



Plein écran

Quitter

Combinatoire

et

formes modulaires

Colloquium Clermont-Ferrand, novembre 2003

Emmanuel Royer

Travaux en collaboration avec Laurent Habsieger

et Jie Wu.



Plein écran

Quitter

— Mots de Dyck —

Soit $m \geq 1$ un entier. Un **mot de Dyck** est une suite finie

$$\delta = (\delta_i)_{1 \leq i \leq m} \in \{-1, 1\}^m$$

telle que,

$$\sum_{j=1}^i \delta_j \geq 0, \quad \text{pour tout } i \in [1, m-1]$$

et

$$\sum_{j=1}^m \delta_j = 0.$$

L'entier m , noté $|\delta|$ s'appelle la **longueur** de δ .



— Remarque —

La longueur d'un mot de Dyck est nécessairement **paire** : la relation

$$\sum_{j=1}^m \delta_j = 0$$

implique l'égalité du nombre $n = m/2$ de 1 et de -1 .

L'entier $m/2$ s'appelle la **demi-longueur** du mot.

L'ensemble des suites de Dyck de demi-longueur n est noté

$$\mathfrak{D}_n.$$

On définit aussi

$$\mathfrak{D}_0 = \{0\}$$

et la longueur de 0 est définie comme égale à 0. Enfin, on définit

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{D}_n.$$



Plein écran

Quitter



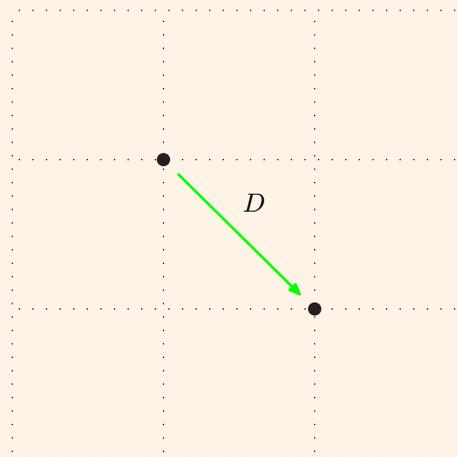
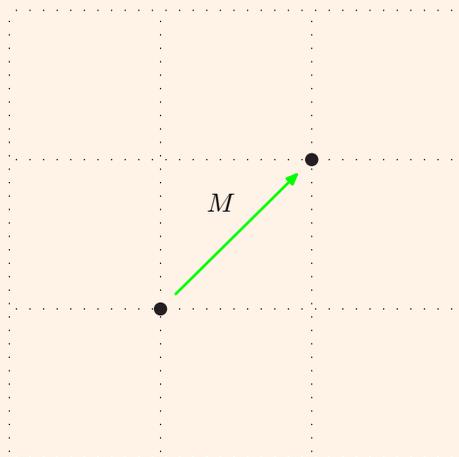
— Chemins de Dyck —



Sur \mathbb{Z}^2 , on définit l'application **montée** M et l'application **descente** D par

$$M : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$$

$$D : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + 1, y - 1).$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

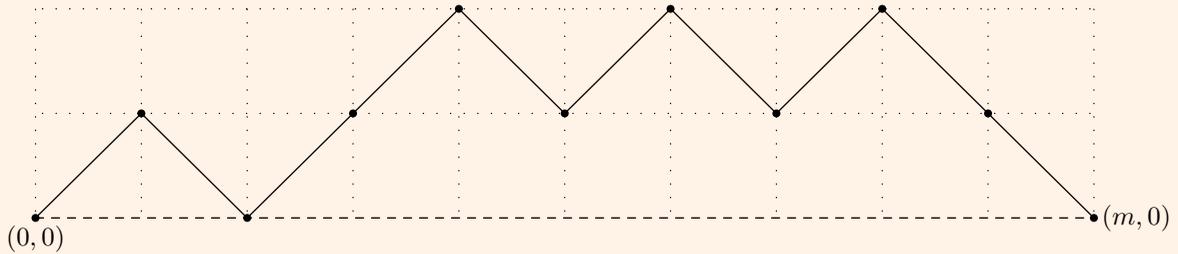
Soit $m \geq 1$ un entier. Un **chemin de Dyck** de longueur m est une suite de points de \mathbb{Z}^2

- de premier terme $(0, 0)$,
- de dernier terme $(m, 0)$,
- chaque point est image du précédent par M ou D ,
- aucun point n'est d'ordonnée strictement négative.

Lorsqu'on relie les points successifs d'un chemin de Dyck, le segment reliant un point au point suivant est appelé **pas**. Le pas est dit montant ou descendant suivant qu'il relie un point à son image par M ou un point à son image par D .



— Exemple de chemins de Dyck —



Longueur $m = 10$



Plein écran

Quitter



— Mots et chemins de Dyck —

Un chemin de Dyck est déterminé par la suite des pas qui le construisent. L'application

$$\begin{aligned} \text{pas montant} &\mapsto 1 \\ \text{pas descendant} &\mapsto -1 \end{aligned}$$

définit donc une bijection appelée **bijection fondamentale** de l'ensemble des **chemins de Dyck** de longueur m dans l'ensemble des **mots de Dyck** de longueur m .

En particulier, un chemin de Dyck est de longueur pair $m = 2n$ et n est appelé **demi-longueur** du chemin.

On note

$$\mathcal{D}_n$$

l'ensemble des chemins de demi-longueur n et

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{D}_n.$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

— Concaténation —

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux sous-ensembles de l'ensemble \mathcal{D} des mots de Dyck, on définit l'application **concaténation** par

$$\begin{aligned} | : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{D} \\ ((\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}, (\beta_i)_{1 \leq i \leq m}) &\mapsto (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n+m} \end{aligned}$$

avec

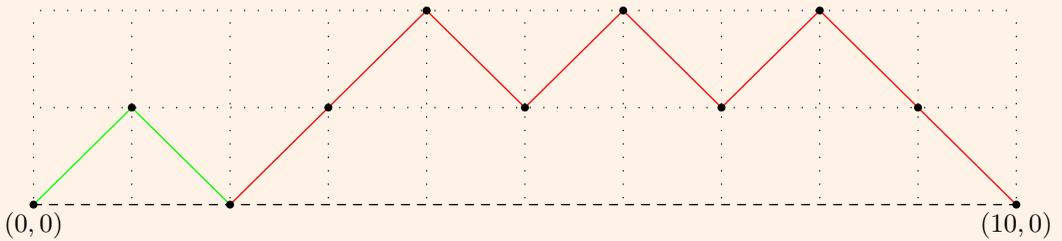
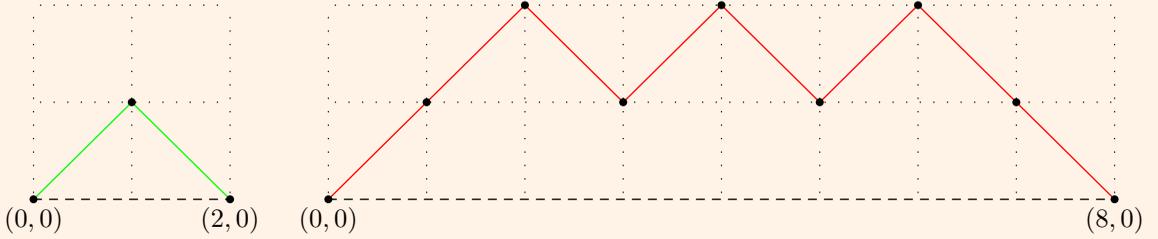
$$\delta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \leq n \\ \beta_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Via la bijection fondamentale, on déduit de ce qui précède une concaténation sur les chemins de Dyck.



$(1, -1)$

$(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1)$



$(1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1)$



Plein écran

Quitter



— Série génératrice —



Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble de l'ensemble \mathfrak{D} des mots de Dyck, on définit sa **série génératrice** par

$$G[\mathfrak{A}](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où

$$a_n = \#\{\alpha \in \mathfrak{A} : |\alpha| = 2n\}.$$

Cette série est de rayon de convergence au moins $1/4$.
La suite $(a)_n$ s'appelle **suite de comptage** de \mathfrak{A} .



Plein écran

Quitter



— Série génératrice et opérations élémentaires —

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux sous-ensembles de l'ensemble \mathcal{D} des mots de Dyck, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $\beta \in \mathcal{B}$, on a $|\alpha | \beta| = |\alpha| + |\beta|$ de sorte qu'en notant (a_n) – resp. (b_n) – la suite de comptage de \mathcal{A} – resp. \mathcal{B} – on a

$$G[\mathcal{A} | \mathcal{B}](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \\ k+\ell=n}} a_k b_\ell \right) z^n$$
$$= G[\mathcal{A}](z)G[\mathcal{B}](z).$$



Plein écran

Quitter

concaténation \longleftrightarrow produit
union disjointe \longleftrightarrow somme.



— Nombre de Catalan —

On appelle n^{e} **nombre de Catalan** et on note C_n le nombre de mots de Dyck de demi-longueur n . La série génératrice des mots de Dyck est

$$C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n.$$

Étant donné un chemin de Dyck de longueur non vide, en partant de droite, on cherche le premier point distinct de l'extrémité droite sur l'axe des abscisses. Toute la partie droite de ce chemin est un **chemin haut** c'est-à-dire n'ayant que deux points sur l'axe des abscisses. La partie de gauche est un chemin de Dyck (éventuellement de longueur nulle). Cette opération définit le chemin de départ comme l'unique concaténation d'un chemin de Dyck et d'un chemin haut. En notant C^h la fonction caractéristique des chemins de Dyck, on a alors

$$C(z) = 1 + C^h(z)C(z).$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

On établit une bijection des chemins hauts de demi-longueur n vers les chemins de Dyck de demi-longueur $n - 1$ en enlevant le premier et le dernier pas. On a donc

$$C^h(z) = zC(z)$$

puis

$$C(z) = 1 + zC(z)^2.$$

Finalement

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

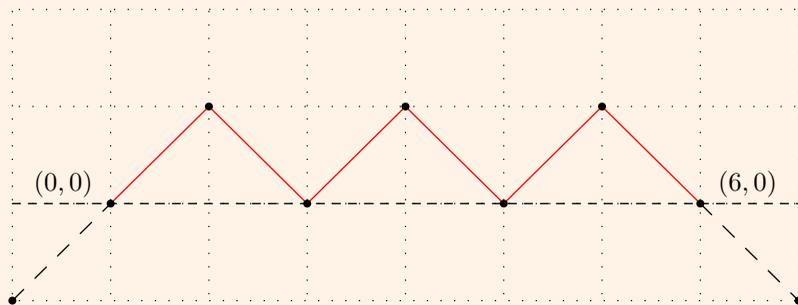
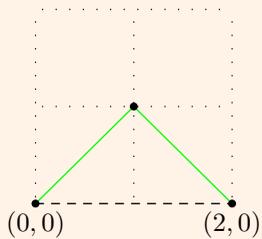
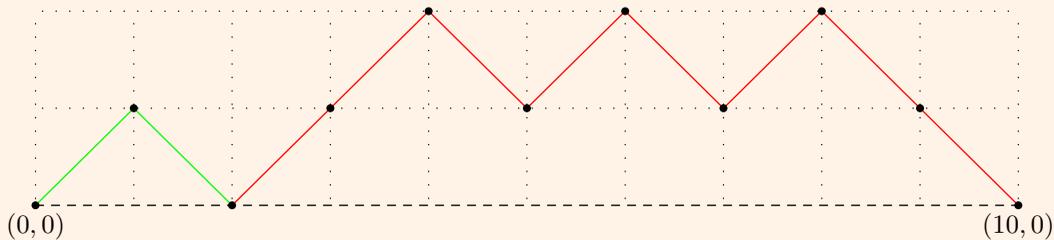
et

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$



Plein écran

Quitter





— Statistiques —

Soit D un chemin de Dyck de demi-longueur n . On suppose que D est associé à $(\delta_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ par la bijection fondamentale.

On définit $\text{DBR}(D)$ comme le nombre de **double pas montants** :

$$\text{DBR}(D) = \#\{i \in [1, 2n - 1] : (\delta_i, \delta_{i+1}) = (1, 1)\}.$$

On définit $\text{RET}(D)$ comme le nombre de **retours** de D , *ie.* de pas descendants arrivant sur l'axe horizontale :

$$\text{RET}(D) = \#\left\{i \in [1, 2n] : \sum_{j=1}^i \delta_j = 0\right\}.$$

On note $\text{LD}(D)$, et on appelle **dernière descente**, la longueur de la dernière suite de pas descendants de D :

$$\delta_{2n} = \delta_{2n-1} = \dots = \delta_{2n-\text{LD}(D)+1} = -1 \quad \text{et} \quad \delta_{2n-\text{LD}(D)} = 1.$$



Plein écran

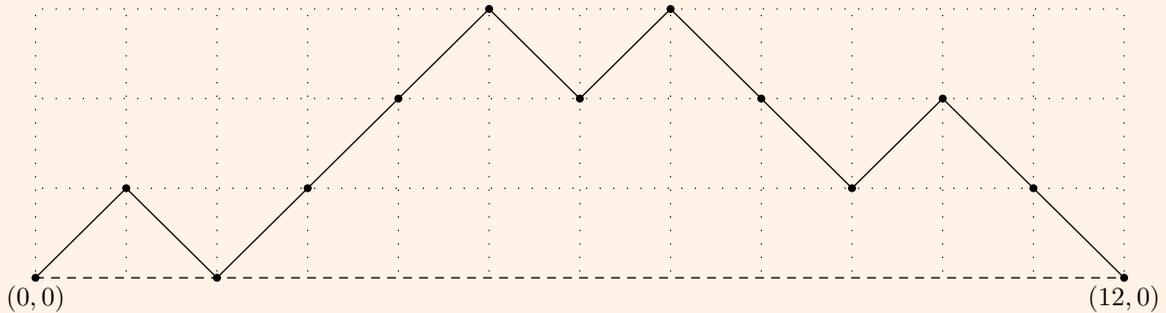
Quitter



Plein écran

Quitter

$(1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1)$



$n = 6, \quad \text{DBR} = 2,$
 $\text{RET} = 2, \quad \text{LD} = 2.$

— Série génératrice de statistique (RET, DBR, LD) —

On veut compter le nombre de chemins de nombre de retours, nombre de doubles pas montants et dernière descente fixés.

$$K_n(x, y, z) = \sum_{D \in \mathcal{D}_n} x^{\text{RET}(D)} y^{\text{DBR}(D)} z^{\text{LD}(D)}$$

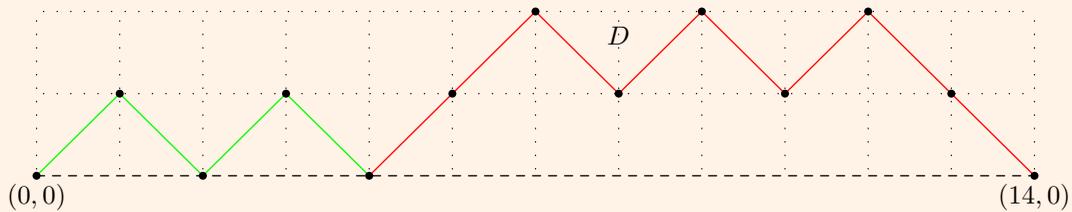
$$\begin{aligned} K(x, y, z, t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} K_n(x, y, z) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{d=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_n(r, d, \ell) x^r y^d z^\ell t^n. \end{aligned}$$

Si $\text{RET}(D) \geq 2$, on écrit D comme concaténation de D_1 et D_2 avec D_2 un chemin haut.

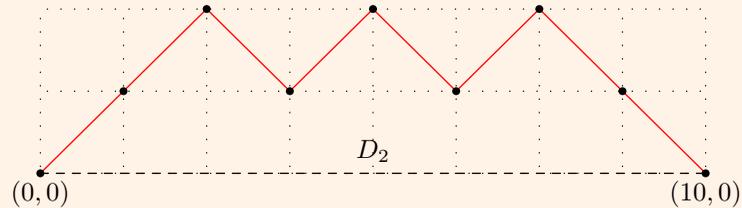
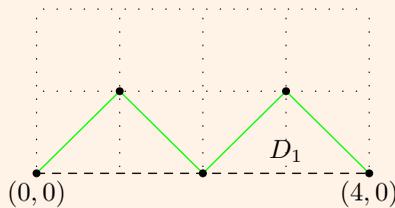


Plein écran

Quitter



$$D = D_1 \mid D_2$$



$$\text{RET}(D_1) = \text{RET}(D) - 1, \quad \text{RET}(D_2) = 1, \quad \text{LD}(D_2) = \text{LD}(D).$$

$$\text{DBR}(D_1) + \text{DBR}(D_2) = \text{DBR}(D)$$

$$b_n(r, d, \ell) = \sum_{\delta=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^{+\infty} b_\nu(r-1, \delta, \lambda) b_{n-\nu}(1, d-\delta, \ell) \quad (r \geq 2).$$



Plein écran

Quitter



Si $n \geq 2$ et $\text{RET}(D) = 1$, en utilisant la bijection entre chemins hauts de demi-longueur n et chemin de Dyck de demi-longueur $n - 1$ vue précédemment, on a on associe à D un chemin D' de demi-longueur $n - 1$.



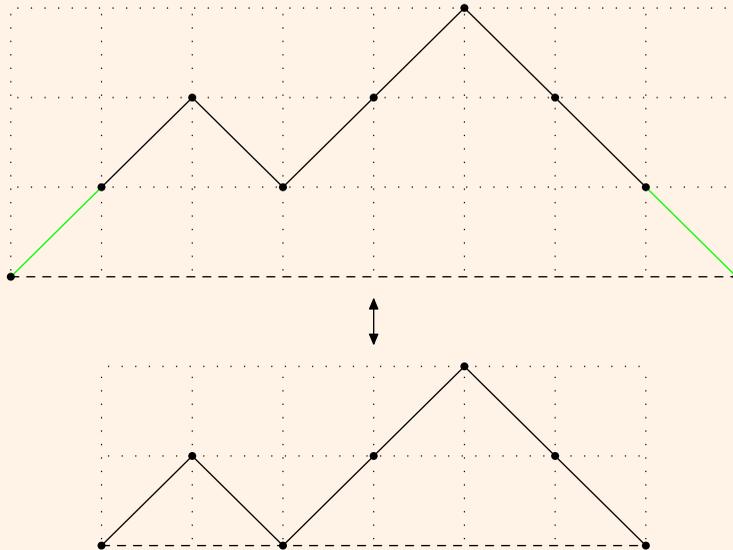
Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter



$$\text{DBR}(D') = \text{DBR}(D) - 1, \quad \text{LD}(D') = \text{LD}(D) - 1.$$

$$b_n(1, d, \ell) = \sum_{r=0}^{+\infty} b_{n-1}(r, d-1, \ell-1) \quad (n \geq 2).$$



Les équations précédentes conduisent à

$$(1) \quad K(x, y, z, t) = 1 + [(1 - y)xzt + yxztK(1, y, z, t)] K(x, y, 1, t).$$

On évalue (1) en $x = 1$ pour trouver

$$(2) \quad K(1, y, z, t) = \frac{1 + (1 - y)ztK(1, y, 1, t)}{1 - yztK(1, y, 1, t)}$$

et

$$(3) \quad K(x, y, z, t) = \frac{1 - yztK(1, y, 1, t) + xztK(x, y, 1, t)}{1 - yztK(1, y, 1, t)}.$$

L'évaluation de (3) en $z = 1$ implique

$$(4) \quad K(x, y, 1, t) = \frac{1 - ytK(1, y, 1, t)}{1 - xt - ytK(1, y, 1, t)}.$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

Le report de (4) dans (3) amène

(5)

$$K(x, y, z, t) = \frac{1 + xt(z - 1) - y(z + 1)tK(1, y, 1, t) + y^2zt^2K(1, y, 1, t)^2}{[1 - yztK(1, y, 1, t)][1 - xt - ytK(1, y, 1, t)]}.$$

On évalue (2) en $z = 1$ pour obtenir une équation de degré 2 en $K(1, y, 1, t)$ dont la seule solution convergente au voisinage de $yt = 0$ est

$$K(1, y, 1, t) = \frac{1 - t + yt - \sqrt{1 - 2t - 2yt + t^2 - 2yt^2 + y^2t^2}}{2yt}.$$



L'équation (5) donne alors

$$K(x, y, z, t) = 2 \frac{N(x, y, z, t)}{D_1(x, y, z, t) D_2(x, y, z, t)}.$$

avec

$$N(x, y, z, t) = 1 + [1 - y - 2x + (2x - y - 1)z] t + (1 - y)^2 z t^2 \\ + [1 + (1 - y)z t] \sqrt{1 - 2(1 + y)t + (1 - y)^2 t^2},$$

$$D_1(x, y, z, t) = 1 + (1 - y - 2x)t + \sqrt{1 - 2(1 + y)t + (1 - y)^2 t^2}$$

et

$$D_2(x, y, z, t) = 2 - \left[1 - (1 - y)t - \sqrt{1 - 2(1 + y)t + (1 - y)^2 t^2} \right] z$$



Plein écran

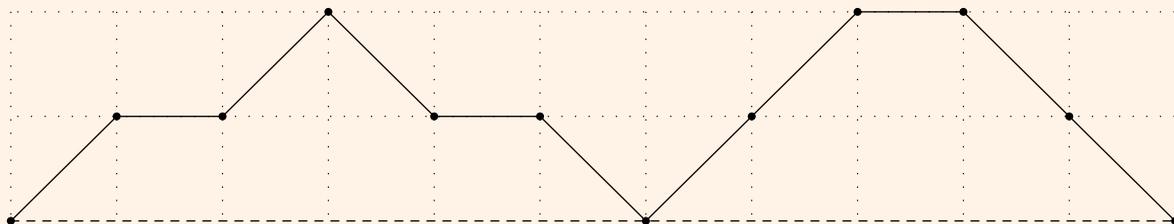
Quitter



— Chemins de Motzkin —



Même construction mais en partant de suites à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.



Série génératrice

$$M(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}.$$

Plein écran

Quitter



— Calcul de la série génératrice de Motzkin —



Soit à construire un chemin de Motzkin reliant $(0, 0)$ à $(n, 0)$ ayant k plateaux. En enlevant les plateaux puis par recollement, on obtient un chemin de Dyck de longueur 2ℓ . On a $k = n - 2\ell$. Pour construire le chemin de Motzkin, on commence par placer les $n - 2\ell$ plateaux. Il y a $\binom{n}{n-2\ell}$ possibilités. Les plateaux étant placés, on insère un des C_ℓ chemins de Catalan possibles en modifiant l'altitude des plateaux.

Ainsi,

$$M_n = \sum_{\ell=0}^{n/2} \binom{n}{2\ell} C_\ell$$

puis

$$M(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}.$$



Plein écran

Quitter



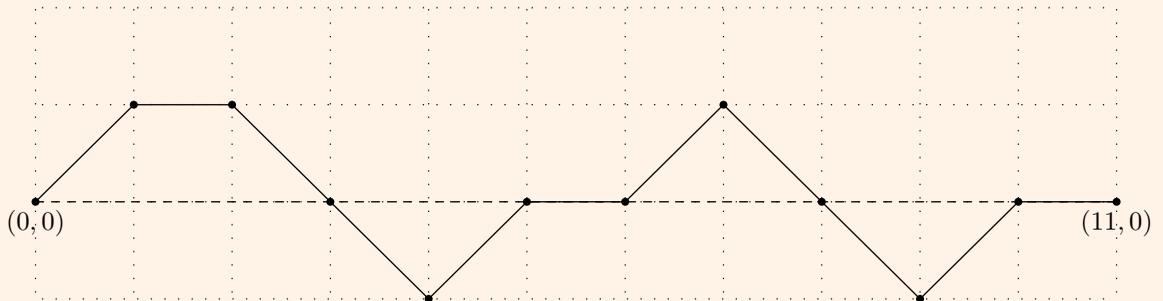
— Chemins de Riordan —

Comme les chemins de Motzkin, mais on s'autorise à passer **sous l'axe des abscisses** à conditions que ce soit par la **succession d'un pas descendant et d'un pas montant**.

L'ensemble des chemins de Riordan de longueur n est en bijection avec l'ensemble des suites finies $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ telles que

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^j \delta_i \geq -1 \text{ et } \left(\sum_{i=1}^j \delta_i = -1 \Rightarrow \delta_{j+1} = 1 \right) \text{ pour tout } j$$



Plein écran

Quitter



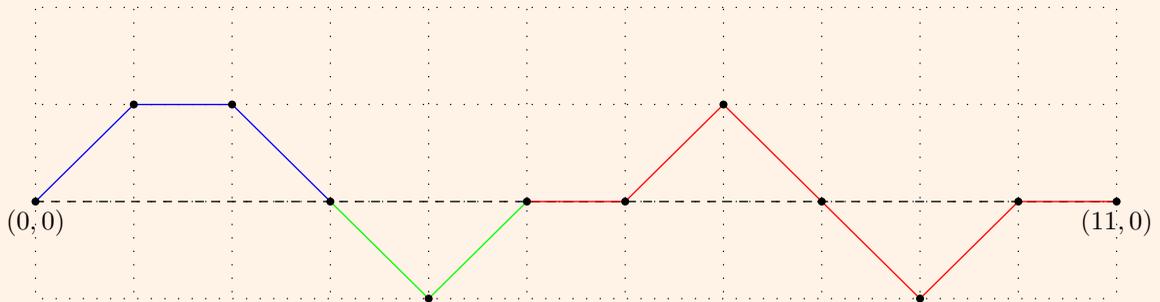
— Calcul de la série génératrice de Riordan —

En remarquant qu'un chemin de Riordan qui n'est pas un chemin de Motzkin est la concaténation d'un chemin de Motzkin, d'une pointe sous l'axe des abscisses et d'un chemin de Riordan, on obtient

$$R(z) = M(z) + z^2 M(z)R(z)$$

puis

$$R(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n = \frac{1 - z - 2z^2 - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2(1+z)z^3}.$$



Plein écran

Quitter



— Premières valeurs —



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188	5798
R_n	1	1	3	6	15	36	91	232	603	1585	4213	11298



Remarque On appelle classiquement nombres de Riordan les nombres \tilde{R}_n définis par

$$\tilde{R}_0 = 1, \quad \tilde{R}_1 = 0, \quad \tilde{R}_{n+2} = R_n.$$

Plein écran

Quitter



— Formes modulaires —

Si $N \geq 1$ est un entier, on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : ad - bc = 1, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Si $k \geq 2$ est un entier pair, une **forme parabolique** de poids k et de niveau N est une fonction holomorphe

$$f : \mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que

$$(1) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N), f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \forall z \in \mathcal{H};$$

$$(2) \quad z \mapsto (\Im z)^{k/2} |f(z)| \text{ est majorée sur } \mathcal{H}.$$



Plein écran

Quitter



Une forme parabolique admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(n) \exp(2i\pi n z).$$

L'ensemble $S(k, N)$ des formes paraboliques de poids k et de niveau N acquiert une structure d'espace hermitien lorsqu'on le munit du produit de Petersson

$$(f, g) = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}.$$

Une approximation de sa dimension est

$$\dim S(k, N) = \frac{k-1}{12} [SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] + O(N^{1/2+\varepsilon})$$

avec

$$[SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$



Plein écran

Quitter



— Formes anciennes et nouvelles —



Lorsque d et N' sont deux diviseurs de N tels que $N' < N$ et $d \mid \frac{N}{N'}$, et si $f \in S(k, N')$ alors $z \mapsto f(dz)$ est une forme de $S(k, N)$. L'espace engendré par de telles formes est appelé **espace des formes anciennes**. Son orthogonal est l'**espace des formes nouvelles**.

— Opérateurs de Hecke —

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n^{e} opérateur de Hecke par

$$T_n : S(k, N) \rightarrow S(k, N)$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \widehat{f}(m) e^{2i\pi mz} \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right] e^{2i\pi mz}.$$

Les opérateurs de Hecke commutent et sont **presque tous** autoadjoints : si $(n, N) = 1$ alors T_n est autoadjoint.



Plein écran

Quitter



— Formes primitives —

Une base orthogonale privilégiée de l'espace des formes nouvelles est l'ensemble des formes primitives. On note $H_k^*(N)$ cet ensemble. Les formes primitives vérifient

(1)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2i\pi n z};$$

(2) $\lambda_f(1) = 1;$

(3) $T_n f = \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} f, \forall n \in \mathbb{N}^*;$

(4)

$$\lambda_f(m) \lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

(5) $\lambda_f(p) \in [-2, 2] \quad (p \in \mathcal{P}).$



Plein écran

Quitter



— Fonctions L —

Si $f \in H_k^*(N)$, on peut lui associer une fonction L définie par

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{-s}.$$

La relation de multiplicativité implique le développement eulérien

$$L(f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L(f_p, s)$$

avec

$$L(f_p, s) = [1 - \lambda_f(p) p^{-s} + \varepsilon_N(p) p^{-2s}]^{-1}$$



Plein écran

Quitter

$$\varepsilon_N(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p, N) = 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



On peut écrire

$$L(f_p, s)^{-1} = [1 - \alpha_f(p)p^{-s}][1 - \beta_f(p)p^{-s}]$$

et grâce aux travaux de Deligne,

$$\begin{cases} |\alpha_f(p)| \leq 1 \\ |\beta_f(p)| \leq 1. \end{cases}$$

On en déduit que $L(f, s)$ converge pour $\Re s > 1$. En fait, elle admet un prolongement en fonction entière et

$$L(f_\infty, s)L(f, s) = i^k \varepsilon_f(N) N^{-s+1/2} L(f_\infty, 1-s)L(f, 1-s)$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon_f(N) = \pm 1 \\ L(f_\infty, s) = \Gamma_\infty\left(s + \frac{k-1}{2}\right) \Gamma_\infty\left(s + 1 + \frac{k-1}{2}\right) \\ \Gamma_\infty(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \end{cases}$$



Plein écran

Quitter



Pourquoi les formes modulaires ?



Le théorème de Breuil, Conrad, Diamond, Taylor & Wiles (*ex conjecture de Shimura–Taniyama–Weil*) relie les **courbes elliptiques**

$$y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad (a, b) \in \mathbb{Q}$$

aux formes primitives. Après les changements de variables appropriés, on peut écrire l'équation d'une courbe elliptique sous forme « simplifiée ». On peut alors réduire cette équation modulo p pour tout nombre premier p . Si l'équation réduite n'a pas de singularité sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on dit que p est de **bonne réduction**. Soit N_p le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de l'équation simplifiée réduite modulo p . Le théorème affirme l'existence d'une forme primitive f_E de poids 2 telle que, pour tout nombre premier p de bonne réduction

$$\widehat{f}_E(p) = p - N_p.$$



Plein écran

Quitter



— Conjecture de Birch & Swinnerton–Dyer —

On peut munir toute courbe elliptique E d'une loi de groupe qui en fait un groupe abélien de type fini (Mordell) :

$$E(\mathbb{Q}) = E(\mathbb{Q})^{\text{torsion}} \oplus \mathbb{Z}^{\text{rang}(E)}.$$

La conjecture affirme

$$\text{rang}(E) = \text{ord}_{s=1/2} L(f_E, s).$$

— Conjecture de Sato–Tate —

Soit $f \in H_k^*(N)$, et $-2 \leq a \leq b \leq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\}} \#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x, \lambda_f(p) \in [a, b]\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \, dx.$$



Plein écran

Quitter



– Fonction L de carré symétrique d'une forme modulaire –



$$L(f_p, s)^{-1} = [1 - \alpha_f(p)p^{-s}] [1 - \beta_f(p)p^{-s}]$$

\Downarrow

$$\omega_f(p) = \begin{pmatrix} \alpha_f(p) & 0 \\ 0 & \beta_f(p) \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$\text{sym}^2 \omega_f(p) = \begin{pmatrix} \alpha_f(p)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_f(p)\beta_f(p) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_f(p)^2 \end{pmatrix}$$

\Downarrow

$$L(\text{sym}_p^2 f, s)^{-1} =$$

$$[1 - \alpha_f(p)^2 p^{-s}] [1 - \alpha_f(p)\beta_f(p)p^{-s}] [1 - \beta_f(p)^2 p^{-s}]$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

À partir de maintenant, N est sans facteur carré.

$$L(\text{sym}^2 f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L(\text{sym}_p^2 f, s) = \zeta^{(N)}(2s) \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n^2) n^{-s}.$$

En posant

$$L(\text{sym}_\infty^2 f, s) = \Gamma_\infty(s+1) \Gamma_\infty(s+k-1) \Gamma_\infty(s+k)$$

Li a prouvé

$$L(\text{sym}_\infty^2 f, s) L(\text{sym}^2 f, s) = (N^2)^{-s+1/2} L(\text{sym}_\infty^2 f, 1-s) L(\text{sym}^2 f, 1-s).$$

Shimura a prouvé que la fonction $L(\text{sym}^2 f, s)$ admet un prolongement en fonction entière. Sa bande critique est

$$\{s \in \mathbb{C} : \Re s \in]0, 1[\}.$$



— Le réel $L(\text{sym}^2 f, 1)$ —

On a l'égalité

$$L(\text{sym}^2 f, 1) = \frac{2^{2k-1} \pi^{k+1} (f, f)}{\Gamma(k) N}.$$

Cette relation justifie l'étude de $L(\text{sym}^2 f, 1)$.

Goldfeld, Hoffstein, Lieman et Iwaniec ont prouvé

$$\frac{C_k}{\log(k^2 N)} \leq L(\text{sym}^2 f, 1) \leq C_k \log(k^2 N).$$

On ne sait pas si cette majoration est optimale.

On a prouvé avec J. Wu qu'en admettant l'hypothèse de Riemann pour les fonctions $L(\text{sym}^2 f, s)$ alors

$$\frac{C_k}{\log \log(3N)} \leq L(\text{sym}^2 f, 1) \leq C_k [\log \log(3N)]^3.$$



Plein écran

Quitter



— Moments asymptotiques —



On pose

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathbb{N} : \mu(N) \neq 0, p \mid N \Rightarrow p \geq N^\kappa\}$$

où $\kappa \in]0, 1]$ est un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$M_{\pm n}(N) = \frac{1}{\#H_k^*(N)} \sum_{f \in H_k^*(N)} L(\text{sym}^2 f, 1)^{\pm n-1}.$$

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_{\pm n}$ tel que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in \mathcal{N}}} M_{\pm n}(N) = M_{\pm n}.$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

— Valeur des moments positifs —

Si

$$\mathcal{E}_n(b_1, \dots, b_n) = \left\{ (d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} : d_i \mid \left(\frac{b_1 \cdots b_i}{d_1 \cdots d_{i-1}}, b_{i+1} \right)^2 \right\}$$

et

$$m_n(r) = \sum_{\substack{b_1, \dots, b_n \\ b_1 \cdots b_n = r}} \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathcal{E}_n(b_1, \dots, b_n) \\ d_1 \cdots d_{n-1} = r}} 1$$

alors

$$M_{+n} = \zeta(2)^{n-1} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_n(r)}{r}.$$



Plein écran

Quitter

— Valeur des moments négatifs —

Si

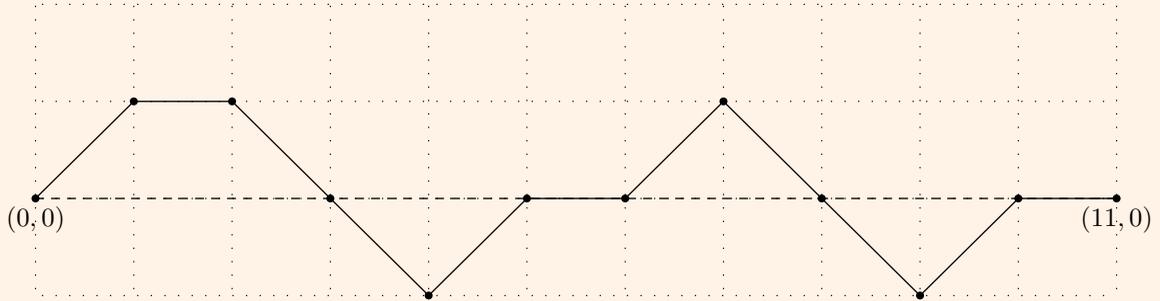
$$m_{-n}(r) = \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^{3n} \\ a_1 \cdots a_n (b_1 \cdots b_n)^2 (c_1 \cdots c_n)^3 = r}} \mu(a_1 b_1 c_1) \cdots \mu(a_n b_n c_n) \mu(b_1) \cdots \mu(b_n) \\ \times \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathcal{E}_n(a_1 b_1, \dots, a_n b_n) \\ d_1 \cdots d_{n-1} = a_1 b_1 \cdots a_n b_n}} 1$$

alors

$$M_{-n} = \zeta(2)^{-1} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{m_{-n}(r)}{r}.$$



— Interprétation combinatoire des moments négatifs —



On note \tilde{R}_{n+2} le nombre de chemins de Riordan d'arrivée n .
La fonction génératrice des nombres de Riordan est

$$\tilde{R}(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} \tilde{R}_h x^h = \frac{2}{1+x+\sqrt{1-2x-3x^2}}.$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

Soit $n \geq 0$, alors

$$M_{-n} = \frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)^n} \prod_p \ell_n \left(\frac{p}{p^2 + p + 1} \right)$$

avec

$$\ell_n(x) = \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} \tilde{R}_h x^h.$$



De la fonction génératrice des nombres de Riordan, on déduit

$$R_h = \frac{1}{\pi} \int_0^2 (t^2 - 1)^h \sqrt{4 - t^2} dt$$

puis

$$\begin{aligned} \ell_n(x) &= \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n}{h} \tilde{R}_h x^h \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1 + x(1 - 4 \sin^2 \theta)]^n \cos^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

L'utilisation de cette expression entraîne l'égalité suivante

$$\log M_{-n} = n \log \log n + n \log \frac{e^\gamma}{\zeta(2)^2} + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

— Interprétation combinatoire des moments positifs —

Soit $n \geq 0$, alors

$$M_{+n} = \frac{\zeta(2)^{3n+2} \zeta(3)^n}{\zeta(6)^n} \prod_p \ell_n \left(\frac{-p}{p^2 - p + 1} \right).$$

On en déduit

$$\log M_{+n} = 3n \log \log n + 3\gamma n + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

L'interprétation combinatoire est plus délicate que pour les moments négatifs. Dans le cas des moments négatifs, la fonction μ restreignait les domaines de variation des indices.



Plein écran

Quitter

Soit

$$A(x, y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x, y) t^n$$

où

$$A_n(x, y) = \sum_{D \in \mathcal{D}_n} x^{\text{RET}(D)} y^{\text{DBR}(D)}.$$

On a $A(x, y, t) = K(x, y, 1, t)$ donc

$$A(x, y, t) = \frac{2 - x - xt + xyt - x\sqrt{1 - 2(1+y)t + (1-y)^2 t^2}}{2(1 - x - xt + xyt + x^2 t)}.$$



Cette fonction intervient de la façon suivante. On montre que

$$M_{+n} = \zeta(2)^{n-1} \prod_{p \in \mathcal{P}} S_n \left(0, \frac{1}{p} \right)$$

avec

$$S_n(\alpha, q) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_n = 0}} \prod_{i=0}^{n-1} (q^{|\alpha_i - \alpha_{i+1}|} + \dots + q^{\alpha_i + \alpha_{i+1}}).$$

On calcule

$$S_{n+1}(\alpha, q) = \frac{1}{(1-q)^n (1-q^2)^n} \Sigma_n[\alpha](q)$$

avec

$$\Sigma_n[\alpha](q) = \sum_{D \in \mathcal{D}_{n+1}} (1-q)^{\text{RET}(D)-1} q^{2\text{DBR}(D)} \left(\frac{1-q^2}{q^2} \right)^{\text{LD}(D)-1} \binom{\alpha}{\text{LD}(D)-1} q^\alpha.$$



Plein écran

Quitter



Plein écran

Quitter

On a en particulier

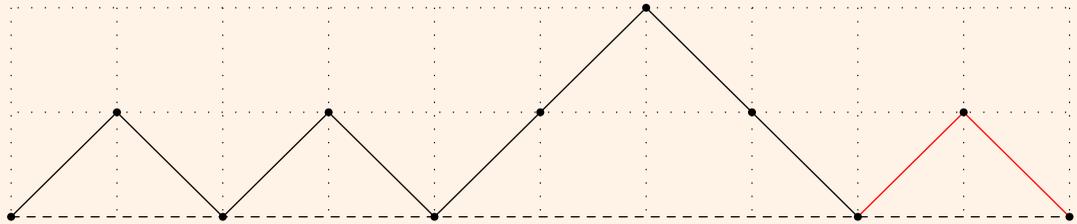
$$\Sigma_n[0](q) = \sum_{\substack{D \in \mathcal{D}_{n+1} \\ LD(D)=1}} (1-q)^{\text{RET}(D)-1} q^{2\text{DBR}(D)}.$$

On va enlever la condition $LD(D) = 1$.

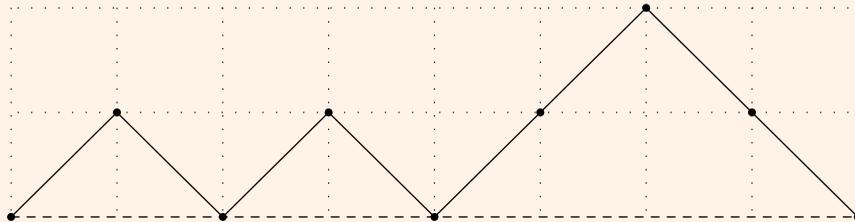
Il existe une bijection

$$\varphi: \{D \in \mathcal{D}_{n+1} : \text{LD}(D) = 1\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_n$$

telle que $\text{RET}(\varphi(D)) = \text{RET}(D) - 1$ et $\text{DBR}(\varphi(D)) = \text{DBR}(D)$.



$$\varphi \downarrow 1:1$$





Plein écran

Quitter

L'expression de $\Sigma_n[0](q)$ devient alors

$$\begin{aligned}\Sigma_n[0](q) &= \sum_{D \in \mathcal{D}_n} (1-q)^{\text{RET}(D)} q^{2\text{DBR}(D)} \\ &= A_n(1-q, q^2)\end{aligned}$$

puis

$$S_{n+1}(0, q) = \frac{1}{(1-q)^n(1-q^2)^n} A_n(1-q, q^2).$$

Cette expression permet d'obtenir une expression intégrale de $S_{n+1}(0, q)$ et donc de faire une étude asymptotique des moments.



— Une expression commune —



On définit la fonction hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-uz)^{-\alpha} du.$$

Alors, pour tout entier n positifs ou négatifs,

$$M_n = \prod_{p \in \mathcal{D}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-3n} F\left(n, \frac{3}{2}, 2, -\frac{4p}{(p-1)^2}\right).$$



Plein écran

Quitter



— Valeurs extrêmes de $L(\text{sym}^2 f, 1)$ —

Des expressions asymptotiques des moments, on déduit le résultat suivant.

Soit

$$\mathcal{N}_{\text{cri}} = \{N \in \mathbb{N}^* : \mu(N) \neq 0 \text{ et } P^-(N) \geq \log(3N)\}.$$

Pour tous $k > 0$ entier pair, N entier sans facteur carré et $C > 0$ réel, on introduit

$$H_k^{*+}(N; C, \text{sym}^2) = \left\{ f \in H_k^*(N) : L(\text{sym}^2 f, 1) \geq C [\log \log(3N)]^3 \right\}$$

et

$$H_k^{*-}(N; C, \text{sym}^2) = \left\{ f \in H_k^*(N) : L(\text{sym}^2 f, 1) \leq C [\log \log(3N)]^{-1} \right\}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels $C > 0$ et $\xi > 0$ ne dépendant que de ε et k tels que pour tout $N \in \mathcal{N}_{\text{cri}}$ on a

$$\#H_k^{*\pm}(N; C, \text{sym}^2) \geq e^{-\xi [\log(3N)]^\varepsilon} \#H_k^*(N).$$



Plein écran

Quitter



En particulier, il existe un réel $K > 0$ ne dépendant que de k tel que, pour tout $N \in \mathcal{N}_{\text{cri}}$, il existe $f_+ \in H_k^*(N)$ et $f_- \in H_k^*(N)$ vérifiant

$$L(\text{sym}^2 f_+, 1) \geq K[\log \log(3N)]^3$$

et

$$L(\text{sym}^2 f_-, 1) \leq K[\log \log(3N)]^{-1}.$$

Ceci est à comparer à la majoration (sous GRH) :

$$\frac{C_k}{\log \log(3N)} \leq L(\text{sym}^2 f, 1) \leq C_k [\log \log(3N)]^3.$$



Plein écran

Quitter



— Moments tordus —



Dans l'expression des moments, seule apparaît la fonction $S_n(0, q)$ de sorte qu'on peut se demander si la fonction $S_n(\alpha, q)$ n'est qu'un intermédiaire de calcul.

On montre que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ N \in \mathcal{N}_{\text{cri}} \\ (N, m) = 1}} \frac{1}{\#H_k^*(N)} \sum_{f \in H_k^*(N)} \lambda_f(m) L(\text{sym}^2 f, 1)^n = \zeta(2) M_{n+1}(m)$$

avec

$$M_n(m) = \zeta(2)^n \prod_{p \in \mathcal{P}} S_n\left(\frac{v_p(m)}{2}, \frac{1}{p}\right)$$

où $v_p(m)$ est la valuation p -adique de m et

$$S_n(\alpha, q) = 0 \quad \text{if } \alpha \notin \mathbb{N}.$$



Plein écran

Quitter