.3 pour une étude de cet opérateur.

En particulier (c'est ce qui nous servira par la suite), on peut définir $[G_h, G_l]_n^*$ pour tous $h, l \geqslant 2$.

7. Formes primitives

7.1. Opérateurs de Hecke. — La présentation des opérateurs de Hecke donnée ici est celle d'Iwaniec dans [**Iwa97**, Ch. 6]. On trouvera une autre présentation dans [**Kna92**, § IX.6].

Soit n, N et k des entiers strictement positifs, on définit le n^{e} opérateur de Hecke(12) T_n comme l'endomorphisme sur l'espace $\mathcal{F}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathscr{H}$ dans $\mathbb{C}$ donné par la relation

$$T_n f(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{(a,d)\in\mathbb{N}^2 \\ (a,N)=1,\, ad=n}} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right), \qquad (f \in \mathcal{F}(\mathscr{H}, \mathbb{C}))\,. \tag{27}$$

Cet opérateur transforme une fonction de $\mathcal{F}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ holomorphe et de période 1 de développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \widehat{f}(m) e(mz)$$

en une fonction de $\mathcal{F}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ holomorphe et de période 1 de développement de Fourier

$$T_n f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \widehat{T_n f}(m) e(mz)$$

avec

$$\widehat{T_n f}(m) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^* \\ (d,N)=1,\, d\mid(m,n)}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{28}$$

Remarque 44. — La formule (28) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de $T_n f$ sont dans le $\mathbb{Z}$-module engendré par les coefficients de f.

En particulier, il résulte de (28) que $\widehat{T_n f}(0) = \sigma_{k-1}(n)\widehat{f}(0)$. Lorsque f est périodique de période 1, on peut évidemment remplacer la somme sur b dans (27) par n'importe quelle somme de longueur d. On garde cela en mémoire en notant

$$\sum_{b[d]}$$

cette somme. On a une relation de multiplicativité de ces opérateurs.

(12) Par souci de légèreté, on oublie la dépendance en N et k dans la notation.

Proposition 45. — *Soit N, k, m et n des entiers strictement positifs. Sur l'espace des fonctions de $\mathcal{F}(\mathscr{H},\mathbb{C})$ holomorphes et de période 1, on a*

$$T_mT_n = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\(d,N)=1,\, d\mid(m,n)}} d^{k-1}T_{mn/d^2}.$$

Démonstration. — Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e(nz)$, alors $T_mT_nf(z) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} f_{m,n}(\ell)e(\ell z)$ avec

$$f_{m,n}(\ell) = \sum_{\substack{d_1\mid(\ell,m)\\ d_2\mid(\ell m/d_1^2,n)\\ (d_1d_2,N)=1}} (d_1d_2)^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{\ell mn}{(d_1d_2)^2}\right).$$

Si $(m,n) = 1$ alors, étant donné d_1 un diviseur de (ℓ,m), on a $d_2 \mid (\ell m/d_1^2,n)$ si et seulement si $d_2 \mid (\ell,n)$: en effet, si $d_2 \mid \ell m/d_1^2$ et $d_2 \mid n$ on a $(d_2,m) = 1$ donc $(d_2,m/d_1) = 1$ puis $d_2 \mid \ell$ donc $d_2 \mid (\ell,n)$; réciproquement, si $d_2 \mid (\ell,n)$ on a $(d_1,n) = 1$ donc $d_2 \mid (\ell/d_1,n)$ puis $d_2 \mid (\ell m/d_1^2,n)$. Ainsi

$$f_{m,n}(\ell) = \sum_{\substack{d_1\mid(\ell,m)\\ d_2\mid(\ell,n)\\ (d_1d_2,N)=1}} (d_1d_2)^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{\ell mn}{(d_1d_2)^2}\right) = \sum_{\substack{d\mid(\ell,mn)\\ (d,N)=1}} d^{k-1}\widehat{f}\left(\frac{\ell mn}{d^2}\right)$$

d'où

$$T_mT_n = T_{mn} \quad \text{lorsque } (m,n) = 1. \tag{29}$$

Ensuite, si $m = p$, $n = p^\nu$ on voit que $f_{p,p^\nu}(\ell) = \widehat{T_{p^{\nu+1}}f}(\ell) + \delta(p\nmid N)p^{k-1}\widehat{T_{p^{\nu-1}}f}(\ell)$. Ainsi

$$T_{p^{\nu+1}} = T_pT_{p^\nu} - \delta(p\nmid N)p^{k-1}T_{p^{\nu-1}}. \tag{30}$$

La formule annoncée résulte des formules de multiplicativité (29) et (30). □

Corollaire 46. — *Sur l'espace des fonctions de $\mathcal{F}(\mathscr{H},\mathbb{C})$ holomorphes et de période 1, les opérateurs de Hecke commutent.*

On étudie maintenant l'action des opérateurs de Hecke sur les fonctions de période 1 que sont les formes modulaires de $M_k(N)$. Pour cela, on remarque qu'en posant

$$\Delta_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in M(2,\mathbb{Z})\colon a>0,\ 0\leqslant b<d,\ (a,N)=1,\ ad=n\right\},$$

on a

$$T_nf = n^{k-1}\sum_{M\in\Delta_n} (f\underset{k}{|}M).$$

Posons

$$G_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in M(2,\mathbb{Z})\colon (a,N)=1,\ N\mid c,\ ad-bc=n\right\}.$$

On définit

$$_{\Gamma_0(N)}\backslash^{G_n} = \{\Gamma_0(N)M,\ M\in G_n\}.$$

Lemme 47. — *L'ensemble Δ_n est un système de représentants du quotient* ${}_{\Gamma_0(N)}\backslash^{G_n}$.

Démonstration. — Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in G_n$. On pose $\gamma = c/(a,c)$ et $\delta = -a/(a,c)$ pour obtenir $(\gamma,\delta) = 1$ et $\gamma a + \delta c = 0$. On a $N \mid \gamma$ car $N \mid c$ implique $N \mid \gamma(a,c)$, puis $(a,N) = 1$ implique $((a,c),N) = 1$. Soit alors α et β tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on a $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ puis $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right)$. En multipliant à gauche par $d'/|d'|\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ avec u tel que $0 \leqslant b'd'/|d'| + |d'|u < |d'|$, on construit $\left(\begin{smallmatrix} n/|d'| & b'' \\ 0 & |d'|\end{smallmatrix}\right) \in \Delta_n$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)\left(\begin{smallmatrix} n/|d'| & b'' \\ 0 & |d'|\end{smallmatrix}\right)$. Soit alors $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right)$ des matrices de Δ_n et $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ tels que $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$. On a $\gamma = 0$ puis $\alpha = \delta = \pm 1$. Puisque d et d' sont positifs, $\alpha = \delta = 1$ puis $d = d'$ et $a = a'$. Enfin, $\beta = 0$ car $0 \leqslant b, b' < d$. $\square$

Si $f \in M_k(N)$, la fonction $(f \underset{k}{|} M)$ ne dépend que de la classe de M modulo l'action à gauche de $\Gamma_0(N)$ de sorte qu'on peut écrire

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma_0(N)\backslash G_n} (f \underset{k}{|} M).$$

Proposition 48. — *Soit $k \geqslant 2$ et $N \geqslant 1$ des entiers. On suppose k pair. Les espaces $M_k(N)$ et $S_k(N)$ sont stables par action des opérateurs de Hecke.*

Démonstration. — Soit $A \in \Gamma_0(N)$, alors

$$\{MA\,;\, M \in \Delta_n\}$$

est un ensemble de représentants[(13)] de ${}_{\Gamma_0(N)}\backslash^{G_n}$ donc

$$(T_n f \underset{k}{|} A) = n^{k-1} \sum_{M \in \Delta_n} (f \underset{k}{|} MA) = n^{k-1} \sum_{L \in \Gamma_0(N)\backslash G_n} (f \underset{k}{|} L) = T_n f.$$

Cela implique la stabilité de $M_k(N)$. La stabilité de $S_k(N)$ résulte de (28). $\square$

Enfin la proposition suivante, dont on trouve une preuve dans [**Iwa97**, Theorem 6.20], est importante.

Proposition 49. — *Soit $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, et $N \geqslant 1$ des entiers. On suppose k pair. Si $(n,N) = 1$, alors la restriction de T_n à $S_k(N)$ est autoadjointe pour le produit scalaire de Petersson :*

$$(T_n f, g) = (f, T_n g) \qquad (f, g \in S_k(N)).$$

En particulier, les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont réelles.

(13) Cela résulte du fait que si $L \in G_n$ et $A \in \Gamma_0(N)$ alors $LA^{-1} \in G_n$ de sorte qu'il existe $K \in \Gamma_0(N)$ telle que $KLA^{-1} \in \Delta_n$.

7.2. Formes primitives. — Puisque la famille $\{T_n,\ (n,N)=1\}$ est une famille commutative d'opérateurs autoadjoints, on déduit d'un théorème spectral (voir, par exemple, [**Gan66**, Théorème 9.11]) la

Proposition 50. — *Il existe une base orthonormale de l'espace $S_k(N)$ formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke T_n tels que $(n,N)=1$.*

L'équation (28) permet d'affirmer que si f est vecteur propre de tous les opérateurs T_n, $(n,N)=1$, avec valeur propre $t_f(n)$, alors

$$\widehat{f}(n)=\widehat{f}(1)t_f(n),\quad (n,N)=1. \tag{31}$$

Cela ne suffit pas à dire que $\widehat{f}(1)\neq 0$. On peut trouver des formes f vecteurs propres de tous les opérateurs T_n, $(n,N)=1$ telles que $\widehat{f}(1)=0$.

Soit L et M des entiers tels que $LM=N$ et $M\neq N$. Soit $f\in S_k(M)$ et $f_L: z\mapsto f(Lz)$. On a [**Miy89**, lemma 4.6.2]

$$\begin{cases} f_L\in S_k(N) \\ T_nf=t_f(n)f\Rightarrow T_nf_L=t_f(n)f_L \quad \text{pour tout } n\geqslant 0 \text{ entier} \\ \widehat{f_L}(1)=0. \end{cases}$$

On définit l'espace des *formes anciennes* par rapport à N comme

$$S_k^a(N)=\operatorname{Vect}\big\{f_L\ ;\ f\in S_k(M)\ ,\ LM|N,\ M\neq N\big\}.$$

Cet espace est stable par tous les opérateurs T_n, $(n,N)=1$ [**Miy89**, lemma 4.6.10].

Remarque 51. — Si $k\in\{2,4,6,8,10,14\}$ et si $N\in\mathcal{P}$, alors $S_k^a(N)=\{0\}$ car $S_k(1)=\{0\}$.

On définit l'espace des formes *nouvelles* par rapport à N comme l'orthogonal pour le produit scalaire de Petersson de $S_k^a(N)$ dans $S_k(N)$:

$$S_k^n(N)=S_k^a(N)^{\perp}.$$

Le théorème d'Atkin-Lehner [**Miy89**, theorem 4.6.8] affirme

Théorème 52. — *Soit $f\in S_k(N)$ telle que*

$$(n,N)=1\Longrightarrow \widehat{f}(n)=0.$$

Alors

$$f\in S_k^a(N).$$

On en déduit que si $f\in S_k^n(N)$ n'est pas la fonction nulle et si f est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke T_n, $(n,N)=1$ alors $\widehat{f}(1)\neq 0$. Si g est une autre forme de $S_k^n(N)$ ayant mêmes valeurs propres on a

$$\widehat{\left(g-\frac{\widehat{g}(1)}{\widehat{f}(1)}f\right)}(n)=0,\quad (n,N)=1$$

et donc

$$g - \frac{\widehat{g}(1)}{\widehat{f}(1)} f \in S_k^n(N) \cap S_k^a(N)$$

de sorte que

$$g = \frac{\widehat{g}(1)}{\widehat{f}(1)} f.$$

L'ensemble des vecteurs propres des opérateurs T_n, $(n, N) = 1$, associés à un système de valeurs propres est donc une droite dans l'espace des formes nouvelles. On obtient ainsi le théorème de multiplicité un.

***Théorème 53* (Théorème de multiplicité un).** — *Soit $f \in S_k^n(N)$ avec $T_n f = t(n) f$ pour tous $(n, N) = 1$. Si $g \in S_k^n(N)$ et $T_n g = t(n) g$ pour tous $(n, N) = 1$ alors $g \in \mathbb{C} f$.*

Si f est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$ et si $f \in S_k^n(N)$ on pose

$$f^{nor} = \frac{f}{\widehat{f}(1)}.$$

L'ensemble $H_k^*(N)$ des formes f^{nor} lorsque f parcourt une base orthogonale $\mathcal{B}$ de $S_k^n(N)$ formée de vecteurs propres de tous les T_n, $(n, N) = 1$, est appelé ensemble des formes *primitives* de niveau N. Cet ensemble est une base orthogonale de $S_k^n(N)$, *a priori* dépendante du choix de la base $\mathcal{B}$. Elle est unique au sens où l'on a la proposition suivante.

***Proposition 54*.** — *Soit $f \in S_k^n(N)$ telle que*

(1) $\forall (n, N) = 1, \exists\, t(n) \in \mathbb{C};\ T_n f = t(n) f$;
(2) $\widehat{f}(1) = 1$

alors $f \in H_k^*(N)$.

Démonstration. — On pose $H_k^*(N) = \{f_1, \dots, f_g\}$. Soit f comme dans l'énoncé. On a

$$f = \sum_{i=1}^{g} \nu_i f_i$$

avec $(\nu_i)_{1 \leqslant i \leqslant g} \in \mathbb{C}^g$. Puisque $f \neq 0$, on fixe j tel que $\nu_j \neq 0$. D'une part, les formes f_i étant vecteurs propres de T_n on a

$$T_n f = \sum_{i=1}^{g} \nu_i t_i(n) f_i$$

et d'autre part, f étant aussi vecteur propre de T_n on a

$$T_n f = \sum_{i=1}^{g} \nu_i t(n) f_i.$$

On a donc l'égalité $\nu_j t_j(n) = \nu_j t(n)$ puis $t(n) = t_j(n)$ de sorte que par le théorème 53 on a $f \in \mathbb{C}f_j$ puis $f = f_j$ car $\widehat{f}(1) = \widehat{f}_j(1) = 1$. □

Enfin, la restriction $(n, N) = 1$ est superflue grâce à la proposition suivante.

Proposition 55. — *Soit $f \in H_k^*(N)$. Alors f est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$T_n f = \widehat{f}(n) f.$$

La première partie de cet énoncé résulte de la commutativité des opérateurs de Hecke et du théorème 53 : en effet, si $(n, N) \neq 1$ (c'est le seul cas nouveau), on pose $g = T_n f$. Pour tout m premier à N, on a $T_m g = T_m T_n f = T_n T_m f = t(m) T_n f = t(m) g$ de sorte que $g \in \mathbb{C}f$. La seconde partie résulte de l'équation (28).

Un résultat difficile et important de Deligne[(14)] est la majoration des coefficients de Fourier de toute forme $f \in H_k^*(N)$.

Proposition 56. — *Soit $f \in H_k^*(N)$ et $n \geqslant 1$ un entier. Alors*

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant n^{(k-1)/2} \sigma_0(n).$$

Deligne montre en fait que pour tout nombre premier p, on peut écrire

$$\widehat{f}(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p). \tag{32}$$

avec, lorsque p est premier à N, les égalités $\beta_f(p) = \overline{\alpha_f(p)}$ et $|\alpha_f(p)| = p^{(k-1)/2}$.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ réel, il existe un réel $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $|\widehat{f}(n)| \leqslant C_\varepsilon n^{(k-1)/2+\varepsilon}$. Un résultat d'équirépartition de Serre [**Ser97b**] implique l'optimalité (asymptotique en N) de cette inégalité, au moins lorsque n est premier.

On peut exprimer toute forme parabolique en fonction de formes primitives de niveau plus petit, en effet par définition, on a

$$S_k(N) = \bigoplus_{LM=N} \bigoplus_{f \in H_k^*(M)} \mathrm{Vect}\{f_\ell,\ \ell | L\}. \tag{33}$$

7.3. Formes de Hecke. — Dans le paragraphe précédent, on s'est attaché aux vecteurs propres des restrictions à $S_k(N)$ des opérateurs de Hecke. On étudie maintenant ce qui se passe sur $M_k(N)$. On appelle *forme de Hecke* une forme modulaire f de $M_k(N)$ qui est *vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke*. On dit qu'une telle forme est normalisée si de plus $\widehat{f}(1) = 1$. On a vu que les formes primitives sont des formes de Hecke normalisées.

Sur $M_k(1)$, les séries d'Eisenstein sont vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke : pour tout $k > 2$, pour tout entier n, on a

$$T_n G_k = \sigma_{k-1}(n) G_k. \tag{34}$$

[(14)] Faisant suite à des travaux d'Eichler, Igusa et Shimura dans le cas du poids 2.

Supposons l'existence d'un nombre premier p et de deux formes modulaires *non paraboliques* f et g de $M_k(1)$ telles que $T_p f = \lambda_p f$ et $T_p g = \mu_p g$. Grâce à (28), on a $\lambda_p = \mu_p = 1 + p^{k-1}$. La forme $h = \widehat{f}(0)g - \widehat{g}(0)f$ est donc parabolique, vecteur propre de T_p de valeur propre λ_p. Cependant

$$|T_p h(z)| \leqslant p^{k-1}\,|h(pz)| + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1}\left|h\left(\frac{z+b}{p}\right)\right|.$$

Grâce au lemme 8, on a donc

$$\max_{z\in\mathscr{H}}\left|(\Im m\, z)^{k/2}\, T_p h(z)\right| \leqslant p^{k/2-1}(1+p)\max_{z\in\mathscr{H}}\left|(\Im m\, z)^{k/2}\, h(z)\right|$$

puis, si h n'est pas la fonction constante nulle,

$$1 + p^{k-1} \leqslant p^{k/2-1}(1+p).$$

Cette dernière inéquation n'ayant pas de solution dès que $k \geqslant 4$, on en déduit $h = 0$.

On a donc démontré de façon élémentaire, et en particulier sans recourir à la majoration de Deligne (proposition 56), le résultat suivant dû à Elstrodt[15].

Proposition 57. — *Soit f une forme modulaire non parabolique de $M_k(1)$, vecteur propre d'au moins un opérateur de Hecke T_p avec p premier. Alors f est une série d'Eisenstein.*

Remarque 58. — On a défini les opérateurs de Hecke sur les fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$ et périodiques de période 1. On peut donc considérer $T_n G_2$ et l'équation (34) est encore vraie pour $k = 2$.

Remarque 59. — Les égalités données à la remarque 27 et conduisant à des égalités entre fonctions arithmétiques ont un point commun : elles sont toutes des factorisations d'une forme de Hecke en produit de deux formes de Hecke. On peut se demander si ce sont les seules ayant cette propriété. Dans [**Duk99**], Duke donne une réponse positive à cette question (voir aussi [**Gha02**] pour les formes modulaires de niveau supérieur). Il est intéressant de remarquer que la preuve de Duke utilise les séries d'Eisenstein non holomorphes et les fonctions L de Rankin–Selberg.

8. Fonctions L de formes modulaires

L'objet de cette partie est de donner une introduction aux fonctions L de formes modulaires. Pour un traitement plus en profondeur de ce sujet, on renvoie aux présentations de Michel [**Micre**] et Iwaniec & Sarnak [**IS00a**].

(15) Elstrodt démontre en fait ce résultat dans le cadre plus général des formes de Siegel [**Fre83**] où la majoration de Deligne n'est pas connue (conjecture de Ramanujan–Petersson).

8.1. Définition. — Soit $f\in M_k(N)$. Grâce au lemme 9, la fonction

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(n)n^{-s}$$

converge absolument sur le demi-plan $\Re e\, s>k+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$ et normalement sur toute bande verticale de ce demi-plan. On pose $W_N=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\N&0\end{smallmatrix}\right)$ et

$$(f\underset{k}{|}W_N)=(\det W_N)^{k/2}(Nz)^{-k}f(W_Nz).$$

Puisque $W_N\Gamma_0(N)W_N^{-1}=\Gamma_0(N)$, la fonction $(f\underset{k}{|}W_N)$ est modulaire de poids k et de niveau N et on note

$$(f\underset{k}{|}W_N)(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f_W}(n)e(nz).$$

On définit la *fonction L complétée* de f par

$$\Lambda(f,s)=\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)L(f,s).$$

Proposition 60. — *Soit $f\in M_k(N)$. Les fonctions $\Lambda(f,s)$ et $\Lambda((f\underset{k}{|}W_N),s)$ admettent un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ ayant au plus deux pôles. Les éventuels pôles de $\Lambda(f,s)$ sont 0 et k et on a*

$$\operatorname*{res}_{s=0}\Lambda(f,s)=-\widehat{f}(0)\quad\textit{et}\quad\operatorname*{res}_{s=k}\Lambda(f,s)=i^k\widehat{f_W}(0).$$

De plus

$$\Lambda(f,s)=i^k\Lambda\left((f\underset{k}{|}W_N),k-s\right).$$

Démonstration. — On pose $a=\widehat{f}(0)$ et $b=\widehat{f_W}(0)$. Par définition de Γ et pour $\Re e\, s>k+\varepsilon$, en utilisant le développement de Fourier de f, on a

(35)

$$\begin{aligned}\Lambda(f,s)&=\int_0^{+\infty}\Big[f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-a\Big]t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=-\frac{a}{s}+\int_0^1 f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_1^{+\infty}\Big[f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-a\Big]t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=-\frac{a}{s}+\int_1^{+\infty}f\Big(-\frac{1}{it\sqrt{N}}\Big)t^{-s}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_1^{+\infty}\Big[f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-a\Big]t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=-\frac{a}{s}-i^k\frac{b}{k-s}+i^k\int_1^{+\infty}\Big[(f\underset{k}{|}W_N)\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-b\Big]t^{k-s}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_1^{+\infty}\Big[f\Big(\frac{it}{\sqrt{N}}\Big)-a\Big]t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

ce qui prouve le prolongement méromorphe de $\Lambda(f,s)$. L'application de ces calculs à $(f\underset{k}{|}W_N)$ fournit l'équation fonctionnelle. □

Remarque 61. — Dans le cas de $SL(2,\mathbb{Z})$ l'équation fonctionnelle est autoduale : soit $f \in M_k(1)$. On a $W_1 = S \in SL(2,\mathbb{Z})$ donc, $(f \underset{k}{|} W_1) = f$ et l'équation fonctionnelle est

$$\Lambda(f,s) = i^k \Lambda(f,k-s).$$

Les pôles éventuels sont 0 et k avec résidus

$$\operatorname*{res}_{s=0} \Lambda(f,s) = -\widehat{f}(0) \quad \textit{et} \quad \operatorname*{res}_{s=k} \Lambda(f,s) = i^k \widehat{f}(0).$$

8.2. Fonctions L de formes de Hecke. — On déduit de l'équation (31) et de la proposition 45 que les fonctions L des formes de Hecke admettent un développement eulérien.

Proposition 62. — *Soit f une forme modulaire de poids k et de niveau N, vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke et telle que $\widehat{f}(1) \neq 0$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}\, s > k$, on a*

$$L(f,s) = \widehat{f}(1) \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid N}} \left[1 - t_f(p)p^{-s}\right]^{-1} \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ (p,N)=1}} \left[1 - t_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}\right]^{-1}$$

avec $t_f(n) = \widehat{f}(n)/\widehat{f}(1)$.

8.3. Fonctions L de formes primitives. — L'opérateur $\mathfrak{W}_N \colon f \mapsto (f \underset{k}{|} W_N)$ est une isométrie de l'espace $M_k(N)$ qui stabilise $S_k^n(N)$ et commute avec les opérateurs de Hecke T_n, pour tout entier n premier à N [**AL70**, Lemma 25]. On en déduit, pour tout $(n,N) = 1$, que $T_n \mathfrak{W}_N f = \widehat{f}(n) \mathfrak{W}_N f$ pour toute forme $f \in H_k^*(N)$. Grâce au théorème 53, on a donc $\mathfrak{W}_N f = \varepsilon_f(N) f$. Puisque $\mathfrak{W}_N$ est une involution, on a $\varepsilon_f(N) = \pm 1$. On résume les propriétés des fonctions L des formes primitives[16] dans le

Corollaire 63. — *Soit $f \in H_k^*(N)$. La fonction $L(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(f,s) = i^k \varepsilon_f(N) \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s) L(f,k-s).$$

D'autre part, si $\Re\mathrm{e}\, s > (k+1)/2$, on a

$$L(f,s) = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid N}} \left[1 - \widehat{f}(p)p^{-s}\right]^{-1} \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ (p,N)=1}} \left[1 - \widehat{f}(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}\right]^{-1}.$$

[16] Ce corollaire montre que ces fonctions L appartiennent à la classe de Selberg. Cette classe contient toutes les fonctions pour lesquelles on peut généraliser, parfois conjecturalement, les démonstrations analytiques de la fonction ζ de Riemann. Voir [**KP99**].

Remarque 64. — Les fonctions L de formes primitives sont à comparer à la fonction ζ de Riemann (voir la remarque 18).

9. Coefficients de Fourier des formes primitives

9.1. Cas de $SL(2,\mathbb{Z})$. — Pour le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$, la définition même montre qu'il n'existe pas de formes anciennes et l'ensemble $H_k^*(1)$ est donc la base orthogonale de $S_k(1)$ dont les éléments sont vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke et ont leur premier coefficient de Fourier égal à 1. Dans cette partie, on va montrer en détail que les coefficients de Fourier des formes de $H_k^*(1)$ sont des entiers algébriques totalement réels, c'est-à-dire des entiers algébriques dont tous les conjugués sont réels[17].

Lemme 65. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier. Il existe une base de $S_k(1)$ dans laquelle la matrice de T_n est à coefficients entiers.*

Démonstration. — Grâce à la remarque (44), cela résulte de l'existence d'une base de l'espace $S_k(1)$ à coefficients entiers. Une telle base est construite dans le lemme suivant. □

Le lemme suivant est dû à Victor Miller. Il construit une base de $S_k(1)$ dont les éléments sont à coefficients de Fourier entiers (qui a plus de propriétés que celles requises par la preuve du lemme 65 mais qui est intéressante en soi).

Lemme 66. — *Il existe une base $\{f_1,\dots,f_d\}$ de $S_k(1)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et telle que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant d$*

$$\widehat{f_i}(j) = \delta(i=j).$$

Démonstration. — On choisit a et b des entiers naturels tels que pour $j=1,\dots,d$, la forme parabolique $g_j = \Delta^j E_6^{2(d-j)+a} E_4^b$ soit de poids k. Ces formes sont à coefficients entiers et, si $i \leqslant j$, alors $\widehat{g_j}(i) = \delta(i=j)$ puisque Δ est parabolique de premier coefficient $\widehat{\Delta}(1) = 1$ et $\widehat{E_4}(0) = \widehat{E_6}(0) = 1$. On construit $f_d, f_{d-1},\dots,f_1$ en posant $f_d = g_d$ et

$$f_{d-i} = g_{d-i} - \sum_{j=0}^{i-1} \widehat{g_{d-i}}(d-j) f_{d-j} \qquad (i=1,\dots,d-1).$$ □

On note $S_k^{\mathbb{Z}}(1)$ l'ensemble des formes paraboliques de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$ à coefficients de Fourier entiers.

Proposition 67. — *L'ensemble $S_k^{\mathbb{Z}}(1)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang la dimension de $S_k(1)$ et stable par les opérateurs de Hecke.*

[17] Autrement dit, un entier algébrique totalement réel est une racine d'un polynôme unitaire, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dont toutes les racines sont réelles.

Démonstration. — On note d la dimension de $S_k(1)$ et $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ la base du lemme 66. Par construction de cette base, on a

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z} f_i \subset S_k^{\mathbb{Z}}(1)$$

et il reste à montrer l'inclusion opposée. Soit donc $f \in S_k^{\mathbb{Z}}(1)$. Grâce au lemme 66, il existe $\{c_i\}_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathbb{C}^d$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^{d} c_i f_i.$$

Soit $j \in \{1, \dots, d\}$, on va montrer que $c_j \in \mathbb{Z}$. On a

$$\widehat{f}(j) = \sum_{i=1}^{d} c_i \widehat{f}_i(j)$$

et, par construction des formes f_i, il en résulte $\widehat{f}(j) = c_j$. Ainsi, $c_j \in \mathbb{Z}$ et

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z} f_i = S_k^{\mathbb{Z}}(1).$$

La stabilité par les opérateurs de Hecke résulte du lemme 65. $\square$

Grâce au lemme 65, le polynôme caractéristique de T_n est à coefficients entiers et les valeurs propres sont des entiers algébriques. Elles sont réelles puisque les opérateurs de Hecke sont autoadjoints. Les racines conjuguées sont aussi réelles puisqu'elles sont aussi des valeurs propres des opérateurs de Hecke. Ces racines conjuguées sont en fait valeurs propres de formes primitives, ce qu'on montre maintenant. Soit σ un automorphisme de $\mathbb{C}$ (il préserve $\mathbb{Q}$) et $f \in H_k^*(1)$. On définit

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma\left[\widehat{f}(n)\right] e(nz).$$

Avec la base du lemme 66, on écrit

$$f = \sum_{i=1}^{d} t_i f_i.$$

Puisque f_i est à coefficients entiers on a

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{d} \sigma(t_i)\widehat{f}_i(n)\right] e(nz) = \sum_{i=1}^{d} \sigma(t_i) f_i \in S_k(1).$$

D'autre part, $T_n f^\sigma = \widehat{f^\sigma}(n) f^\sigma$: en effet, soit $m \geqslant 1$, on a

$$\widehat{T_n f^\sigma}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\sigma\left[\widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right)\right] = \sigma\left[\widehat{T_n f}(m)\right] = \widehat{f^\sigma}(n)\widehat{f^\sigma}(m).$$

On en déduit que les conjugués par les automorphismes de $\mathbb{C}$ des valeurs propres de Hecke sont coefficients de formes primitives donc réels.

9.2. $\mathbb{Z}$-module de Hecke sur $SL(2,\mathbb{Z})$. — On note $\mathcal{T}_k$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les opérateurs de Hecke. On va montrer que $\mathcal{T}_k$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}\left(S_k\left(1\right)\right)$ des formes linéaires de $S_k\left(1\right)$ et que $S_k\left(1\right)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}\left(\mathcal{T}_k\right)$ des formes linéaires de $\mathcal{T}_k$.

Lemme 68. — *Les applications linéaires*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k &\longrightarrow \mathcal{L}\left(S_k\left(1\right)\right) \\ T &\longmapsto (f \mapsto \widehat{Tf}(1)) \end{aligned} \qquad \textit{et} \qquad \begin{aligned} S_k\left(1\right) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{T}_k) \\ f &\longmapsto (T \mapsto \widehat{Tf}(1)) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Démonstration. — On note φ_1 l'application linéaire de $\mathcal{T}_k$ dans $\mathcal{L}\left(S_k\left(1\right)\right)$ et φ_2 l'application linéaire de $S_k\left(1\right)$ dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{T}_k\right)$. Soit $T \in \mathcal{T}_k$ tel que $\varphi_1(T) = 0$. Alors, pour toute $f \in S_k\left(1\right)$, on a $\widehat{Tf}(1) = 0$ et, en particulier, pour toute $f \in S_k\left(1\right)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{T(T_nf)}(1) = 0$. Par commutativité des opérateurs de Hecke (voir le corollaire 46), on en déduit $\widehat{T_n(Tf)}(1) = 0$ puis $\widehat{Tf}(n) = 0$ (voir l'équation (28)) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $Tf = 0$ pour toute $f \in S_k\left(1\right)$ puis $T = 0$ et φ_1 est injective. Soit maintenant $f \in S_k\left(1\right)$ telle que $\varphi_2(f) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{T_nf}(1) = 0$, *i.e.* $\widehat{f}(n) = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi φ_2 est injective. L'injectivité de φ_1 implique $\dim \mathcal{T}_k \leqslant \dim S_k\left(1\right)$ et l'injectivité de φ_2 implique $\dim S_k\left(1\right) \leqslant \mathcal{T}_k$. On a donc $\dim S_k\left(1\right) = \mathcal{T}_k$ et les applications linéaire φ_1 et φ_2 sont bijectives. □

Corollaire 69. — *Les espaces vectoriels $\mathcal{T}_k$ et $S_k\left(1\right)$ sont duaux.*

Lemme 70. — *Une base de $\mathcal{T}_k$ est $\{T_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ où d est la dimension de $S_k\left(1\right)$.*

Démonstration. — Puisque $\mathcal{T}_k$ est de dimension d, il suffit de montrer que la famille $\{T_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ est libre. Soit $\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{d} t_iT_i = 0.$$

En notant $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ la base construite au lemme 66, on a

$$\sum_{i=1}^{d} t_i\widehat{T_if_j}(1) = 0$$

pour tout $j \in [1,d]$. Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{d} t_i\widehat{f_j}(i) = 0$$

puis $t_j = 0$ pour tout j. □

On note $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$ et on appelle $\mathbb{Z}$-*module de Hecke* sur $SL(2,\mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par les opérateurs de Hecke.

Lemme 71. — *Le module $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang la dimension de $S_k(1)$ admettant $\{T_i\}_{1\leqslant i\leqslant \dim S_k(1)}$ comme base.*

Démonstration. — On note d la dimension de $S_k(1)$. Soit $n\in\mathbb{N}$, il suffit de montrer que

$$T_n=\sum_{i=1}^{d} t_i T_i$$

avec $\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}\in\mathbb{Z}^d$. L'existence de $\{t_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}\in\mathbb{C}^d$ est donnée par le lemme 70. Soit $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ la base construite au lemme 66, pour tout $j\in[1,d]$, on a

$$\widehat{T_n f_j}(1)=\sum_{i=1}^{d} t_i \widehat{f}_j(i)=t_j$$

puis, comme $\widehat{T_n f_j}(1)=\widehat{f}_j(n)\in\mathbb{Z}$, on a $t_j\in\mathbb{Z}$. □

On termine ce paragraphe en donnant un exemple : on va exhiber la relation liant l'opérateur de Hecke T_5 aux opérateurs T_1, T_2, T_3 et T_4 dans l'espace $S_{56}(1)$ de dimension 4. On construit la base $\mathcal{B}=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ du lemme 66 en appliquant l'algorithme donné dans la preuve. On trouve

$$\begin{aligned}
f_4&=\Delta^4E_4^2\\
f_3&=\Delta^3E_4^2(E_6^2+600\Delta)\\
f_2&=\Delta^2E_4^2(E_6^4+323784\Delta^2+1584\Delta E_6^2)\\
f_1&=\Delta E_4^2(E_6^6+173450720\Delta^3+1685556\Delta^2E_6^2+2568\Delta E_6^4).
\end{aligned}$$

On a $T_1=I$. Grâce à la formule (28) et au fait que $\widehat{f}_i(j)=\delta(i=j)$ pour $1\leqslant i,j\leqslant d$, on a[18]

$$\begin{aligned}
T_2f&=\widehat{T_2f}(1)f_1+\widehat{T_2f}(2)f_2+\widehat{T_2f}(3)f_3+\widehat{T_2f}(4)f_1\\
&=\widehat{f}(2)f_1+[\widehat{f}(4)+2^{55}\widehat{f}(1)]f_2+\widehat{f}(6)f_3+[\widehat{f}(8)+2^{55}\widehat{f}(2)]f_4
\end{aligned}$$

pour tout $f\in S_{56}(1)$. On en déduit que la matrice de T_2 dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
36028797018963968 & 0 & 0 & 1\\
3018950369280 & 23525573580 & 86415360 & 20304\\
4726301246593105920 & 40727509103997952 & 170609983488 & 122207160
\end{pmatrix}.$$

De même,

$$T_3f=\widehat{f}(3)f_1+\widehat{f}(6)f_2+[\widehat{f}(9)+3^{55}\widehat{f}(1)]f_3+\widehat{f}(12)f_4$$

[18] Le lecteur attentif remarquera à la fin de ce calcul que seul le calcul de la première ligne de T_2, T_3, T_4 et T_5 est nécessaire à notre objectif, le calcul de la première ligne de T_2, T_3 et T_4 étant de plus évident compte-tenu de la forme de $\mathcal{B}$. Il nous semble cependant que le calcul des opérateurs est instructif.

de sorte que la matrice de T_3 dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3018950369280 & 23525573580 & 86415360 & 20304 \\ 17445059300424900168554788 & 418899261838141440 & -11104393484520 & -2974848768 \\ 8476943389727152944395059 20 & 828964318776646975488 & -25097117470294016 & 4259397219660 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $T_4 = T_2^2 - 2^{55} I$ (voir la formule (30)) d'où la matrice de T_4 dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4726301246593105920 & 40727509103997952 & 170609983488 & 122207160 \\ 847694338972715294439505920 & 828964318776646975488 & -25097117470294016 & 4259397219660 \\ 14673637366988650036487721986293 76 & 498121164549501048188928 0 & 355930846924249497 60 & 23097367145039936 \end{pmatrix}.$$

Enfin, de même que pour T_2 et T_3, on a

$$T_5 f = \widehat{f}(5) f_1 + \widehat{f}(10) f_2 + \widehat{f}(15) f_3 + \widehat{f}(20) f_4$$

et la matrice de T_5 dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 284181438 & 5528576 & 69732 & 384 \\ 20100305270405464165580 8 & 156410039815162755 66 & 71540149542912 & 48348916544 \\ 1249030337755450455515818814457 6 & 3475331117996511981035 52 & -10411146920885941986 & 1428278630266368 \\ 5635267863401391224247251070552637 44 & 19708157768763893165216890 88 & 119186155567127105372 16 & 916708090247265214 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit rapidement que

$$T_5 = 284181438 T_1 + 5528576 T_2 + 69732 T_3 + 384 T_4.$$

9.3. Corps des coefficients, action galoisienne. — Les propriétés de la partie précédente se généralisent au niveau N. Shimura a montré [**Shi72**, Proposition 2.1] la

Proposition 72. — *Soit σ un automorphisme de $\mathbb{C}$ et $f \in H_k^*(N)$. On définit*

$$f^{\sigma}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma\left[\widehat{f}(n)\right] e(nz).$$

Alors $f^{\sigma} \in H_k^*(N)$.

On a alors la [**Shi94**, Proposition 3.48]

Proposition 73. — *Les coefficients de Fourier des formes primitives sont des entiers algébriques totalement réels.*

Si $f \in H_k^*(N)$, on pose

$$\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}\left(\widehat{f}(n) \colon n \geqslant 1\right) = \mathbb{Q}\left(\widehat{f}(p) \colon p \in \mathcal{P}\right) \tag{36}$$

(la dernière égalité étant obtenue grâce à la proposition 45) et on a $[\mathbb{Q}(f) \colon \mathbb{Q}] = \#\,\mathrm{orbite}(f)$ où on a écrit $\mathrm{orbite}(f)$ pour désigner l'orbite de f sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Lorsque $k = 2$, le degré du corps $\mathbb{Q}(f)$ a une interprétation géométrique qu'on donne maintenant.

Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$ [**Mur93**]. À chaque nombre premier p, on sait associer (voir [**Ser70**] et [**Roh97**, § 3.1]) un polynôme unitaire $P_{A,p} \in \mathbb{Z}[X]$ de degré au plus égal à $2 \dim A$, et exactement égal à $2 \dim A$ sauf dans un nombre fini de cas (nous notons S l'ensemble fini des cas où $\deg P_{A,p} < 2 \dim A$). De plus, si

$$P_{A,p}(X) = \prod_{i=1}^{2 \dim A} [1 - \alpha_i(p) X]$$

avec $\alpha_i(p) \in \mathbb{C}$, alors on a toujours $|\alpha_i(p)| \leqslant \sqrt{p}$ et, si $p \notin S$, on a $|\alpha_i(p)| = \sqrt{p}$. La fonction L de A est alors

$$L(A, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} P_{A,p}(p^{-s})^{-1}.$$

Lorsque $A = E$ est une courbe elliptique (c'est-à-dire une variété abélienne de dimension 1 et de genre 1), les résultats de Wiles, Taylor, Diamond, Conrad et Breuil prouvent qu'il existe un entier N et une forme primitive de poids 2 et de niveau N telle que $L(E, s) = L(f, s)$. Toutes les formes primitives ne conduisent pas à une courbe elliptique[(19)]. Néanmoins, on sait grâce aux travaux de Shimura [**Shi94**, § 7.5], [**Roh97**, § 3.7] que pour toute forme primitive f de poids 2 et de niveau N il existe une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$ notée $A_{\overline{f}}$, ne dépendant que de la classe de conjugaison galoisienne de f telle[(20)] que

$$\begin{aligned} L(A_{\overline{f}}, s) &= \prod_{g \in \mathrm{orbite}(f)} L(g, s) \\ &= \prod_{p \mid N} \Big[\prod_{g \in \mathrm{orbite}(f)} \big(1 - \widehat{g}(p) p^{-s}\big) \Big]^{-1} \prod_{p \nmid N} \Big[\prod_{g \in \mathrm{orbite}(f)} \big(1 - \widehat{g}(p) p^{-s} + p^{1-2s}\big) \Big]^{-1}. \end{aligned}$$

La dimension de $A_{\overline{f}}$ est le cardinal de l'orbite de f

$$\dim A_{\overline{f}} = \# \, \mathrm{orbite}(f) = [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}]. \tag{37}$$

Serre a montré [**Ser97b**] (voir aussi [**Sar87**] et [**CDF97**]) que le maximum sur $H_2^*(N)$ de cette dimension tend vers l'infini lorsque N tend vers l'infini. En rendant sa méthode effective, on peut montrer [**Roy00**] qu'il existe $C > 0$ (une constante explicitable) telle que, pour tout N assez grand, il existe $f \in H_2^*(N)$ telle que

$$\dim A_{\overline{f}} \geqslant C \sqrt{\log \log N}. \tag{38}$$

On donne quelques idées de la preuve. Soit p un nombre premier ne divisant pas N (cette condition sera nécessaire par la suite), pour toute forme $f \in H_2^*(N)$, on a la

(19) La relation (37) implique que la fonction L d'une forme primitive de poids 2 est la fonction L d'une courbe elliptique si, et seulement si, tous les coefficients de Fourier de cette forme primitive sont rationnels.

(20) Il faut là les travaux de Carayol suivant Deligne, Ihara, Langlands. Voir par exemple [**Roh97**, theorem 5].

minoration

$$[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]\geqslant\left[\mathbb{Q}\left(\widehat{f}(p)\right):\mathbb{Q}\right]$$

de sorte qu'on est ramené à trouver $F_p(N)$ telle qu'il existe $f\in H_2^*(N)$ vérifiant

$$\deg_{\mathbb{Q}}\left(\widehat{f}(p)\right)\geqslant F_p(N). \tag{39}$$

Supposons connaître $d_p(N)$ telle que pour toute forme $f\in H_2^*(N)$, on a

$$\deg_{\mathbb{Q}}\left(\widehat{f}(p)\right)\leqslant d_p(N).$$

Puisque $\widehat{f}(p)$ est un entier algébrique et que la norme de chacun de ses conjugués est majorée par $2\sqrt{p}$, on a

$$\begin{aligned}\#\bigl\{\widehat{f}(p)\colon f\in H_2^*(N)\bigr\}\leqslant d_p(N)\#\bigl\{&P\in\mathbb{Z}[X]\colon P\text{ unitaire, }\deg P\leqslant d_p(N),\\ &\qquad P(x)=0\Rightarrow |x|\leqslant 2\sqrt{p}\bigr\}\\ \leqslant (16\sqrt{p})^{d_p(N)^2}&.\end{aligned} \tag{40}$$

Pour obtenir cette dernière ligne, on a utilisé le fait que si $M\geqslant 1$ et $d\geqslant 2$, il y a au plus $(6M^{d^2})$ polynômes unitaires à coefficients entiers dont les racines sont toutes de norme inférieure à M. Cela résulte immédiatement des relations entre racines et coefficients d'un polynôme. On déduit de (40) l'inégalité

$$d_p(N)\geqslant\sqrt{\frac{\log\#\{\widehat{f}(p)\colon f\in H_2^*(N)\}}{\log(16\sqrt{p})}}$$

et dans (39), on peut choisir

$$F_p(N)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\log\#\{\widehat{f}(p)\colon f\in H_2^*(N)\}}{\log(16\sqrt{p})}}.$$

Il nous reste à minorer la taille du spectre de T_p. À défaut de résultats algébriques, on utilise l'analyse. Celle-ci (et en particulier l'analyse de Fourier) permet de trouver une mesure de probabilité μ_p sur $]-2,2[$ telle que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ (une constante explicitable) telle que pour tout $p\in\mathcal{P}$ et pour tout N premier à p, on a

$$\left|\frac{1}{\#H_2^*(N)}\sum_{f\in H_2^*(N)}\chi_I\left(\frac{\widehat{f}(p)}{\sqrt{p}}\right)-\mu_p(I)\right|\leqslant C_\varepsilon\frac{p^\varepsilon}{(\log N)^{1-\varepsilon}}=:G_p(N) \tag{41}$$

pour tout intervalle $I\subset]-2,2[$ de fonction caractéristique χ_I. La mesure μ_p est donnée par :

$$\mu_p=\frac{p+1}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2-x^2}\cdot\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Un intervalle ne contenant aucune valeur $\widehat{f}(p)/\sqrt{p}$ est de longueur pour μ_p inférieure à $G_p(N)$. Autrement dit, tout intervalle de longueur $2G_p(N)$ pour μ_p contient au moins une valeur $\widehat{f}(p)/\sqrt{p}$ et

$$\#\left\{\widehat{f}(p)\colon f\in H_2^*(N)\right\}\geqslant 2C_\varepsilon\frac{\log N}{(p\log N)^\varepsilon}.$$

Remarques 74

(1) Pour améliorer la racine carrée de (38), il serait intéressant de savoir si l'exposant 2 de $d_p(N)$ dans (40) est optimal. En particulier, en prenant en compte le fait que les valeurs propres de Hecke sont totalement réelles.

(2) Si les opérateurs de Hecke étaient à racines simples, on pourrait remplacer le terme $(\log N)^{1-\varepsilon}$ par le meilleur terme $\#H_2^*(N)$. Mais, cette hypothèse est trop grossière : l'opérateur T_2 sur $H_2^*(487)$ admet 0 comme valeur propre d'ordre 4. Il serait intéressant d'avoir une hypothèse raisonnable sur la multiplicité des valeurs propres des opérateurs de Hecke.

(3) Il résulte de (41) qu'étant donné un intervalle $I\subset]-2,2[$, il existe N et $f\in H_2^*(N)$ tels que $\widehat{f}(p)/\sqrt{p}\in I$. Autrement dit, la majoration de Deligne est optimale (le calcul menant à (41) reste valable en poids $k\neq 2$).

(4) L'égalité (41) est une version « verticale » de la conjecture de Sato-Tate (*cf.* § 3). En particulier, il est intéressant de noter que

$$\lim_{p\to+\infty}\mu_p=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

(5) En modifiant (41), on peut ajouter à (37) des conditions sur le rang de $A_{\overline{f}}$ (voir [**Roy00**]).

(6) Lorsque N est premier, on conjecture qu'en dehors des formes modulaires à coefficients rationnels (correspondant à des courbes elliptiques), il n'y a que deux orbites sous l'action de Galois, l'une contenant toutes les formes f telles que $\varepsilon_f(N)=1$, l'autre contenant toutes les formes f telles que $\varepsilon_f(N)=-1$. Le lecteur pourra se reporter aux calculs de Brumer [**Bru95**, §§ 6 et 8] pour des données numériques.

9.4. Valeur au centre de la bande critique, conjecture de Katz & Sarnak

En notant $A_{\overline{f}}^{\mathrm{tors}}$ le sous-groupe de torsion de $A_{\overline{f}}$, un théorème de Weil, généralisant un résultat de Mordell (voir, par exemple, [**Ser97a**]) donne

$$A_{\overline{f}}(\mathbb{Q})\simeq A_{\overline{f}}^{\mathrm{tors}}\oplus\mathbb{Z}^{\mathrm{rang}\,A_{\overline{f}}}.$$

La conjecture (faible) de Birch et Swinnerton-Dyer affirme que

$$\operatorname*{ord}_{s=1}L(A_{\overline{f}},s)=\mathrm{rang}\,A_{\overline{f}}$$

d'où conjecturalement

$$\mathrm{rang}\,A_{\overline{f}}=\sum_{g\in\mathrm{orbite}\,f}\operatorname*{ord}_{s=1}L(g,s).$$

Il est intéressant d'étudier les valeurs $L(f,1)$. On dit que $f\in H_2^*(N)$ est *paire* lorsque le signe de l'équation fonctionnelle $-\varepsilon_f(N)$ vaut 1 et *impaire* lorsque le signe de l'équation fonctionnelle $-\varepsilon_f(N)$ vaut -1. On note $H_2^*(N)^+$ l'ensemble des formes paires de $H_2^*(N)$ et $H_2^*(N)^-$ l'ensemble des formes impaires.

D'après l'équation fonctionnelle, si f est impaire alors $L(f,1)=0$ de sorte que pour toute forme primitive f, paire ou impaire on a

$$(1+\varepsilon_f(N))\,L(f,1)=0. \tag{42}$$

Grâce à l'équation (35), $L(f,x)$ est réel lorsque x est réel. De plus, le développement eulérien de $L(f,s)$ assure que $L(f,x)>0$ pour $x\in]3/2,+\infty[$. On en déduit, par continuité de $x\mapsto L(f,x)$ que, si l'hypothèse de Riemann est vraie (c'est-à-dire, si tous les zéros de $\Lambda(f,s)$ sont sur l'axe $\Re e\, s=1$), alors $L(f,1)\geqslant 0$. Il est remarquable que l'on sache démontrer ce résultat *sans recourir à l'hypothèse de Riemann* suite à des travaux commencés par Waldspurger et achevés par Guo [**Guo96**]. D'autre part, si f est impaire les travaux de Gross et Zagier [**GZ86**] prouvent que si $L(f,1)=0$ alors $L'(f,1)\geqslant 0$. On conjecture que, en moyenne asymptotique, $L(f,1)\neq 0$ si f est paire et $L'(f,1)\neq 0$ si f est impaire. Autrement dit, l'ordre de $L(f,s)$ en $s=1$ ne serait gouverné que par le signe de $\varepsilon_f(N)$. Cela est prédit par la conjecture de Katz et Sarnak que nous expliquons ici. Pour tout entier $j\geqslant 1$, Katz et Sarnak définissent sur $\mathbb{R}$ deux mesures[(21)] $\nu(+,j)$ et $\nu(-,j)$ [**KS99a**, proposition 7.5.5] de probabilités, supportées dans $\mathbb{R}^+$ et absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Si l'hypothèse de Riemann est vérifiée pour $L(f,s)$ avec f primitive, les zéros de $\Lambda(f,s)$ sont de la forme $1+i\gamma_f$ avec

$$0\leqslant\gamma_{f,1}\leqslant\gamma_{f,2}\leqslant\cdots$$

On a listé les zéros avec multiplicité. Si f est impaire, le zéro 1 est listé avec multiplicité moins 1 [(22)]. La conjecture prévoit que pour tout $j\geqslant 1$ et pour toute fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue à support compact on ait

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\#H_2^*(N)^\pm}\sum_{f\in H_2^*(N)^\pm} h\left(\gamma_{f,j}\frac{\log(4N)}{2\pi}\right)=\int_{\mathbb{R}} h\,\mathrm{d}\nu(\pm,j). \tag{43}$$

On choisit pour tout réel $0<t<1$ une fonction continue $h_t:\mathbb{R}\to[0,1]$ à support dans $[-t,t]$ et telle que $h_t(0)=1$. On a

$$\frac{1}{\#H_2^*(N)^+}\sum_{f\in H_2^*(N)^+} h_t\left(\gamma_{f,1}\frac{\log(4N)}{2\pi}\right)\geqslant\frac{1}{\#H_2^*(N)^+}\#\left\{f\in H_2^*(N)^+\ ;\ L(f,1)=0\right\}.$$

(21) Ce sont les limites, lorsque N tend vers $+\infty$ des mesures de localisation de la j^{e} (resp. $j+1^{\mathrm{e}}$) phase propre de $SO(2N)$ (resp. $SO(2N+1)$) lorsqu'on les ordonne dans $[0,\pi]$.

(22) Autrement dit, on ne compte que les zéros non « évidents ».

Lorsque $N \to \infty$ puis $t \to 0$ on déduit de (43)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\# H_2^*(N)^+} \# \left\{ f \in H_2^*(N)^+ \; ; \; L(f,1) = 0 \right\} = 0.$$

De même

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\# H_2^*(N)^-} \# \left\{ f \in H_2^*(N)^- \; ; \; L'(f,1) = 0 \right\} = 0.$$

Ces faits sont exposés dans [**KS99a**, introduction]. Iwaniec, Luo et Sarnak [**ILS00**] ont prouvé (en supposant l'hypothèse de Riemann des fonctions L des formes primitives, mais aussi des caractères de Dirichlet) que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\# H_2^*(N)^+} \# \left\{ f \in H_2^*(N)^+ \; ; \; L(f,1) \neq 0 \right\} > \frac{9}{16} \tag{44a}$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\# H_2^*(N)^-} \# \left\{ f \in H_2^*(N)^- \; ; \; L'(f,1) \neq 0 \right\} > \frac{15}{16}. \tag{44b}$$

Iwaniec et Sarnak [**IS00b**] prouvent – inconditionnellement – la minoration (44a) avec $\geqslant \frac{1}{2}$ au lieu de $> \frac{9}{16}$. Kowalski et Michel prouvent – inconditionnellement – la minoration (44b) avec $\geqslant \frac{7}{8}$ au lieu de $> \frac{15}{16}$. Ils montrent avec VanderKam qu'au moins 99 % des formes primitives annulent leur fonction L en 1 à un ordre inférieur ou égal à 4 [**KMV00**].

Les travaux de Gross et Zagier [**GZ86**, corollary (1.3)] permettent aussi de prouver que si l'ordre de la fonction L d'une forme primitive est inférieur ou égal à 1, alors il est stable par action de Galois.

Proposition 75. — *Soit $f \in H_2^*(N)$. Alors*

$$L(f,1) \neq 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad L(f^\sigma,1) \neq 0 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

et

$$\operatorname*{ord}_{s=1} L(f,s) = 1 \quad \textit{si et seulement si} \quad \operatorname*{ord}_{s=1} L(f^\sigma,s) = 1 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Pour une présentation de la conjecture de Katz & Sarnak dans le cadre général des familles de fonctions L, le lecteur est invité à se reporter à [**KS99b**] et [**Mic02**].

PARTIE II
STRUCTURES RATIONNELLES SUR LES FORMES MODULAIRES

Dans ce chapitre, on étudie exclusivement les formes modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z})$. On indique brièvement la façon dont les résultats se généralisent au cas des sous-groupes de congruence.

10. Périodes de formes paraboliques

Soit $k \geqslant 4$ un entier pair, et soit f une forme parabolique de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$.

Définition 76. — Le *polynôme de période* de f est le polynôme r_f de degré $k-2$ défini par

$$r_f(X) = \int_0^\infty f(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z.$$

Cette intégrale est bien définie d'après le lemme 12 car la forme f est parabolique. On supposera (sauf précision contraire) que l'intégration entre deux points a et b de $\overline{\mathscr{H}}$ se fait le long de l'unique géodésique reliant a à b dans $\mathscr{H}$.

Pour tout $n \in \{0,\dots,k-2\}$, on note[(23)] $r_n(f) = \int_0^\infty f(z)z^n\,\mathrm{d}z$. Les $k-1$ nombres complexes $r_n(f)$ sont appelés les *périodes* de f. Ces périodes sont reliées aux valeurs spéciales de la fonction L associée à f : on a en effet

$$r_n(f) = i^{n+1}\Lambda(f,n+1) \tag{45}$$

(avec les notations de la page 15) puis

$$\begin{aligned} r_f(X) &= \sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\binom{k-2}{n} r_n(f)X^{k-2-n} \\ &= -\sum_{n=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{(k-2-n)!}\frac{L(f,n+1)}{(2i\pi)^{n+1}}X^{k-2-n} \end{aligned} \tag{46}$$

(voir la remarque 61). Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit à gauche sur $\mathbb{C}_{k-2}[X]$ par $(\gamma,P)\mapsto \gamma\cdot P$, où le polynôme $\gamma\cdot P$ est défini par[(24)]

$$(\gamma\cdot P)(X) = (-cX+a)^{k-2}P\left(\frac{dX-b}{-cX+a}\right) \quad \text{pour} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}. \tag{47}$$

On remarque que la matrice $-I$ agit trivialement, cette action se factorise par $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Proposition 77. — *Pour toutes $f \in S_k(1)$ et $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a*

$$(\gamma\cdot r_f)(X) = \int_{\gamma 0}^{\gamma\infty} f(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. — Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. On a

$$(\gamma\cdot r_f)(X) = \int_0^\infty (cz+d)^k f(z)\left(X - \frac{az+b}{cz+d}\right)^{k-2}\frac{\mathrm{d}z}{(cz+d)^2}.$$

(23) Selon les auteurs, la définition de $r_n(f)$ peut différer d'un facteur multiplicatif i^{n+1}.

(24) Certains auteurs définissent plutôt une action à droite notée $(P|\gamma)$ et définie par $(P|\gamma) = \gamma^{-1}\cdot P$.

De $(cz+d)^k f(z) = f(\frac{az+b}{cz+d})$, on déduit

$$(\gamma\cdot r_f)(X) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\left(X - \frac{az+b}{cz+d}\right)^{k-2} \frac{\mathrm{d}z}{(cz+d)^2} = \int_{\gamma 0}^{\gamma\infty} f(u)(X-u)^{k-2}\,\mathrm{d}u$$

en faisant le changement de variable $u = \frac{az+b}{cz+d} = \gamma z$. □

Par linéarité, on étend l'action précédente de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}_{k-2}[X]$ en une action de l'algèbre de groupe(25) $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$: si $\sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M[M] \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$, on pose

$$\left(\sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M[M]\right)\cdot P = \sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M(M\cdot P).$$

On déduit de la proposition 77 que pour tout élément $\sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M[M] \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ vérifiant dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$ l'égalité $\sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M([M\infty]-[M0]) = 0$, on a

$$\sum_{M\in SL(2,\mathbb{Z})} u_M(M\cdot r_f) = 0$$

pour toute forme f de $S_k(1)$ (on étend par linéarité l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ en une action de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ sur $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$).

Corollaire 78. — *Pour toute $f \in S_k(1)$, le polynôme r_f appartient à W_k, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_{k-2}[X]$ défini par $W_k = \ker([I]+[S]) \cap \ker([I]+[U]+[U^2])$.*

Remarque 79. — Dans un souci d'allégement d'écriture, on écrit désormais sans crochets les éléments de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$.

Démonstration. — On a

$$(I+S)([\infty]-[0]) = [\infty]-[0]+[0]-[\infty], \quad \text{et}$$
$$(I+U+U^2)([\infty]-[0]) = [\infty]-[0]+[0]-[1]+[1]-[\infty] = 0$$

dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$, ce qui démontre le corollaire. □

Ce corollaire permet de définir l'application linéaire $r : S_k(1) \to W_k$ par $r(f) = r_f$.

(25) Si G est un groupe multiplicatif et R un anneau commutatif, on note $R[G]$ l'ensemble $\sum_{g\in G} R$. Un élément x de $R[G]$ s'écrit $x = \sum_{g\in G} x(g)[g]$ avec $x(g) \in R$ et les coefficients $x(g)$ non nuls sont en nombre fini. On définit

$$\sum_{g\in G} x(g)[g] + \sum_{g\in G} x'(g)[g] = \sum_{g\in G} \big(x(g)+x'(g)\big)[g] \quad \text{et}$$
$$\sum_{g\in G} x(g)[g] \times \sum_{g'\in G} x'(g')[g'] = \sum_{g,g'\in G} \big(x(g)x'(g')\big)[gg'].$$

Cela munit $R[G]$ d'une structure d'anneau. Si $r \in R$, on définit $r\left(\sum_{g\in G} x(g)[g]\right) = \sum_{g\in G} (rx(g))[g]$. Cela munit $R[G]$ d'une structure d'algèbre sur R [**Hun96**, §§ III.1 et IV.7].

Remarque 80. — On peut démontrer (voir [**Mar**, Appendice]) que les relations $I+S$ et $I+U+U^2$ (dites relations de Manin) engendrent l'idéal de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ annulateur de l'élément $[\infty]-[0]$ dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$.

Soit ε la matrice $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. L'application $P(X)\mapsto(\varepsilon\cdot P)(X)=P(-X)$ est une involution sur $\mathbb{C}_{k-2}[X]$; notons $\mathbb{C}_{k-2}[X]^{\pm}$ les parties invariantes (les polynômes pairs) et anti-invariantes (les polynômes impairs) par cette involution. Les égalités matricielles $\varepsilon S\varepsilon=-S$ et $\varepsilon U\varepsilon=-SU^2S$ montrent que $\varepsilon\cdot W_k=W_k$. En effet, la matrice $-I$ agit de façon triviale sur l'espace $\mathbb{C}_{k-2}[X]$. Ainsi, $W_k=W_k^+\oplus W_k^-$, où W_k^+ (resp. W_k^-) désigne l'ensemble des polynômes pairs (resp. impairs) de W_k.[26]

Si $f\in S_k(1)$, on a $r_f=r_f^++r_f^-$ selon cette décomposition, donc on peut définir deux applications $r^{\pm}:S_k(1)\to W_k^{\pm}$ où $r^{\pm}(f)=r_f^{\pm}$.

11. Périodes de formes non paraboliques

On suppose que f est une forme modulaire de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$. On note $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)q^n$. Le but est de définir une notion de polynôme de période pour f qui généralise celle donnée auparavant pour les formes paraboliques.

Soit $f\in S_k(1)$, on peut récrire l'équation (46) sous la forme

$$r_f(X)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^{1-n}\left.\frac{(k-2)!\Lambda(f,s)}{\Gamma(s)\Gamma(k-s)}\right|_{s=n+1}X^{k-2-n} \tag{48}$$

puisque la fonction $s\mapsto\frac{(k-2)!}{\Gamma(s+1)\Gamma(k-1-s)}$ vaut $\binom{k-2}{n}$ aux entiers $n\in\{0,\dots,k-2\}$, est nulle en les autres entiers et la fonction $s\mapsto\Lambda(f,s)$ est entière.

Si $f\in M_k(1)$ n'est pas parabolique, la fonction $s\mapsto(k-2)!\Gamma(s)^{-1}\Gamma(k-s)^{-1}$ est entière et ses zéros sont simples, atteints en 0 et k. La dérivée de cette fonction vaut $1/(k-1)$ en 0 et $-1/(k-1)$ en k. Les points 0 et k étant les pôles de $s\mapsto\Lambda(f,s)$, la fonction

$$s\longmapsto\frac{(k-2)!}{\Gamma(s)\Gamma(k-s)}\Lambda(f,s)$$

est entière. L'équation (48) permet donc de définir $r_f(X)$ même si $f\notin S_k(1)$. On obtient

$$r_f(X)=\sum_{n=0}^{k-2}i^{1-n}\binom{k-2}{n}\Lambda(f,n+1)X^{k-2-n}+\frac{\widehat{f}(0)}{k-1}\left[X^{k-1}+\frac{1}{X}\right]. \tag{49}$$

[26] Certains auteurs privilégient l'involution $P\mapsto\delta\cdot P$, où $\delta=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, qui préserve également W_k. On a $\delta\cdot P=-\varepsilon\cdot P$ pour $P\in W_k$, ce qui conduit parfois à inverser les notations W_k^+ et W_k^-. Il s'avère que considérer l'involution δ paraît plus judicieux quand on généralise la définition des périodes à d'autres espaces de formes modulaires. Ici, pour simplifier, on préfère considérer l'involution induite par ε, plus naturelle (W_k^+ représente ainsi les polynômes pairs !).

Cette fonction n'est plus un polynôme dès lors que $f \notin S_k(1)$! C'est un élément de $\widehat{V_k} = \bigoplus_{n=-1}^{k-1} \mathbb{C}X^n$. On garde cependant la terminologie « polynôme de période » par prolongement du cas parabolique. En étendant (47) à $P \in \widehat{V_k}$, on définit l'espace vectoriel $\widehat{W_k} = \ker(I+S) \cap \ker(I+U+U^2) \cap \widehat{V_k}$.

Proposition 81. — *On a l'inclusion $r(M_k(1)) \subset \widehat{W_k}$.*

Démonstration. — On peut montrer la proposition en utilisant la formule

$$\Lambda(f,s) = \int_{t_0}^{+\infty} (f(it) - \widehat{f}(0)) t^{s-1} \,\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} \Big(f(it) - \frac{\widehat{f}(0)}{(it)^k} \Big) t^{s-1} \,\mathrm{d}t - \widehat{f}(0) \Big(\frac{t_0^s}{s} + (-1)^{k/2} \frac{t_0^{k-s}}{k-s} \Big), \tag{50}$$

valable pour tout $t_0 > 0$ (le fait que cette fonction ne dépende pas de t_0 se vérifie par simple différentiation). Cela permet de donner une nouvelle expression du polynôme de période de f par la formule (qui généralise la formule intégrale de la définition 76) :

$$r_f(X) = \int_{z_0}^{\infty} (f(z) - \widehat{f}(0))(X-z)^{k-2} \,\mathrm{d}z + \int_0^{z_0} \Big(f(z) - \frac{\widehat{f}(0)}{z^k} \Big) (X-z)^{k-2} \,\mathrm{d}z + \frac{\widehat{f}(0)}{k-1} \Big[(X-z_0)^{k-1} + \frac{1}{X} \Big(1 - \frac{X}{z_0} \Big)^{k-1} \Big],$$

quelque soit $z_0 \in \mathscr{H}$. Un calcul similaire à celui effectué dans la preuve de la proposition 77 implique que $(I+S) \cdot r_f = (I+U+U^2) \cdot r_f = 0$. □

En fait, comme $M_k(1) = S_k(1) \oplus \mathbb{C}G_k$, pour étendre la notion de polynôme de période des formes paraboliques aux formes modulaires de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$, il suffit par linéarité de définir le polynôme de période de G_k.

Proposition 82. — *Pour $k \geqslant 4$ pair, le polynôme de période de la série d'Eisenstein G_k est égal à*

$$r_{G_k}(X) = -\frac{(k-2)!}{2} \Big[p_k^-(X) + \frac{\zeta(k-1)}{(2i\pi)^{k-1}} p_k^+(X) \Big]$$

où

$$p_k^+(X) = X^{k-2} - 1 \quad \textit{et} \quad p_k^-(X) = \sum_{\substack{-1 \leqslant n \leqslant k-1 \\ n \text{ impair}}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{B_{k-n-1}}{(k-n-1)!} X^n.$$

Démonstration. — On utilise l'équation (49) du polynôme de période de G_k, avec les égalités $\widehat{G_k}(0) = -B_k/2k$, $L(G_k,s) = \zeta(s)\zeta(s-k+1)$ [27], et les valeurs de la fonction

[27] En particulier, puisque $\mathrm{res}_{s=1}\,\zeta(s) = 1$ et $\zeta(2-k) = 0$, on a $L(G_k,1) = \zeta'(2-k)$. L'équation fonctionnelle de ζ (voir (11)) et la relation de Legendre (10) pour Γ donnent, pour tout entier $n \geqslant 2$ pair, l'égalité $\zeta'(-n) = \dfrac{n!}{2(2i\pi)^n}\zeta(n+1)$.

ζ aux entiers : $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/2n$, $\zeta(2n) = -(2i\pi)^{2n}B_{2n}/2(2n)!$ et $\zeta(-2n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et $\zeta(0) = -1/2$ (voir, par exemple, [**Ten95**, chapitre II.3]). □

Remarque 83. — On constate que les valeurs de la fonction ζ aux entiers positifs impairs sont directement reliées à la valeur en 1 des fonctions L de séries d'Eisenstein, *via* la formule :

$$\zeta(k-1) = 2\frac{(2i\pi)^{k-1}}{(k-1)!}L(G_k, 1).$$

Cela fournit un exemple de la richesse arithmétique des valeurs en les entiers de la bande critique des fonctions L de formes de Hecke.

Remarque 84. — On peut montrer de façon directe que les fonctions p_k^+ et p_k^- sont des éléments de $\widehat{W}_k$. Les relations $(I+S)\cdot p_k^+ = (I+S)\cdot p_k^- = (I+U+U^2)\cdot p_k^+ = 0$ se vérifient aisément. Pour vérifier que $(I+U+U^2)\cdot p_k^- = 0$, on introduit la fonction génératrice

$$P(X,T) = \frac{1}{XT^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} p_{2m}^-(X)T^{2m-2}.$$

On peut vérifier par un calcul élémentaire que $P(X,T) = \frac{1}{4}\coth(XT/2)\coth(T/2)$. Or la fonction coth vérifie la loi d'addition :

$$\alpha+\beta+\gamma = 0 \Longleftrightarrow \coth(\alpha)\coth(\beta) + \coth(\alpha)\coth(\gamma) + \coth(\beta)\coth(\gamma) = -1.$$

En appliquant cette formule à $\alpha = -XT/2$, $\beta = T/2$ et $\gamma = (XT-T)/2$, on obtient

$$P(X,T) + P\big(1-\frac{1}{X}, XT\big) + P\big(-\frac{1}{X-1}, (X-1)T\big) = \frac{1}{4},$$

ce qui donne, en calculant le coefficient de T^{k-2}, la relation $(I+U+U^2)\cdot p_k^- = 0$ pour tout $k > 2$ pair.

Comme pour le cas de W_k traité §10, l'action de la matrice ε décompose $\widehat{W}_k$ en somme directe des parties invariantes et anti-invariantes par cette involution : $\widehat{W}_k = \widehat{W}_k^+ \oplus \widehat{W}_k^-$. On remarque immédiatement que $\widehat{W}_k^+ = W_k^+$, tandis que W_k^- est un sous-espace de codimension 1 de $\widehat{W}_k^-$. En effet, si $\Phi \in \widehat{W}_k^-$, comme $(I+S)\cdot\Phi = 0$, les coefficients de X^{-1} et X^{k-1} sont égaux, donc la codimension est inférieure ou égale à 1, et $p_k^- \notin W_k^-$.

12. Structure hermitienne de W_k et isomorphisme d'Eichler-Shimura

On donne maintenant les résultats obtenus par Eichler et Shimura qui justifient l'intérêt de la théorie des périodes de formes modulaires. On présente en premier lieu l'isomorphisme de périodes. Cet isomorphisme a été établi pour les formes paraboliques par Eichler et Shimura (voir par exemple [**Lan95**]), puis étendu aux formes non paraboliques par Zagier dans [**Zag91**].

Théorème 85. — *L'application $r^-: S_k(1) \to W_k^-$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*

L'application $r^+: M_k(1) \to W_k^+$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On a ainsi $W_k^+ = r^+(S_k(1)) \oplus \mathbb{C}p_k^+$.

Remarques 86

(1) De façon équivalente, l'isomorphisme peut être énoncé de la façon suivante : les applications $r^\pm : M_k(1) \to \widehat{W_k}^{\pm}$ sont des isomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

(2) On peut définir un polynôme de période pour un élément $F = (f, f^-) \in M_k(1)^\pm$ (voir la remarque 14) : soit $f_1 \in M_k(1)$ et $f_2 \in S_k(1)$ les formes modulaires données, pour $z \in \mathscr{H}$, par $f_1(z) = [f(z)+f^-(-z)]/2$ et $f_2(z) = [f(z)-f^-(-z)]/2$. Le terme constant $\widehat{F}(0)$ du développement de Fourier de F est $\widehat{F}(0) = \widehat{f}(0) = \widehat{s(f^-)}(0)$. On pose, pour $(u_0, z_0) \in \mathscr{H}^- \times \mathscr{H}$,

$$r_F(X) = \frac{\widehat{F}(0)}{k-1}\left[(X-z_0)^{k-1} - (X-u_0)^{k-1} + \frac{1}{X}\left((1-\frac{X}{z_0})^{k-1} - (1-\frac{X}{u_0})^{k-1}\right)\right]$$
$$+\left(\int_{-\infty}^{u_0} + \int_{z_0}^{\infty}\right)(F(z)-\widehat{F}(0))(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z + \int_{u_0}^{z_0}(F(z) - \frac{\widehat{F}(0)}{z^k})(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z$$

(où l'intégrale de u_0 à z_0 se fait le long du chemin constitué de la géodésique dans $\overline{\mathscr{H}^-}$ reliant u_0 à 0 et de la géodésique dans $\overline{\mathscr{H}}$ reliant 0 à z_0). La fonction r_F ne dépend pas du choix de u_0 et z_0, et les intégrales sont bien définies. On a $r_F(X) = r_{f_1+f_2}(X) + r_{f_1-f_2}(-X) = 2r_{f_1}^+(X) + 2r_{f_2}^-(X)$. L'isomorphisme précédent peut être énoncé de la façon suivante (où $r_{f,g}$ désigne la fonction r_F avec $F = (f, s^{-1}(g))$ si f et g appartiennent à $M_k(1)$) : l'application $r : M_k(1)^\pm \to W_k$ donnée par $r(F) = r_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; l'application r^+ définie par $r^+(f) = r_{f,f}/2$ est un isomorphisme de $M_k(1)$ dans W_k^+ ; l'application r^- donnée par $r^-(f) = r_{f,-f}/2$, qui n'est définie que sur $S_k(1)$, est un isomorphisme de $S_k(1)$ dans W_k^-.

L'espace de polynômes associé aux périodes de formes modulaires, W_k, est donc isomorphe à $M_k(1)^\pm$. En fait, en vue de généraliser à d'autres espaces de formes modulaires (par exemple aux espaces de formes modulaires de poids 1, voir [**Mar**]), il apparaît qu'une notion naturelle est de construire les périodes associées aux formes modulaires sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ continues aux pointes.

(3) L'isomorphisme précédent s'exprime en termes de cohomologie des groupes, c'est sous cette forme qu'il a été démontré originellement par Eichler et Shimura. Notons $V_k = \mathbb{C}_{k-2}[X]$, et soit

$$H^1_{\mathrm{par}}(SL(2,\mathbb{Z}), V_k) = Z^1_{\mathrm{par}}(SL(2,\mathbb{Z}), V_k)/B^1(SL(2,\mathbb{Z}), V_k),$$

où $Z^1_{\mathrm{par}}(SL(2,\mathbb{Z}), V_k)$ désigne l'ensemble des 1-cocycles ϕ de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans V_k tels qu'il existe $v \in V_k$ vérifiant $\phi(T) = v - T\cdot v$ (un tel cocycle est dit parabolique), et l'ensemble

$B^1(SL(2,\mathbb{Z}),V_k)$ désigne l'ensemble des 1-cobords de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans V_k.[28] On peut démontrer que l'application $\phi \mapsto \phi(S)$ définit un isomorphisme de $H^1_{\mathrm{par}}(SL(2,\mathbb{Z}),V_k)$ dans un hyperplan de W_k qui ne contient pas $\mathbb{C}p_k^+$, ce qui démontre qu'il existe un isomorphisme entre $S_k\left(1\right)^2$ et $H^1_{\mathrm{par}}(SL(2,\mathbb{Z}),V_k)$ (en effet, par le théorème précédent, r^- est un isomorphisme de $S_k\left(1\right)$ dans W_k^-, et r^+ est un isomorphisme de $M_k\left(1\right)$ dans W_k^+, et en fait de $S_k\left(1\right)$ dans un espace de codimension 1 de W_k^+). Un tel isomorphisme est donné par $(f,f') \mapsto \widetilde{\phi}_{f,f'}$, où, pour $(f,f') \in S_k\left(1\right)^2$, on note $\widetilde{\phi}_{f,f'}$ la classe de cohomologie du 1-cocycle $\phi_{f,f'}$ défini par

$$\phi_{f,f'}(\gamma) = \int_0^{\gamma 0} f(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma 0}^{0} f'(-z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z$$

pour $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$, où la première intégrale se fait le long de la géodésique reliant 0 à $\gamma 0$ dans $\mathscr{H}$, et la deuxième le long de la géodésique reliant $-\gamma 0$ à 0 dans $\mathscr{H}^-$ (on peut d'ailleurs choisir n'importe quel élément de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ à la place de 0 dans la définition de $\phi_{f,f'}$, puisque cela revient à ajouter un 1-cobord, donc cela définit la même classe de cohomologie).

(4) Dans ce chapitre, on a parlé uniquement des périodes pour les formes modulaires sur le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$ et $k \geqslant 2$ un entier. On définit, pour $f \in S_k(\Gamma)$,

$$r_f(X,\Gamma g) = \int_0^\infty (f\underset{k}{|}g)(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z.$$

C'est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times {}_{\Gamma}\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, les fonctions $X \mapsto r_f(X,\Gamma g)$ pour $g \in SL(2,\mathbb{Z})$ sont polynomiales. En fait, de façon plus générale, les espaces $S_k(\Gamma)^-$, $S_k(V\Gamma V)$ et $\overline{S_k}(\Gamma)$ (qui sont respectivement les formes paraboliques sur $\mathscr{H}^-$ pour Γ, les formes paraboliques pour le sous-groupe de congruence $V\Gamma V$, où V désigne la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, et les formes paraboliques antiholomorphes sur $\mathscr{H}$ pour Γ) sont isomorphes (par exemple par les applications $s_1 : S_k^-(\Gamma) \to S_k(V\Gamma V)$ et $s_2 : S_k^-(\Gamma) \to \overline{S_k}(\Gamma)$ définies par $s_1(f^-)(z) = f^-(-z)$ et $s_2(f^-)(z) = f^-(\overline{z})$). On peut donc définir plus généralement une période r_{f,f_1} pour un couple $(f,f_1) \in S_k(\Gamma) \times \overline{S_k}(\Gamma)$ de la façon suivante :

$$r_{f,f_1}(X,\Gamma g) = \int_0^\infty (f\underset{k}{|}g)(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z + \int_0^{i\infty} (f_1\underset{k}{|}\overline{g})(z)(X-\overline{z})^{k-2}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

ce qui plonge $S_k(\Gamma) \times \overline{S_k}(\Gamma)$ dans l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R} \times {}_{\Gamma}\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ polynomiales en la première variable. On définit une action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur cet espace

[28] Soit G un groupe agissant à gauche sur un espace V (c'est-à-dire soit V un espace ayant une structure de $\mathbb{C}[G]$-module), les *1-cocycles* de G à valeurs dans V sont les applications $\phi : G \to V$ vérifiant $\phi(gg') = g \cdot \phi(g') + \phi(g)$. L'ensemble des 1-cocycles de G à valeurs dans V forme un groupe noté $Z^1(G,V)$. Les *1-cobords* de G à valeurs dans V sont les applications $\phi : G \to V$ telles qu'il existe $m \in V$ tel que pour tout $g \in G$, $\phi(g) = g \cdot m - m$. L'ensemble des 1-cobords de G à valeurs dans V forme un sous-groupe de $Z^1(G,V)$, noté $B^1(G,V)$.

par

$$\gamma \cdot P(X, \Gamma g) = (-cX+a)^{k-2} P\left(\frac{dX-b}{-cX+a}, \Gamma g\gamma\right) \quad \text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

On peut montrer que les fonctions r_{f,f_1} satisfont aux équations de Manin, c'est-à-dire appartiennent au sous-espace $W_k(\Gamma)$ des fonctions $\Psi : \mathbb{R} \times {}_{\Gamma}\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ polynomiales en la première variable vérifiant $(I+S)\cdot\Psi = (I+U+U^2)\cdot\Psi = 0$. Shokurov (voir [**Šok80**] page 634) montre que l'application r ainsi définie de $S_k(\Gamma) \times \overline{S_k}(\Gamma)$ dans $W_k(\Gamma)$ est injective, et il calcule explicitement la codimension de l'image de r dans $W_k(\Gamma)$.

On présente désormais quelques résultats sur les périodes de formes modulaires, qui vont permettre de définir une nouvelle structure rationnelle sur les formes modulaires et de démontrer l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. Le premier théorème permet de transporter la structure hermitienne existant sur les espaces de formes modulaires sur l'espace des périodes.

On définit sur $\mathbb{C}_{k-2}[X] \otimes \mathbb{C}_{k-2}[X]$ une forme bilinéaire symétrique par

$$\langle X^n, X^m \rangle = \delta(n+m=k-2)\frac{(-1)^n}{\binom{k-2}{n}}. \tag{51}$$

La forme $\langle\, ,\, \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 87. — *La forme bilinéaire symétrique $\langle\, ,\, \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\langle P(X), (X-\alpha)^{k-2}\rangle = P(\alpha)$;*
(2) *Elle est non dégénérée ;*
(3) *Pour $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$, $P \in \mathbb{C}_{k-2}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}_{k-2}[X]$, $\langle \gamma\cdot P, \gamma\cdot Q\rangle = \langle P, Q\rangle$.*

On montre le résultat suivant :

***Théorème 88* (Haberland)**. — *Soit $k \geqslant 4$ un entier pair, et soit f et g deux éléments de $S_k(1)$. Le produit scalaire de Petersson de f et g est donné par la formule*

$$(f,g) = \frac{1}{3(2i)^{k-1}} \sum_{\substack{0\leqslant m<n\leqslant k-2 \\ m\not\equiv n[2]}} (-1)^m \binom{k-2}{n}\binom{n}{m} r_{k-2-n}(f)\overline{r_m(g)}. \tag{52}$$

De façon équivalente, la formule précédente peut s'écrire en fonction des polynômes de périodes de f et g :

$$(f,g) = \frac{1}{6(2i)^{k-1}} \langle (T-T^{-1})\cdot r_f, \overline{r_g}\rangle. \tag{53}$$

Démonstration. — Haberland a utilisé des arguments cohomologiques pour démontrer originellement ce théorème (voir [**Hab83**]). On donne ici une preuve plus directe, due à Kohnen & Zagier. Par définition du produit scalaire de Petersson, on a

$$-(2i)^{k-1}(f,g) = \iint_{F_1} f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = -\iint_{F_1} d\left[F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}\right]$$

où on pose $F(z) = \int_z^\infty (\overline{z} - \tau)^{k-2} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. On a en effet $\mathrm{d}[\phi(z,\overline{z})\,\mathrm{d}\overline{z}] = \frac{\partial\phi}{\partial z}(z,\overline{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}$, donc ici

$$\mathrm{d}\left[F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}\right] = \overline{g(z)}\frac{\partial F}{\partial z}(z,\overline{z})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = -(z-\overline{z})^{k-2} f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

On applique la formule de Stokes pour obtenir

$$(2i)^{k-1}(f,g) = \int_{\partial F_1} F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

où ∂F_1 est le bord du domaine fondamental F_1. On a $\partial F_1 = A + B - TA$, où A désigne le chemin reliant $i\infty$ à $\rho = e^{2i\pi/3}$ et B l'arc de cercle reliant ρ à $-\overline{\rho} = e^{i\pi/3}$ (voir la figure 5).

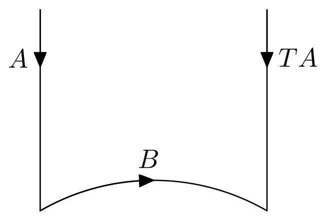

FIGURE 5. Frontière ∂F_1.

Ainsi, on a

$$(2i)^{k-1}(f,g) = \int_{A-TA} F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z} + \int_B F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

Mais on constate que $F(z+1) = F(z)$, puisque f est modulaire donc $(f\underset{k}{|}T) = f$. En effectuant le changement de variables $z \mapsto z+1$ dans la première intégrale, on a $\int_{A-TA} F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z} = 0$, donc

$$(2i)^{k-1}(f,g) = \int_B F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

La matrice S, d'ordre 2 dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, envoie l'arc de cercle B sur lui-même en renversant l'orientation, donc

$$(2i)^{k-1}(f,g) = \frac{1}{2}\int_{B-SB} F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z} = \frac{1}{2}\left(\int_B F(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z} - \int_B F(Sz)\frac{\overline{g(Sz)}\,\mathrm{d}\overline{z}}{\overline{z}^2}\right)$$

en effectuant dans la deuxième intégrale le changement $z \mapsto Sz = -1/z$. Grâce à la S-modularité de g, on trouve

$$(2i)^{k-1}(f,g) = \frac{1}{2}\int_B \left[F(z) - \overline{z}^{k-2} F\left(-\frac{1}{z}\right)\right]\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

Or, on a la relation

$$\overline{z}^{k-2} F\left(-\frac{1}{z}\right) = \int_{-1/z}^{\infty}\left(\overline{z} + \frac{1}{\tau}\right)^{k-2} \tau^k f(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} = -\int_0^z (\overline{z} - u)^{k-2} f(u)\,\mathrm{d}u$$

par S-modularité de f, en faisant le changement de variables $u=-1/\tau$. On en déduit que $F(z)-\overline{z}^{k-2}F(-1/z)=r_f(\overline{z})$. Posons

$$H(X)=\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\binom{k-2}{n}\left(\int_B z^{k-2-n}g(z)\,\mathrm{d}z\right)X^n.$$

Le polynôme H appartient à $\mathbb{C}_{k-2}[X]$, et on a $H(X)=\int_B g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z$. Par définition de l'accouplement $\langle\,,\,\rangle$, et en utilisant la formule (46), on trouve

$$\langle r_f,\overline{H}\rangle=\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\binom{k-2}{n}r_n(f)\int_B \overline{z}^{k-2-n}\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}=\int_B r_f(\overline{z})\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

On en déduit la formule $2(2i)^{k-1}(f,g)=\langle r_f,\overline{H}\rangle$.

La fonction $z\mapsto g(z)(X-z)^{k-2}$ est holomorphe, donc

$$H(X)=\int_\rho^{-\overline{\rho}} g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z,$$

quelque soit le chemin d'intégration dans $\mathscr{H}$ joignant ρ à $-\overline{\rho}$. Pour $z_0\in\mathscr{H}$, posons

$$H_{z_0}(X)=\int_{z_0}^{\infty} g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z.$$

Alors $H=H_\rho-H_{\overline{\rho}}$. On a (par la même démonstration que celle de la proposition 77)

$$(\gamma\cdot H_{z_0})(X)=\int_{\gamma z_0}^{\gamma\infty} g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z \text{ pour tout } \gamma\in SL(2,\mathbb{Z}).$$

On en déduit les formules

$$(I-U)\cdot H_{-\overline{\rho}}](X)=\int_0^{\infty} g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z=r_g(X)\quad\text{et}\quad T^{-1}\cdot\ H_{-\overline{\rho}}=H_{-\rho}$$

d'où

$$H=(T^{-1}-I)\cdot H_{-\overline{\rho}}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}2(2i)^{k-1}(f,g)&=\langle r_f,\overline{(T^{-1}-I)\cdot H_{-\overline{\rho}}}\rangle=\langle r_f,T^{-1}\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle-\langle r_f,\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle\\&=\langle T\cdot r_f,\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle-\langle r_f,\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle=\langle (T-I)\cdot r_f,\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle.\end{aligned}$$

Or on a

$[(I-U^2)(U-U^2)([\infty]-[0])=(I-U^2)([0]-2[1]+[\infty])=3([0]-[1])=3(T-I)([\infty]-[0])$ dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$. D'après la remarque 80, on en déduit l'égalité $(T-I)\cdot r_f=\dfrac{1}{3}(I-U^2)(U-U^2)\cdot r_f$. Ainsi

$$\begin{aligned}2(2i)^{k-1}(f,g)&=\frac{1}{3}\langle (I-U^2)(U-U^2)\cdot r_f,\overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle\\&=\frac{1}{3}\langle (U-U^2)\cdot r_f,\overline{(I-U)\cdot H_{-\overline{\rho}}}\rangle=\frac{1}{3}\langle (U-U^2)\cdot r_f,\overline{r_g}\rangle.\end{aligned}$$

Or on a les égalités $U = ST^{-1}$ et $U^2 = TS$ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$. Comme $(I+S)\cdot r_f = (I+S)\cdot r_g = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 6(2i)^{k-1}(f,g) &= \langle (ST^{-1} - TS)\cdot r_f, \overline{r_g}\rangle = \langle (ST^{-1}+T)\cdot r_f, \overline{r_g}\rangle \\ &= \langle T^{-1}\cdot r_f, S\cdot \overline{r_g}\rangle + \langle T\cdot r_f, \overline{r_g}\rangle \\ &= \langle (T - T^{-1})\cdot r_f, \overline{r_g}\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. La formule (52) se déduit de la formule précédente, puisque d'après la formule (46) on a

$$\begin{aligned} (T - T^{-1})\cdot r_f(X) &= r_f(X-1) - r_f(X+1) \\ &= \sum_{0\leqslant m\leqslant n\leqslant k-2} [(-1)^m - (-1)^n]\binom{k-2}{n}\binom{n}{m} r_{k-2-n}(f)X^m. \qquad \square \end{aligned}$$

On montre ensuite le théorème suivant, dû à Kohnen & Zagier (voir [**KZ84**] page 246[29]), qui généralise le théorème 88 au cas où l'une des deux formes n'est pas parabolique.

Théorème 89. — *Soit $f \in S_k(1)$ et $g \in M_k(1)$. Le produit scalaire de Petersson de f et g est donné par la formule*

$$6(2i)^{k-1}(f,g) = \left\langle (T - T^{-1})\cdot r_f, \overline{r_g} - \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}(I-S)\cdot X^{k-1}\right\rangle + 2\frac{\widehat{g}(0)}{k-1}\langle r_f, (T^{-1}-T)\cdot X^{k-1}\rangle.$$

Remarque 90. — Le polynôme X^{k-1} n'est pas un élément de $\mathbb{C}_{k-2}[X]$, mais les éléments $(T^{-1}-T)\cdot X^{k-1}$ et $r_g(X) - \dfrac{\widehat{g}(0)}{k-1}(I-S)\cdot X^{k-1}$ appartiennent à $\mathbb{C}_{k-2}[X]$ (d'après la formule (49)), la formule précédente est donc bien définie.

Démonstration. — On reprend le schéma de la démonstration du théorème 88 : on a

$$2(2i)^{k-1}(f,g) = \langle r_f, \overline{H}\rangle$$

où $H(X) = \displaystyle\int_\rho^{-\overline{\rho}} g(z)(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z$. On définit, pour $z_0 \in \mathscr{H}$, le polynôme $H_{z_0} \in \mathbb{C}_{k-2}[X]$ par

$$H_{z_0}(X) = \int_{z_0}^{\infty} (g(z) - \widehat{g}(0))(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z + \frac{\widehat{g}(0)}{k-1}\left[(X-z_0)^{k-1} - X^{k-1}\right].$$

[29] On notera que dans cet article le polynôme de période pour une forme non parabolique est défini de manière différente.

On a les relations suivantes :

$$H = H_\rho - H_{-\overline{\rho}} \tag{54}$$

$$(I-U)\cdot H_{-\overline{\rho}} = r_g - \frac{\widehat{g}(0)}{k-1}(I-U)\cdot X^{k-1} \tag{55}$$

$$T^{-1}\cdot H_{-\overline{\rho}} = H_\rho - \frac{\widehat{g}(0)}{k-1}(T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}. \tag{56}$$

On obtient la formule

$$\begin{aligned}2(2i)^{k-1}(f,g) &= \Big\langle r_f, (T^{-1}-I)\cdot(\overline{H_{-\overline{\rho}}} + \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}X^{k-1})\Big\rangle\\ &= \langle (T-I)\cdot r_f, \overline{H_{-\overline{\rho}}}\rangle + \frac{\widehat{g}(0)}{k-1}\langle r_f, (T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}\rangle.\end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème 88, on a, en utilisant l'équation (55),

$$\begin{aligned}\Big\langle (T-I)\cdot r_f, \overline{H_{-\overline{\rho}}}\Big\rangle &= \frac{1}{3}\Big\langle (ST^{-1}+T)\cdot r_f, \overline{(I-U)\cdot H_{-\overline{\rho}}}\Big\rangle\\ &= \frac{1}{3}\Big\langle (ST^{-1}+T)\cdot r_f, \overline{r_g} - \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}(I-U)\cdot X^{k-1}\Big\rangle,\end{aligned}$$

puis, grâce à $S\cdot r_g = -r_g$ et $SU = T^{-1}$ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, on obtient

$$\begin{aligned}6(2i)^{k-1}(f,g) &= \Big\langle T\cdot r_f, \overline{r_g} - \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}(I-U)\cdot X^{k-1}\Big\rangle\\ &\quad - \Big\langle T^{-1}\cdot r_f, \overline{r_g} + \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}(S-T^{-1})\cdot X^{k-1}\Big\rangle + \Big\langle r_f, \frac{\widehat{g}(0)}{k-1}(T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}\Big\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne la formule

$$\begin{aligned}6(2i)^{k-1}(f,g) &= \Big\langle (T-T^{-1})\cdot r_f, \overline{r_g} - \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}(I-S)\cdot X^{k-1}\Big\rangle\\ &\qquad + \frac{\overline{\widehat{g}(0)}}{k-1}\langle (3I+ST+T^{-1})\cdot r_f, (T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}\rangle.\end{aligned}$$

On a dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$ l'égalité $(T^{-1}+ST+3I)([\infty]-[0]) = 2([\infty]-[0])+2([\infty]-[-1]) = 2(I+T^{-1})([\infty]-[0])$, donc d'après la remarque 80 on a $(3I+ST+T^{-1})\cdot r_f = 2(I+T^{-1})\cdot r_f$, on en déduit l'égalité

$$\begin{aligned}\langle (3I+ST+T^{-1})\cdot r_f, (T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}\rangle &= 2\langle r_f, (I+T)(T^{-1}-I)\cdot X^{k-1}\rangle\\ &= 2\langle r_f, (T^{-1}-T)\cdot X^{k-1}\rangle\end{aligned}$$

ce qui montre le théorème. □

On détermine l'image de $S_k\,(1)$ par r^+ : en effet, en appliquant le théorème 89 à $g = G_k$, on calcule

$$6(2i)^{k-1}(f,G_k) = \frac{\zeta(k-1)}{(2i\pi)^{k-1}}(k-2)!r_f^-(1) \tag{57}$$
$$- (k-2)!\sum_{\substack{n=0\\ \text{pair}}}^{k-4}\sum_{\substack{\ell=n+1\\ \text{impair}}}^{k-3}\binom{\ell}{n}\frac{B_{k-1-\ell}}{(k-1-\ell)!}\frac{B_{\ell+1}}{(\ell+1)!}r_n(f) - 2\frac{B_k}{k(k-1)}\sum_{\substack{n=0\\ \text{pair}}}^{k-2}\binom{k-1}{n}r_n(f).$$

De plus, on a $r_f^-(1) = 0$: en effet, le polynôme r_f^- appartient à W_k^-, donc est annulé par les relations de Manin, et en particulier on a $(I - T^{-1} - T'^{-1})\cdot r_f^- = 0$ (car $(I - T^{-1} - T'^{-1})([\infty] - [0]) = 0$ dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$, voir la remarque 80). Cette égalité au point $X = 0$ montre que $r_f^-(1) = 0$.

Puisque f est parabolique, on a $(f, G_k) = 0$, on déduit de la formule (57) la relation

$$f \in S_k\,(1) \Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\ \text{pair}}}^{k-2} d_k(n)r_n(f) = 0 \tag{58}$$

avec

$$d_k(n) = 2\frac{B_k}{k!}\binom{k-1}{n} + \sum_{\substack{\ell=n+1\\ \text{impair}}}^{k-3}\binom{\ell}{n}\frac{B_{k-1-\ell}}{(k-1-\ell)!}\frac{B_{\ell+1}}{(\ell+1)!}.$$

pour $0 \leqslant n \leqslant k-2$ pair[30].

Corollaire 91. — *Le polynôme p_k^+ n'appartient pas à l'image de $S_k\,(1)$ par r^+.*

Corollaire 92. — *Les morphismes $r^- : S_k\,(1) \to W_k^-$ et $r^+ : M_k\,(1) \to W_k^+$ sont injectifs.*

Démonstration. — Soit $f \in S_k\,(1)$ un élément de $\ker r^+ \cup \ker r^-$. D'après la formule (52), on a $(f, f) = 0$ (puisque par hypothèse les coefficients $r_m(f)$ sont nuls soit pour tout m pair, soit pour tout m impair). Cela entraîne $f = 0$. On en déduit que le morphisme r^- est injectif et que r^+ restreint à $S_k\,(1)$ est injectif. Comme on a $M_k\,(1) = S_k\,(1) \oplus \mathbb{C}G_k$, et $r^+(G_k) = p_k^+ \notin r^+(S_k\,(1))$ d'après le corollaire 91, on en conclut que le morphisme $r^+ : M_k\,(1) \to W_k^+$ est injectif. □

Pour terminer la démonstration du théorème 85, on va montrer que ces morphismes sont en fait bijectifs par un argument de dimension.

Proposition 93. — *On a l'égalité* $\dim W_k = \dim M_k\,(1) + \dim S_k\,(1)$ *pour tout entier pair* $k \geqslant 4$.

(30) Dans [**KZ84**], Kohnen & Zagier obtiennent une expression différente de cet hyperplan en utilisant certaines équations vérifiées par les nombres de Bernoulli.

Démonstration. — On note dans cette démonstration $V_k = \mathbb{C}_{k-2}[X]$. Posons V_k^S et V_k^U les sous-espaces de V_k invariants par l'action de S et U. L'action de S définit un endomorphisme involutif de V_k donc diagonalisable sur V_k. On a ainsi $V_k = V_k^S \oplus \ker(I+S)$. De même, en notant ω une racine primitive cubique de l'unité, le polynôme minimal de l'endomorphisme de V_k induit par l'action de U est $(X-1)(X-\omega)(X-\omega^2)$. Ainsi $V_k = V_k^U \oplus \ker(U-\omega I) \oplus \ker(U-\omega^2 I)$. D'après le lemme des noyaux, $\ker(I+U+U^2) = \ker(U-\omega I) \oplus \ker(U-\omega^2 I)$. La forme bilinéaire symétrique sur V_k définie en (51) est non dégénérée. Pour tout sous-espace vectoriel F de V_k, on a donc $\dim F + \dim F^\perp = \dim V_k$. Comme $\langle\, ,\, \rangle$ est invariante par $SL(2,\mathbb{Z})$, on a $V_k^S \perp \ker(I+S)$ (puisque si $P \in V_k^S$ et $Q \in \ker(I+S)$, on a $\langle P, Q\rangle = \langle S\cdot P, S\cdot Q\rangle = -\langle P, Q\rangle$). En comparant les dimensions on en déduit que $\ker(I+S) = (V_k^S)^\perp$. Pour la même raison, on a $V_k^U \perp \ker(U-\omega I)$ et $V_k^U \perp \ker(U-\omega^2 I)$: si $P \in V_k^U$ et $Q \in \ker(U-\omega I)$ (resp. $\ker(U-\omega^2 I)$), alors $\langle P, Q\rangle = \langle U\cdot P, U\cdot Q\rangle = \omega\langle P, Q\rangle$ (resp. $= \omega^2\langle P, Q\rangle$). Ainsi

$$\ker(I+U+U^2) = \ker(U-\omega I) \oplus \ker(U-\omega^2 I) = (V_k^U)^\perp.$$

On en déduit que

$$W_k = (V_k^S)^\perp \cap (V_k^U)^\perp = (V_k^S + V_k^U)^\perp = (V_k^S \oplus V_k^U)^\perp. \tag{59}$$

La dernière égalité résulte de $T = U^2 S$: si P est un polynôme invariant par S et par U, il l'est par T et est périodique donc constant. Or si $k \neq 2$ les polynômes constants non nuls ne peuvent pas être invariants par S à cause de la propriété $P(X) = X^{k-2}P(-1/X)$. On déduit de (59) que $\dim W_k = \dim V_k - \dim V_k^S - \dim V_k^U$.

On calcule ensuite la dimension de V_k^S. Posons $S_n(X) = (X-i)^n(X+i)^{k-2-n}$. La famille de polynômes $\{S_n\}_{n=0,\dots,k-2}$ est une base de V_k. Chaque S_n est vecteur propre de l'endomorphisme induit par l'action de S de valeur propre $(-1)^n i^{k-2}$. La dimension de V_k^S est donc égale à $\#\{n \in \{0,\dots,k-2\} \colon (-1)^n i^{k-2} = 1\}$. On trouve

$$\dim V_k^S = \#\{n \in \{0,\dots,k-2\} \colon 2n \equiv k-2 [4]\} = 1 + 2\lfloor \frac{k-2}{4} \rfloor.$$

Pour calculer $\dim V_k^U$, on considère les polynômes $U_n(X) = (X+\omega)^n(X+\omega^2)^{k-2-n}$. La famille de polynômes $\{U_n\}_{n=0,\dots,k-2}$ est une base de V_k. Chaque U_n est vecteur propre de l'endomorphisme induit par l'action de U de valeur propre ω^{k-2+n}. On a donc $\dim V_k^U = \#\{n \in \{0,\dots,k-2\} \colon \omega^{k-2+n} = 1\}$. On trouve

$$\dim V_k^U = \#\{n \in \{0,\dots,k-2\} \colon 2n \equiv k-2 [6]\} = 1 + 2\lfloor \frac{k-2}{6} \rfloor.$$

Ainsi, on a, pour tout $k > 2$ pair, la formule

$$\begin{aligned}
\dim W_k &= k - 1 - \dim V_k^S - \dim V_k^U \\
&= k - 1 - \left(2 + 2\lfloor \frac{k-2}{4} \rfloor + 2\lfloor \frac{k-2}{6} \rfloor\right) \\
&= \begin{cases} 2\lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2[12] \\ 2\lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & \text{si } k \equiv 2[12] \end{cases} \\
&= \dim M_k(1) + \dim S_k(1)
\end{aligned}$$

d'après les formules données dans le corollaire 26 (la troisième égalité est vraie pour tout k pair $\in \{4, \ldots, 14\}$, et la différence entre les termes de gauche et de droite est périodique modulo 12). □

On termine maintenant la démonstration du théorème 85 à l'aide du corollaire 92 et de la proposition 93. Les morphismes $r^+ : M_k(1) \to W_k^+$ et $r^- : S_k(1) \to W_k^-$ sont injectifs d'après le corollaire 92. En particulier, $\dim W_k^+ \geqslant \dim M_k(1)$ et $\dim W_k^- \geqslant \dim S_k(1)$. De plus, d'après la proposition 93, on a

$$\dim W_k = \dim W_k^+ + \dim W_k^- = \dim M_k(1) + \dim S_k(1).$$

Cela prouve $\dim W_k^+ = \dim M_k(1)$ et $\dim W_k^- = \dim S_k(1)$ puis la bijectivité de r^+ et r^-. De façon équivalente, l'application $r : M_k(1)^{\pm} \to W_k$ définie dans la remarque 86.3 est un isomorphisme.

Par un argument de dimension conséquence de la proposition 93, l'implication (58) est en fait une équivalence : si $f \in M_k(1)$,

$$f \in S_k(1) \iff \sum_{\substack{n=0 \\ \text{pair}}}^{k-2} d_k(n) r_n(f) = 0.$$

13. Structure rationnelle de W_k

Soit $k \geqslant 4$ un entier pair. On suppose désormais que f est une forme de Hecke normalisée (voir paragraphe 7.3). Le résultat principal sur les structures rationnelles des périodes est le théorème suivant, dû à Eichler et Shimura.

Théorème 94. — *Soit f une forme de Hecke normalisée de $M_k(1)$. Il existe deux nombres complexes non nuls $\omega_f^+ \in i\mathbb{R}$ et $\omega_f^- \in \mathbb{R}$ tels que les polynômes r_f^+/ω_f^+ et r_f^-/ω_f^- sont à coefficients dans $\mathbb{Q}(f)$. De plus, on peut choisir ω_f^+ et ω_f^- de telle sorte que $\omega_f^+\omega_f^- = i(f,f)$.*

Ce théorème, comme on le verra ci-après, définit une structure rationnelle sur les formes modulaires différente de celle donnée par les opérateurs de Hecke.

On va indiquer, dans ce qui suit, quelques résultats qui permettent d'établir le théorème d'Eichler et Shimura.

On utilise d'abord une proposition de Rankin [**Ran52**] :

***Proposition 95* (Rankin).** — *On suppose que $k = h + l$, avec $h, l \geqslant 4$ des entiers pairs tels que $h > l$. Soit f une forme primitive de $S_k(1)$ et $g \in M_l(1)$. On a*

$$(f, gG_h) = -\frac{B_h (k-2)!}{2h(4\pi)^{k-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)}}{m^{k-1}}.$$

Lorsque $h > l$, on applique la proposition 95 à $g = G_l$ pour obtenir

$$(f, G_h G_l) = -\frac{B_h (k-2)!}{2h(4\pi)^{k-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(m)\sigma_{l-1}(m)}{m^{k-1}}. \tag{60}$$

On applique le lemme suivant

***Lemme 96*.** — *Soit f une forme primitive de $S_k(1)$ et soit $s \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}\, u > s + (k-1)/2$ on a*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(m)\sigma_s(m)}{m^u} = \frac{L(f,u)L(f,u-s)}{\zeta(2u-k+1-s)}.$$

Démonstration. — En utilisant (32) et la multiplicativité des coefficients de Fourier de f, on obtient, pour tout $j \geqslant 1$ l'égalité

$$\widehat{f}(p^j) = \frac{\alpha_f(p)^{j+1} - \overline{\alpha_f(p)}^{j+1}}{\alpha_f(p) - \overline{\alpha_f(p)}}$$

ce qui implique le résultat par égalité des développements eulériens. □

L'expression des périodes grâce aux fonctions L implique, lorsque $h \neq l$, la

***Proposition 97*.** — *On suppose que $k = h + l$, avec $h, l \geqslant 4$ des entiers pairs. Soit f une forme primitive de $S_k(1)$. On a*

$$(f, G_h G_l) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} r_0(f) r_{l-1}(f).$$

***Remarque 98*.** — Zagier montre dans [**Zag77**, Proposition 6] que cette égalité est valable également pour $h = l = \dfrac{k}{2}$.

On peut généraliser cette identité en utilisant les crochets de Rankin-Cohen (puisque $G_h G_l = [G_h, G_l]_0$). On rappelle (voir § 6) que pour $f \in M_h(1)$, $g \in M_l(1)$ et $n \geqslant 0$, le n^{e} crochet de Rankin-Cohen de f et g est défini par

$$[f,g]_n = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{h+n-1}{s} \binom{l+n-1}{r} f^{(r)} g^{(s)}$$

qui est une forme modulaire appartenant à $M_{h+l+2n}(1)$. Rankin [**Ran52**] généralise le résultat obtenu dans la proposition 95 :

***Proposition 99* (Rankin).** — *On suppose que $k = h + l + 2n$, avec $h, l \geqslant 4$ des entiers pairs et $n \geqslant 0$. Soit $f \in S_k(1)$ et $g \in M_l(1)$. On a*

$$(f, [g, G_h]_n) = -\frac{B_h(k-2)!}{2h(4\pi)^{k-1}}\binom{h+n-1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)}}{m^{k-1-n}}.$$

De cela, on déduit

***Proposition 100*.** — *On suppose que $k = h + l + 2n$, avec $h, l \geqslant 4$ des entiers pairs et $n \geqslant 0$. Soit f une forme primitive de $S_k(1)$. On a*

$$(f, [G_h, G_l]_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1}\binom{k-2}{n} r_n(f) r_{l+n-1}(f).$$

Enfin, on généralise la définition du crochet de Rankin-Cohen en prenant en compte la série d'Eisenstein non modulaire G_2 (voir § 6). On pose, pour $h, l \geqslant 2$ des entiers pairs et $n \geqslant 0$,

$$[G_h, G_l]_n^* = [G_h, G_l]_n + \frac{1}{2(2i\pi)^{n+1}}\left(\frac{(-1)^n\delta(l=2)}{h+n}G_h^{(n+1)} + \frac{\delta(h=2)}{l+n}G_l^{(n+1)}\right).$$

La fonction $[G_h, G_l]_n^*$ est une forme modulaire appartenant à $M_{h+l+2n}(1)$.

On obtient finalement [**KZ84**] :

***Proposition 101*.** — *Soit $f \in S_k(1)$ une forme primitive. On suppose que $h+l+2n = k$, avec $h, l \geqslant 2$ des entiers pairs et $n \geqslant 0$. Alors on a*

$$(f, [G_h, G_l]_n^*) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1}\binom{k-2}{n} r_n(f) r_{l+n-1}(f).$$

***Corollaire 102*.** — *Soit $f \in S_k(1)$ une forme primitive, et soit $0 \leqslant n < m \leqslant \frac{k}{2} - 1$ deux entiers tels que $m \not\equiv n[2]$. Alors on a*

$$r_n(f) r_m(f) = \frac{(-2i)^{k-1}}{\binom{k-2}{n}}\left(f, [G_{k-1-m-n}, G_{m-n+1}]_n^*\right).$$

***Remarque 103*.** — Pour prendre en compte la série d'Eisenstein G_2 non modulaire de poids 2, on a besoin d'introduire les crochets de Rankin-Cohen $[\ ,\ ]_n^*$. Ainsi, on aura la formule du corollaire précédent pour tous $0 \leqslant n < m \leqslant \frac{k}{2} - 1$, avec $n \not\equiv m[2]$.

***Corollaire 104*.** — *Soit f une forme de Hecke normalisée de $M_k(1)$, et $m \not\equiv n[2]$, $0 \leqslant m, n \leqslant k - 2$. On a*

$$\frac{r_m(f) r_n(f)}{i(f, f)} \in \mathbb{Q}(f).$$

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que f est parabolique. On a

$$r_j(f) = \pm r_{k-2-j}(f)$$

puisque le polynôme de période r_f vérifie $(I+S)\cdot r_f=0$; on peut donc supposer que $0\leqslant n<m\leqslant \frac{k}{2}-1$. D'après le corollaire 102, on a donc

$$\frac{r_n(f)r_m(f)}{i}=\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}2^{k-1}}{\binom{k-2}{n}}(f,[G_{k-1-m-n},G_{m-n+1}]_n^*).$$

L'ensemble des formes de Hecke normalisées $\{f_0=G_k,f_1,f_2,\dots,f_w\}$ de $M_k(1)$ forme une base orthogonale de $M_k(1)$. Ainsi, si $g=\sum_{i=0}^w c_if_i$, on a $(g,f_i)=c_i(f_i,f_i)$.

Or les crochets de Rankin-Cohen sont définis sur $\mathbb{Q}$: pour tout corps de nombres K, $[\ ,\ ]_n^*$ envoie $M_h^K(1)\otimes M_l^K(1)$ sur $M_{h+l+2n}^K(1)$ (où $M_m^K(1)$ désigne l'ensemble des formes modulaires de poids m sur $SL(2,\mathbb{Z})$ dont tous les coefficients de Fourier appartiennent à K). Les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein sont rationnels, on en déduit que

$$[G_{k-1-m-n},G_{m-n+1}]_n^*\in M_k^{\mathbb{Q}}(1).$$

Notons $\sum_{i=0}^w c_if_i$ la décomposition de $[G_{k-1-m-n},G_{m-n-1}]_n^*$ dans la base $\{f_0,\dots,f_w\}$. Pour tout $i\in\{0,\dots,w\}$ on a $c_i\in\mathbb{Q}(f_i)$: en effet, soit $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(f_i))$. On a d'une part

$$\sigma([G_{k-1-m-n},G_{m-n-1}]_n^*)=[G_{k-1-m-n},G_{m-n-1}]_n^*$$

et d'autre part,

$$\sigma([G_{k-1-m-n},G_{m-n-1}]_n^*)=\sigma(c_i)f_i+\sum_{j\neq i}\sigma(c_j)f_j^\sigma$$

puisque $f_i^\sigma=f_i$. D'après la proposition 72, la base $\{f_0,\dots,f_w\}$ est globalement invariante par σ (car $f_0=G_k$ est à coefficients rationnels), donc $\{f_j\}_{j\neq i}=\{f_j^\sigma\}_{j\neq i}$. Par unicité de la décomposition dans cette base de $[G_{k-1-m-n},G_{m-n-1}]_n^*$, on a $\sigma(c_i)=c_i$ pour tout $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(f_i))$, donc $c_i\in\mathbb{Q}(f_i)$. Cela montre ainsi que $(f,[G_{k-1-m-n},G_{m-n+1}]_n^*)=c(f,f)$ avec $c\in\mathbb{Q}(f)$ pour toute forme de Hecke normalisée $f\in M_k(1)$, ce qui montre le corollaire pour les formes paraboliques. Lorsque f n'est pas parabolique, c'est une série d'Eisenstein G_k et la preuve dans ce cas résulte des formules données ci-après au début du paragraphe 14. □

On termine la preuve du théorème 94. Grâce au théorème 85, il existe n pair (resp. impair) tel que $r_n(f)\neq 0$. D'autre part, $r_n(f)\in i^{n+1}\mathbb{R}$: si f est primitive cela résulte de

$$r_n(f)=i^{n+1}\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{-2\pi nt}t^n\,\mathrm{d}t$$

(on rappelle, voir proposition 73, que si f est primitive $\widehat{f}(n)\in\mathbb{R}$ pour tout $n\geqslant 1$) et si f est une série d'Eisenstein cela résulte de la proposition 82. Le corollaire 104 implique donc l'existence de $\omega_f^+\in i\mathbb{R}$ et $\omega_f^-\in\mathbb{R}$ tels que $r_f^\pm/\omega_f^\pm$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}(f)$. Pour tous m et n de parités différentes, on a $r_m(f)r_n(f)\in\omega_f^+\omega_f^-\mathbb{Q}(f)$ et le corollaire 104 implique $\omega_f^+\omega_f^-\in i(f,f)\mathbb{Q}(f)$. Quitte à diviser ω_f^+ par un élément de $\mathbb{Q}(f)$, on obtient le théorème 94.

14. Quelques exemples

L'objet de cette partie est de montrer que la théorie introduite précédemment est explicite. Autrement dit, on peut calculer, avec la précision voulue, les valeurs de fonctions Λ aux entiers et les nombres $\omega^{\pm}$.

On a déjà vu que le polynôme de période de la série d'Eisenstein G_k de poids k est défini par

$$r_{G_k}(X) = -\frac{(k-2)!}{2}\left[\frac{\zeta(k-1)}{(2i\pi)^{k-1}}(X^{k-2}-1) + \sum_{\substack{-1\leqslant n\leqslant k-1\\ n \text{ impair}}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\frac{B_{k-n-1}}{(k-n-1)!}X^n\right].$$

On voit donc qu'en posant par exemple $\omega^-_{G_k} = -\frac{(k-2)!}{2}$ et $\omega^+_{G_k} = \frac{\zeta(k-1)}{(2i\pi)^{k-1}}\omega^-_{G_k}$, on a bien $r^+_{G_k}/\omega^+_{G_k} \in \mathbb{Q}[X]$ et $r^-_{G_k}/\omega^-_{G_k} \in \frac{1}{X}\mathbb{Q}[X]$.

De plus, Rankin a montré qu'on peut définir le produit scalaire de deux formes modulaires non paraboliques de la façon suivante : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)q^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)q^n$ sont des éléments de $M_k(1)$, on pose

$$(f,g) = \frac{\pi(k-1)!}{3(4\pi)^k}\operatorname{Res}_{s=k}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}}{n^s}\right].$$

On en déduit la formule (voir [**Zag91**]) :

$$(G_k, G_k) = \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}}\frac{B_k}{2k}\zeta(k-1).$$

On a $\omega^+_{G_k}\omega^-_{G_k}/i(G_k,G_k) = (-1)^k k! 2^{k-2}/(k-1)B_k \in \mathbb{Q}(G_k) = \mathbb{Q}$ donc quitte à multiplier les constantes $\omega^+_{G_k}$ et $\omega^-_{G_k}$ par un rationnel on peut avoir $\omega^+_{G_k}\omega^-_{G_k} = i(G_k,G_k)$.

Considérons la forme parabolique Δ de poids 12 sur $SL(2,\mathbb{Z})$. On sait que $\mathbb{Q}(\Delta) = \mathbb{Q}$, et on peut calculer son polynôme de période. En traduisant l'appartenance de r_Δ à $\ker(I+S)\cap\ker(I+U+U^2)$, on obtient les relations

$$\Lambda(\Delta,2) = \Lambda(\Delta,10) \tag{61}$$

$$48\Lambda(\Delta,4) = 48\Lambda(\Delta,8) = 25\Lambda(\Delta,10) \tag{62}$$

$$12\Lambda(\Delta,6) = 5\Lambda(\Delta,10)$$

$$\Lambda(\Delta,1) = \Lambda(\Delta,11) \tag{63}$$

$$\Lambda(\Delta,3) = \Lambda(\Delta,9) \tag{64}$$

$$14\Lambda(\Delta,5) = 14\Lambda(\Delta,7) = 9\Lambda(\Delta,9). \tag{65}$$

Elles conduisent à

$$r^-_\Delta(X) = \frac{5}{2}\Lambda(\Delta,10)\left[4(X^9+X) - 25(X^7+X^3) + 42X^5\right].$$

Le corollaire 102 et la relation (45) fournissent

$$\Lambda(\Delta,1)\Lambda(\Delta,4) = 2^{11}(\Delta, G_8G_4).$$

Or, $G_8G_4 \in M_{12}(1) = \mathbb{C}G_{12} + \mathbb{C}\Delta$, on a alors $G_8G_4 = \alpha G_{12} + \beta\Delta$ puis, par orthogonalité des séries d'Eisenstein avec les formes paraboliques, $(\Delta, G_8G_4) = \beta(\Delta, \Delta)$. Après considération des deux premiers coefficients de Fourier de G_8G_4 et Δ, on trouve $\beta = \dfrac{15}{2764}$ puis

$$\Lambda(\Delta,1)\Lambda(\Delta,4) = \frac{7680}{691}(\Delta,\Delta). \tag{66}$$

Le corollaire fournit aussi

$$\Lambda(\Delta,3)\Lambda(\Delta,4) = -\frac{2048}{45}\left(\Delta, [G_6, G_2]_2^*\right).$$

On a $[G_6, G_2]_2^* = -\dfrac{5}{48}\Delta$ de sorte que

$$\Lambda(\Delta,3)\Lambda(\Delta,4) = \frac{128}{27}(\Delta,\Delta). \tag{67}$$

Compte tenu de (63) et (64), on déduit de (66) et (67) la nouvelle relation

$$1620\Lambda(\Delta,9) = 691\Lambda(\Delta,11). \tag{68}$$

Les équations (63) à (65) et (68) conduisent à

$$r_\Delta^+(X) = \frac{691}{36} i\Lambda(\Delta,11)\left[\frac{36}{691}(X^{10}-1) - X^2(X^2-1)^3\right].$$

On déduit du théorème d'Eichler-Shimura l'existence de deux nombres rationnels non nuls q^- et q^+ et de $\omega_\Delta^- \in \mathbb{R}^*$ et $\omega_\Delta^+ \in i\mathbb{R}^*$ tels que

$$\begin{aligned} r_\Delta^-(X) &= q^-\omega_\Delta^-\left[4(X^9+X) - 25(X^7+X^3) + 42X^5\right] \\ r_\Delta^+(X) &= q^+\omega_\Delta^+\left[\frac{36}{691}(X^{10}-1) - X^2(X^2-1)^3\right] \end{aligned}$$

avec

$$q^-\omega_\Delta^- = \frac{5}{2}\Lambda(\Delta,10) \tag{69}$$

$$q^+\omega_\Delta^+ = \frac{691}{36} i\Lambda(\Delta,11). \tag{70}$$

On exige de plus la relation

$$\omega_\Delta^-\omega_\Delta^+ = i(\Delta,\Delta)$$

qui équivaut à

$$q^-q^+ = \frac{3455}{72}\,\frac{\Lambda(\Delta,10)\Lambda(\Delta,11)}{(\Delta,\Delta)}. \tag{71}$$

Compte tenu des équations (61), (63) et (66), on calcule

$$\Lambda(\Delta,10)\Lambda(\Delta,11) = \frac{\Lambda(\Delta,2)}{\Lambda(\Delta,4)}\Lambda(\Delta,1)\Lambda(\Delta,4) = \frac{73728}{3455}(\Delta,\Delta).$$

En reportant cette dernière équation dans (71), on obtient

$$q^-q^+ = 1024.$$

Le report dans (69) et (70) donne

$$\omega_\Delta^- = \frac{5}{2q_-}\Lambda\,(\Delta, 10)$$
$$\omega_\Delta^+ = \frac{691q_-}{36864}i\Lambda(\Delta, 11)$$

le choix de q^- rationnel non nul étant libre. On choisit $q^- = 9$ (ce choix correspond à l'entier compris entre 0 et 50 qui minimise $|\omega_\Delta^- - \omega_\Delta^+|$). Le calcul numérique de $\Lambda(\Delta, 10)$ et $\Lambda(\Delta, 11)$ conduit à

$$\omega_\Delta^- \simeq 0,00102991957$$
$$\omega_\Delta^+ \simeq 0,00100528437i.$$

De la même façon, en notant Δ_{16} (resp. Δ_{20}) l'unique forme parabolique de $S_{16}\,(1)$ (resp. $S_{20}\,(1)$) de premier coefficient de Fourier égal à 1, on a

$$\begin{aligned} r_{\Delta_{16}}^-(X) &= \frac{7}{18}\Lambda\,(\Delta_{16}, 14)\left[36(X^{13}+X) - 245(X^{11}+X^3) + 539(X^9+X^5) - 660X^7\right] \\ &= 11\omega_{\Delta_{16}}^-\left[36(X^{13}+X) - 245(X^{11}+X^3) + 539(X^9+X^5) - 660X^7\right] \\ r_{\Delta_{16}}^+(X) &= \frac{3617}{1440}i\Lambda(\Delta_{16}, 15)\left[\frac{1440}{3617}(X^{14}-1) - X^2(X-1)^3(X+1)^3(2X^4-X^2+2)\right] \\ &= \frac{53248}{165}\omega_{\Delta_{16}}^+\left[\frac{1440}{3617}(X^{14}-1) - X^2(X-1)^3(X+1)^3(2X^4-X^2+2)\right] \end{aligned}$$

avec

$$\omega_{\Delta_{16}}^- \simeq 0.001491441716788956$$
$$\omega_{\Delta_{16}}^+ \simeq 0.001454338659817413i$$

puis

$$\begin{aligned} r_{\Delta_{20}}^-(X) = 89\omega_{\Delta_{20}}^-\big[&108(X^{17}+X) - 715(X^{15}+X^3) + 1452(X^{13}+X^5) - 1560(X^{11}+X^7) \\ &+ 1430X^9\big] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_{\Delta_{20}}^+(X) &= \frac{174611}{2354940} \\ \times\omega_{\Delta_{20}}^+ &\left[\frac{26460}{174611}(X^{18}-1) - X^2(X^2-1)^3(X^2-X+1)(X^2+X+1)(3X^4-4X^2+3)\right] \end{aligned}$$

avec

$$\omega_{\Delta_{20}}^- \simeq 0.002864830476981514 49$$
$$\omega_{\Delta_{20}}^+ \simeq 0.002885176487080857 42i.$$

15. Les structures rationnelles sur $M_k(1)$

L'étude précédente permet de définir deux structures rationnelles différentes sur l'espace des formes modulaires de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$:

– La structure rationnelle canonique est donnée par $S_k^\infty(\mathbb{Q}) = S_k(1) \cap \mathbb{Q}[[q]]$, et plus généralement si K est un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$, par $S_k^\infty(K) = S_k(1) \cap K[[q]]$: ce sont les formes paraboliques dont tous les coefficients de Fourier appartiennent à K. D'après les propriétés sur les corps de rationalité des formes primitives, on sait qu'on a $S_k^\infty(K) \otimes_K \mathbb{C} = S_k(1)$. On définit de la même façon $M_k^\infty(K) = M_k(1) \cap K[[q]] = S_k^\infty(K) \oplus KG_k$ (pour tout $k \geqslant 4$).

– Par dualité *via* le produit scalaire de Petersson, on peut définir l'espace

$$S_k^0(K) = \{f \in S_k(1) : (f,g) \in K \text{ pour tout } g \in S_k^\infty(K)\}.$$

On peut définir deux nouvelles structures rationnelles sur les formes modulaires, à savoir, si K est un corps de nombres :

$$S_k^\pm(K) = \{f \in S_k(1) : r_n(f) \in K \,\text{pour tout}\, n \text{ tel que}\, (-1)^n = \pm 1\}.$$

De même on définit $M_k^\pm(K)$.

Les espaces W_k^+ et W_k^- étant définis par des équations rationnelles, l'isomorphisme donné au théorème 85 montre qu'on a l'égalité $S_k(1) = S_k^\pm(K) \otimes_K \mathbb{C}$ (et de même $M_k(1) = M_k^\pm(K) \otimes_K \mathbb{C}$).

Ainsi, par exemple, on a $S_{12}^\infty(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\Delta$, $S_{12}^\pm(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\Delta/\omega_\Delta^\pm$. On voit également que $G_k \in M_k^\infty(\mathbb{Q})$, $G_k \in M_k^-(\mathbb{Q})$ et $\frac{(2i\pi)^{k-1}}{\zeta(k-1)} G_k \in M_k^+(\mathbb{Q})$.

On donne maintenant quelques résultats sur les espaces $S_k^+(\mathbb{Q})$ et $S_k^-(\mathbb{Q})$. Soit f une forme primitive de $S_k(1)$, on note orbite(f) son orbite sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (voir page 46). Posons $d = [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}]$, I_f l'ensemble des d plongements distincts de $\mathbb{Q}(f)$ dans $\mathbb{C}$ égaux à l'identité sur $\mathbb{Q}$. On a orbite$(f) = \{f^\sigma\}_{\sigma \in I_f}$.

Lemme 105. — *Pour tout $\sigma \in I_f$, les constantes $\omega_{f^\sigma}^\pm$ du théorème 94 peuvent être choisies de manière à avoir l'égalité*

$$\frac{r_n(f^\sigma)}{\omega_{f^\sigma}^{(-1)^n}} = \Big(\frac{r_n(f)}{\omega_f^{(-1)^n}}\Big)^\sigma$$

pour tout entier $0 \leqslant n \leqslant k-2$.

Démonstration. — Soit $0 \leqslant n < m \leqslant k-2$ des entiers tels que $n \not\equiv m[2]$, et soit

$$G = [G_{k-1-m-n}, G_{m-n+1}]_n^*.$$

Notons $G = \sum_i c_i f_i$ sa décomposition dans la base orthogonale composée des formes de Hecke normalisées. On a ainsi

$$G = \sum_{\tau \in I_f} c_{f^\tau} f^\tau + \sum_{f_i \notin \text{orbite}(f)} c_i f_i,$$

la seconde somme contenant l'éventuelle série d'Eisenstein. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. La forme modulaire G appartient à $M_k^\infty(\mathbb{Q})$, ce qui prouve que $G^\sigma = G$. Or orbite(f) est invariante par l'action de σ, donc on a l'égalité

$$G = \sum_{\tau \in I_f} (c_{f^\tau})^\sigma f^{\tau\sigma} + \Bigg(\sum_{f_i \notin \mathrm{orbite}(f)} c_i f_i \Bigg)^\sigma . \tag{72}$$

D'autre part, la multiplication par $\sigma_{|\mathbb{Q}(f)}$ induit une permutation de I_f donc on a

$$G = \sum_{\tau \in I_f} c_{f^{\tau\sigma}} f^{\tau\sigma} + \sum_{f_i \notin \mathrm{orbite}(f)} c_i f_i. \tag{73}$$

La décomposition étant unique, on déduit de (72) et (73) l'égalité (en prenant $\tau = I$ par exemple) $c_{f^\sigma} = (c_f)^\sigma$. Comme vu dans la démonstration du corollaire 104, on a donc

$$\frac{r_n(f^\sigma) r_m(f^\sigma)}{i(f^\sigma, f^\sigma)} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2^{k-1}}{\binom{k-2}{n}} c_{f^\sigma} = \left(\frac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2^{k-1}}{\binom{k-2}{n}} c_f \right)^\sigma = \left(\frac{r_n(f) r_m(f)}{i(f,f)} \right)^\sigma .$$

Cela prouve l'égalité $\dfrac{r_n(f^\sigma) r_m(f^\sigma)}{\omega^+_{f^\sigma}\omega^-_{f^\sigma}} = \left(\dfrac{r_n(f) r_m(f)}{\omega_f^+ \omega_f^-} \right)^\sigma$. On peut alors choisir les constantes $\omega^\pm_{f^\sigma}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme. Par exemple si $r_{2l}(f) \neq 0$, on pose

$$\omega_f^+ = r_{2l}(f), \quad \omega_f^- = \frac{i(f,f)}{\omega_f^+},$$

et pour tout $\sigma \in I_f$,

$$\omega^+_{f^\sigma} = r_{2l}(f^\sigma), \quad \omega^-_{f^\sigma} = \frac{i(f^\sigma, f^\sigma)}{\omega^+_{f^\sigma}}.$$

Le résultat s'étend à tous les entiers $0 \leqslant n, m \leqslant k-2$ grâce aux équations fonctionnelles vérifiées par r_f. □

On déduit du lemme 105 le

Corollaire 106. — *On suppose avoir choisi les constantes $\omega_f^\pm$, pour f forme primitive de $S_k(1)$, de façon à ce qu'elles satisfassent les égalités du lemme 105. Alors on a l'équivalence*

$$g \in S_k^\pm(\mathbb{Q}) \Longleftrightarrow g = \sum_{[f]} \sum_{\sigma \in I_f} \frac{(\alpha_f)^\sigma}{\omega^\pm_{f^\sigma}} f^\sigma \tag{74}$$

où $[f]$ décrit l'ensemble des orbites de la base des formes primitives sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *et $\alpha_f \in \mathbb{Q}(f)$.*

Démonstration. — Le sens $\Leftarrow$ est une conséquence du lemme 105 : soit $[f]$ une orbite, et

$$g^\pm_{[f]} = \sum_{\sigma \in I_f} \frac{(\alpha_f)^\sigma}{\omega^\pm_{f^\sigma}} f^\sigma,$$

on a, pour tout entier $0 \leqslant n \leqslant k-2$ vérifiant $(-1)^n = \pm 1$, l'égalité

$$\begin{aligned} r_n(g^{\pm}_{[f]}) &= \sum_{\sigma\in I_f} (\alpha_f)^{\sigma}\, \frac{r_n(f^{\sigma})}{\omega^{\pm}_{f^{\sigma}}} \\ &= \sum_{\sigma\in I_f} \Big(\frac{\alpha_f r_n(f)}{\omega^{\pm}_f}\Big)^{\sigma} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

car ce dernier élément est invariant par I_f. Cela prouve que $g^{\pm}_{[f]} \in S^{\pm}_k(\mathbb{Q})$, donc

$$g^{\pm} = \sum_{[f]} g^{\pm}_{[f]} \in S^{\pm}_k(\mathbb{Q}).$$

La réciproque se montre par un argument de dimension : le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $S^{+}_k(\mathbb{Q})$ est de dimension $\dim S_k(1)$: en effet, les équations définissant W_k dans $\mathbb{C}_{k-2}[X]$ sont à coefficients rationnels, donc les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $S^{\pm}_k(\mathbb{Q}) = r^{\pm}(\mathbb{Q}[X] \cap W^{\pm}_k)$ sont de dimension la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $S_k(1)$. Par ailleurs, l'ensemble des fonctions

$$g = \sum_{[f]} \sum_{\sigma\in I_f} \frac{(\alpha_f)^{\sigma}}{\omega^{\pm}_{f^{\sigma}}} f^{\sigma}$$

où α_f décrit une base de $\mathbb{Q}(f)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension

$$\sum_{[f]} [\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] = \sum_{[f]} \#\,\mathrm{orbite}(f) = \dim S_k(1)$$

(voir page 46) ce qui montre l'égalité de ces $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. □

Proposition 107. — *Les espaces $S^{+}_k(\mathbb{Q})$ et $S^{-}_k(\mathbb{Q})$ sont duaux par rapport au produit scalaire de Petersson (à un facteur i près) :*

$$g \in S^{\pm}_k(\mathbb{Q}) \iff (g,h) \in i\mathbb{Q} \textit{ pour tout } h \in S^{\mp}_k(\mathbb{Q}).$$

Démonstration. — On montre d'abord l'implication $\Rightarrow$. Soit $g \in S^{+}_k(\mathbb{Q})$ puis $h \in S^{-}_k(\mathbb{Q})$. D'après le corollaire 106 on a une décomposition

$$g(z) = \sum_{[f]} \sum_{\sigma} (\alpha_f)^{\sigma}\, \frac{f^{\sigma}(z)}{\omega^{+}_{f^{\sigma}}}$$

et de même

$$h(z) = \sum_{[f]} \sum_{\sigma} (\beta_f)^{\sigma}\, \frac{f^{\sigma}(z)}{\omega^{-}_{f^{\sigma}}}$$

où $[f]$ désigne un ensemble de représentants de formes primitives de $S_k(1)$ non conjuguées et σ décrit I_f, avec α_f et β_f éléments de $\mathbb{Q}(f)$, et où $\omega^{\pm}_{f^{\sigma}}$ sont les nombres complexes associés à f^{σ} par le théorème 94 et le lemme 105. Les formes primitives constituent une base orthogonale, et les corps $\mathbb{Q}(f)$ sont totalement réels (voir § 9.1), donc on obtient

$$\begin{aligned}(g,h) &= \sum_{[f]}\sum_{\sigma}(\alpha_f)^{\sigma}(\beta_f)^{\sigma}\frac{(f^{\sigma},f^{\sigma})}{\omega^{+}_{f^{\sigma}}\omega^{-}_{f^{\sigma}}}\\ &= -i\sum_{[f]}\sum_{\sigma}(\alpha_f\beta_f)^{\sigma}\in i\mathbb{Q}.\end{aligned}$$

De même, on obtient le résultat pour $g\in S_k^-(\mathbb{Q})$ et $h\in S_k^+(\mathbb{Q})$.

Les espaces vectoriels $S_k^+(\mathbb{Q})$ et $S_k^-(\mathbb{Q})$ étant des $\mathbb{Q}$-réseaux de $S_k(1)$ (c'est-à-dire des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension $\dim_{\mathbb{C}} S_k(1)$), l'implication $\Leftarrow$ est conséquence de l'implication $\Rightarrow$. □

L'espace $S_k(1)$ étant un espace hermitien, on peut définir pour tout $n\in\{0,\dots,k-2\}$ la forme parabolique R_n donnée par $(f,R_n)=r_n(f)$ pour tout $f\in S_k(1)$. Kohnen & Zagier ont étudié les formes paraboliques R_n et leurs polynômes de périodes. Ainsi, on a par exemple le résultat

***Proposition 108* (Kohnen & Zagier).** — *Soit $k\geqslant 4$ un entier pair et $0\leqslant n\leqslant k-2$ un entier. On a*

$$r^{\varepsilon}_{R_n}(X)=(2i)^{k-1}(I+S)\cdot\left(\frac{B_{n+1}(X)}{n+1}+(-1)^n\frac{B_{k-1-n}(X)}{k-1-n}\right)$$

où $\varepsilon=(-1)^{n-1}$ et $B_m(X)=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}B_lX^{m-l}$ est le m^e polynôme de Bernoulli.

Démonstration. — La preuve est détaillée dans [**KZ84**, § 1.2 et 1.3]. Elle se base sur la formule de Cohen suivante [**Coh80**] :

$$-\frac{\pi\binom{k-2}{m}}{(2i)^{k-2}}R_m(z)=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in PSL(2,\mathbb{Z})}\frac{1}{(az+b)^{n+1}(cz+d)^{k-1-n}}$$

valable pour tout $0<m<k-2$. Cela permet de déterminer par un calcul d'intégrales les polynômes de périodes $r^{\pm}_{R_n}$. □

16. Conjectures de Kohnen

Pour terminer, on donne la conjecture de Kohnen, sur le lien entre les structures rationnelles sur les espaces $S_k(1)$ et $M_k(1)$:

***Conjecture 109* (Kohnen).** — *Soit $k\geqslant 4$ un entier pair et K un corps de nombres. On a*

$$M_k^+(K)\cap M_k^{\infty}(K)=\{0\}\quad \textit{et}\quad S_k^-(K)\cap S_k^{\infty}(K)=\{0\}.$$

On peut ainsi donner un corollaire à la conjecture concernant les formes paraboliques primitives.

Corollaire 110. — *Si $f \in S_k(1)$ est une forme primitive, alors les périodes $r_i(f)$ sont nulles ou transcendantes, pour tout $0 \leqslant i \leqslant k-2$.*

Si on applique la conjecture de Kohnen aux séries d'Eisenstein G_k, on obtient :

Conjecture 111. — *Les réels $\zeta(2k+1)/\pi^{2k+1}$ sont des nombres transcendants, pour tout $k \geqslant 1$ entier.*

Remarque 112. — Un résultat démontré par Bertrand en direction de cette conjecture est le suivant : les périodes d'une forme primitive parabolique de poids 2 et de niveau N sont soit nulles, soit transcendantes (voir [**Ber79**]).

PARTIE III
PÉRIODES ET STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, on donne un certain nombre de résultats et de conjectures sur le lien entre formes modulaires et périodes (au sens de Zagier-Kontsevich), et sur les propriétés différentielles satisfaites par les formes modulaires.

17. Opérateurs différentiels sur les formes modulaires

On se place ici sur les espaces $M_k(1)$. On souhaiterait pouvoir définir un opérateur différentiel sur l'algèbre graduée

$$M_*(1) = \bigoplus_k M_k(1) = \mathbb{C}[G_4, G_6]$$

(voir le corollaire 28).

La première idée est de considérer la dérivée d'une forme modulaire. On note à partir de maintenant

$$D(f)(z) = Df(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{1}{2i\pi} f^{(1)}(z),$$

avec les notations du paragraphe 6. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)q^n$, alors $Df(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\widehat{f}(n)q^n$. Si $f \in M_k(1)$, alors Df vérifie

$$(cz+d)^{-(k+2)} Df\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = Df(z) + \frac{k}{2i\pi}\frac{c}{cz+d} f(z) \tag{75}$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. Si f n'est pas une fonction constante, la fonction Df ne vérifie pas la condition de modularité et n'est donc pas modulaire. Supposons en effet, par l'absurde, que Df est modulaire de poids ℓ avec f non constante (soit $k\neq 0$). En comparant (75) et la condition de modularité de poids ℓ, on obtient

$$\left[(cz+d)^{\ell}-(cz+d)^{k+2}\right]Df(z)=\frac{k}{2i\pi}c(cz+d)^{k+1}f(z).$$

Ayant fixé $z\in\mathscr{H}$ et $c=1$, on en déduit que le polynôme

$$\left[(z+X)^{\ell}-(z+X)^{k+2}\right]Df(z)-\frac{k}{2i\pi}(z+X)^{k+1}f(z) \tag{76}$$

s'annulant sur l'ensemble infini des entiers est nul. Si $\ell=k+2$, cela implique $f=0$. Si $\ell\neq k+2$, la considération du coefficient de $X^{\max(\ell,k+2)}$ implique $Df(z)=0$ puis (après report dans le polynôme (76)) $f(z)=0$. Notre but est d'agrandir l'espace des formes modulaires de façon à obtenir un espace stable par dérivation.

17.1. Formes quasi-modulaires

Définition 113. — Soit k et s deux entiers positifs. Une fonction holomorphe $f:\mathscr{H}\to\mathbb{C}$ est une *forme quasi-modulaire* de poids k s'il existe $f_0,f_1,\dots,f_s$ fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$ et vérifiant la condition de croissance[31]

$$\text{il existe } \alpha>0 \text{ tel que } f_i(z)\ll\left(\frac{y}{1+|z|^2}\right)^{-\alpha}\qquad(0\leqslant i\leqslant s) \tag{77}$$

et telles que, pour tout $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})$ on a l'égalité

$$(f\underset{k}{|}\gamma)(z)=\sum_{n=0}^{s}f_n(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{n}\qquad\text{pour tout } z\in\mathscr{H}.$$

Si f_s n'est pas la fonction nulle, on dit que f est de *profondeur* s.

On note $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ l'espace des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur inférieure ou égale à s. Si $f\in\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ on note $P_{f,z}$ le polynôme défini par $P_{f,z}(X)=\sum_{n=0}^{s}f_n(z)X^n$, et on l'appelle le *polynôme associé* à f. Pour tout $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})$, on a l'égalité

$$(f\underset{k}{|}\gamma)(z)=P_{f,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right).$$

[31] De façon plus précise, on demande qu'il existe $\alpha>0$ tel que, pour tous x_0 et $x_1>x_0$, il existe $\beta>0$ tel que, pour tous $x\in[x_0,x_1]$ et $y>0$ on a

$$|f_i(z)|\leqslant\beta\left(\frac{y}{1+|z|^2}\right)^{-\alpha}.$$

Remarques 114

(1) On introduit

$$\widetilde{M_*(1)}^{\leqslant s} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}, \ \widetilde{M_k}(1) = \bigcup_{s\geqslant 0} \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s} \ \text{ et } \widetilde{M_*}(1) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \widetilde{M_k}(1).$$

L'ensemble $\widetilde{M_*(1)}$ est muni d'une structure d'algèbre graduée (par le poids) et filtrée (par la profondeur).

(2)

(a) Les formes modulaires $f \in M_k(1)$ sont des formes quasi-modulaires de poids k, et appartiennent à $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ pour tout $s \geqslant 0$, puisque pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a $(f\underset{k}{|}\gamma)(z) = P_z\left(\dfrac{c}{cz+d}\right)$, où P_z est le polynôme constant égal à $f(z)$. Les constantes sont des formes quasi-modulaires de poids 0 et de profondeur nulle.

(b) L'équation (75) montre que si $f \in M_k(1)$ alors $Df \in \widetilde{M_{k+2}(1)}^{\leqslant 1}$.

(c) La fonction E_2 appartient à l'espace $\widetilde{M_2(1)}^{\leqslant 1}$: en effet, puisque $E_2 = -24G_2$, c'est une conséquence directe de l'équation (13), qui donne la formule :

$$(E_2\underset{2}{|}\gamma)(z) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d} \quad \text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}). \tag{78}$$

(3) Si f est une forme quasi-modulaire, elle ne l'est que pour un seul poids : s'il y en avait deux, k et ℓ, en notant $P_{f,z}$ le polynôme associé au poids k, on aurait, pour toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$,

$$(f\underset{\ell}{|}\gamma)(z) = (cz+d)^{k-\ell} P_{f,z}\left(\frac{c}{cz+d}\right)$$

qui n'est plus un polynôme en $\dfrac{c}{cz+d}$. En particulier, les constantes ne sont des fonctions quasi-modulaires que pour le poids 0.

Si $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathscr{H}$, on a $(f\underset{k}{|}T^j)(z) = P_{f,z}(0)$. En prenant successivement $j = 0$ et $j = 1$, on en déduit le

Lemme 115. — *Soit $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, alors $f_0 = f$ et f est périodique de période* 1.

Le lemme suivant justifie les sommes directes introduites dans les remarques 114.

Lemme 116. — *Les espaces vectoriels de formes quasi-modulaires sont en somme directe sur le poids : une somme de formes quasi-modulaires de poids distincts n'est nulle que si chacune de ces formes est la fonction nulle.*

Démonstration. — Considérons $f_1, \ldots, f_r$ des formes quasi-modulaires non identiquement nulles de poids distincts $k_1 < \cdots < k_r$. On note s la plus grande profondeur de ces formes et, pour chaque forme, son polynôme associé est

$$P_{f_i,z}(X) = \sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z)X^j.$$

On suppose par l'absurde que $\sum_{i=1}^{r} f_i = 0$. En évaluant cette égalité en $\dfrac{az+b}{cz+d}$ et après multiplication par $(cz+d)^s$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z)c^j(cz+d)^{k_i+s-j} = 0$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$ et tout couple (c,d) d'entiers premiers entre eux. On fixe $z \in \mathscr{H}$ et $c = 1$, le polynôme

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{s} f_{ij}(z)(z+X)^{k_i+s-j}$$

s'annule une infinité de fois (en toutes les valeurs entières) et est donc nul. Le coefficient dominant (associé au degré $k_r + s$) est $f_{r0}(z)$ donc $f_{r0}(z) = 0$. Le lemme 115 implique $f_{r0} = f_r$ donc $f_r = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de non nullité. □

Lemme 117. — *Les fonctions E_2, E_4 et E_6 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$: soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ tel que $P(E_2,E_4,E_6) = 0$, alors $P = 0$.*

Démonstration. — Par regroupement des termes de P, on peut écrire

$$P = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{(\alpha,\beta,i)\in\mathbb{N}^3\\ 4\alpha+6\beta+2i=k}} p_{\alpha\beta i}X^iY^\alpha Z^\beta.$$

Puisque $P(E_2,E_4,E_6) = 0$, le lemme 116 implique, pour tout k l'égalité

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta,i)\in\mathbb{N}^3\\ 4\alpha+6\beta+2i=k}} p_{\alpha\beta i}E_2^iE_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

S'il existe un entier $i_0 \neq 0$ tel que $p_{\alpha\beta i_0} \neq 0$ pour au moins un couple (α,β) vérifiant $4\alpha+6\beta+2i_0 = k$, alors le terme de gauche est une forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur au moins i_0. Mais par unicité de la profondeur, le terme de gauche est de profondeur 0, autrement dit, $p_{\alpha\beta i} = 0$ lorsque i est non nul et

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\\ 4\alpha+6\beta=k}} p_{\alpha\beta 0}E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

Grâce au corollaire 28, on a finalement la nullité de chacun des coefficients $p_{\alpha\beta 0}$ et enfin de P. □

Un des intérêts d'introduire l'espace des formes quasi-modulaires vient du lemme suivant :

Lemme 118. — *L'application linéaire D est une application de $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ dans $\widetilde{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1}$. Lorsque $k>0$, cette application est injective. Plus précisément, soit $f\in\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ et $P_{f,z}(X)=\sum_{n=0}^{s}f_n(z)X^n$ son polynôme associé. Alors le polynôme associé à Df est $P_{Df,z}(X)=\sum_{n=0}^{s+1}g_n(z)X^n$, où les g_n sont donnés par les relations suivantes :*

$$g_0=D(f_0),\quad g_n=D(f_n)+\frac{k-n+1}{2i\pi}f_{n-1}\ \text{si}\ 1\leqslant n\leqslant s,\quad \text{et}\ g_{s+1}=\frac{k-s}{2i\pi}f_s.$$

Démonstration. — On différentie l'égalité de quasi-modularité de f par rapport à $z\in\mathscr{H}$. On obtient

$$\frac{f^{(1)}\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)}{(cz+d)^{k+2}}-kc\frac{f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)}{(cz+d)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{s}\Big[f_n^{(1)}(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^n-nf_n(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n+1}\Big].$$

Par hypothèse, on a $\frac{1}{(cz+d)^k}f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big)=P_{f,z}\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)$, donc on a pour tout $z\in\mathscr{H}$ l'égalité

$$\begin{aligned}(f^{(1)}\underset{k+2}{|}\gamma)(z)&=\frac{kc}{cz+d}\sum_{n=0}^{s}f_n(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^n\\&\qquad+\sum_{n=0}^{s}\Big[f_n^{(1)}(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^n-nf_n(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n+1}\Big]\\&=Q_{f,z}\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)\end{aligned}$$

où $Q_{f,z}(X)=f_0^{(1)}(z)+\sum_{n=1}^{s}\Big[f_n^{(1)}(z)+(k-n+1)f_{n-1}(z)\Big]X^n+(k-s)f_s(z)X^{s+1}$, ce qui prouve que $f^{(1)}\in\widetilde{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1}$, et donc par linéarité $Df\in\widetilde{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1}$. L'injectivité résulte des remarques 114 : les constantes ne sont des formes quasi-modulaires que pour le poids nul. □

Cela prouve que l'opérateur différentiel D agit sur l'anneau $\widetilde{M_*(1)}$.

On étudie maintenant la structure de l'espace $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ en commençant par étudier les coefficients des polynômes de l'équation de quasi-modularité.

Lemme 119. — *Soit $f\in\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, et $P_{f,z}(X)=\sum_{i=0}^{s}f_i(z)X^i$ son polynôme associé. Alors, pour tout entier naturel $i\leqslant s$, on a*

$$f_i\in\widetilde{M_{k-2i}(1)}^{\leqslant s-i}.$$

En particulier,

$$f_s\in M_{k-2s}(1).$$

Démonstration. — Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$
des matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$. Le produit MN s'écrit $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ q & r \end{smallmatrix}\right)$, où
$$\begin{cases} q = \alpha c + \gamma d \\ r = \beta c + \delta d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = \delta q - \gamma r \\ d = -\beta q + \alpha r. \end{cases} \tag{79}$$
On a
$$(f \underset{k}{|} MN)(z) = \sum_{m=0}^{s} f_m(z) \left(\frac{q}{qz+r} \right)^m. \tag{80}$$
D'autre part,
$$(f \underset{k}{|} MN)(z) = (\gamma z + \delta)^{-k} \sum_{n=0}^{s} f_n(Nz) \left(\frac{c}{cNz+d} \right)^n. \tag{81}$$
De (79), on déduit
$$\begin{aligned} \frac{c}{cNz+d} &= (\gamma z+\delta)\frac{\delta q - \gamma r}{qz+r} = (\gamma z+\delta)\frac{(\gamma z+\delta)q - \gamma(qz+r)}{qz+r} \\ &= (\gamma z+\delta)^2 \left(\frac{q}{qz+r} - \frac{\gamma}{\gamma z+\delta} \right). \end{aligned} \tag{82}$$
Le report de (82) dans (81) conduit alors à
$$(f \underset{k}{|} MN)(z) = \sum_{m=0}^{s} \left[\sum_{n=m}^{s} \binom{n}{m} (-\gamma)^{n-m} (\gamma z+\delta)^{n+m-k} f_n(Nz) \right] \left(\frac{q}{qz+r} \right)^m. \tag{83}$$
La comparaison de (80) et (83) implique
$$f_m(z) = \sum_{n=m}^{s} \binom{n}{m} (-\gamma)^{n-m} (\gamma z+\delta)^{n+m-k} f_n(Nz), \tag{84}$$
valide pour tout $N \in SL(2,\mathbb{Z})$. En particulier,
$$f_s(z) = (\gamma z+\delta)^{2s-k} f_s(Nz)$$
et f_s est modulaire de poids $k-2s$.

On fait l'hypothèse de récurrence : si $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s-1}$ alors, pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a
$$(f \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s-1} f_j(z) \Big(\frac{c}{cz+d} \Big)^j, \text{ avec } f_j \in \widetilde{M_{k-2j}(1)}^{\leqslant s-1-j} \text{ pour tout } 0 \leqslant j \leqslant s-1.$$
L'initialisation pour $s=1$ résulte de $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant 0} = M_k(1)$. Soit $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ et $g = f - (i\pi/6)^s f_s E_2^s$. On sait déjà que $f_s \in M_{k-2s}(1)$, donc $g \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$. De plus, par construction, le terme de degré s du polynôme $P_{g,z}(X)$ associé à g est nul pour tout

$z \in \mathscr{H}$ (car le terme de degré s de $P_{E_2^s,z}(X) = [P_{E_2}, z(X)]^s$ est $(6/i\pi)^s X^s$), de sorte que $g \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s-1}$. On a donc

$$(g\underset{k}{|}\gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s-1} g_j(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^j, \quad \text{avec } g_j \in \widetilde{M_{k-2j}(1)}^{\leqslant s-1-j} \text{ pour tout } j.$$

Or,

$$\begin{aligned}(f\underset{k}{|}\gamma)(z) &= \sum_{j=0}^{s-1} g_j(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^j + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s(z)\left[E_2(z) + \frac{6}{i\pi}\frac{c}{cz+d}\right]^s \\ &= \sum_{j=0}^{s-1}\left[g_j(z) + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^{s-j}\binom{s}{j} f_s(z)E_2(z)^{s-j}\right]\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^j + f_s(z)\Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^s.\end{aligned}$$

On termine en remarquant que $g_j \in \widetilde{M_{k-2j}(1)}^{\leqslant s-1-j}$, $f_s \in M_{k-2s}(1)$ et $E_2^{s-j} \in \widetilde{M_{2s-2j}(1)}^{\leqslant s-j}$ ce qui montre que

$$g_j + \left(\frac{i\pi}{6}\right)^{s-j}\binom{s}{j} f_s E_2^{s-j} \in \widetilde{M_{k-2j}(1)}^{\leqslant s-j}. \qquad \square$$

Corollaire 120. — *Soit f une forme quasi–modulaire de poids k et profondeur s. Alors, k est pair et $k \geqslant 2s$.*

Corollaire 121. — *Soit $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$. On a la décomposition*

$$f = \sum_{i=0}^{s} F_i E_2^i \quad \textit{avec} \quad F_i \in M_{k-2i}(1) \ \textit{pour tout } i \in \{0, \dots, s\}.$$

Autrement dit, on a l'égalité

$$\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s} = \bigoplus_{i=0}^{s} M_{k-2i}(1)\, E_2^i.$$

Démonstration. — Soit $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$. On pose

$$g = f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s f_s E_2^s.$$

D'après le lemme 119, $f_s \in M_{k-2s}(1)$ et $g \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s-1}$. Le résultat énoncé s'obtient alors par récurrence sur s, l'initialisation résultant de $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant 0} = M_k(1)$. $\square$

Remarque 122. — Le corollaire 121 permet d'obtenir aisément des équations différentielles. Grâce au lemme 118, on a $DE_2 \in \widetilde{M_4(1)}^{\leqslant 2}$. Le corollaire 121 donne $\widetilde{M_4(1)}^{\leqslant 2} = M_4(1) + M_2(1)\, E_2 + M_0(1)\, E_2^2$. On a $M_4(1) = \mathbb{C}E_4$, $M_2(1) = \{0\}$

et $M_0(1)=\mathbb{C}$ donc il existe des complexes α et β tels que $DE_2=\alpha E_4+\beta E_2^2$. Par comparaison des développements de Fourier, on a

$$-24q+O(q)=\alpha\left[1+240q+O(q)\right]+\beta\left[1-48q+O(q)\right].$$

Ainsi, on obtient

$$DE_2=\frac{1}{12}\left(E_2^2-E_4\right). \tag{85}$$

De même, $DE_4\in\widetilde{M_6(1)}^{\leqslant 1}=M_6(1)+M_4(1)E_2=\mathbb{C}E_6+\mathbb{C}E_4E_2$ et les premiers coefficients de Fourier conduisent à

$$DE_4=\frac{1}{3}\left(E_4E_2-E_6\right). \tag{86}$$

Enfin, $DE_6\in\widetilde{M_8(1)}^{\leqslant 1}=M_8(1)+M_6(1)E_2=\mathbb{C}E_4^2+\mathbb{C}E_6E_2$, ce qui donne la relation

$$DE_6=\frac{1}{2}\left(E_6E_2-E_4^2\right). \tag{87}$$

Des équations (85), (86) et (87), on déduit que

$$D^2E_2=\frac{1}{72}E_2^3-\frac{1}{24}E_2E_4+\frac{1}{36}E_6$$

et

$$D^3E_2=\frac{1}{288}E_2^4-\frac{1}{96}E_4^2-\frac{1}{48}E_2^2E_4+\frac{1}{36}E_2E_6$$

puis que E_2 est solution de l'équation de Chazy

$$D^3E_2=E_2D^2E_2-\frac{3}{2}(DE_2)^2. \tag{88}$$

De (85), on déduit également l'égalité arithmétique

$$5\sigma_3(n)=(6n-1)\sigma_1(n)+12\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_1(m)\sigma_1(n-m).$$

valable pour tout entier $n\geqslant 1$.

Remarque 123. — Soit f une forme modulaire de poids k. D'après le lemme 118 et le corollaire 121, on a

$$Df=F_0+F_1E_2$$

avec F_0 modulaire de poids $k+2$ et F_1 modulaire de poids k. On en déduit, pour toute matrice $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})$ et tout $z\in\mathscr{H}$, que

$$(Df\underset{k+2}{|}\gamma)(z)=F_0(z)+F_1(z)E_2(z)+\frac{6}{i\pi}F_1(z)\frac{c}{cz+d}. \tag{89}$$

D'autre part, le lemme 118 implique

$$(Df\underset{k+2}{|}\gamma)(z)=Df(z)+\frac{k}{2i\pi}f(z)\frac{c}{cz+d}. \tag{90}$$

La comparaison des équations (89) et (90) donne l'équation

$$F_0(z) + F_1(z)E_2(z) + \frac{6}{i\pi}F_1(z)\frac{c}{cz+d} = Df(z) + \frac{k}{2i\pi}f(z)\frac{c}{cz+d}$$

valable pour tout $z \in \mathscr{H}$ et tout couple (c,d) d'entiers premiers entre eux. On en déduit

$$F_1 = \frac{k}{12}f \quad \text{et} \quad F_0 = Df - \frac{k}{12}fE_2.$$

En particulier, cela montre que l'application ϑ_k définie par

$$\vartheta_k(f) = Df - \frac{k}{12}fE_2 = 2k[f, G_2]_0^*$$

est une application de $M_k\,(1)$ dans $M_{k+2}\,(1)$ (ce qui se montre aussi directement, voir page 32). Les calculs des dérivées de E_4 et E_6 donnés aux équations (86) et (87) impliquent

$$\vartheta_4(E_4) = -\frac{1}{3}E_6 \quad \text{et} \quad \vartheta_6(E_6) = -\frac{1}{2}E_4^2.$$

Grâce au corollaire 28, on déduit du corollaire 121 la

Proposition 124. — *On a l'égalité*

$$\widetilde{M_*\,(1)} = M_*\,(1)\,[E_2] = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6].$$

Une autre façon de décrire la structure de $\widetilde{M_*\,(1)}$ est d'utiliser les dérivées de E_2 plutôt que ses puissances.

Lemme 125. — *Soit $k > 0$. On a*

$$\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s} = M_k\,(1) \oplus \bigoplus_{i=0}^{s-1} M_{k-2i-2}\,(1)\,D^i E_2.$$

Démonstration. — Grâce au lemme 118 et au lemme 119, si on définit, pour $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$,

$$h = f - \frac{(k-1-s)!}{(k-2)!}f_s D^{s-1}E_2$$

alors $f_s \in M_{k-2s}\,(1)$ et $h \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s-1}$ ce qui permet de prouver le lemme par récurrence sur l'entier s. □

Remarques 126

(1) Les formes quasi-modulaires apparaissent dans des contextes assez variés : par exemple, des travaux de Dijkgraaf et Kaneko-Zagier ont montré qu'elles interviennent dans le cadre de la théorie de la « symétrie miroir » en dimension 1. Les formes quasi-modulaires interviennent également en physique théorique, ou encore dans des travaux récents de Gallagher décrivant les moments des fonctions périodiques normalisées.

(2) Cette théorie se généralise aux sous-groupes de congruence, et plus globalement à tous les sous-groupes Γ de $GL(2,\mathbb{Q})$ tel que ${}_{\Gamma}\backslash\mathscr{H}$ est non compact. Il existe pour un tel Γ un élément $\Phi_\Gamma \in \widetilde{M_2(\Gamma)}^{\leqslant 1}$, $\Phi_\Gamma \notin M_2(\Gamma)$, et $\widetilde{M_*(\Gamma)} = M_*(\Gamma)\otimes\mathbb{C}[\Phi_\Gamma]$ (si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$, on peut prendre $\Phi_\Gamma = E_2$).

Lemme 127. — *Soit $f \in \widetilde{M_*(1)}$. Alors f est solution d'une équation différentielle (non nécessairement linéaire) d'ordre* 3.

Démonstration. — Les fonctions f, Df, D^2f et D^3f sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$, car elles appartiennent toutes à $\mathbb{C}[E_2,E_4,E_6]$ de degré de transcendance 3. □

Remarque 128. — On peut montrer que si $f \in \widetilde{M_*(1)}$ est une fonction non constante, alors il n'existe pas d'équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par f : il existe $P \in \mathbb{C}[X_1,X_2,X_3,X_4]$ non nul annulant (f,Df,D^2f,D^3f), mais il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{C}[X_1,X_2,X_3]$ annulant (f,Df,D^2f) autre que le polynôme nul (voir [**Ber01**]).

17.2. Formes modulaires presque holomorphes. — L'espace des formes quasi-modulaires est une extension possible des formes modulaires obtenue en transformant la condition de modularité. Cette extension est adaptée à la dérivation habituelle. On peut aussi généraliser la définition des formes modulaires en changeant la condition d'holomorphie. On étudie cette deuxième extension adaptée à une autre dérivation et on établit un diagramme commutatif reliant les deux extensions et les deux dérivations.

Définition 129. — Soit k et s des entiers positifs. On appelle *forme modulaire presque holomorphe* de poids k et de profondeur égale à s toute fonction $F\colon \mathscr{H}\to\mathbb{C}$, vérifiant $(F\underset{k}{|}\gamma) = F$ pour toute matrice $\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})$, telle qu'il existe $s+1$ fonctions holomorphes $f_0,\dots,f_s$ sur $\mathscr{H}$, avec f_s différente de la fonction nulle et

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s}\frac{f_n(z)}{y^n}, \tag{91}$$

où $z = x+iy$, et vérifiant la condition de croissance (77) page 78. On note $\widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$ l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids k et de profondeur inférieure ou égale à s.

Remarque 130. — Par définition, $\widehat{M_k(1)}^{\leqslant 0} = M_k(1)$. De plus, l'écriture d'une fonction F sous la forme (91) est unique. Pour le voir, il suffit de voir que si $F=0$ alors $f_0=\cdots=f_s=0$. Pour cela, on dérive $\sum_{n=0}^{s} f_n(z)/y^n = 0$ par rapport à x et par rapport à y. On obtient deux équations dont on déduit $\sum_{n=0}^{s} nf_n(z)/y^n = 0$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{s-1}(1+n)f_{n+1}(z)/y^n = 0$ et on conclut par récurrence sur s.

Proposition 131. — *Soit $s \geqslant 0$ un entier, $F(z) = \sum_{n=0}^{s} f_n(z)/y^n \in \widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$ et $0 \leqslant \ell \leqslant s$ un entier. Pour tout $z \in \mathscr{H}$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a*

$$(f_\ell \underset{k-2\ell}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s-\ell} (2i)^j \binom{\ell+j}{\ell} f_{\ell+j}(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j, \tag{92}$$

c'est-à-dire $f_\ell \in \widetilde{M_{k-2\ell}(1)}^{\leqslant s-\ell}$ et en particulier $f_0 \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$.

Démonstration. — De $\dfrac{1}{\Im m\,\gamma z} = \dfrac{|cz+d|^2}{\Im m\, z} = (cz+d)\Big(-2ic + \dfrac{cz+d}{y}\Big)$, on déduit

$$(F \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{y^j} \sum_{n=j}^{s} (-2i)^{n-j} \binom{n}{j} (f_n \underset{k-2n}{|} \gamma)(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n-j}. \tag{93}$$

Par modularité de F et grâce à la remarque 130, on a pour tout $0 \leqslant j \leqslant s$ l'égalité

$$f_j(z) = \sum_{n=j}^{s} (-2i)^{n-j} \binom{n}{j} (f_n \underset{k-2n}{|} \gamma)(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n-j}. \tag{94}$$

En particulier $(f_s \underset{k-2s}{|} \gamma) = f_s$ qui est l'égalité demandée pour $\ell = s$. On raisonne par récurrence décroissante sur $\ell = s-1, \ldots, 0$: on suppose que pour tout $\ell + 1 \leqslant n \leqslant s$, la fonction f_n vérifie l'équation (92). D'après l'équation (94) on a

$$f_\ell(z) = (f_\ell \underset{k-2\ell}{|} \gamma)(z) + \sum_{n=\ell+1}^{s} (-2i)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} (f_n \underset{k-2n}{|} \gamma)(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n-\ell}.$$

On a

$$(f_\ell \underset{k-2\ell}{|} \gamma)(z) = f_\ell(z) + \sum_{t=1}^{s-\ell} (2i)^t f_{\ell+t}(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^t \left[\sum_{j=0}^{t-1} (-1)^{t-1-j} \binom{\ell+t-j}{\ell} \binom{\ell+t}{\ell+t-j}\right].$$

Enfin, on obtient

$$-\sum_{j=0}^{t-1} (-1)^{t-j} \binom{\ell+t-j}{\ell} \binom{\ell+t}{\ell+t-j} = -\frac{(\ell+t)!}{\ell!} \left[\sum_{j=0}^{t-1} \frac{(-1)^{t-j}}{(t-j)!j!}\right] = \binom{\ell+t}{\ell}$$

car $\sum_{j=0}^{t-1} \dfrac{(-1)^{t-j}}{(t-j)!j!} = -\dfrac{1}{t!}$ (d'après la formule du binôme $(1-1)^t = 0$). Cela établit ainsi l'équation (92) pour f_ℓ, et achève la preuve de la proposition. □

Proposition 132. — *L'application $\Upsilon\colon F \mapsto f_0$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$ dans $\widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, et définit un isomorphisme d'algèbres graduées filtrées de $\widehat{M_*(1)}$ dans $\widetilde{M_*(1)}$.*

Démonstration. — L'application Υ est bien définie d'après la proposition 131. C'est un morphisme puisque le terme constant d'un produit de polynômes est le produit de leurs termes constants. Soit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{y^n} \in \widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$$

tel que $f_0 = 0$. D'après (92) appliquée à $\ell = 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{s} (2i)^j f_j(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^j = 0$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$ et tout couple (c,d) d'entiers premiers entre eux. On en déduit $f_j(z) = 0$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant s$ et tout $z \in \mathscr{H}$. Ainsi $F = 0$ et l'application Υ est injective. On montre maintenant la surjectivité. Soit $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, notons f_n les fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$ définies par $(f \underset{k}{|} \gamma) = \sum_{n=0}^{s} f_n(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^n$ pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. On note F la fonction définie par $F(z) = \sum_{n=0}^{s} f_n(z)/(2iy)^n$. D'après l'équation (93), on a

$$(F \underset{k}{|} \gamma)(z) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{y^j} \left[\sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} \frac{(-2i)^{n-j}}{(2i)^n} (f_n \underset{k-2n}{|} \gamma)(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n-j} \right].$$

Puisque $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$, l'équation (84) donne

$$f_j(z) = \sum_{n=j}^{s} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (f_n \underset{k-2n}{|} \gamma)(z) \Big(\frac{c}{cz+d}\Big)^{n-j}$$

ce qui implique que $(F \underset{k}{|} \gamma) = F$ pour tout $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$, et donc que $F \in \widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$. Comme $\Upsilon(F) = f_0 = f$, cela montre que Υ est surjective. □

Remarque 133. — Au passage, on a démontré que si $f \in \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s}$ a pour polynôme associé $P_{f,z}$ alors pour tout $z \in \mathscr{H}$ on a

$$\left(\Upsilon^{-1} f\right)(z) = P_{f,z}\left(\frac{1}{2iy}\right).$$

On a

$$\Upsilon^{-1}(E_2) = E_2^* \in \widehat{M_2(1)}^{\leqslant 1} \quad \text{avec} \quad E_2^*(z) = E_2(z) - \frac{3}{\pi y}.$$

L'isomorphisme précédent et la proposition 124 impliquent alors que

$$\widehat{M_*(1)} = \mathbb{C}[E_2^*, E_4, E_6].$$

Remarque 134. — On a

$$E_2^*(z) = -24G_2^*(z) = \frac{1}{3\pi^2} \lim_{s\to 0} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^2|mz+n|^s}$$

(voir remarque 20).

Soit δ l'application définie sur $\widehat{M_*(1)}$ par

$$\delta F = DF - \frac{k}{4\pi y}F \qquad\qquad \text{si } F \in \widehat{M_k(1)}.$$

Proposition 135. — *L'application δ envoie $\widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$ sur $\widehat{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1}$, et on a $\Upsilon\circ\delta = D\circ\Upsilon$ sur $\widehat{M_*(1)}$:*

$$\begin{tikzcd} \widehat{M_k(1)}^{\leqslant s} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Upsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \widehat{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1} \arrow[d, "\Upsilon"] \\ \widetilde{M_k(1)}^{\leqslant s} \arrow[r, "D"'] & \widetilde{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1} \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $F \in \widehat{M_k(1)}^{\leqslant s}$. On note f_n les fonctions holomorphes définies par

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{f_n(z)}{(2iy)^n}.$$

Un calcul élémentaire à partir de la définition de δ conduit à la formule

$$\delta F(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{Df_n(z)}{(2iy)^n} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)f_{n-1}(z)}{(2iy)^n}.$$

D'autre part, d'après le lemme 118 on a

$$(Df_0 \underset{k+2}{|} \gamma)(z) =$$

$$Df_0(z) + \sum_{n=1}^{s}\left[Df_n(z) + \frac{k-n+1}{2i\pi}f_{n-1}(z)\right]\left(\frac{c}{cz+d}\right)^n + \frac{k-s}{2i\pi}f_s(z)\left(\frac{c}{cz+d}\right)^{s+1}.$$

D'après la remarque 133, on en déduit

$$\Upsilon^{-1}(Df_0)(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{Df_n(z)}{(2iy)^n} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)f_{n-1}(z)}{(2iy)^n} = \delta F(z).$$

On en déduit que $\delta F \in \widehat{M_{k+2}(1)}^{\leqslant s+1}$ puis que $(\Upsilon\circ\delta)(F) = (D\circ\Upsilon)(F)$. □

17.3. Les différents opérateurs différentiels. — La dérivation $D = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ est une opération qui envoie une fonction holomorphe sur une fonction holomorphe, qui commute avec les translations (on a pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$ l'égalité $D(f \circ \tau_\varepsilon) = D(f) \circ \tau_\varepsilon$ si τ_ε est la translation définie par $z \mapsto z + \varepsilon$), mais cette dérivation ne préserve pas l'anneau $M_*(1)$ (la dérivée d'une forme modulaire n'est pas une forme modulaire, la condition de modularité n'est pas préservée par cette dérivation).

On a défini page 32 et aussi dans la remarque 123 page 84 l'opérateur ϑ. Cette dérivation préserve l'algèbre graduée $M_*(1)$ mais ne commute pas avec les translations :

$$\begin{aligned}\vartheta_k(f \circ \tau_\varepsilon)(z) = D(f \circ \tau_\varepsilon)(z) - \frac{k}{12}E_2(z)(f \circ \tau_\varepsilon)(z) = D(f)(z+\varepsilon) - \frac{k}{12}E_2(z)f(z+\varepsilon)\\ \neq D(f)(z+\varepsilon) - \frac{k}{12}E_2(z+\varepsilon)f(z+\varepsilon) = [(\vartheta_k f) \circ \tau_\varepsilon](z)\end{aligned}$$

si $\varepsilon \notin \mathbb{Z}$.

Enfin, on a défini dans la proposition 135 l'opérateur différentiel δ : si $f \in M_k(1)$, on pose

$$(\delta_k f)(z) = Df(z) - \frac{k}{4\pi y} f(z)$$

(en notant $z = x + iy$). On a la relation $(\delta_k f \underset{k+2}{|} \gamma) = \delta_k f$ d'après la proposition 135. On a également la relation $\delta_k(f \circ \tau_\varepsilon) = (\delta_k f) \circ \tau_\varepsilon$ pour tout $f \in M_k(1)$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (puisque $\Im m(z+\varepsilon) = \Im m(z)$). Cependant, l'opérateur δ_k ne préserve pas $M_*(1)$, car il ne préserve pas le caractère holomorphe.

En conclusion, on a défini trois opérateurs qui préservent chacun deux des trois propriétés suivantes (ici H désigne un opérateur) :

(1) Modularité : si $(f \underset{k}{|} \gamma) = f$, alors $(H(f) \underset{k+2}{|} \gamma) = H(f)$;

(2) Holomorphie : si f est holomorphe, $H(f)$ est holomorphe ;

(3) Périodicité (ou commutativité avec les translations) : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $H(f \circ \tau_\varepsilon) = H(f) \circ \tau_\varepsilon$.

On peut résumer la situation dans le tableau suivant :

	Modularité	Holomorphie	Périodicité
D	NON	OUI	OUI
ϑ	OUI	OUI	NON
δ	OUI	NON	OUI

(où OUI (resp. NON) indique que l'opérateur préserve (resp. ne préserve pas) la propriété demandée).

Selon le contexte dans lequel on souhaite se placer, on privilégiera un de ces opérateurs différentiels (en fonction de l'importance accordée aux propriétés qu'il préserve) : ainsi, si on souhaite avoir un opérateur agissant sur $M_*(1)$, on utilisera ϑ.

Si on souhaite avoir un opérateur agissant sur les formes quasi-modulaires $\widetilde{M_*(1)}$, on utilisera D. Si on recherche un opérateur agissant sur les formes modulaires presque holomorphes $\widehat{M_*(1)}$, on utilisera δ.

Remarque 136. — Il est intéressant de considérer des séries génératrices associées à chacun de ces opérateurs, ces séries interviennent dans différents contextes. On donne ici sans démonstration quelques résultats : soit $f \in M_k(1)$, $z \in \mathscr{H}$ et $X \in \mathbb{C}$, on pose

$$f_D(z,X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(z)}{k(k+1)\cdots(k+n-1)} \frac{X^n}{n!}.$$

Cette fonction vérifie la relation

$$f_D\left(\gamma z, \frac{X}{(cz+d)^2}\right) = (cz+d)^k e^{cX/(2i\pi)(cz+d)} f_D(z,X),$$

pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. Posons ensuite

$$f_\delta(z,X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta^n f)(z)}{k(k+1)\cdots(k+n-1)} \frac{X^n}{n!}$$

où $\delta^n = \delta_{k+2n-2} \circ \delta_{k+2n-4} \circ \cdots \circ \delta_k$. La fonction f_δ vérifie la relation

$$f_\delta\left(\gamma z, \frac{X}{(cz+d)^2}\right) = (cz+d)^k f_\delta(z,X),$$

et on a

$$f_\delta(z,X) = e^{-X/4\pi y} f_D(z,X).$$

Enfin, on pose

$$f_\vartheta(z,X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n(z)}{k(k+1)\cdots(k+n-1)} \frac{X^n}{n!},$$

où les fonctions F_n appartiennent à $M_{k+2n}(1)$ et sont définies par $F_0 = f$, $F_1 = \vartheta_k f$ et

$$F_{n+1}(z) = (\vartheta_{k+2n} F_n)(z) - \frac{n(n+k-1)}{144} E_4(z) F_{n-1}(z).$$

On a les relations

$$f_\vartheta(z,X) = e^{-\frac{X}{12}E_2(z)} f_D(z,X) = e^{-\frac{X}{12}E_2^*(z)} f_\delta(z,X),$$

où E_2^* est la forme modulaire presque holomorphe définie par $E_2^*(z) = E_2(z) - \dfrac{3}{\pi y}$.

Ces séries génératrices, et les équations les reliant, ont été utilisées par Villegas & Zagier [**VZ93**] dans le cadre des fonctions L de Hecke associées aux Grossencharacters.

18. Définition générale des périodes

Cette partie est largement inspirée de l'article de Kontsevich et Zagier [**KZ01**] auquel on renvoie pour les références. Le lecteur pourra aussi consulter l'état des connaissances de Waldschmidt [**Wal06**]. On introduit un nouvel ensemble, toujours dénombrable mais qui contient strictement les nombres algébriques, qu'on appelle l'ensemble des périodes, noté $\mathbb{P}$.

Définition 137. — Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ donnés par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels.

Remarques 138

(1) L'ensemble $\mathbb{P}$ est une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{C}$.

(2) On peut remplacer, dans la définition, « fonctions rationnelles » et « coefficients rationnels » par « fonctions algébriques » et « coefficients algébriques ».

En pratique, on peut toujours se ramener à intégrer la fonction constante égale à 1 sur un domaine défini par des équations polynomiales à coefficients rationnels.

(3) L'ensemble $\mathbb{P}$ est un ensemble dénombrable contenant strictement l'ensemble des nombres algébriques. Par exemple, $\pi \in \mathbb{P}$, puisque $\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et $\ln r = \int_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x} \in \mathbb{P}$ pour tout nombre algébrique $r > 0$.

(4) L'ensemble $\mathbb{P}$ étant dénombrable, il existe évidemment des nombres complexes qui ne sont pas des périodes. Actuellement, on ne sait en exhiber aucun. De façon conjecturale, on suppose que les réels e, γ et $1/\pi$ ne sont pas des périodes.

(5) Certaines constantes de nature arithmétique sont des périodes : c'est par exemple le cas des valeurs aux entiers $k \geqslant 2$ de la fonction ζ grâce à la formule

$$\zeta(k) = \int \cdots \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{\mathrm{d}t_1}{1-t_1} \prod_{i=2}^{k} \frac{\mathrm{d}t_i}{t_i}.$$

Pour la démontrer, on commence par écrire

$$\int \cdots \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{\mathrm{d}t_1}{1-t_1} \prod_{i=2}^{k} \frac{\mathrm{d}t_i}{t_i} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t_k}{t_k} \int_0^{t_k} \frac{\mathrm{d}t_{k-1}}{t_{k-1}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{\mathrm{d}t_1}{1-t_1}$$

puis on développe $(1-t_1)^{-1}$ en série entière et on intègre sur t_1, t_2, etc.

Enfin, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des rationnels strictement positifs tels que la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q$ est un entier strictement positif, alors le produit $\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_q)$ est une période. Cela résulte de l'évaluation des intégrales de Dirichlet (voir [**WG89**] par exemple)

$$\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_q) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_q)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_q} \int_{\Delta_q} t_1^{\alpha_1} \cdots t_q^{\alpha_q} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_q}{t_1 \cdots t_q}$$

où
$$\Delta_q = \{(t_1, \dots, t_q) \in [0, +\infty[^q : t_1 + \cdots + t_q \leqslant 1\}\,.$$
En particulier, si p et q sont deux entiers strictement positifs, $\Gamma\,(p/q)^q$ est une période.

Il y a plusieurs façons d'écrire une période sous forme intégrale, et il n'est pas toujours facile de savoir si des périodes données par des intégrales différentes sont égales ou non. Par exemple, on a l'égalité
$$6\zeta(2) = 8 \iint_{]0,1[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1-x^2y^2)} = \pi^2 = \left(\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2.$$
La relation entre la première intégrale et $\zeta(2)$ résulte du développement de $(1-x^2y^2)^{-1}$ en série entière de xy alors que la relation entre la première intégrale et π^2 résulte du changement de variable $(x,y) = (\sin u/\cos v, \sin v/\cos u)$ de Jacobien $(1-x^2y^2)^{-1}$ et qui transforme l'intégration sur $]0,1[^2$ en intégration sur
$$\Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\ v > 0,\ u + v < \frac{\pi}{2}\Big\}\,.$$
On conjecture que si on a deux représentations intégrales d'une période, alors on peut passer de l'une à l'autre en n'utilisant que les trois règles suivantes, dans lesquelles les fonctions et domaines d'intégration sont algébriques et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$:

(1) Additivité et relation de Chasles.

(2) Changement de variables : si Φ est un changement de variables, et $\Phi(D) = \Delta$, alors
$$\int_\Delta f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_D f(\Phi(y_1, \dots, y_n))|\det J_\Phi(y_1, \dots, y_n)|\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n.$$
(3) Formule de Stokes : Si Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$(c'est-à-dire dont le bord est une hypersurface de classe C^∞) et X un champ de vecteurs C^∞ jusqu'au bord dans Ω, $(X \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n))$, alors
$$\int_\Omega \operatorname{div} X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} X \cdot n(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$
où n est la normale sortante (dans $\mathbb{R}$, la formule de Stokes est simplement la formule de Newton $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$).

Aujourd'hui il n'existe pas d'algorithme capable de déterminer si deux nombres complexes dans $\mathbb{P}$ sont égaux.

19. Formes modulaires et équations différentielles linéaires

On a vu dans le lemme 127 que toute forme modulaire vérifie une équation différentielle non linéaire d'ordre 3. On va montrer que les formes modulaires satisfont aussi une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques, si on les exprime comme fonction d'un paramètre local.

Soit $f \in M_k(1)$. Soit t une fonction modulaire non constante. On appelle fonction modulaire une fonction, holomorphe ou méromorphe, sur $\mathscr{H}$ qui est invariante par l'action modulaire de $SL(2,\mathbb{Z})$ de poids 0. L'exemple le plus connu de fonction modulaire est l'*invariant modulaire* j défini par $j(z) = E_4^3(z)/\Delta(z)$ (voir (19)).

Théorème 139. — *Soit $f \in M_k(1)$ (avec k entier > 0), et soit t une fonction modulaire non constante. La fonction (multi-valuée) F définie localement au voisinage de tout point $z_0 \in \mathscr{H}$ par $F(t(z)) = f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$ à coefficients algébriques.*

Démonstration. — Soit $\Phi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}^{k+1}$ définie par $\Phi(z) = f(z)\begin{pmatrix} z^k \\ z^{k-1} \\ \vdots \\ z \\ 1\end{pmatrix}$. Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$. Par modularité de f, on a la relation

$$\Phi(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)\begin{pmatrix} (\gamma z)^k \\ (\gamma z)^{k-1} \\ \vdots \\ \gamma z \\ 1\end{pmatrix} = f(z)\begin{pmatrix} (az+b)^k \\ (az+b)^{k-1}(cz+d) \\ \vdots \\ (az+b)(cz+d)^{k-1} \\ (cz+d)^k\end{pmatrix} = S^k(\gamma)\Phi(z)$$

où $S^k(\gamma)$ est la k^{e} puissance symétrique [32] de γ :

$$S^k(\gamma) = \begin{pmatrix} a^k & \binom{k}{1}a^{k-1}b & \dots & \dots & b^k \\ a^{k-1}c & a^{k-1}d + \binom{k-1}{1}a^{k-2}bc & \dots & \dots & b^{k-1}d \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ ac^{k-1} & bc^{k-1} + \binom{k-1}{1}ac^{k-2}d & \dots & \dots & bd^{k-1} \\ c^k & \binom{k}{1}c^{k-1}d & \dots & \dots & d^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a la relation $\Phi(\gamma z) = S^k(\gamma)\Phi(z)$, où $S^k(\gamma)$ est une matrice indépendante de z. En dérivant par rapport à z, on a donc $(cz+d)^{-2}\Phi'(\gamma z) = S^k(\gamma)\Phi'(z)$. La

[32] Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'algèbre symétrique $S(V)$ de V est l'algèbre sur $\mathbb{R}$ quotient de l'algèbre tensorielle $T(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}$ par l'idéal engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, x et y parcourant V. On note $x_1 \odot \cdots \odot x_n$ l'image dans $S(V)$ d'un élément $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T(V)$. L'algèbre $S(V)$ est une algèbre commutative graduée (voir [**Bou70**] page A.III.67). Si u est un endomorphisme de V, on note $S(u) : S(V) \to S(V)$ l'unique homomorphisme d'algèbres graduées vérifiant $S(u)\circ\phi = \phi \circ u$ où ϕ désigne l'injection canonique de $V = S^1(V)$ dans $S(V)$. La restriction de $S(u)$ à $S^k(V)$, l'ensemble des éléments de $S(V)$ de degré k, est notée $S^k(u)$, et appelée la k^e *puissance symétrique* de u. Ici, on prend le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$, notons $\{e_1, e_2\}$ la base canonique. L'ensemble $\{w_i = e_1^{\odot k-i} \odot e_2^{\odot i}\}_{i\in\{0,\dots,k\}}$ est une base de $S^k(V)$, et l'application $S^k(u) : S^k(V) \to S^k(V)$ est définie par $S^k(u)(x_1 \odot \cdots \odot x_k) = u(x_1) \odot \cdots \odot u(x_k)$. Si $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$, γ est la matrice dans $\{e_1, e_2\}$ d'un endomorphisme de V, la k^{e} puissance symétrique de γ est la matrice $S^k(\gamma) \in SL(k+1,\mathbb{R})$ de $S^k(u)$ dans la base $\{w_i\}_{i\in\{0,\dots,k\}}$.

fonction t étant modulaire, on a $t(\gamma z) = t(z)$, d'où $(cz+d)^{-2}t'(\gamma z) = t'(z)$. On en déduit que, pour tout $z \in \mathscr{H}$ tel que $t'(z) \neq 0$, on a $\dfrac{\Phi'(\gamma z)}{t'(\gamma z)} = S^k(\gamma)\dfrac{\Phi'(z)}{t'(z)}$.

Si on définit l'opérateur $D_t = \dfrac{1}{t'(z)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$, on obtient ainsi $(D_t\Phi)(\gamma z) = S^k(\gamma)(D_t\Phi)(z)$, et par récurrence, pour tout $i \geqslant 0$, $(D_t^i\Phi)(\gamma z) = S^k(\gamma)(D_t^i\Phi)(z)$.

Notons $M(z)$ la matrice de taille $(k+2)\times(k+2)$

$$M(z) = \begin{pmatrix} (\Phi)(z) & (D_t\Phi)(z) & \dots & (D_t^{k+1})\Phi(z) \\ f(z) & D_t f(z) & \dots & D_t^{k+1}f(z) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant nul, puisque ses deux dernières lignes sont identiques. On a donc (en développant par rapport à la dernière ligne) :

$$\det M(z) = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i(D_t^i f)(z)\det M_i(z) = 0 \tag{95}$$

où $M_i(z)$ est la matrice $(k+1)\times(k+1)$ définie par

$$M_i(z) = \big(\Phi(z)\ (D_t\Phi)(z) \dots (D_t^{i-1}\Phi)(z)\ (D_t^{i+1}\Phi)(z) \dots (D_t^{k+1}\Phi)(z)\big).$$

La formule $(D_t^j\Phi)(\gamma z) = S^k(\gamma)(D_t^j\Phi)(z)$ montre que $M_i(\gamma z) = S^k(\gamma)M_i(z)$, et donc on a

$$\det(M_i(\gamma z)) = \det(M_i(z))$$

grâce à la formule $\det S^k(\gamma) = 1$, puisque $\det\gamma = 1$. La fonction $z \mapsto \det(M_i(z))$ est donc une fonction invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$, donc une fonction modulaire, donc une fonction rationnelle de j, donc une fonction algébrique de t, c'est-à-dire $\det(M_i(z)) = a_i(t(z))$, où a_i est une fonction algébrique. On en déduit l'équation fonctionnelle recherchée grâce à l'équation (95) si la fonction a_{k+1} est non identiquement nulle sur un voisinage de z_0 (car $D_t f = F'$). Sinon, la famille de fonctions $\{\Phi, D_t\Phi, \dots, D_t^k\Phi\}$ est liée au voisinage de z_0 ce qui fournit l'équation différentielle recherchée. □

Remarque 140. — Le théorème 139 se généralise aux formes modulaires $f \in M_k(\mathit{\Gamma})$ où $\mathit{\Gamma}$ est un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$: si $t_{\mathit{\Gamma}}$ est une fonction modulaire non constante pour $\mathit{\Gamma}$, alors la fonction multi-valuée F définie localement par $F(t_{\mathit{\Gamma}}(z)) = f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$ à coefficients algébriques.

Donnons quelques illustrations de ce théorème :

(1) On note $\theta(z) = \vartheta(0,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$ (voir l'annexe E). D'après la proposition 166 la fonction θ^2 est une forme modulaire de poids 1 sur le sous-groupe $\mathit{\Gamma}(2)$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ constitué des matrices congrues à l'identité modulo 2. On prend comme fonction modulaire sur ce sous-groupe la fonction λ définie par $\lambda(z) = 1 - \Delta(z/2)^{2/3}\Delta(2z)^{1/3}/\Delta(z)$. Alors,

$$\theta^2(z) = F(1/2, 1/2; 1; \lambda(z)). \tag{96}$$

Ici, F est la fonction hypergéométrique, définie pour $|z| < 1$ par

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

où $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ est le symbole de Pochhammer. Cette fonction se prolonge sur $\mathbb{C} \smallsetminus [1,+\infty[$. Si a, b et c sont rationnels, la fonction $z \mapsto F(a,b;c;z)$ est solution de l'équation différentielle linéaire de Picard-Fuchs (voir [**And89**]) d'ordre 2 : $\partial(\partial + c - 1)F = z(\partial + a)(\partial + b)F$, où on note $\partial = z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ (voir [**Beu92**]).

(2) On note $f_1(z) = 5G_2(z) - 25G_2(2z) + 3G_2(3z) - 30G_2(6z)$. C'est un élément de $M_2(6)$. On considère la fonction modulaire sur $\Gamma_0(6)$ définie par $t(z) = \left(\dfrac{\Delta(6z)\Delta(z)}{\Delta(2z)\Delta(3z)}\right)^{1/2}$. La fonction F_1 définie par $f_1(z) = F_1(t(z))$ est solution de l'équation d'ordre 3

$$(t^4 - 34t^3 + t^2)F_1''' + (6t^3 - 153t^2 + 3t)F_1'' + (7t^2 - 112t + 1)F_1' + (t-5)F_1 = 0.$$

C'est grâce à cette formule que Beukers a donné une interprétation modulaire du théorème d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$: cette équation lui a permis de montrer qu'une suite intervenant dans la démonstration d'Apéry, dont un point clé est qu'elle est à valeurs entières, était la suite des coefficients de $F_1(t)$, qui sont entiers puisque f_1 et t ont des développements de Fourier à coefficients entiers (voir [**KZ01**] et [**Fis04**]).

Remarque 141. — Les périodes sont des valeurs d'intégrales de formes différentielles algébriquement définies sur des chaînes dans des variétés algébriques. Si ces formes et ces chaînes dépendent d'un paramètre, alors les intégrales, considérées comme des fonctions de ce paramètre, satisfont des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, ce qui crée un lien entre l'étude des périodes et la théorie des équations différentielles linéaires.

Notons $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\big[1/\pi\big]$ (on conjecture que $1/\pi$ n'appartient pas à $\mathbb{P}$). Il paraît raisonnable, dans divers contextes (par exemple pour utiliser, dans le théorème des résidus, la multiplication par $1/2i\pi$), de considérer $\widehat{\mathbb{P}}$ plutôt que $\mathbb{P}$. Par exemple, lorsque a, b et c sont rationnels et x est un nombre algébrique, les valeurs $F(a,b;c;x)$ appartiennent à $\widehat{\mathbb{P}}$ [**KZ01**, § 2.2]. Mais on a $F(1/2, 1/2; 2; 1) = 4/\pi$ [**GR00**, 9.122.1 et 8.339.2], ce qui montre que, si $1/\pi$ n'est pas une période, on n'a pas nécessairement $F(a,b;c;x) \in \mathbb{P}$.

On rappelle qu'on dit qu'une forme modulaire est définie sur un corps K si K contient les coefficients de Fourier de f. On a le résultat suivant (voir [**KZ01**, Fact 2]) :

Théorème 142. — *Soit $f \in M_k(1)$, et soit t une fonction modulaire, toutes deux définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour tout $z_0 \in \mathscr{H}$ tel que $t(z_0)$ est algébrique, $f(z_0)$ appartient à $\widehat{\mathbb{P}}$ (en fait on a $\pi^k f(z_0) \in \mathbb{P}$).*

Démonstration. — On ne donne que les grandes lignes de la preuve. Pour démontrer ce théorème, on commence par le montrer pour une forme modulaire particulière :

on se place sur le sous-groupe $\Gamma_0(2)$. La fonction $f_1(z) = \vartheta^2(z)$ (voir l'annexe E) appartient à $M_1(2)$, est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et on montre (voir (96)) qu'il existe une fonction modulaire sur $\Gamma_0(2)$, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $t_1(z)$, telle que $f_1(z) = F(1/2, 1/2; 1; t_1(z))$. Cela prouve que, pour tout $z_0 \in \mathscr{H}$ tel que $t_1(z_0)$ est algébrique, la valeur $\pi f_1(z_0) \in \mathbb{P}$.

On démontre alors le cas général : les fonctions f/f_1^k et t_1 sont des fonctions modulaires définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ce sont des fonctions algébriques de t, et les coefficients de ces relations algébriques appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}$ car t est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Donc si $t(z_0)$ est algébrique, alors $t_1(z_0)$ et $f(z_0)/f_1(z_0)^k$ sont également algébriques, et donc $f(z_0) \in \dfrac{1}{\pi^k}\mathbb{P}$. □

20. Périodes et valeurs de fonctions L

On donne dans ce chapitre quelques résultats et conjectures sur le lien entre les valeurs spéciales des fonctions L et les périodes. On s'intéresse ici aux fonctions L de formes modulaires, mais la conjecture de Deligne-Beilinson-Scholl englobe une classe plus vaste de telles fonctions, les fonctions L motiviques. Les fonctions L associées à des formes modulaires primitives de poids k sont motiviques (résultat dû à Eichler et Shimura pour $k = 2$, Deligne pour $k > 2$ et Deligne et Serre pour $k = 1$).

***Conjecture 143* (Conjecture de Deligne-Beilinson-Scholl)**. — *Soit L une fonction L motivique. Soit $m \in \mathbb{Z}$ et r l'ordre d'annulation de L en m. Alors $L^{(r)}(m) \in \widehat{\mathbb{P}}$.*

Remarque 144. — La conjecture de Deligne-Beilinson-Scholl est en fait plus précise que l'énoncé que nous donnons. Elle décrit en effet parfaitement la période qui intervient.

Certains résultats ont été démontrés en direction de cette conjecture. On en extrait quelques uns de [**KZ01**, § 3.4 et 3.5] concernant les formes modulaires et on renvoie à ce texte pour les références, des ébauches de preuves et des exemples.

Théorème 145

(1) *Soit f une forme modulaire de poids $k \geqslant 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors on a $L(f, m) \in \widehat{\mathbb{P}}$ pour tout entier $m > 0$.*

(2) *Soit f une forme primitive de poids k pair, telle que $\Lambda(f, s) = -\Lambda(f, k - s)$. Alors $L'(f, k/2) \in \widehat{\mathbb{P}}$.*

L'équivalent du premier point du théorème 145 pour les formes modulaires de poids 1 n'est pas démontré en toute généralité. Il l'est pour certains cas particuliers (tel les séries θ associées à certaines formes quadratiques) *via* les travaux de Zagier & Gangl [**ZG00**] (voir [**KZ01**, § 3.4]).

Corollaire 146. — *Soit n un entier pair, et soit $Q(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique définie positive à coefficients rationnels. Alors les valeurs aux entiers $s > n/2$ de la* *fonction ζ_Q d'Epstein appartiennent à $\widehat{\mathbb{P}}$ (où ζ_Q est définie par*

$$\zeta_Q(s) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{Q(x_1,\dots,x_n)^s},$$

la somme se faisant sur les vecteurs $(x_1,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$).

Remarque 147. — Les résultats de ce genre sont liés à la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer : si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, donnée par l'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$, si r est le rang du groupe de Mordell-Weil $E(\mathbb{Q})$, la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer affirme que la fonction $L(E,s)$ s'annule précisément à l'ordre r en $s = 1$, et qu'on a $L^{(r)}(E,1) = c\Omega R$, où $\Omega = \int_{E(\mathbb{R})} \mathrm{d}x/y$ est la période réelle, R est le régulateur et $c \in \mathbb{Q}^*$. Kontsevich & Zagier montrent que le produit ΩR est une période [**KZ01**, § 3.5]. Dans le but de progresser en direction de la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer, il serait donc intéressant de démontrer la conjecture de Deligne-Beilinson-Scholl dans ce cadre, c'est-à-dire de montrer que si f est une forme primitive de poids $k > 0$ pair, et r est l'ordre d'annulation de $L(f,s)$ en $s = k/2$, alors $L^{(r)}(f,k/2) \in \mathbb{P}$. Les résultats cités précédemment montrent le résultat pour $r = 0$ ou 1.

PARTIE IV
DÉFINITION GÉNÉRALE DES FORMES MODULAIRES

La notion de forme modulaire qu'on a exposée au chapitre 1 est celle pour laquelle on dispose du plus grand nombre de résultats. Il existe cependant des généralisations. L'une d'entre elles est donnée dans le texte de F. Pellarin. On en donne une autre, qui permet d'étudier les formes de poids demi-entier. Le fait que la fonction ϑ, introduite au § E, est une forme modulaire de poids 1/2 suffirait à justifier l'introduction des formes de poids demi-entier pour lesquelles beaucoup de choses demeurent inconnues (par exemple, un encadrement optimal des coefficients de Fourier).

Appendice A
Systèmes multiplicatifs

On introduit la notion de *système multiplicatif*. Si $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, on définit $\sqrt{z}$ par sa détermination principale

$$\sqrt{z} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\log z\right), \ \log z = \log|z| + i\arg z, \ -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

En particulier,

$$\frac{\sqrt{zz'}}{\sqrt{z}\sqrt{z'}} = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < \arg z + \arg z' \leqslant \pi\,; \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})$, on définit sur $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto j(\gamma, z)$ par $j(\gamma, z) = cz + d$. Elle est holomorphe, ne s'annule pas sur $\mathscr{H}$ et est soit constante égale à -1, soit à valeurs dans $\mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, 0]$. Ainsi, pour M et N dans $SL(2,\mathbb{Z})$, et pour tout entier $r \geqslant 0$, le nombre complexe

$$\omega_r(M,N) = \left(\frac{\sqrt{j(MN,z)}}{\sqrt{j(M,Nz)}\sqrt{j(N,z)}}\right)^r$$

est indépendant de $z \in \mathscr{H}$ puisque la fonction $z \mapsto \omega_r(M,N)$ est holomorphe à valeurs dans $\{-1,1\}$ (voir l'équation (2) qu'on utilisera plusieurs fois dans cette annexe). Il se calcule aisément puisque le choix de $z = N^{-1}i$ conduit à

$$\omega_r(M,N) = \begin{cases} 1 & \text{si } \arg j(M,i) + \arg j(N^{-1},-i) \in]-\pi,\pi]\,; \\ (-1)^r & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit la

Proposition 148. — *Pour toutes matrices M et N de $SL(2,\mathbb{Z})$,*

(1) $\omega_r(M,N) \in \{-1,1\}$ *;*
(2) $\omega_r(M,I) = 1$ *;*
(3) *Si r est pair alors $\omega_r(M,N) = 1$;*
(4) *Pour tout entier ℓ, $\omega_{r+2\ell}(M,N) = \omega_r(M,N)$.*

Définition 149. — Soit $r > 0$ un entier et Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$. Un *système multiplicatif* de *poids* $r/2$ par rapport à Γ est une application

$$v\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

telle que

(1) Il existe un entier $\ell > 0$ tel que, pour toute matrice M de Γ, on a
$$v(M)^\ell = 1\ ;$$
(2) Pour toutes matrices M et N de Γ, on a la relation de multiplicativité
$$v(MN) = \omega_r(M,N)v(M)v(N)\ ;$$
(3) Si $-I \in \Gamma$, alors
$$v(-I) = \exp\left(-i\pi\frac{r}{2}\right).$$

On a la

Proposition 150. — *Soit v un système multiplicatif de poids $r/2$ pour le sous-groupe Γ.*

(1) *Si r est pair alors v est un caractère ;*
(2) $v(I) = 1$ *;*
(3) *Si $M \in \Gamma$, alors*

$$v(M^{-1}) = \begin{cases} (-1)^r v(M)^{-1} & \textit{s'il existe } n \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } M = -T^n\,; \\ v(M)^{-1} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 151. — On suppose que $-I \in \Gamma$. En appliquant (3) à $M = -I$, on obtient

$$v(-I) = \pm \exp(-i\pi r/2).$$

En conséquence la condition (3) de la définition 149 n'est qu'un choix de signe : ce choix apparaîtra plus loin comme un choix de non vacuité.

Définition 152. — Soit v un système multiplicatif de poids $r/2$ pour le sous-groupe Γ et L une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$. On appelle *conjugué* de v par L, et on note v^L l'application

$$\begin{aligned} v^L \colon L^{-1}\Gamma L &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ M &\longmapsto \omega_r(L, M)\omega_r(LML^{-1}, L)v(LML^{-1}). \end{aligned}$$

C'est un système multiplicatif de poids $r/2$ pour le sous-groupe conjugué $L^{-1}\Gamma L$.

Cette définition sera justifiée à la proposition 154.

Appendice B
Complément sur les pointes

Considérons x un élément de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$. Il existe $\tau_x \in SL(2, \mathbb{Z})$ telle que $\tau_x \infty = x$. Une telle matrice est appelée *matrice à l'infini* de x. On étudie le stabilisateur $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \colon \gamma x = x\}$ de x. On a

$$\tau_x^{-1}\Gamma_x \tau_x = SL(2, \mathbb{Z})_\infty \cap \tau_x^{-1}\Gamma\tau_x$$

et $SL(2, \mathbb{Z})_\infty = \langle -T\,,\, T\rangle$. Soit N un niveau de Γ, on a $T^N \in \Gamma(N) \subset \Gamma$, et donc $\tau_x^{-1}\Gamma\tau_x$ contient T^N (puisque $\Gamma(N)$ est distingué). On différencie deux cas :

(1) Supposons que $-I \in \Gamma$. On note h_x, et on appelle *largeur* de la pointe Γx, le plus petit entier strictement positif tel que $T^{h_x} \in \tau_x^{-1}\Gamma_x \tau_x$. On a

$$\tau_x^{-1}\Gamma_x \tau_x = \langle -T^{h_x}\,,\, T^{h_x}\rangle.$$

En notant $\gamma_x = \tau_x T^{h_x}\tau_x^{-1}$ on a donc

$$\Gamma_x = \langle -\gamma_x\,,\, \gamma_x\rangle.$$

Dans ce cas, les pointes seront toutes dites régulières.

(2) Supposons maintenant que $-I \notin \Gamma$. On note h_x, et on appelle *largeur* de la pointe Γx, le plus petit entier strictement positif tel que $T^{h_x} \in \tau_x^{-1}\Gamma_x \cdot \{-I\,,\, I\}\tau_x$. On a

$$\tau_x^{-1}\Gamma_x \cdot \{-I, I\}\tau_x = \langle -T^{h_x}, T^{h_x}\rangle.$$

En notant $\gamma_x = \tau_x T^{h_x}\tau_x^{-1}$ on a donc

$$\Gamma_x \cdot \{-I, I\} = \langle -\gamma_x\,,\, \gamma_x\rangle.$$

On est ainsi dans l'un des deux cas suivants :

(a) Soit $\gamma_x \in \Gamma_x$ et la pointe Γx est *régulière* ;

(b) Soit $\gamma_x \notin \Gamma_x$, dans ce cas, $-\gamma_x \in \Gamma_x$ et la pointe Γx est *irrégulière*.

Puisque τ_x est unique modulo multiplication à droite par $\pm$ une puissance de T, tout ce qui précède ne dépend pas du choix de la matrice à l'infini de x et la largeur d'une pointe ne dépend pas du représentant de la pointe choisi.

Appendice C
Définition des formes modulaires

On choisit pour tout ce paragraphe un sous-groupe de congruence Γ, un entier $r > 0$ et un système multiplicatif v de poids $\frac{r}{2}$ sur Γ.

Définition 153. — Une *fonction faiblement modulaire* sur Γ, de poids $\frac{r}{2}$ et de système multiplicatif v est une fonction méromorphe sur $\mathscr{H}$ vérifiant

$$f(\gamma z) = v(\gamma) j(\gamma, z)^{r/2} f(z)$$

pour tout $z \in \mathscr{H}$ et toute matrice $\gamma \in \Gamma$.

On note $M^{\mathrm{f}}_{r/2}(\Gamma, v)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions faiblement modulaires. Pour alléger l'écriture, on définit, pour toute matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, et toute fonction f méromorphe sur $\mathscr{H}$ la fonction

$$\begin{aligned} (f \underset{r/2}{|} M) \colon \mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (cz+d)^{-r/2} f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big). \end{aligned}$$

On a, pour toute fonction $f \colon \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ et toutes matrices M et N de $SL(2, \mathbb{Z})$ la relation

$$(f \underset{r/2}{|} MN) = \omega_r(M, N)((f \underset{r/2}{|} M) \underset{r/2}{|} N).$$

On justifie la définition 152 par la

Proposition 154. — *Soit L une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$. On a l'isomorphisme*

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{f}}_{r/2}(\Gamma, v) &\xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{f}}_{r/2}\left(L^{-1}\Gamma L, v^L\right) \\ f &\longmapsto (f \underset{r/2}{|} L). \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, on rappelle que τ_x est une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$ telle que $\tau_x \infty = x$ et que v^{τ_x} est le conjugué du système multiplicatif v par cette matrice. On définit $\kappa_x \in [0, 1[$ par

$$\exp(2i\pi\kappa_x) = \begin{cases} v^{\tau_x}(T^{h_x}) & \text{si } \Gamma x \text{ est régulière}\,; \\ v^{\tau_x}(-T^{h_x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où h_x est la largeur de Γx. On choisit une fonction $f \in M^{\mathrm{f}}_{r/2}(\Gamma, v)$. Puisque

$$(f \underset{r/2}{|} \tau_x) \in M^{\mathrm{f}}_{r/2}\left(\tau_x^{-1} \Gamma \tau_x, v^{\tau_x}\right),$$

on a

$$(f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z+h_x) = \exp(2i\pi\kappa_x)(f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z)$$

pour toute pointe Γx de Γ, ce qui se récrit

$$\exp\Big[-2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}(z+h_x)\Big](f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z+h_x) = \exp\Big[-2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}z\Big](f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z)$$

et implique le *développement de Fourier en la pointe* Γx

$$(f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z) = \exp\Big[2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}z\Big]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_x(n)\exp\Big[2i\pi\frac{n}{h_x}z\Big]$$

pour $\Im m\, z$ assez grand. Ce développement dépend du choix de x : si $\Gamma x = \Gamma x'$, alors $\widehat{f}_x(n)$ et $\widehat{f}_{x'}(n)$ peuvent différer d'une constante multiplicative qui est une racine de l'unité. Si $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $(f \underset{r/2}{|} M)$ admet un développement de Fourier puisqu'on peut choisir $\tau_{M\infty} = M$.

Définition 155. — Une *fonction modulaire* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v est une fonction faiblement modulaire sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v telle que pour toute pointe Γx de Γ, la fonction f est *méromorphe en la pointe* Γx, c'est-à-dire qu'il existe $N_x \in \mathbb{Z}$ tel que le développement de Fourier de f en Γx s'écrit

$$(f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z) = \exp\Big[2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}z\Big]\sum_{n=N_x}^{+\infty}\widehat{f}_x(n)\exp\Big[2i\pi\frac{n}{h_x}z\Big]$$

pour $\Im m\, z$ assez grand.

On note $M^0_{r/2}(\Gamma, v)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des *fonctions modulaires* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v. Les fonctions modulaires de poids 0 et de système multiplicatif constamment égal à 1 peuvent être vues comme des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann compacte ${}_{\Gamma}\backslash\overline{\mathscr{H}}$.

Définition 156. — Une *forme modulaire* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v est une fonction faiblement modulaire sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v, holomorphe sur $\mathscr{H}$ et telle que pour toute pointe Γx de Γ, la fonction f est *holomorphe en la pointe* Γx, c'est-à-dire que le développement de Fourier de f en Γx s'écrit

$$(f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z) = \exp\Big[2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}z\Big]\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}_x(n)\exp\Big[2i\pi\frac{n}{h_x}z\Big]$$

pour $\Im m\, z$ assez grand.

On note $M_{r/2}(\Gamma, v)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des *formes modulaires* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v. Enfin, on appelle *pointe singulière* une pointe Γx pour laquelle $\kappa_x = 0$.

Définition 157. — Une *forme parabolique* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v est une forme modulaire sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v, telle que f s'annule en les pointes singulières, c'est-à-dire, $\widehat{f_x}(0) = 0$ pour toute pointe singulière Γx de Γ.

On note $S_{r/2}(\Gamma, v)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des *formes paraboliques* sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v.

Remarque 158. — Soit f une forme de $M_{r/2}(\Gamma, v)$. Si Γx est une pointe non singulière, la fonction $z \mapsto (f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z)$ est à décroissance exponentielle à l'infini grâce à $\exp\left[2i\pi\frac{\kappa_x}{h_x}z\right]$. En les pointes singulières, ce facteur disparaît et il faut introduire une condition supplémentaire pour avoir la décroissance exponentielle à l'infini. C'est la raison de l'introduction des formes paraboliques.

Pour terminer ce paragraphe, on donne un critère permettant de vérifier qu'une fonction faiblement modulaire holomorphe est modulaire.

Lemme 159. — *Soit f une fonction faiblement modulaire sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v. On suppose que f est holomorphe sur $\mathscr{H}$ et qu'elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

(1) *Il existe deux réels c et d strictement positifs tels que si $\Im m\, z > c$ alors $|f(z)| \leqslant d$;*

(2) *Pour toute pointe Γx avec $x \in \mathbb{Q}$, il existe deux réels c et d strictement positifs tels que, si $|z - x - id| < d$, alors $|f(z)| \leqslant c|z - x|^{-r/2}$.*

Alors, f est une forme modulaire sur Γ, de poids $r/2$ et de système multiplicatif v.

Remarque 160. — Pour le voir, il suffit d'utiliser l'égalité

$$\widehat{f_x}(n) = \frac{1}{h_x}\int_{z_0}^{z_0+h_x} (f \underset{r/2}{|} \tau_x)(z) \exp\left[-2i\pi\frac{\kappa_x + n}{h_x}z\right] \mathrm{d}z$$

valable quelque soit $z_0 \in \mathscr{H}$ puis, de choisir $z_0 = it$ avec $t \to +\infty$. Puisque $\kappa_x < 1$, il est suffisant pour assurer la nullité de $\widehat{f_x}(n)$ lorsque $n < 0$, de savoir que $(f \underset{r/2}{|} \tau_x)$ est bornée sur une demi-bande de largeur h_x.

Appendice D

Dimension de l'espace des formes modulaires

On montre dans cette partie que l'espace $M_{r/2}(\Gamma, v)$ est de dimension finie et on donne une majoration de la dimension[33]. Lorsque v est quelconque, on ne dispose

[33] Majoration suffisante pour déterminer le nombre de décompositions d'un entier en somme de quatre carrés d'entiers par exemple.

d'aucune formule exacte. En particulier, on n'a pas de critère général permettant de savoir si $M_{r/2}(\Gamma, v)$ est réduit ou non à la fonction nulle.

Proposition 161. — *Soit Γ un sous-groupe de congruence. On note μ l'indice de $\Gamma \cdot \{-I, I\}$ dans le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$. Soit $r > 0$ un entier et v un système multiplicatif de poids $r/2$ sur Γ. Alors*

$$\dim M_{r/2}(\Gamma, v) \leqslant 1 + \left\lfloor \frac{\mu}{12} \cdot \frac{r}{2} \right\rfloor .$$

Démonstration. — On écrit

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma \cdot \{-I, I\}\, M_i, \quad M_i \in SL(2,\mathbb{Z})$$

et on choisit $\ell > 0$ tel que $v^\ell = 1$. Si $f \in M_{r/2}(\Gamma, v)$ et si

$$F_f = \prod_{i=1}^{\mu} (f \underset{r/2}{|} M_i)$$

alors $F_f^{2\ell} \in M_{\mu r \ell}(SL(2,\mathbb{Z}), 1)$: on peut aisément montrer que $(F_f^{2\ell} \underset{\mu r\ell}{|} M) = F_f^{2\ell}$ pour toute matrice M de $SL(2,\mathbb{Z})$ et l'existence d'un développement de Fourier de la forme

$$F_f(z)^{2\ell} = \exp(2i\pi\alpha z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\left(2i\pi \frac{n}{h} z\right)$$

avec $\alpha \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{N}^*$; puis on déduit du fait que $F_f^{2\ell}$ est périodique de période 1 que a_n est nul si n/h n'est pas entier et que $\exp(2i\pi\alpha) = 1$. On note $d = 1 + \left\lfloor \frac{\mu r}{24} \right\rfloor$ et on suppose, par l'absurde, que $\dim M_{r/2}(\Gamma, v) \geqslant d + 1$. Il existe donc $d+1$ fonctions linéairement indépendantes $f_1, \ldots, f_{d+1}$ dans $M_{r/2}(\Gamma, v)$. Soit $a \in M_1 F_1$, où F_1 est le domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$ de la proposition 3. La considération du système de rang inférieur strictement à $d+1$ et non nul

$$\begin{cases} f_1(a)x_1 & + \cdots + & f_{d+1}(a)x_{d+1} & = 0 \\ f_1'(a)x_1 & + \cdots + & f_{d+1}'(a)x_{d+1} & = 0 \\ & \vdots \ \cdots \ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(d-1)}(a)x_1 & + \cdots + & f_{d+1}^{(d-1)}(a)x_{d+1} & = 0 \end{cases}$$

montre qu'il existe une forme $f = x_1 f_1 + \cdots + x_{d+1} f_{d+1}$ différente de la fonction nulle de $M_{r/2}(\Gamma, v)$ qui admet a pour zéro d'ordre d. Ainsi, $F_f^{2\ell}$ admet $M_1^{-1}a$ pour zéro d'ordre supérieur ou égal à $2\ell d > \mu r \ell/12$ ce qui contredit le lemme 22. □

Remarque 162. — Dans le cas du système multiplicatif trivial, cette majoration est proche de la valeur exacte comme on l'a vu à la remarque 34 pour le cas du groupe $\Gamma_0(N)$.

Appendice E
Exemple : fonction ϑ

On note ϑ la fonction

$$\begin{aligned}\vartheta\colon \mathbb{C}\times\mathscr{H} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (z,\tau) &\longmapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\pi m^2\tau+2i\pi mz\right).\end{aligned}$$

Elle est absolument convergente sur $\mathbb{C}\times\mathscr{H}$ et normalement convergente sur le produit de tout compact de $\mathbb{C}$ avec tout compact de $\mathscr{H}$. Ainsi, ϑ est holomorphe sur $\mathbb{C}\times\mathscr{H}$.

Pour tous entiers a et b, on a la transformation

$$\vartheta(z+a\tau+b,\tau)=\exp(-i\pi a^2\tau-2i\pi az)\vartheta(z,\tau). \tag{97}$$

Cette relation permet de décrire les zéros de ϑ.

Proposition 163. — *La fonction ϑ ne s'annule que pour $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$ tel qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ avec $z=(a+1/2)\tau+b+1/2$. La fonction $z\mapsto\vartheta(z,\tau)$ n'a que des zéros simples.*

Démonstration. — On fixe $\tau\in\mathscr{H}$. Grâce à la relation (97), il suffit de vérifier que si $\mathcal{R}$ est le parallélogramme dans $\mathbb{C}$ de sommets 0, 1, τ et $\tau+1$, la fonction $z\mapsto\vartheta(z,\tau)$, restreinte aux complexes z tels que $(z,\tau)\in\mathcal{R}$, ne s'annule qu'une fois (en comptant les annulations avec multiplicité) et que l'annulation est en $z=(1+\tau)/2$. En définissant $f(z)=\exp(i\pi z)\vartheta[z+(1+\tau)/2,\tau]$, on voit que f est impaire et s'annule donc en 0. Cela prouve que $\vartheta[(\tau+1)/2,\tau]=0$. Enfin, le nombre de zéros (avec multiplicité) $N_{\mathcal{R}}$ de ϑ dans $\mathcal{R}$ est donné par

$$N_{\mathcal{R}}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}}\frac{\partial_z\vartheta(z,\tau)}{\vartheta(z,\tau)}\,\mathrm{d}z$$

(voir, par exemple, [**FB95**, Kapitel III, Satz 7.4] ou [**God02**, Chapitre VIII, § 2, n° 5(iii)]). La périodicité de $z\mapsto\vartheta(z,\tau)$ donne la nullité de la contribution verticale dans l'intégrale. La dérivation par rapport à z de (97) avec $a=b=1$ permet de calculer la contribution horizontale et obtenir $N_{\mathcal{R}}=1$. □

D'une certaine façon, la relation (97) caractérise à τ fixé la fonction $z\mapsto\vartheta(z,\tau)$.

Proposition 164. — *Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\times\mathscr{H}$ telle que*

(1) *Pour tout $\tau\in\mathbb{C}$, la fonction $z\mapsto f(z,\tau)$ est périodique de période 1 ;*

(2) *Pour tout $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$, on a $f(z+\tau,\tau)=\exp(-i\pi\tau-2i\pi z)f(z,\tau)$,*

alors il existe une fonction holomorphe g sur $\mathscr{H}$ telle que, pour tout $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$, on a $f(z,\tau)=g(\tau)\vartheta(z,\tau)$.

Démonstration. — Le premier point donne un développement de Fourier pour la fonction $z\mapsto\vartheta(z,\tau)$ et le second point donne une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement qui permet de conclure que le rapport $f(z,\tau)/\vartheta(z,\tau)$ ne dépend que de τ. Cette fonction est holomorphe puisque, grâce à la proposition 163, $\vartheta(0,\tau)$ ne s'annule jamais. $\square$

Une deuxième caractérisation est donnée dans la proposition 165. La preuve de cette proposition donne un exemple d'utilisation des formes modulaires.

Proposition 165. — *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\times\mathscr{H}$ vérifiant*

(1) *Pour tout $\tau\in\mathbb{C}$, la fonction $z\mapsto f(z,\tau)$ est périodique de période 1 ;*

(2) *Pour tout $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$, on a*
$$f(z+\tau,\tau)=\exp(-i\pi\tau-2i\pi z)f(z,\tau)\ ;$$

(3) *Pour tout $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$, on a*
$$f\left(z+\frac{1}{2},\tau+1\right)=f(z,\tau)\ ;$$

(4) *Pour tout $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathscr{H}$, on a*
$$f\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\exp\left(-i\pi\frac{z^2}{\tau}\right)f(z,\tau)\ ;$$

(5) *Pour tout $z\in\mathbb{C}$,*
$$\lim_{\Im m\,\tau\to+\infty}f(z,\tau)=1.$$

Alors, $f=\vartheta$.

Démonstration. — Les conditions sont toutes nécessaires. La seule qui mérite une explication est la quatrième. En définissant la fonction h sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x):=\exp(2i\pi xz+i\pi x^2\tau)$$
la formule de Poisson donne
$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{h}(n)=\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\exp\left(i\pi\frac{z^2}{\tau}\right)\vartheta\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right).$$
On montre maintenant que les conditions sont suffisantes. Grâce à la proposition 164, il existe une fonction g holomorphe sur $\mathscr{H}$ telle que $f(z,\tau)=g(\tau)\vartheta(z,\tau)$. Cette fonction est périodique de période 1 grâce à la troisième condition. Elle est invariante par $z\mapsto Sz$ grâce à la quatrième condition. La cinquième condition implique l'holomorphie à l'infini et g est donc une forme modulaire de poids 0 et de système 1 sur $SL(2,\mathbb{Z})$. On en déduit que g est la fonction constante égale à 1 grâce à la remarque 23. $\square$

Afin de continuer la description de la loi de transformation de ϑ, on introduit le groupe
$$\varGamma_\vartheta:=\{M\in SL(2,\mathbb{Z})\colon M\equiv I[2]\text{ ou }M\equiv S[2]\}\,.$$
Ce groupe qui contient $-I$ a deux pointes, qui sont
$$\varGamma_\vartheta\infty=\left\{\frac{p}{q}\colon p\text{ impair, }q\text{ pair}\right\}$$

et

$$\Gamma_\vartheta 1 = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ impair}, q \text{ impair} \right\}.$$

Cela résulte de (3). On a

$$\Gamma_\vartheta = \Gamma(2) \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Gamma(2)$$

donc, grâce à la proposition 4, l'indice de Γ_ϑ dans $\Gamma(2)$ est 3. De la même façon qu'on détermine les générateurs de $SL(2,\mathbb{Z})$, on peut montrer que Γ_ϑ est engendré par T^2 et S.

Proposition 166. — *Soit a, b, c et d des entiers tels que $ad - bc = 1$, et tels que ab et cd sont pairs, on a*

$$\vartheta\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \zeta_{c,d}\sqrt{c\tau+d}\exp\left(i\pi c\frac{z^2}{c\tau+d}\right)\vartheta(z,\tau)$$

où $\zeta_{c,d}$ est la racine huitième de l'unité donnée par :

$$\zeta_{c,d} = \begin{cases} i^{(d-1)/2}\left(\dfrac{c}{|d|}\right) & \textit{si } c \geqslant 0 \textit{ est pair ;} \\ \exp\left(-i\frac{\pi}{4}c\right)\left(\dfrac{d}{|c|}\right). & \textit{si } c \geqslant 0 \textit{ est impair ;} \\ i\zeta_{-c,-d} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 167. — Le symbole $\left(-\right)$ est le symbole de Jacobi. On a $\left(\frac{0}{1}\right) = 1$ puis si $n \neq 1$ est un entier naturel impair et m un entier relatif premier à n, on écrit la décomposition en facteurs premiers (non nécessairement distincts) de n comme $n = p_1 \cdots p_\nu$. Alors

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{m}{p_\nu}\right)$$

les symboles de droite étant ceux de Legendre (voir la remarque 32). Avec les fonctions ε et ϖ comme en (20) et (21), on a :

(1) $\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k'}{n}\right)$ si $k' \equiv k[n]$
(2) $\left(\frac{k\ell}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{\ell}{n}\right)$ si k et ℓ sont premiers à n
(3) $\left(\frac{k}{mn}\right) = \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{n}\right)$ si n et m sont premiers à k
(4) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\varepsilon(n)}$
(5) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\varpi(n)}$ pour n impair

et la loi de réciprocité de Jacobi

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n)}\left(\frac{n}{m}\right) \quad m \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{N}^*, \text{ premiers entre eux et impairs.}$$

Démonstration. — On suppose $c \geqslant 0$. En remplaçant (a,b,c,d) par $(-a,-b,-c,-d)$, on peut en effet s'y ramener. La preuve a deux composantes : l'une analytique pour calculer la forme de l'équation fonctionnelle et l'autre arithmétique pour évaluer la valeur exacte de ζ.

On définit la fonction ψ par :

$$\psi(y,\tau)=e^{i\pi c(c\tau+d)y^2}\vartheta[(c\tau+d)y,\tau],$$

grâce à (97) et puisque cd est pair,

$$\psi(y+1,\tau)=\psi(y,\tau).$$

Mais grâce à (97) et puisque ab et cd sont pairs,

$$\psi\left(y+\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\tau\right)=\exp\left(-2i\pi y-i\pi\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\psi(y,\tau). \tag{98}$$

On pose $M:=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$. Soit $\varphi(y,\tau):=\psi\left(y,M^{-1}\tau\right)$. Alors

$$\varphi\left(y+\tau,\tau\right)=e^{-2i\pi y-i\pi\tau}\varphi\left(y,\tau\right)$$

et

$$\varphi(y+1,\tau)=\varphi(y,\tau)$$

donc, d'après la proposition 164, il existe une fonction holomorphe h sur $\mathscr{H}$ telle que : $\varphi\left(y,\tau\right)=h\left(\tau\right)\vartheta\left(y,\tau\right)$. On applique cette égalité à $M\tau$ au lieu de τ et on choisit $y=\dfrac{z}{c\tau+d}$ pour obtenir une fonction g méromorphe telle que :

$$\vartheta\Big(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)=g(\tau)\exp\Big(i\pi c\frac{z^2}{c\tau+d}\Big)\vartheta(z,\tau). \tag{99}$$

On calcule g. Le terme constant du développement de Fourier de $z\mapsto\vartheta\Big(z,\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)$ est 1 donc

$$\int_0^1\vartheta(z,\frac{a\tau+b}{c\tau+d})\,\mathrm{d}\,\Re e\,z=1,$$

et (99) donne

$$\vartheta\left(z,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=g(\tau)\exp\left[i\pi c(c\tau+d)z^2\right]\vartheta\left[(c\tau+d)z,\tau\right]$$

ainsi que

$$g(\tau)^{-1}=\int_0^1\exp\left[i\pi c(c\tau+d)z^2\right]\vartheta\left[(c\tau+d)z,\tau\right]\mathrm{d}\,\Re e\,z.$$

Si $c=0$, alors $d=a=\pm1$ et la fonction g est constante égale à 1, on suppose désormais $c\neq0$. On peut écrire (en utilisant l'indépendance en $\Im m\,z$ du résultat)

$$g(\tau)^{-1}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-i\pi m^2d/c)\int_0^1\exp\left[i\pi(cx+m)^2(\tau+d/c)\right]\mathrm{d}x.$$

En écrivant $m=n+rc$ avec $0\leqslant n\leqslant c-1$ et $r\in\mathbb{Z}$, on obtient

$$g(\tau)^{-1}=\frac{S(d,c)}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\pi x^2(\tau+d/c)\right]\mathrm{d}x.$$

avec

$$S(d,c):=\sum_{n=0}^{c-1}\exp\left(-i\pi n^2\frac{d}{c}\right).$$

Pour $\tau = it - d/c$, l'intégrale vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi x^2 t\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc, par prolongement analytique

$$g(\tau) = \frac{\sqrt{-i}\sqrt{c}}{S(d,c)}\sqrt{c\tau + d}.$$

Ceci achève la partie analytique de la preuve, et le calcul de $S(d,c)$ relève de l'arithmétique.

Étant donné $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme de Gauss

$$G(u,v) = \sum_{n=0}^{v-1} \exp\left(2i\pi \frac{u}{v} n^2\right).$$

Si v est impair et premier à u, on a

$$G(u,v) = \left(\frac{u}{v}\right) i^{\varepsilon(v)} \sqrt{v}. \tag{100}$$

[**Iwa97**, lemma 4.8]. Si c est impair, d est pair et on écrit $d = 2d'$. Alors,

$$S(d,c) = G(-d',c) = i^{3\varepsilon(c)+2\varpi(c)} \left(\frac{d}{c}\right) \sqrt{c}.$$

On termine le cas c impair en vérifiant

$$\frac{\sqrt{-i}}{i^{3\varepsilon(c)+2\varpi(c)}} = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}c\right).$$

Lorsque c est pair, la preuve est plus subtile et utilise la loi de réciprocité de Jacobi. On pose $c = 2^\gamma c'$ avec $\gamma \geqslant 1$ et c' impair, d est impair et premier à c'. On a (voir la remarque 169)

$$S(d,c) = \frac{1}{2}G(-d,2c) = \frac{1}{2}G\left(-2^{\gamma+1}d, c'\right) G\left(-dc', 2^{\gamma+1}\right).$$

Ensuite, d'après (100),

$$\begin{aligned} G\left(-2^{\gamma+1}d, c'\right) &= i^{\varepsilon(c')} \left(\frac{-2^{\gamma+1}d}{c'}\right) \sqrt{c'} \\ &= i^{3\varepsilon(c')+2(\gamma+1)\varpi(c')} \left(\frac{d}{c'}\right) \sqrt{c'} \end{aligned}$$

puis (voir la remarque 170),

$$\begin{aligned} G\left(-dc', 2^{\gamma+1}\right) &= \left(\frac{2^{\gamma+1}}{|dc'|}\right) \left(1 + i^{-dc'}\right) 2^{(\gamma+1)/2} \\ &= (-1)^{\varpi(d)+(\gamma+1)\varpi(c')} \exp\left[i(-1)^{\varepsilon(-dc')}\frac{\pi}{4}\right] 2^{\gamma/2+1} \left(\frac{2^\gamma}{|d|}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{d}{c'}\right)\left(\frac{2^\gamma}{|d|}\right) = \left(\frac{c}{|d|}\right)(-1)^{\varepsilon(c')\varepsilon(|d|)+\delta\varepsilon(c')}$$

où δ est nul si $d > 0$ et vaut 1 sinon. Ainsi

$$G(-d, 2c) = 2i^{2\varpi(d)+[3+2\varepsilon(|d|)+2\delta]\varepsilon(c')} \exp\left[i(-1)^{\varepsilon(-dc')}\frac{\pi}{4}\right]\left(\frac{c}{|d|}\right)\sqrt{c}.$$

On termine la preuve en vérifiant

$$\frac{\sqrt{-i}}{i^{2\varpi(d)+[3+2\varepsilon(|d|)+2\delta]\varepsilon(c')}\exp\left[i\frac{\pi}{4}(-1)^{\varepsilon(-dc')}\right]} = i^{(d-1)/2}$$

qui implique

$$S(d, c) = \frac{\sqrt{-i}}{i^{(d-1)/2}}\left(\frac{c}{|d|}\right)\sqrt{c} \quad (c \geqslant 0 \text{ pair}, d \text{ impair}, (c, d) = 1). \qquad \square$$

Remarque 168. — Il résulte de la proposition précédente que la fonction $\tau \mapsto \vartheta(0, \tau)^4$ est une forme modulaire de poids 2 et système multiplicatif ζ^4 sur Γ_ϑ (la condition aux pointes est démontrée en utilisant la remarque 160). La majoration de la dimension de cet espace montre que cette dimension est 1. La fonction $\tau \mapsto 4G_2(2\tau) - G_2(\tau/2)$ est aussi une forme de cet espace. Cela entraîne, pour tout n entier naturel non nul

$$\#\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \colon n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right\} = 8\sum_{\substack{d|n\\ 4\nmid d}} d.$$

Si ce calcul est faisable, c'est que dans la décomposition de ϑ^4 en séries d'Eisenstein et formes paraboliques, la partie parabolique est nulle et on sait calculer la série d'Eisenstein qui intervient (la seule pointe singulière est ∞). Pour les détails, voir [**Iwa97**, § 3.2]. De cette façon, on peut obtenir le nombre de décompositions d'un entier en $2s$ carrés avec s entier de $[1, 4]$. Voir, par exemple, [**FB95**] pour la décomposition en 8 carrés et [**Iwa97**, § 11.3] pour une discussion générale.

Remarque 169. — Dans la preuve de la proposition 166, on a utilisé la formule de *multiplicativité croisée*

$$G(m, n_1n_2) = G(mn_2, n_1)G(mn_1, n_2), \qquad \text{pour } n_1 \text{ et } n_2 \text{ premiers entre eux.}$$

On la prouve. L'idée principale est que la sommation se fait sur les classes modulo le second argument. On a

$$\begin{aligned} G(mn_2, n_1)G(mn_1, n_2) &= \sum_{k_1\in\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}} \exp\left[2i\pi\frac{m}{n_1n_2}(k_1^2n_2^2 + k_2^2n_1^2)\right] \\ &= \sum_{k_1\in\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}} \exp\left[2i\pi\frac{m}{n_1n_2}(k_1n_2 + k_2n_1)^2\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}} \exp\left(2i\pi\frac{m}{n_1n_2}k\right) \end{aligned}$$

grâce au lemme chinois.

Remarque 170. — Dans la preuve de la proposition 166, on a utilisé la formule

$$G\left(m, 2^r\right) = \left(\frac{2^r}{|m|}\right)\left(1+i^m\right) 2^{r/2}, \quad (m \text{ impair}, r \geqslant 2).$$

On la prouve. Pour $r \geqslant 2$ et par division euclidienne de l'indice de sommation par 2^{r-1}, on a

$$\begin{aligned} G\left(m, 2^r\right) &= \sum_{n=0}^{2^{r-1}-1} \sum_{k=0}^{1} \exp\left[2i\pi \frac{m}{2^r}\left(2^{r-1}k+n\right)^2\right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{2^{r-1}-1} \exp\left(2i\pi \frac{m}{2^r} n^2\right). \end{aligned} \tag{101}$$

D'autre part, pour $r \geqslant 4$, une division euclidienne de l'indice de sommation par 2^{r-2} donne

$$\begin{aligned} G\left(m, 2^r\right) &= \sum_{n=0}^{2^{r-2}-1} \exp\left(2i\pi \frac{m}{2^r} n^2\right) \sum_{k=0}^{3} \exp(i\pi m k n) \\ &= 4 \sum_{\ell=0}^{2^{r-3}-1} \exp\left(2i\pi \frac{m}{2^{r-2}} \ell^2\right) \\ &= 2G\left(m, 2^{r-2}\right) \quad \text{d'après (101).} \end{aligned}$$

Si r est pair, on a alors

$$G\left(m, 2^r\right) = 2^{r/2} \frac{G(m,4)}{2}$$

puis

$$G(m,4) = 2\left(1+i^m\right) = 2\left(\frac{2^r}{|m|}\right)\left(1+i^m\right)$$

puisque, par parité de r, le symbole de Jacobi vaut 1. Si r est impair,

$$G\left(m, 2^r\right) = 2^{r/2} \frac{G(m,8)}{2\sqrt{2}}$$

puis

$$G(m,8) = 4\exp\left(i\frac{\pi}{4}m\right) = 4\left(\frac{2}{|m|}\right)\frac{1+i^m}{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{2^r}{|m|}\right)\frac{1+i^m}{\sqrt{2}}.$$

Appendice F

Formes modulaires associées à des caractères de Dirichlet

Dans cette section on étudie les formes modulaires associées à des caractères de Dirichlet. Cette notion, qui généralise les formes modulaires sur $\Gamma_0(N)$, est un cas particulier de formes modulaires avec systèmes multiplicatifs. Ces formes sont fréquemment rencontrées.

On suppose dans cette section que $\varGamma = \varGamma_1(N)$, pour un entier N strictement positif, où $\varGamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z});\ N|c,\ N|(a-1),\ N|(d-1)\}$. Un caractère de Dirichlet modulo N est un morphisme χ multiplicatif de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{C}^*$ étendu à $\mathbb{Z}$ par la formule

$$\chi(m) = \begin{cases} \chi(m \bmod N) & \text{si } (m,N) = 1; \\ 0 & \text{si } (m,N) > 1. \end{cases}$$

L'ensemble des caractères de Dirichlet modulo N forme un groupe multiplicatif de cardinal $\varphi(N)$, dont l'élément neutre χ_0 (appelé *caractère principal* modulo N) vérifie $\chi_0(n) = \delta((n,N) = 1)$.

Définition 171. — Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N. On définit un caractère χ sur $\varGamma_0(N)$ par

$$\chi(\gamma) = \chi(d) \qquad \text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \varGamma_0(N).$$

On définit l'espace $M_k\,(N,\chi)$ (resp. $S_k\,(N,\chi)$) comme le sous-espace vectoriel de $M_k\,(\varGamma_1(N))$ (resp. $S_k\,(\varGamma_1(N))$) des formes modulaires (resp. paraboliques) f vérifiant

$$(f\underset{k}{|}\gamma) = \chi(\gamma)f \qquad \text{pour tout } \gamma \in \varGamma_0(N).$$

Si $\chi(-1) \neq (-1)^k$, on a $M_k\,(N,\chi) = \{0\}$. On a la décomposition (voir [**Miy89**] page 114)

$$M_k\,(\varGamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_k\,(N,\chi)$$

et

$$S_k\,(\varGamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} S_k\,(N,\chi)\,, \tag{102}$$

la somme se faisant sur tous les caractères de Dirichlet modulo N vérifiant $\chi(-1) = (-1)^k$ (puisque si G est un groupe fini agissant sur l'espace vectoriel V, on a la décomposition

$$V = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} V_\chi$$

où $\widehat{G}$ désigne le groupe des caractères de G, et où, pour tout $g \in G$, pour tout $\chi \in \widehat{G}$ et pour tout $v \in V_\chi$, $g \cdot v = \chi(g)v$).

On a défini au § 7.1 les opérateurs de Hecke sur $M_k\,(N)$. En fait, on peut les décrire de façon abstraite comme des éléments d'un anneau (l'anneau de Hecke) à l'aide de doubles classes d'équivalences (on peut aussi les voir comme des correspondances sur les courbes modulaires, pour ces différentes descriptions voir [**DI95**]) et les T_n définis au § 7.1 sont la réalisation de ces opérateurs sur l'espace des formes modulaires $M_k\,(N)$.

On peut de la même façon définir des opérateurs T_n sur l'espace $M_k\,(\varGamma_1(N))$. Ces opérateurs possèdent la propriété d'être stables sur les sous-espaces $M_k\,(\varGamma_0(N),\chi)$, pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N vérifiant $\chi(-1) = (-1)^k$. Sur $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$, ils sont définis par

$$T_n f(z) = \frac{1}{n}\sum_{ad=n}\chi(a)a^k\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

De plus, les opérateurs T_n vérifient sur $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ la relation

$$(T_n f, g) = \chi(n)(f, T_n g).$$

Cela permet de montrer (par le théorème de décomposition spectrale) que la formule (102) est en fait une décomposition orthogonale pour le produit scalaire de Petersson, et que chaque sous-espace $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces propres pour l'action des opérateurs T_n, $(n,N)=1$.

En particulier, une forme primitive $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ appartient à $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ pour un certain caractère de Dirichlet χ modulo N vérifiant $\chi(-1) = (-1)^k$.

RÉFÉRENCES

[AL70] A.O.L. Atkin & J. Lehner – « Hecke operators on $\Gamma_0(m)$ », *Math. Ann.* **185** (1970), p. 134–160.

[And89] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, E13, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[Ber79] D. Bertrand – « Sur les périodes de formes modulaires », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), no. 10, p. A531–A534.

[Ber01] ______, « $\Theta(\tau, z)$ and transcendence », in *Introduction to algebraic independence theory*, Lect. Notes in Math., vol. 1752, Springer, Berlin, 2001, p. 1–11.

[Beu92] F. Beukers – « Differential Galois theory », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 413–439.

[Bou70] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.

[Bru95] A. Brumer – « The rank of $J_0(N)$ », in *Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992)*, Astérisque, vol. 228, Société Mathématique de France, 1995, p. 41–68.

[CDF97] J.B. Conrey, W. Duke & D.W. Farmer – « The distribution of the eigenvalues of Hecke operators », *Acta Arith.* **78** (1997), no. 4, p. 405–409.

[Coh80] H. Cohen – « Sur certaines sommes de séries liées aux périodes de formes modulaires », Séminaire de théorie des nombres de Limoges, 1980.

[CWZ05] J.A. Csirik, J.L. Wetherell & M. Zieve – « On the genera of $X_0(N)$ », *J. Number Theory* ($\geqslant$ 2005), à paraître.

[DI95] F. Diamond & J. Im – « Modular forms and modular curves », in *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995, p. 39–133.

[DS74] P. Deligne & J.-P. Serre – « Formes modulaires de poids 1 », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **7** (1974), p. 507–530 (1975).

[Duk99] W. Duke – « When is the product of two Hecke eigenforms an eigenform ? », in *Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, de Gruyter, Berlin, 1999, p. 737–741.

[FB95] E. Freitag & R. Busam – *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1995, deuxième édition étendue.

[Fis04] S. Fischler – « Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal,...) », Astérisque, vol. 294, Société Mathématique de France, 2004, p. vii, 27–62.

[Fre83] E. Freitag – *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Gan66] F.R. Gantmacher – *Théorie des matrices. Tome 1 : Théorie générale*, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 18, Dunod, Paris, 1966, traduit du Russe par Ch. Sarthou.

[Gha02] E. Ghate – « On products of eigenforms », *Acta Arith.* **102** (2002), no. 1, p. 27–44.

[God02] R. Godement – *Analyse mathématique. III (Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann)*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[GR00] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik – *Table of integrals, series, and products*, sixième éd., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000, traduit du russe, traduction éditée et avec une préface de Alan Jeffrey et Daniel Zwillinger.

[Guo96] J. Guo – « On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for GL(2) », *Duke Math. J.* **83** (1996), no. 1, p. 157–190.

[GZ86] B.H. Gross & D.B. Zagier – « Heegner points and derivatives of L-series », *Invent. Math.* **84** (1986), no. 2, p. 225–320.

[Hab83] K. Haberland – « Perioden von Modulformen einer Variabler und Gruppencohomologie. I, II, III », *Math. Nachr.* **112** (1983), p. 245–282, 283–295, 297–315.

[Hec26] E. Hecke – « Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (1926), no. 4, p. 211–223, voir aussi [**Hec83**, p. 405].

[Hec83] ———, *Mathematische Werke*, troisième éd., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983, avec une introduction de B. Schoeneberg, C.L. Siegel et J. Nielsen.

[Hua82] L.K. Hua – *Introduction to number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982, traduit du chinois par Peter Shiu.

[Hun96] T.W. Hungerford – *Algebra*, Graduate Texts in Math., vol. 73, Springer-Verlag, New York, 1996, huitième édition corrigée.

[ILS00] H. Iwaniec, W. Luo & P. Sarnak – « Low lying zeros of families of L-functions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2000), no. 91, p. 55–131.

[IS00a] H. Iwaniec & P. Sarnak – « Perspectives on the analytic theory of L-functions », *Geom. Funct. Anal.* (2000), p. 705–741, Special Volume, Part II (Tel Aviv, 1999).

[IS00b] H. Iwaniec & P. Sarnak – « The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros », *Israel J. Math.* **120** (2000), p. 155–177.

[Iwa97] H. Iwaniec – *Topics in classical automorphic forms*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Iwa02] ———, *Spectral methods of automorphic forms*, seconde éd., Graduate Studies in Math., vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[Jos97] J. Jost – *Compact Riemann surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997, traduit du manuscrit allemand par R. R. Simha.

[KMV00] E. Kowalski, P. Michel & J. VanderKam – « Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 1, p. 95–151.

[Kna92] A.W. Knapp – *Elliptic curves*, Mathematical Notes, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

[KP99] J. Kaczorowski & A. Perelli – « The Selberg class : a survey », in *Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, de Gruyter, Berlin, 1999, p. 953–992.

[KR01] M. Knopp & S. Robins – « Easy proofs of Riemann's functional equation for $\zeta(s)$ and of Lipschitz summation », *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 7, p. 1915–1922 (électronique).

[KRW03] E. Kowalski, O. Robert & J. Wu – « Small gaps in coefficients of L-functions and $\mathcal{B}$-free numbers in short intervals », préimprimé, $\geqslant$ 2003.

[KS99a] N.M. Katz & P. Sarnak – *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. 45, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[KS99b] ______, « Zeroes of zeta functions and symmetry », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **36** (1999), no. 1, p. 1–26.

[KZ84] W. Kohnen & D. Zagier – « Modular forms with rational periods », in *Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl. : Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984, p. 197–249.

[KZ01] M. Kontsevich & D. Zagier – « Periods », in *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, p. 771–808.

[Lan95] S. Lang – *Introduction to modular forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 222, Springer-Verlag, Berlin, 1995, avec une annexe de D. Zagier et Walter Feit, réimpression corrigée de l'original de 1976.

[Maa64] H. Maass – *Lectures on modular functions of one complex variable*, TIFR Lectures on Math., vol. 29, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964, notes de Sunder Lal.

[Mar] F. Martin – « Périodes de formes modulaires de poids 1 », à paraître dans *J Number Theory*.

[Mic02] P. Michel – « Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001*, Astérisque, vol. 282, Société Mathématique de France, 2002, Exp. No. 887, p. 211–248.

[Micre] ______, « Analytic Number Theory and Families of Automorphic L-functions », in *Lectures from the Graduate Summer School held in Park City, Summer 2002*, IAS/Park City Mathematics Series, American Mathematical Society, Providence, RI, à paraître.

[Miy89] T. Miyake – *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, traduit du chinois par Yoshitaka Maeda.

[Mur93] V.K. Murty – *Introduction to abelian varieties*, CRM Monograph Series, vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[MV02] P. Michel & A. Venkatesh – « On the dimension of the space of cusp forms associated to 2-dimensional complex Galois representations », *Internat. Math. Res. Notices* (2002), no. 38, p. 2021–2027.

[PP01] P.C. Pasles & W. Pribitkin – « A generalization of the Lipschitz summation formula and some applications », *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 11, p. 3177–3184 (électronique).

[Ran52] R.A. RANKIN – « The scalar product of modular forms », *Proc. London Math. Soc. (3)* **2** (1952), p. 198–217.

[Rat94] J.G. RATCLIFFE – *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Math., vol. 149, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Roh97] D.E. ROHRLICH – « Modular curves, Hecke correspondence, and L-functions », in *Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, New York, 1997, p. 41–100.

[Roy00] E. ROYER – « Facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $J_0(N)$ de grande dimension et de grand rang », *Bull. Soc. math. France* **128** (2000), no. 2, p. 219–248.

[Sar87] P. SARNAK – « Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators », in *Analytic number theory and Diophantine problems (Stillwater, OK, 1984)*, Progress in Math., vol. 70, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, p. 321–331.

[Sar90] ———, *Some applications of modular forms*, Cambridge Tracts in Math., vol. 99, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Sch74] B. SCHOENEBERG – *Elliptic modular functions : an introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 203, Springer-Verlag, New York, 1974, traduit de l'allemand par J.R. Smart et E.A. Schwandt.

[Ser70] J.-P. SERRE – « Facteurs locaux des fonctions zêtas des variétés algébriques (définitions et conjectures) », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. 11e année : 1969/70. Théorie des nombres. Fasc. 1 : Exposés 1 à 15 ; Fasc. 2 : Exposés 16 à 24*, Secrétariat Mathématique, Paris, 1970, voir aussi [**Ser86**, p. 581].

[Ser77] ———, *Cours d'arithmétique*, Le Mathématicien, vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, deuxième édition revue et corrigée.

[Ser81] ———, « Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1981), no. 54, p. 323–401.

[Ser86] ———, *Œuvres. Vol. II (1960–1971)*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Ser97a] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, troisième éd., Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997, traduit du français et édité par Martin Brown d'après des notes de Michel Waldschmidt, avec une préface de Brown et Serre.

[Ser97b] ———, « Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), no. 1, p. 75–102.

[Shi72] G. SHIMURA – « Class fields over real quadratic fields and Hecke operators », *Ann. of Math. (2)* **95** (1972), p. 130–190.

[Shi94] ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 11, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, réimpression de l'original de 1971, Kanô Memorial Lectures, 1.

[Sie54] C.L. SIEGEL – « A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$ », *Mathematika* **1** (1954), p. 4.

[Šok80] V.V. ŠOKUROV – « Shimura integrals of cusp forms », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), no. 3, p. 670–718, 720.

[Ten95] G. TENENBAUM – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde éd., Cours Spécialisés, vol. 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

[Ten96] ———, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés, vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996, en collaboration avec Jie Wu.

[VZ93] F.R. Villegas & D. Zagier – « Square roots of central values of Hecke L-series », in *Advances in number theory (Kingston, ON, 1991)*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993, p. 81–99.

[Wal06] M. Waldschmidt – « Transcendance des périodes : état des connaissances », *Advances in Mathematics* **1** (2006), no. 2, Congrès de la Société Mathématique Tunisienne, Mahdia, 2004.

[WG89] Z.X. Wang & D.R. Guo – *Special functions*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989, traduit du chinois par Guo et X.J. Xia.

[WW96] E.T. Whittaker & G.N. Watson – *A course of modern analysis (an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions ; with an account of the principal transcendental functions)*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, réimpression de la quatrième édition (1927).

[Zag77] D. Zagier – « Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields », in *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, Lect. Notes in Math., vol. 627, Springer, Berlin, 1977, p. 105–169.

[Zag91] D. Zagier – « Periods of modular forms and Jacobi theta functions », *Invent. Math.* **104** (1991), no. 3, p. 449–465.

[ZG00] D. Zagier & H. Gangl – « Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series », in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, p. 561–615.

F. Martin, Université Blaise Pascal – Clermont-Ferrand II, Laboratoire de Mathématiques Pures, Les Cézeaux, F–63177 Aubière cedex, France • *E-mail :* `Francois.Martin@math.univ-bpclermont.fr` • *E-mail :* `francois.martin@polytechnique.org`

E. Royer, Université Paul Valéry – Montpellier III, MIAp, F–34199 Montpellier cedex 5, France
E-mail : `emmanuel.royer@polytechnique.org` • Université Montpellier II, I3M – UMR CNRS 5149, cc051, F–34095 Montpellier cedex 5, France
E-mail : `royer@darboux.math.univ-montp2.fr`
Url : `http://www.carva.org/emmanuel.royer`