Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

Annuités

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques
XA100M

En général, un prêt n'est **pas remboursé en une seule fois**. Les remboursements sont étalés sur **plusieurs périodes**.

De même, un capital est rarement constitué en un seul versement, mais plus souvent en une succession de versements.

Il faut alors savoir calculer les intérêts dans ces cas.

Définition 1. *On appelle **suite d'annuités** une succession de versements, pour créer ou rembourser un capital.*

1. Caractéristiques d'une suite d'annuités

Une suite d'annuités est caractérisée par quatre élements :

- Sa **périodicité** ;
- Le **nombre de versements** ;
- Le **montant** de chaque versement ;
- La **date** de chaque versement.

1.1. Périodicité d'une suite d'annuités.

La **période** d'une suite d'annuités est l'**intervalle de temps** qui sépare deux versements consécutifs.

La suite d'annuités est **certaine** si la période est constante, c'est-à-dire si le temps qui sépare deux versements est toujours le même.

Dans le cas contraire, la suite d'annuités est **aléatoire**.

Exemple 1. Vous placez 20 € tous les mois sur un compte-épargne : la suite d'annuités est certaine de période mensuelle.

Exemple 2. Vous faites un prêt sur un an, vous remboursez une partie après un mois, une partie après trois mois et le reste après un an. La période est de un mois avant le premier versement, de deux mois entre le premier et le deuxième versement et de neuf mois entre le deuxième et le dernier versement. La suite d'annuités est aléatoire.

1.2. Nombre de versements d'une suite d'annuités.

Le nombre de versements d'une suite d'annuités peut-être :

– Fini à échéance connue d'avance : la suite d'annuités est alors **temporaire** ;
– Fini à échéance non connue d'avance : la suite d'annuités est alors **viagère** ;
– Infini : la suite d'annuités est alors **perpétuelle**.

1.3. Montant des versements d'une suite d'annuités.

Le montant de chaque versement s'appelle le **terme**.

Si les termes sont égaux, c'est-à-dire si tous les versements sont de même montant, la suite d'annuités est dite **constante**.

Une suite d'annuités qui n'est pas constante est dite **variable**.

Exemple 3. Vous placez 20 € tous les mois sur un compte-épargne : la suite d'annuités est constante de terme 20 €.

Exemple 4. Vous placez 10 € le 1$^{\text{er}}$ janvier, 20 € le 1$^{\text{er}}$ février et 30 € le 1$^{\text{er}}$ mars : la suite d'annuités est variable. Le premier terme est 10 €, le deuxième terme est 20 € et le dernier terme est 30 €.

1.4. Dates des versements d'une suite d'annuités.

Si les versements débutent après la date d'origine, la suite d'annuités est dite **différée**.

Si les versements débutent dès la première période, la suite d'annuités est dite **non différée**.

Exemple 5. Vous empruntez 200 € le 1$^{\text{er}}$ janvier mais vous ne commencez les remboursements qu'à partir du 31 mars : la suite d'annuités est différée.

Exemple 6. Vous empruntez 200 € le 1$^{\text{er}}$ janvier et commencez les remboursements le 31 janvier : la suite d'annuités est non différée.

Si les versements sont effectués en **début** de période, la suite d'annuités est dite **de début de période** ou **à terme à échoir**.

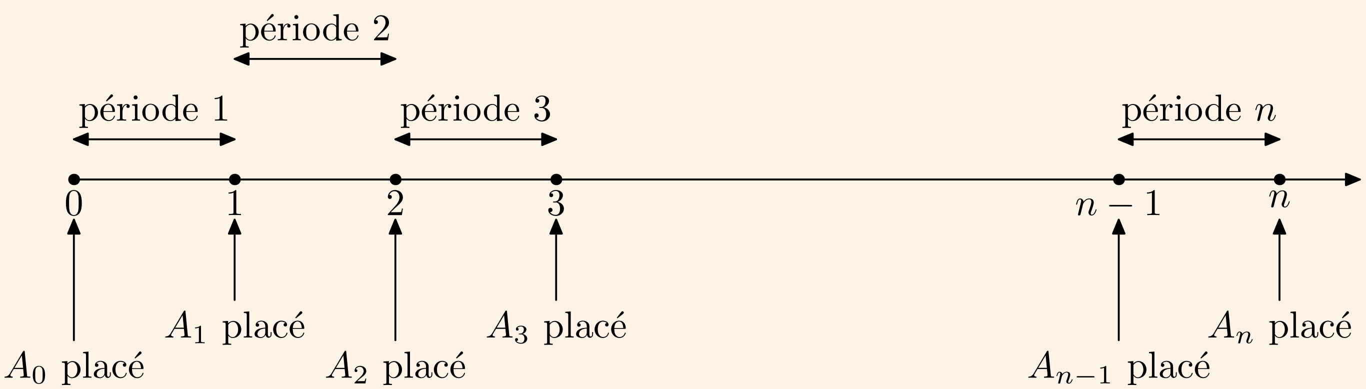
Si les versements sont effectués en **fin** de période, la suite d'annuités est dite **de fin de période** ou **à terme échu**.

Exemple 7. Lorsque vous placez de l'argent à la banque, celle-ci ne vous verse les intérêts qu'à la fin de l'année : la suite d'annuités est donc de fin de période.

2.1. Méthode de calcul.

Pendant n périodes, on place en **début de période** au taux d'intérêt i par période les termes suivants

– A_0 au début de la 1$^{\text{re}}$ période ;
– A_1 au début de la 2$^{\text{e}}$ période ;
– $\vdots$
– A_n au début de la $n+1^{\text{e}}$ période.



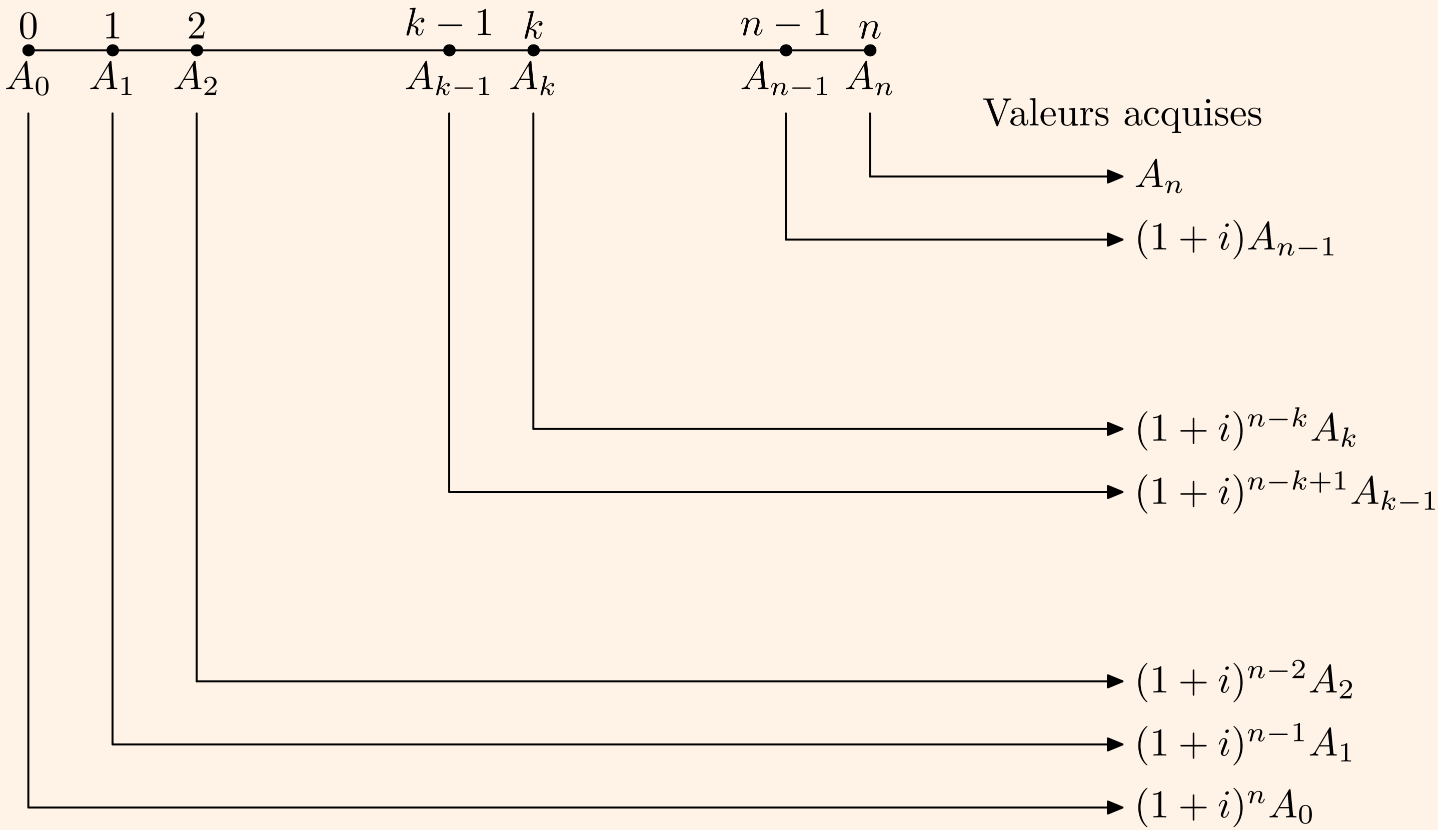
⇨La première somme placée, A_0, produit des intérêts pendant n périodes. Elle devient donc $(1+i)^n A_0$.
⇨La deuxième somme placée, A_1, produit des intérêts pendant $n-1$ périodes. Elle devient donc $(1+i)^{n-1} A_1$.
⇨La troisième somme placée, A_2, produit des intérêts pendant $n-2$ périodes. Elle devient donc $(1+i)^{n-2} A_2$.

$$\vdots$$

⇨La $k-1^{\text{e}}$ somme placée, A_k, produit des intérêts pendant $n-k$ périodes. Elle devient donc $(1+i)^{n-k} A_k$.

$$\vdots$$

⇨L'avant dernière somme placée, A_{n-1}, produit des intérêts pendant 1 période. Elle devient donc $(1+i) A_{n-1}$.
⇨La dernière somme placée, A_n, ne produit pas d'intérêt et demeure A_n.


0
1
2
$k-1$
k
$n-1$
n
A_0
A_1
A_2
A_{k-1}
A_k
A_{n-1}
A_n
Valeurs acquises
A_n
$(1+i)A_{n-1}$
$(1+i)^{n-k}A_k$
$(1+i)^{n-k+1}A_{k-1}$
$(1+i)^{n-2}A_2$
$(1+i)^{n-1}A_1$
$(1+i)^{n}A_0$

La valeur acquise totale est la somme de toutes les valeurs acquises des placements A_0, A_1,..., A_n.
La valeur acquise totale est donc

$$V_n = (1+i)^n A_0 + (1+i)^{n-1} A_1 + \cdots + (1+i)^{n-k} A_k + \cdots + (1+i) A_{n-1} + A_n.$$

On écrit

$$☞ \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{n-k} A_k.$$

Pour toutes les valeurs de k entre 0 et n, on calcule $(1+i)^{n-k} A_k$ puis on fait la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues.

Exemple 8. Sur trois périodes, on place au taux d'intérêt 2% par période
– 15 € en début de 1re période ;
– 20 € en début de 2e période ;
– 25 € en début de 3e période ;
– 30 € en début de 4e période.
On a alors

$$i = 0,02, \qquad n = 3$$

et

$$A_0 = 15, \qquad A_1 = 20, \qquad A_2 = 25, \qquad A_3 = 30.$$

Le capital, en euros, dont on dispose en début de 4e période est alors

$$\begin{aligned} &1,02^3 \times 15 + 1,02^2 \times 20 + 1,02 \times 25 + 30 \\ =&15,91812 + 20,808 + 25,5 + 30 \\ =&92,23. \end{aligned}$$

L'intérêt total est

$$2{,}23\,€.$$

Exemple 9. Sur trois périodes, on place au taux d'intérêt 2% par période

– 30 € en début de 1^re^ période ;
– 25 € en début de 2^e^ période ;
– 20 € en début de 3^e^ période ;
– 15 € en début de 4^e^ période.

On a alors

$$i = 0,02, \qquad n = 3$$

et

$$A_0 = 30, \qquad A_1 = 25, \qquad A_2 = 20, \qquad A_3 = 15.$$

Le capital, en euros, dont on dispose en début de 4^e^ période est alors

$$\begin{aligned} &1,02^3 \times 30 + 1,02^2 \times 25 + 1,02 \times 20 + 15 \\ =&31,83624 + 26,01 + 20,40 + 15 \\ =&93,25. \end{aligned}$$

L'intérêt total est

$$3{,}25\,€.$$

☞ On considère une suite d'annuités temporaires **certaines** au taux i par période pendant n périodes. On place A_0 en début de 1^{re} période, A_1 en début de 2^{e} période, etc, A_n en début de $n+1^{\text{e}}$ période.

La valeur acquise est alors

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{n-k} A_k.$$

2.2. Cas particulier des suites d'annuités constantes.

2.2.1. *Annuités de début de période.*

Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en début de période et on veut calculer la valeur acquise en **fin** de n^{e} période. Le versement de début de $n+1^{\text{e}}$ période n'est donc pas pris en compte :

$$A_0 = A_1 = \cdots = A_{n-1} = a \quad \text{et} \quad A_n = 0.$$

P

Q

On a alors

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k} a + 0 \\ &= a(1+i)^n + a(1+i)^{n-1} + \cdots + a(1+i). \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $a(1+i)$ et de raison $1+i$. Ainsi

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}.$$

P

Q

Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en début de période et on veut calculer la valeur acquise en **fin** de n^{e} période :

$$☞ \quad V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

◀ ▶ P Q

Toujours se poser la question :

« Cherche-t'on la valeur acquise avant ou après le dernier versement ? »

2.2.2. *Annuités de fin de période.*

Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en fin de période et on veut calculer la valeur acquise en **début** de $n+1^{\text{e}}$ période. Il n'y a pas de versement au début de la première période donc $A_0 = 0$. Tous les autres versements ont pour montant a.

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = \cdots = A_n = a.$$

On a alors

$$\begin{aligned} V_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} a \\ &= a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \cdots + a(1+i) + a. \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $1+i$. Ainsi

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}.$$

Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en fin de période et on veut calculer la valeur acquise en **début** de $n+1^{\text{e}}$ période :

$$☞ \qquad V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

3. Valeur actuelle d'une suite d'annuités certaines temporaires

⏮ On rappelle que la valeur actuelle d'une somme A_k est la somme placée qui, après intérêt, produit A_k.

La valeur actuelle d'une suite d'annuités A_0, $A_1,\dots,A_n$ est la somme V_0 qu'on peut emprunter pour que la suite d'annuités A_0, $A_1,\dots,A_n$ finance l'emprunt, intérêt compris.

La valeur actuelle d'une suite d'annuités A_0, $A_1,\dots,A_n$ est la somme V_0 répondant à la question :
« Quelle somme V_0 puis-je emprunter lors d'un emprunt que je rembourse en versant A_0 au début de la 1^{re} période, A_1 en début de 2^{e} période, etc, A_n en début de $n+1^{\text{e}}$ période ?»

P
Q

3.1. Méthode de calcul.

On emprunte V_0 et on rembourse immédiatement A_0. Il reste donc à rembourser

$$V_0 - A_0.$$

Cette somme produit un intérêt : si on remboursait juste avant le versement de A_1, il faudrait donc rembourser

$$(V_0 - A_0)(1+i) = V_0(1+i) - A_0(1+i).$$

Après le versement de A_1, il reste donc à rembourser

$$V_0(1+i) - A_0(1+i) - A_1.$$

Cette somme produit un intérêt : si on remboursait juste avant le versement de A_2, il faudrait donc rembourser

$$[V_0(1+i) - A_0(1+i) - A_1](1+i) = V_0(1+i)^2 - A_0(1+i)^2 - A_1(1+i).$$

Après le versement de A_2, il reste donc à rembourser

$$V_0(1+i)^2 - A_0(1+i)^2 - A_1(1+i) - A_2.$$

De façon générale, après le versement de A_{k-1}, il reste à rembourser

$$V_0(1+i)^{k-1} - A_0(1+i)^{k-1} - A_1(1+i)^{k-2} - \cdots - A_{k-1}.$$

Cette somme produit un intérêt : si on remboursait juste avant le versement de A_k, il faudrait donc rembourser

$$\begin{aligned}\Big[V_0(1+i)^{k-1} - A_0(1+i)^{k-1} - A_1(1+i)^{k-2} - \cdots - A_{k-1}\Big](1+i)\\ = V_0(1+i)^{k} - A_0(1+i)^{k} - A_1(1+i)^{k-1} - \cdots - A_{k-1}(1+i).\end{aligned}$$

Après le versement de A_k, il reste donc à rembourser

$$V_0(1+i)^{k} - A_0(1+i)^{k} - A_1(1+i)^{k-1} - \cdots - A_{k-1}(1+i) - A_k.$$

En particulier, après le versement de A_n, il reste à rembourser

$$V_0(1+i)^{n} - A_0(1+i)^{n} - A_1(1+i)^{n-1} - \cdots - A_{n-1}(1+i) - A_n.$$

Puisque A_n est le dernier versement, on veut que la somme qui reste à rembourser après ce versement soit nulle. On veut donc

$$V_0(1+i)^n - A_0(1+i)^n - A_1(1+i)^{n-1} - \cdots - A_{n-1}(1+i) - A_n = 0$$

c'est-à-dire

$$V_0(1+i)^n = A_0(1+i)^n + A_1(1+i)^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(1+i) + A_n$$

ou encore

$$V_0 = A_0 + A_1(1+i)^{-1} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

On écrit

☞ $$V_0 = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{-k} A_k.$$

Pour toutes les valeurs de k entre 0 et n, on calcule $(1+i)^{-k}A_k$ puis on fait la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues.

Exemple 10. On souhaite emprunter au taux d'intérêt 2% par période. On peut rembourser sur trois périodes,

– 15 € en début de 1re période ;
– 20 € en début de 2e période ;
– 25 € en début de 3e période ;
– 30 € en début de 4e période.

On a alors

$$i = 0,02, \qquad n = 3$$

et

$$A_0 = 15, \qquad A_1 = 20, \qquad A_2 = 25, \qquad A_3 = 30.$$

La somme, en euros, empruntable grâce à ces remboursements est

$$\begin{aligned} & 15 + 1,02^{-1} \times 20 + 1,02^{-2} \times 25 + 1,02^{-3} \times 30 \\ =& 15 + 19,6078 + 24,0292 + 28,2697 \\ =& 86.91. \end{aligned}$$

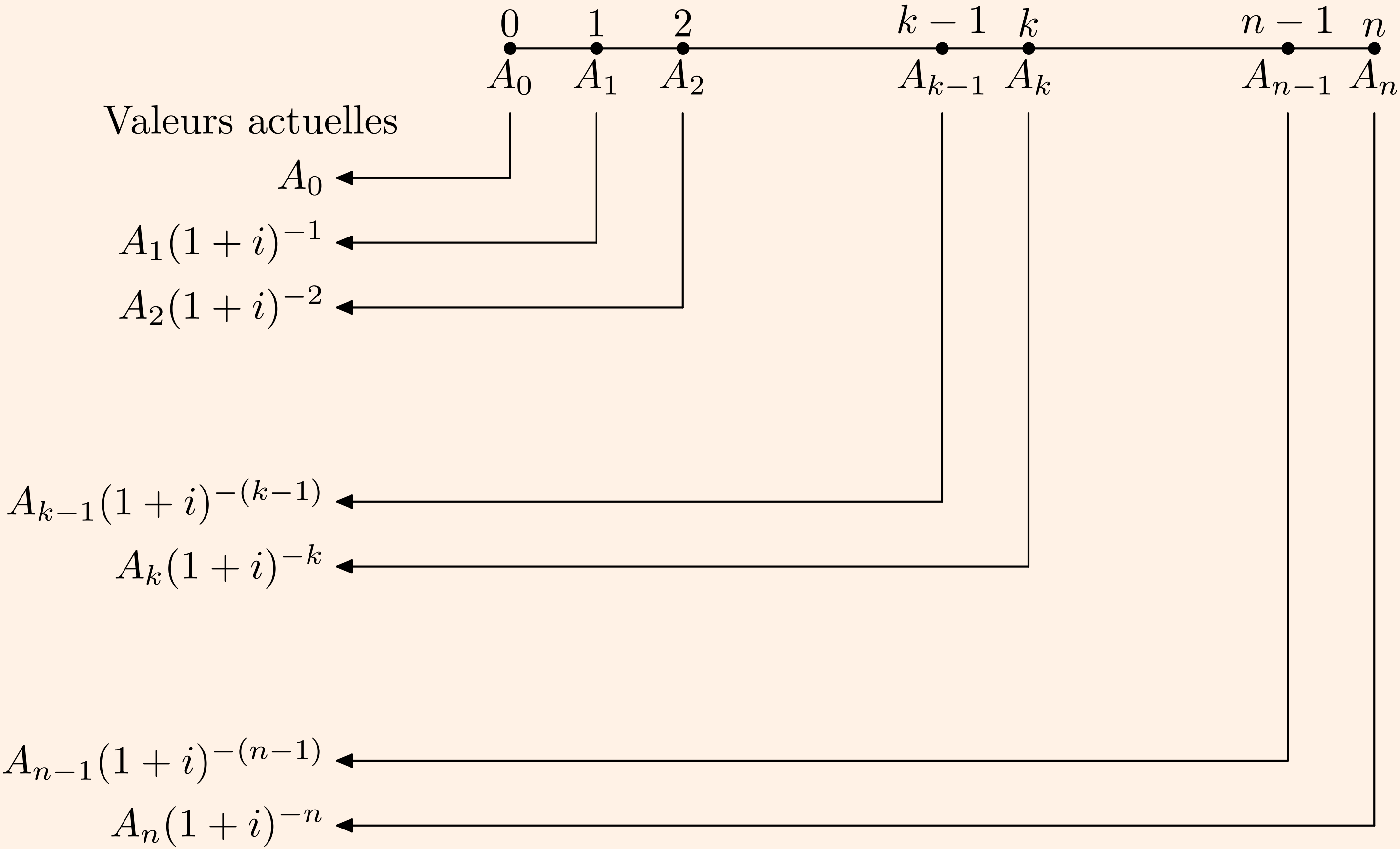
☞ On considère une suite d'annuités temporaires **certaines** au taux i par période pendant n périodes. On rembourse A_0 en début de 1re période, A_1 en début de 2e période, etc, A_n en début de $n+1$e période. La somme empruntable (valeur actuelle) est alors

$$V_0 = \sum_{k=0}^{n} (1+i)^{-k} A_k.$$

⏮ On se souvient que

A_0 est la valeur actuelle de A_0
$A_1(1+i)^{-1}$ est la valeur actuelle de A_1
$\vdots$
$A_k(1+i)^{-k}$ est la valeur actuelle de A_k
$\vdots$
$A_n(1+i)^{-n}$ est la valeur actuelle de A_n.

La valeur actuelle est donc la somme des valeurs actuelles de chaque remboursements.



0 1 2 $k-1$ k $n-1$ n
A_0 A_1 A_2 A_{k-1} A_k A_{n-1} A_n
Valeurs actuelles
A_0
$A_1(1+i)^{-1}$
$A_2(1+i)^{-2}$
$A_{k-1}(1+i)^{-(k-1)}$
$A_k(1+i)^{-k}$
$A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)}$
$A_n(1+i)^{-n}$

3.2. Cas particulier des suites d'annuités constantes.

3.2.1. *Annuités de début de période.*

Comme au §2.2.1, on a

$$A_0 = \cdots = A_{n-1} = a \quad \text{et} \quad A_n = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{-k} a + 0 \\ &= a + a(1+i)^{-1} + \cdots + a(1+i)^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1+i)^{-1}$. Ainsi

$$V_0 = a\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}.$$

On simplifie en utilisant

$$\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

☞ Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en début de période et on veut calculer la valeur actuelle en **fin** de n^{e} période :

La valeur actuelle est alors

$$V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

3.2.2. *Annuités de fin de période.*

Comme au §2.2.2, on a

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = \cdots = A_n = a.$$

On a alors

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} a \\ &= a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}. \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $a(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$. Ainsi

$$V_0 = a(1+i)^{-1} \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}.$$

On simplifie en utilisant

$$\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = (1+i) \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Les annuités sont supposées constantes, de terme égal à a. Le versement se fait en fin de période et on veut calculer la valeur actuelle en **début** de $n+1^{\text{e}}$ période :

$$☞ \qquad V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$