

Nombres premiers, on ne sait pas tout !

Tenerife – 2021

Emmanuel Royer

CNRS

2 novembre 2021



Une lettre de Euler à Bernoulli en 1774

Le nombre entier

$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$$

est premier.



C A L C U L.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
de M. EULER le Pere à M. BERNOULLI, concernant le Mémoire
imprimé parmi ceux de 1771. p. 318.

Le plus grand nombre premier que nous connoissons est sans doute $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$, que Fermat a déjà assuré être premier, & moi je l'ai aussi prouvé; car puisque cette formule ne fauroit admettre d'autres diviseurs que de l'une & ou de l'autre de ces 2 formes $248n + 1$ & $248n + 63$, j'ai examiné tous les nombres premiers contenus dans ces deux formules jusqu'à 46339, dont aucun ne s'est trouvé diviseur.

Une conférence de Cole en 1903

« Lors de la réunion d'octobre 1903 à New York de l'*American Mathematical Society*, Cole avait un exposé au programme avec le titre modeste *On the factorization of large numbers*. Lorsque le président lui a demandé de présenter sa communication, Cole – qui a toujours été un homme de peu de mots – s'est dirigé vers le tableau et, sans rien dire, a commencé à tracer à la craie les calculs pour élever 2 à la puissance soixante-sept. Puis il soustrait soigneusement 1. Sans un mot, il se dirigea vers un espace libre sur le tableau et multiplia, à la main, $193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$. Les deux calculs concordent... Pour la première et unique fois dans les annales, le public de l'*American Mathematical Society* a vigoureusement applaudi l'auteur d'un article présenté devant lui. Cole a pris place sans avoir prononcé un mot. Personne ne lui a posé de question. »

<https://thatsmaths.com/2016/06/30/lecture-sans-paroles-the-factors-of-m67/> citant

Bell, Eric T., 1952 : *Mathematics, Queen and Servant of Science*. G. Bell & Sons



Une conférence de Cole en 1903

Le nombre entier

$$2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$$

n'est pas premier.

ON THE FACTORING OF LARGE NUMBERS.

BY PROFESSOR F. N. COLE.

(Read before the American Mathematical Society, October 31, 1903.)



Une conférence de Cole en 1903

Le nombre entier

$$2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$$

n'est pas premier.

ON THE FACTORING OF LARGE NUMBERS.

BY PROFESSOR F. N. COLE.

(Read before the American Mathematical Society, October 31, 1903.)



L'histoire de l'exposé de Cole, racontée par Bell est probablement enjolivée...

Le plus grand nombre premier connu en 2021

En décembre 2018, l'ordinateur de Patrick Laroche, un volontaire du programme *GIMPS: Great Internet Mersenne Prime* a trouvé que

$$2^{82\,589\,933} - 1$$

est un nombre premier.



Le plus grand nombre premier connu en 2021

En décembre 2018, l'ordinateur de Patrick Laroche, un volontaire du programme *GIMPS: Great Internet Mersenne Prime* a trouvé que

$$2^{82\,589\,933} - 1$$

est un nombre premier. Pour écrire ce nombre en base 10, il faudrait 24 862 048 chiffres. Le 30 octobre 2021, c'est encore le **plus grand nombre premier connu**.

GIMPS Discovers

Largest Known Prime Number: $2^{82,589,933}-1$

BLOWING ROCK, NC, December 21, 2018 – The [Great Internet Mersenne Prime Search \(GIMPS\)](#) has discovered the largest known prime number, $2^{82,589,933}-1$, having 24,862,048 digits. A computer volunteered by Patrick Laroche made the find on December 7, 2018. Patrick is one of thousands of volunteers using free GIMPS software available at www.mersenne.org/download/.



Une formule

Formule de Minàc et Willan

Le n^{e} nombre premier est donné par

$$1 + \sum_{m=2}^{M(n)} \left[\left[\frac{n}{1 + \sum_{j=2}^m \left[\frac{1 + (j-1)!}{j} - \left[\frac{(j-1)!}{j} \right] \right]} \right]^{1/n} \right].$$

où $M(n)$ vaut 7 si $n \leq 4$ et $n(\log(n) + \log \log(n))$ sinon.

Une formule

Formule de Minàc et Willan

Le n^{e} nombre premier est donné par

$$1 + \sum_{m=2}^{M(n)} \left[\left[\frac{n}{1 + \sum_{j=2}^m \left[\frac{1 + (j-1)!}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right]} \right]^{1/n} \right].$$

où $M(n)$ vaut 7 si $n \leq 4$ et $n(\log(n) + \log \log(n))$ sinon.
Cette formule vous est largement incompréhensible, mais, **on s'en moque** parce qu'elle nécessite beaucoup trop de calculs pour être efficace. Mieux vaut utiliser le crible d'Eratosthène.

Une formule

Formule de Minàc et Willan

```
Eratos.gp
M(n)=max(7, floor(n*(log(n)+log(log(n)))));
Crible(n)={
  Premiers=vector(n, i, 1);
  for(p=2, sqrt(n),
    if(Premiers[p],
      k=2;
      while(k*p<=n,
        Premiers[k*p]=0;
        k+=1
      )
    )
  );
  return([i | i <- [1..n], Premiers[i]]);
};
Premier(n)={
  C=Crible(M(n)+1);
  return(C[n+1]);
}

[? \r Eratos.gp
[? Premier(200)
cpu time = 5 ms, real time = 5 ms.
%4 = 1223
```

```
minac.gp -- Modifié
P(n)=1+sum(m=1, max(7, n*(log(n)
+log(log(n))))), floor(floor(n/
(1+sum(j=2, m, floor((1+(j-1)!/
j))))))^(1/n));
? P(200)
cpu time = 9,778 ms, real time = 9,778 ms.
%6 = 1223
```



Eratosthène (276 avant notre ère – 194 avant notre ère)

Activité

À vous !

Fiche d'activités, activité n° 1.

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

OUI



L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

OUI



Il suffit de trouver le plus grand des nombres que vous m'avez donnés

L'infini ?

- Donnez moi une liste de nombres
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre plus grand que le plus grand de votre liste ?

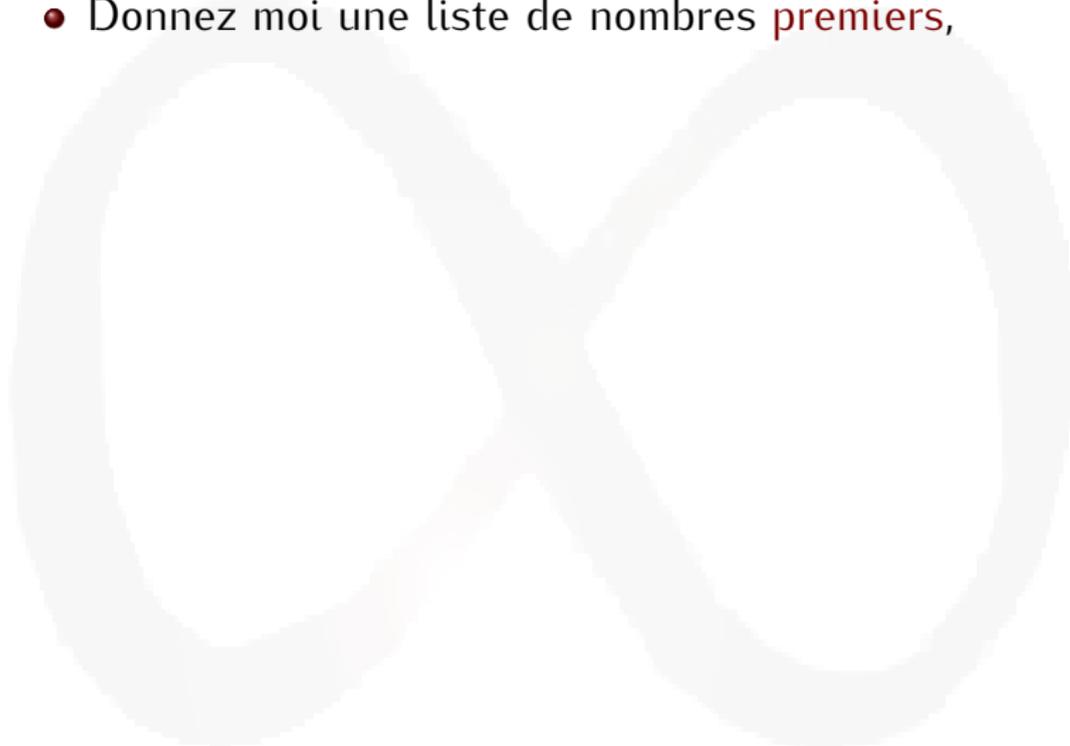
OUI



Il suffit de trouver le plus grand des nombres que vous m'avez donnés et de l'augmenter de 1.

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,

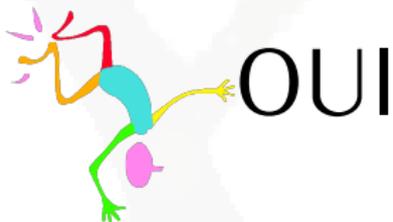


Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres **premiers**,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?

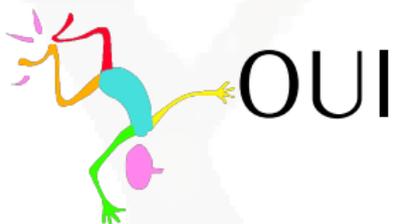
Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?



Une infinité...

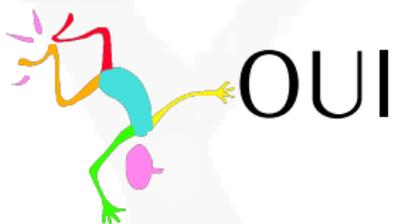
- Donnez moi une liste de nombres premiers,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?



On dit qu'il y a une **infinité** de nombres premiers.

Une infinité...

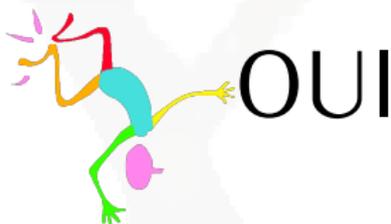
- Donnez moi une liste de nombres **premiers**,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?



On dit qu'il y a une **infinité** de nombres premiers.
Si vous choisissez une liste trop longue, il me sera malgré tout **très difficile** de construire un tel nombre premier.

Une infinité...

- Donnez moi une liste de nombres **premiers**,
- puis-je vous garantir qu'il existe un nombre premier plus grand que le plus grand de votre liste ?



On dit qu'il y a une **infinité** de nombres premiers.
Si vous choisissez une liste trop longue, il me sera malgré tout **très difficile** de construire un tel nombre premier.
Ça n'empêche pas de savoir qu'il en existe un.

Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (–325 –265)

- 1 Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p

Détail de *L'École d'Athènes* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican



Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (–325 –265)

- 1 Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
- 2 parmi tous les entiers naturels inférieurs à p , sélectionnons ceux qui sont premiers

Détail de *L'École d'Athènes* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican



Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

- 1 Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
- 2 parmi tous les entiers naturels inférieurs à p , sélectionnons ceux qui sont premiers
- 3 on en fait le produit et on ajoute un

Détail de *L'École d'Athènes* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican



Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 −265)

- 1 Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
- 2 parmi tous les entiers naturels inférieurs à p , sélectionnons ceux qui sont premiers
- 3 on en fait le produit et on ajoute un
 - ▶ soit le nombre obtenu est premier : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p

Détail de *L'École d'Athènes* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican



Une infinité de nombres premiers

La preuve d'Euclide (−325 –265)

- 1 Soit p un nombre premier, montrons qu'il existe un nombre premier plus grand que p
- 2 parmi tous les entiers naturels inférieurs à p , sélectionnons ceux qui sont premiers
- 3 on en fait le produit et on ajoute un
 - ▶ soit le nombre obtenu est premier : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p
 - ▶ soit le nombre premier obtenu n'est pas premier, il est alors divisible par un nombre premier qui ne peut pas être inférieur à p : on obtient un nombre premier strictement supérieur à p .

Détail de *L'École d'Athènes* par Raphaël (1483–1520) Stanza della Segnatura, Palazzi Pontifici, Vatican



Des infinités supposées

Les nombres premiers jumeaux

Que dire des couples de nombres

$(3, 5)$ $(5, 7)$ $(11, 13)$ $(17, 19)$ $(29, 31)$ $(41, 43)$ $(59, 61)$?

Des infinités supposées

Les nombres premiers jumeaux

Que dire des couples de nombres

$(3, 5)$ $(5, 7)$ $(11, 13)$ $(17, 19)$ $(29, 31)$ $(41, 43)$ $(59, 61)$?

Ils sont constitués de nombres premiers dont la différence est 2. Ils forment des couples de **nombres premiers jumeaux**.

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Mersenne

Nous avons vu que $2^{31} - 1$ et $2^{82589933} - 1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67} - 1$ n'est pas un nombre premier.



Des infinités supposées

Les nombres premiers de Mersenne

Nous avons vu que $2^{31} - 1$ et $2^{82589933} - 1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67} - 1$ n'est pas un nombre premier. Les nombres de la forme $2^n - 1$ qui sont premiers sont appelés **nombres premiers de Mersenne**.



Des infinités supposées

Les nombres premiers de Mersenne

Nous avons vu que $2^{31} - 1$ et $2^{82589933} - 1$ sont des nombres premiers. On a aussi vu que $2^{67} - 1$ n'est pas un nombre premier. Les nombres de la forme $2^n - 1$ qui sont premiers sont appelés **nombres premiers de Mersenne**.



Marin Mersenne (1588-1648)

Pour que $2^n - 1$ soit premiers, il est nécessaire que n soit premier :

$$2^{ab} - 1 = (2^b - 1) (1 + 2^b + \dots + 2^{(a-1)b}) .$$

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Germain

Que vous inspire le tableau suivant ?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 5 | 7 | 11 | 23 | 47 | 59 | 83 | 107 | 167 | 179 | 227 |
| 2 | 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 41 | 53 | 83 | 89 | 113 |

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Germain

Que vous inspire le tableau suivant ?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 5 | 7 | 11 | 23 | 47 | 59 | 83 | 107 | 167 | 179 | 227 |
| 2 | 3 | 5 | 11 | 23 | 29 | 41 | 53 | 83 | 89 | 113 |

Les nombres de la seconde ligne sont premiers, lorsqu'on les multiplie par 2 et ajoute 1, on obtient la première ligne dont les nombres sont aussi premiers. Les nombres premiers p tels que $2p + 1$ est premiers sont les **nombres premiers de Germain**.

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Germain

« Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se métamorphoser mon correspondant estimé M. Leblanc en cette illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos mœurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. » (Gauss)

Des infinités supposées

Les nombres premiers de Germain



Sophie Germain (1776–1831)



Des infinités supposées

Des questions sans réponses

On ne sait toujours pas s'il existe une infinité de nombres premiers

- 1 jumeaux
- 2 de Mersenne
- 3 de Germain.

Activité

À vous !

Si $x \geq 2$ est réel, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x . Par exemple, $\pi(10) = 4$ car les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7.

Fiche d'activités, activité n° 2.

Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

| N | $\pi(N)$ |
|-----------|-------------|
| 10 | 4 |
| 10^2 | 25 |
| 10^3 | 168 |
| 10^4 | 1 229 |
| 10^5 | 9 592 |
| 10^6 | 78 498 |
| 10^7 | 664 579 |
| 10^8 | 5 761 455 |
| 10^9 | 50 847 534 |
| 10^{10} | 455 052 511 |

GP/RC Done.

```
GP/PARI CALCULATOR Version 2.13.1 (released)
amd64 running linux (x86_64/GMP-6.1.2 kernel) 64-bit version
compiled: Feb 22 2021, gcc version 7.5.0 (Ubuntu 7.5.0-3ubuntu1-18.04)
threading engine: single
(readline v7.0 enabled, extended help enabled)
```

Copyright (C) 2000-2020 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.

Type ?17 for how to get moral (and possibly technical) support.

```
parisize = 250000000000, primelimit = 100000000000000
```

```
(18:04) gp > primepi(10^11)
```

```
time = 7,692 ms.
```

```
p1 = 4118054813
```

```
(18:04) gp > primepi(10^12)
```

```
time = 4min, 24,390 ms.
```

```
p2 = 37607912018
```

```
(18:09) gp > █
```



Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

| N | $\pi(N)$ | $N/\pi(N)$ |
|-----------|-------------|------------|
| 10 | 4 | 2,5 |
| 10^2 | 25 | 4 |
| 10^3 | 168 | 5,95 |
| 10^4 | 1 229 | 8,13 |
| 10^5 | 9 592 | 10,42 |
| 10^6 | 78 498 | 12,73 |
| 10^7 | 664 579 | 15,04 |
| 10^8 | 5 761 455 | 17,35 |
| 10^9 | 50 847 534 | 19,66 |
| 10^{10} | 455 052 511 | 21,97 |



Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

| N | $\pi(N)$ | $N/\pi(N)$ | Écarts |
|-----------|-------------|------------|--------|
| 10 | 4 | 2,5 | |
| 10^2 | 25 | 4 | 1,50 |
| 10^3 | 168 | 5,95 | 1,95 |
| 10^4 | 1 229 | 8,13 | 2,18 |
| 10^5 | 9 592 | 10,42 | 2,28 |
| 10^6 | 78 498 | 12,73 | 2,31 |
| 10^7 | 664 579 | 15,04 | 2,30 |
| 10^8 | 5 761 455 | 17,35 | 2,30 |
| 10^9 | 50 847 534 | 19,66 | 2,30 |
| 10^{10} | 455 052 511 | 21,97 | 2,30 |



Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

Notons

$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$

Lorsque x devient grand, il semble donc que

$$Q(10x) - Q(x) = 2,3\dots$$

Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

Notons

$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$

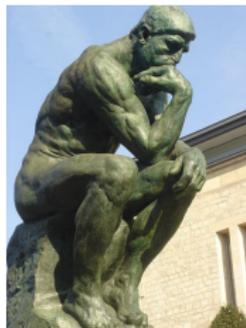
Lorsque x devient grand, il semble donc que

$$Q(10x) - Q(x) = 2,3\dots$$

On cherche une fonction une fonction f vérifiant

$$f(10x) - f(x) = 2,3\dots$$

pour tout $x > 0$.



Rodin, Le penseur.
Musée Rodin, Paris.

Compter les nombres premiers

Un peu d'expérimentation

Notons

$$Q(x) = \frac{x}{\pi(x)}.$$

Lorsque x devient grand, il semble donc que

$$Q(10x) - Q(x) = 2,3\dots$$

Une telle fonction existe, la fonction logarithme népérien \ln !



Logarithme népérien
sur une calculatrice

Compter les nombres premiers

Une conjecture du jeune Gauss (1777-1855)

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Compter les nombres premiers

Une conjecture du jeune Gauss (1777-1855)

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Gauss avait 15 ans lorsqu'il fit les calculs précédents et devina cette première version du **théorème des nombres premiers**.

Compter les nombres premiers

Une conjecture du jeune Gauss (1777-1855)

Conjecture

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Gauss avait 15 ans lorsqu'il fit les calculs précédents et devina cette première version du **théorème des nombres premiers**. Il n'annonça jamais cette conjecture, n'ayant pas de **preuve**.

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Qui va gagner de l'argent ?

Pendant 30 jours, Alice donne 340 000 € par jour à Bob ?



Pendant 30 jours, Bob donne à Alice 1 cent le premier jour, 2 cents le deuxième jour, et continue de doubler quotidiennement la somme jusqu'au 30^e jour.



La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Qui va gagner de l'argent ?

Pendant 30 jours, Alice
donne 340 000 € à Bob ?

Alice donne
 $30 \times 340\,000 = 10\,200\,000$ € à
Bob.

Pendant 30 jours, Bob
donne à Alice 1 cent le
premier jour, 2 cents le
deuxième jour, et continue
de doubler quotidiennement
la somme jusqu'au 30^e jour.

Bob donne
 $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{29}$ cents,
soit 1 073 741 823 cents ou
encore 10 737 418,23 €.

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Une voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les dixièmes d'heure (donc tous les six minutes), la vitesse augmente de 10%.



La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Une voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les dixièmes d'heure (donc tous les six minutes), la vitesse augmente de 10%.

On note v_0 la vitesse avant de commencer à accélérer. Le premier dixième d'heure, la vitesse est multipliée par 1,1 et devient donc $1,1v_0$. Pendant le deuxième dixième d'heure, la vitesse est de nouveau multipliée par 1,1 : après deux dixième d'heures, la vitesse est $1,1^2v_0$. En poursuivant : après dix dixièmes d'heure, la vitesse est donc $1,1^{10}v_0$. **Après une heure, la vitesse est $1,1^{10}v_0$.**

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Un autre voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les centièmes d'heure, la vitesse augmente de 1%.

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

Un autre voiture augmente régulièrement sa vitesse pendant une heure de la façon suivante : tous les centièmes d'heure, la vitesse augmente de 1%.

On note v_0 la vitesse avant de commencer à accélérer. Le premier centième d'heure, la vitesse est multipliée par 1,01 et devient donc $1,01v_0$. Pendant le deuxième centième d'heure, la vitesse est de nouveau multipliée par 1,01 : après deux centièmes d'heures, la vitesse est $1,01^2v_0$. En poursuivant : après cent centièmes d'heure, la vitesse est donc $1,01^{100}v_0$. **Après une heure, la vitesse est $1,01^{100}v_0$.**

La fonction logarithme népérien

Croissance exponentielle

On peut aussi considérer des voitures qui augmentent leur vitesse de 0,1% tous les millièmes d'heures, de 0,01% tous les dix-millièmes d'heures... On reporte alors dans la colonne de gauche d'un tableau le nombre par lequel est multipliée la vitesse après une heure et, dans la colonne de droite une valeur approchée de ce nombre.

La fonction logarithme népérien

Fonction exponentielle

| | |
|-----------------------|---------------|
| $1, 1^{10}$ | 2, 593742 ... |
| $1, 01^{100}$ | 2, 704813 ... |
| $1, 001^{1000}$ | 2, 716923 ... |
| $1, 0001^{10000}$ | 2.718145 ... |
| $1, 00001^{100000}$ | 2, 718268 ... |
| $1, 000001^{1000000}$ | 2, 718280 ... |

Le facteur par lequel est multipliée la vitesse s'approche de la constante $e = 2, 718280....$

La fonction logarithme népérien

Fonction exponentielle

Si au lieu de regarder les valeurs de $(1 + \frac{1}{n})^n$ pour n de plus en plus grand, on regarde les valeurs $(1 + \frac{t}{n})^n$ pour $t > 0$ fixé et n , de plus en plus grand, on s'approche d'un nombre positif qu'on note $\exp(t)$.

La fonction logarithme népérien

Fonction exponentielle

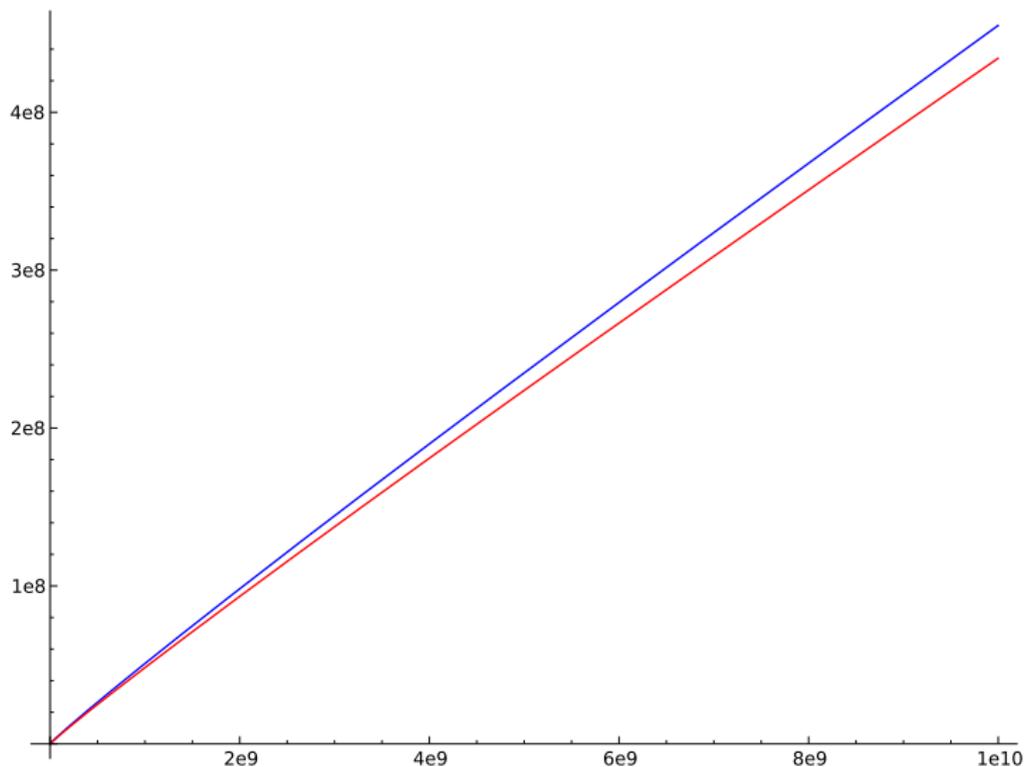
Si au lieu de regarder les valeurs de $(1 + \frac{1}{n})^n$ pour n de plus en plus grand, on regarde les valeurs $(1 + \frac{t}{n})^n$ pour $t > 0$ fixé et n , de plus en plus grand, on s'approche d'un nombre positif qu'on note $\exp(t)$.

Et la valeur de t . pour laquelle ce nombre $\exp(t)$ est égale à un nombre $v > 0$ est le logarithme de v :

$$\exp(t) = v \iff t = \ln(v).$$

Compter les nombres premiers

Précision de la conjecture du jeune Gauss



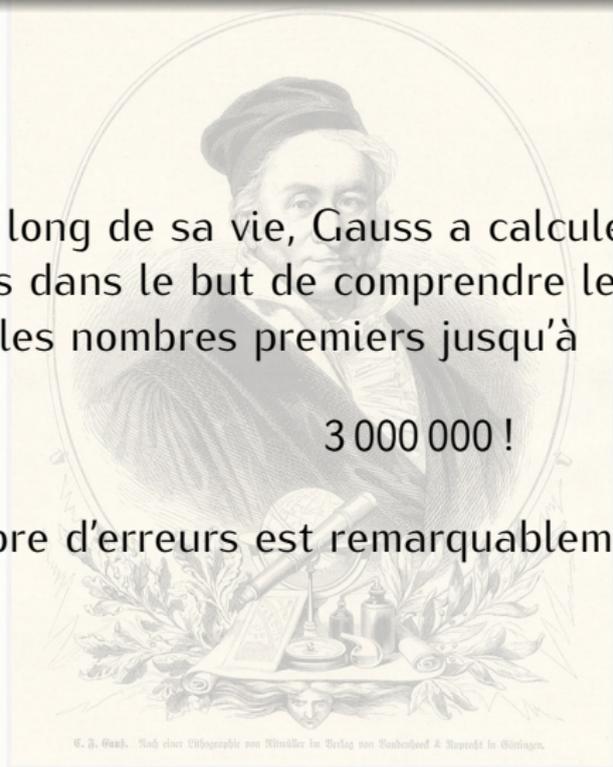
Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Tout au long de sa vie, Gauss a calculé des nombres premiers dans le but de comprendre leur distribution. Il a compté les nombres premiers jusqu'à

3 000 000 !

Le nombre d'erreurs est remarquablement faible.



Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

| | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 0 | - | - | - | - | - | - | 1 | - | - | - | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 25 |
| 2 | 10 | 9 | 9 | 11 | 9 | 6 | 10 | 7 | 15 | 13 | 98 |
| 3 | 32 | 27 | 29 | 32 | 37 | 35 | 28 | 43 | 30 | 44 | 327 |
| 4 | 69 | 69 | 73 | 86 | 78 | 88 | 71 | 95 | 85 | 64 | 778 |
| 5 | 119 | 146 | 138 | 136 | 147 | 136 | 158 | 135 | 140 | 153 | 1408 |
| 6 | 197 | 183 | 179 | 176 | 192 | 194 | 195 | 195 | 179 | 187 | 1878 |
| 7 | 204 | 201 | 205 | 194 | 189 | 180 | 201 | 188 | 222 | 214 | 1998 |
| 8 | 157 | 168 | 168 | 168 | 151 | 170 | 142 | 145 | 132 | 134 | 1525 |
| 9 | 115 | 109 | 113 | 112 | 102 | 88 | 96 | 87 | 109 | 103 | 1034 |
| 10 | 63 | 52 | 44 | 55 | 58 | 58 | 53 | 67 | 53 | 58 | 561 |
| 11 | 21 | 18 | 30 | 28 | 23 | 24 | 22 | 24 | 18 | 15 | 223 |
| 12 | 8 | 9 | 10 | 7 | 7 | 13 | 17 | 9 | 8 | 11 | 99 |
| 13 | 2 | 4 | - | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 5 | 1 | 27 |
| 14 | - | 3 | - | - | - | - | 1 | - | 2 | - | 6 |
| 15 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 | 1 |
| 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 17 | - | - | - | - | - | - | - | 1 | - | - | 1 |
| | 6874 | 6887 | 6849 | 6787 | 6766 | 6804 | 6762 | 6714 | 6744 | 6705 | 67862 |

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 200000 und 300000

| | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0 | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 10 | 9 | 9 | 11 | 9 | 6 | 10 | 7 | 15 | 13 |
| 3 | 32 | 37 | 29 | 28 | 37 | 38 | 28 | 45 | 30 | 44 |
| 4 | 69 | 69 | 73 | 86 | 78 | 88 | 71 | 95 | 85 | 64 |
| 5 | 119 | 146 | 138 | 136 | 147 | 136 | 158 | 135 | 140 | 153 |
| 6 | 197 | 183 | 179 | 176 | 192 | 194 | 195 | 179 | 187 | 187 |
| 7 | 204 | 201 | 205 | 194 | 189 | 180 | 201 | 188 | 222 | 214 |
| 8 | 157 | 168 | 168 | 168 | 151 | 170 | 142 | 145 | 132 | 134 |
| 9 | 115 | 109 | 113 | 112 | 102 | 88 | 96 | 87 | 109 | 103 |
| 10 | 63 | 52 | 44 | 55 | 68 | 88 | 83 | 67 | 53 | 58 |
| 11 | 21 | 18 | 30 | 28 | 23 | 24 | 22 | 24 | 18 | 15 |
| 12 | 8 | 9 | 10 | 7 | 7 | 13 | 17 | 9 | 8 | 11 |
| 13 | 2 | 4 | | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 5 | 1 |
| 14 | | 3 | | | | | 1 | | 2 | |
| 15 | | | | | | | | | | 1 |
| 16 | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | 1 | | | 1 |
| | 6874 | 6857 | 6849 | 6787 | 6766 | 6805 | 6762 | 6714 | 6744 | 6702 |

↑ Premiers entre $2 \cdot 10^5$ et $2 \cdot 10^5 + 10^5$
 ↑ Premiers entre $2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^5$ et $2 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^5$
 ↑ Premiers entre $2 \cdot 10^6$ et $3 \cdot 10^6$

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

| | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 2 | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 10 | 9 | 9 | 11 | 9 | 6 | 10 | 7 | 15 | 13 |
| 7 | 32 | 27 | 29 | 22 | 27 | 35 | 28 | 45 | 30 | 44 |
| 11 | 69 | 69 | 73 | 56 | 78 | 88 | 71 | 95 | 85 | 64 |
| 13 | 114 | 146 | 138 | 126 | 147 | 136 | 158 | 135 | 140 | 153 |
| 17 | 192 | 183 | 179 | 176 | 193 | 194 | 195 | 179 | 187 | 187 |
| 19 | 204 | 201 | 205 | 194 | 199 | 180 | 201 | 188 | 222 | 214 |
| 23 | 257 | 168 | 168 | 168 | 151 | 170 | 192 | 145 | 132 | 124 |
| 29 | 315 | 109 | 113 | 112 | 102 | 88 | 96 | 87 | 109 | 103 |
| 31 | 65 | 52 | 44 | 55 | 58 | 58 | 53 | 67 | 53 | 58 |
| 37 | 21 | 18 | 20 | 28 | 23 | 24 | 22 | 24 | 18 | 15 |
| 41 | 8 | 9 | 10 | 7 | 7 | 13 | 17 | 9 | 8 | 11 |
| 43 | 2 | 4 | - | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 5 | 1 |
| 47 | - | 3 | - | - | - | - | 1 | - | 2 | 1 |
| 53 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 1 |
| 59 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 61 | - | - | - | - | - | - | - | 1 | - | 1 |
| 67 | 6874 | 6857 | 6849 | 6782 | 6766 | 6804 | 6762 | 6714 | 6744 | 6705 |
| 683 | | | | | | | | | | 68362 |

Il y a 193 intervalles de la forme $[240 \cdot 10^4 + 100k, 240 \cdot 10^4 + 100k + 100[$ inclus dans $[240 \cdot 10^4, 250 \cdot 10^4[$ et contenant exactement 6 nombres premiers

Il y a 6 intervalles de la forme $[200 \cdot 10^4 + 100k, 200 \cdot 10^4 + 100k + 100[$ inclus dans $[200 \cdot 10^4, 300 \cdot 10^4[$ contenant exactement 14 nombres premiers.

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Anzahl der Primzahlen zwischen 2000000 und 3000000

| | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 | 290 | 300 | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 25 |
| 2 | 10 | 9 | 9 | 10 | 9 | 5 | 10 | 7 | 15 | 13 | 97 |
| 3 | 32 | 27 | 29 | 33 | 37 | 35 | 28 | 43 | 30 | 43 | 337 |
| 4 | 69 | 70 | 73 | 86 | 78 | 88 | 70 | 93 | 84 | 65 | 776 |
| 5 | 119 | 145 | 138 | 135 | 146 | 136 | 159 | 137 | 141 | 152 | 1408 |
| 6 | 198 | 183 | 179 | 177 | 193 | 193 | 195 | 195 | 179 | 189 | 1881 |
| 7 | 203 | 201 | 205 | 194 | 190 | 179 | 201 | 188 | 222 | 212 | 1995 |
| 8 | 158 | 167 | 168 | 157 | 151 | 172 | 141 | 145 | 131 | 135 | 1525 |
| 9 | 114 | 110 | 113 | 113 | 102 | 88 | 96 | 86 | 110 | 103 | 1035 |
| 10 | 63 | 52 | 44 | 54 | 56 | 57 | 54 | 68 | 53 | 58 | 559 |
| 11 | 21 | 18 | 30 | 29 | 25 | 25 | 22 | 24 | 18 | 15 | 227 |
| 12 | 8 | 9 | 10 | 7 | 7 | 13 | 17 | 9 | 7 | 11 | 98 |
| 13 | 2 | 4 | 0 | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 6 | 1 | 28 |
| 14 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 6872 | 6857 | 6849 | 6791 | 6770 | 6808 | 6765 | 6717 | 6747 | 6707 | 67883 |

G. P. Gauss, Nach einer Lithographie von Winckler im Verlag von Teubnerhof & Neumann in Göttingen.

Compter les nombres premiers

Une conjecture du vieux Gauss

Gauss a affiné sa conjecture à la fin de sa vie et, celle-ci n'a été démontrée qu'en 1896 par Hadamard et de la Vallée-Poussin.

C'est un étape importante dans un domaine qui est toujours en pleine expansion et donc l'un des objectifs est de comprendre la répartition des nombres premiers : la théorie analytique des nombres.

