

## Un cours « Africain » sur les formes modulaires

Emmanuel Royer <sup>(a)</sup>



29 août 2024

*a.* Une version préliminaire et partielle de ce cours a été donnée aux Universités de Tunis et Bizerte (Tunisie) dans le cadre d'un projet de coopération franco-tunisienne subventionné par le Cnrs et la Dgrsrt. La partie sur les formes modulaires et quasimodulaires sur le groupe modulaire a été rédigée et donnée sous cette forme à l'université de Bamako (Mali) dans le cadre du projet européen *Edulink/Ramses*. Ce texte est dédié au petit garçon bamakois qui m'a prêté son prénom.



Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France disponible en ligne <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/> ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

**Ce texte est une version très préliminaire. Merci de rapporter les erreurs à [manuel.royer@uca.fr](mailto:manuel.royer@uca.fr)**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
1.1	Une étonnante égalité . . . . .	6
1.2	Les propriétés de coefficients issus d'un produit . . . . .	10
1.3	Fonctions arithmétiques . . . . .	11
1.3.1	Généralités . . . . .	11
1.3.2	Fonction de Möbius . . . . .	14
1.3.3	Fonctions sommes de diviseurs . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Formes modulaires sur le groupe modulaire</b>	<b>18</b>
2.1	Définition et structure linéaire . . . . .	18
2.2	Structure hermitienne . . . . .	37
2.3	Opérateurs de Hecke . . . . .	45
2.3.1	Opérateurs de Hecke sur les fonctions périodiques . . . . .	45
2.3.2	Opérateurs de Hecke sur les formes modulaires . . . . .	53
2.3.3	Intervalles sans valeurs propres . . . . .	56
2.4	Propriétés intégrales des coefficients de formes primitives . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Formes quasimodulaires sur le groupe modulaire</b>	<b>64</b>
3.1	Définition . . . . .	64
3.2	Théorèmes de structure . . . . .	77
3.3	Opérateurs de Hecke quasimodulaires . . . . .	80
3.4	Formes modulaires presque holomorphes . . . . .	82
3.5	Modularité et équations différentielles . . . . .	87
3.5.1	Des équations satisfaites par les séries d'Eisenstein . . . . .	87
3.5.2	Équations différentielles des formes quasimodulaires . . . . .	89
3.5.3	Crochets de Rankin-Cohen . . . . .	93
3.5.4	Crochets de Rankin-Cohen et équations différentielles . . . . .	101
3.5.5	Crochets de Rankin-Cohen et formes presque holomorphes . . . . .	107
3.6	Autour de l'équation de Chazy . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Le théorème des nombres premiers</b>	<b>108</b>
4.1	Préliminaire : notation en théorie analytique des nombres . . . . .	108
4.2	La fonction Zeta de Riemann . . . . .	109
4.2.1	Définition et prolongement holomorphe . . . . .	109

4.2.2	Étude des zéros . . . . .	112
4.3	Le théorème des nombres premiers . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Fonctions L de formes modulaires</b>	<b>132</b>
5.1	Fonctions L de formes modulaires . . . . .	132
5.1.1	Définition . . . . .	132
<b>A</b>	<b>Compléments d'algèbre</b>	<b>137</b>
A.1	Série formelle . . . . .	137
A.2	Caractères . . . . .	139
A.2.1	Propriétés générales . . . . .	139
A.2.2	Une structure d'espace préhilbertien . . . . .	140
A.2.3	Théorie de Fourier . . . . .	142
A.3	Actions de groupes . . . . .	145
A.4	Polynômes de Tchebychef . . . . .	147
A.5	Polynômes symétriques . . . . .	150
A.5.1	Définition . . . . .	150
A.5.2	Ordre sur les monômes . . . . .	151
A.5.3	Preuve du théorème fondamental des polynômes symétriques . . . . .	154
A.6	Accouplements parfaits . . . . .	155
A.7	Extensions transcendentes . . . . .	155
A.8	Algèbres de Poisson . . . . .	161
<b>B</b>	<b>Compléments d'analyse</b>	<b>168</b>
B.1	Applications conformes . . . . .	168
B.2	Développement de Fourier complexe . . . . .	168
B.3	Logarithmes complexes . . . . .	170
B.3.1	Détermination principale du logarithme . . . . .	170
B.3.2	Racine carrée . . . . .	174
B.3.3	Détermination holomorphe du logarithme d'une fonction . . . . .	174
B.4	Nombres de Bernoulli . . . . .	175
B.5	Fonctions de Bernoulli . . . . .	179
B.6	La formule de Poisson . . . . .	183
B.7	La formule sommatoire d'Abel . . . . .	184
B.8	La formule sommatoire d'Euler Maclaurin . . . . .	185
B.9	Majorations d'intégrales trigonométriques . . . . .	187
B.10	Produits infinis . . . . .	191
B.11	Formule d'Euler . . . . .	195
B.12	Fonctions B et $\Gamma$ d'Euler . . . . .	197
B.13	Fonction confluyente hypergéométrique . . . . .	202
B.14	Fonctions J de Bessel . . . . .	203
B.15	Une autre présentation de $E_2$ . . . . .	208
B.16	Transformation de Mellin . . . . .	211

---

<b>C Compléments d'arithmétique</b>	<b>217</b>
C.1 Compléments sur les fonctions arithmétiques . . . . .	217
C.1.1 Compléments sur la fonction somme de diviseurs . . . . .	217
C.1.2 Fonction nombre de diviseurs premiers . . . . .	218
C.2 Séries de Dirichlet . . . . .	219
C.3 Quelques fonctions sommatoires arithmétiques . . . . .	223
C.4 Sommes de Kloosterman . . . . .	224
<b>D Problèmes</b>	<b>229</b>
D.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	229
D.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux. . . . .	232
D.3 Le théorème des quatre carrés . . . . .	236
D.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique . . . . .	242
<b>E Corrigés des problèmes</b>	<b>244</b>
E.1 Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	244
E.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux. . . . .	254
E.3 Le théorème des quatre carrés . . . . .	264
E.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique . . . . .	265

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Une étonnante égalité

Si  $\nu$  est un nombre complexe, on définit la fonction

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n &\mapsto \sum_{d|n} d^\nu \end{aligned}$$

la somme portant sur les diviseurs positifs de  $n$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_1(a)\sigma_1(n-a) = \frac{1}{12} (\sigma_1(n) + 5\sigma_3(n) - 6n\sigma_1(n)) \quad (1.1)$$

et

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_3(a)\sigma_3(n-a) = \frac{1}{120} (\sigma_7(n) - \sigma_3(n)). \quad (1.2)$$

Il existe plusieurs démonstrations élémentaires de ces égalités. Nous en donnons une due à Skoruppa [39] dans une forme présentée par Zagier dans son cours au Collège de France (2005-2006).

**Proposition 1**– Soit  $H(X, Y)$  un polynôme tel que

$$H(X, X + Y) = H(X + Y, Y).$$

On pose  $\tilde{H}(X, Y) = H(X, X + Y)$  puis, on définit les coefficients des polynômes  $H$  et  $\tilde{H}$  par

$$H(X, Y) = \sum_{r,s \geq 1} h_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1} \quad \text{et} \quad \tilde{H}(X, Y) = \sum_{r,s \geq 1} \tilde{h}_{r,s} X^{r-1} Y^{s-1}.$$

Enfin, pour tout entier  $n \geq 1$ , on écrit

$$\sum_{m=1}^{n-1} H(n, m) = \sum_{j \geq 1} \gamma_j n^{j-1}.$$

Pour tout entier  $N \geq 1$ , on a l'égalité,

$$\sum_{r,s \geq 1} (\tilde{h}_{r,s} - h_{r,s}) \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{r-1}(k) \sigma_{s-1}(N-k) = \sum_{j \geq 0} (\gamma_j - N h_{j+1,1} + h_{j,1}) \sigma_{j-1}(N)$$

avec la convention  $h_{0,1} = \gamma_0 = 0$ .

*Remarque 2-* L'existence des coefficients  $\gamma_j$  repose sur le fait que, pour tout  $s \geq 1$ , la somme

$$\sum_{m=1}^{n-1} m^{s-1}$$

est un polynôme en  $n$ . Ce polynôme est calculé proposition 299. Cette proposition permet de montrer que  $\gamma_1 = 0$  et

$$\gamma_j = \sum_{s \geq 1} \frac{1}{s} \sum_{\ell=1}^{\min(j-1,s)} \binom{s}{\ell} B_{s-\ell} h_{j-\ell,s}$$

si  $j \geq 2$  où  $B_{s-\ell}$  est le nombre de Bernoulli d'indice  $s - \ell$ .

Le choix  $n = 1$  dans l'égalité

$$\sum_{m=1}^{n-1} H(n, m) = \sum_{j \geq 1} \gamma_j n^{j-1}$$

implique l'égalité

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_j = 0.$$

La preuve de la proposition 1 repose sur le lemme combinatoire suivant exprimant une relation de symétrie de la fonction  $\Lambda_N$  définie par

$$\Lambda_N : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) \mapsto \#\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : ax + by = N\}.$$

Noter que  $\Lambda_N(a, b) = \Lambda_N(b, a)$ .

**Lemme 3—** On a

$$\Lambda_N(a, b) = \Lambda_N(a, a+b) + \Lambda_N(b, a+b) + \delta(a+b | N).$$

*Démonstration.* On remarque la bijection

$$\begin{array}{ccc} \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : ax + by = N, x > y\} & \xrightarrow{\sim} & \{(z, w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : az + (a+b)w = N\} \\ (x, y) & \mapsto & (x-y, y) \end{array}$$

l'ensemble d'arrivée ayant cardinal  $\Lambda_N(a, a+b)$ . On remarque aussi la bijection

$$\begin{array}{ccc} \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : ax + by = N, x < y\} & \xrightarrow{\sim} & \{(z, w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : bz + (a+b)w = N\} \\ (x, y) & \mapsto & (y-x, x) \end{array}$$

l'ensemble d'arrivée ayant cardinal  $\Lambda_N(b, a+b)$ . De ces deux bijections, on déduit

$$\Lambda_N(a, b) = \Lambda_N(a, a+b) + \Lambda_N(b, a+b) + \#\{(x, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : ax + bx = N\}$$

le dernier cardinal étant 1 si  $a+b$  divise  $N$  et 0 sinon.  $\square$

*Preuve de la proposition 1.* Multipliant l'égalité du lemme 3 par  $\tilde{H}(a, b) = H(a, a+b) = H(a+b, b)$  on trouve

$$\tilde{H}(a, b)\Lambda_N(a, b) = H(a, a+b)\Lambda_N(a, a+b) + H(a+b, b)\Lambda_N(a+b, b) + \tilde{H}(a, b)\delta(a+b | N).$$

En sommant sur tous les couples  $(a, b)$  (noter qu'il n'y en a qu'un nombre fini pour lesquels  $\Lambda_N(a, b)$  est non nul) on a

$$\sum_{a, b \geq 1} \tilde{H}(a, b)\Lambda_N(a, b) = \sum_{\substack{a, c \\ 1 \leq a < c}} H(a, c)\Lambda_N(a, c) + \sum_{\substack{b, d \\ d > b \geq 1}} H(d, b)\Lambda_N(d, b) + \sum_{a, b \geq 1} \tilde{H}(a, b)\delta(a+b | N).$$

Puisque

$$\sum_{\substack{b, d \\ d > b \geq 1}} H(d, b)\Lambda_N(d, b) = \sum_{\substack{a, c \\ a > c \geq 1}} H(a, c)\Lambda_N(a, c)$$

on obtient

$$\sum_{a, b \geq 1} (\tilde{H}(a, b) - H(a, b))\Lambda_N(a, b) = - \sum_{a \geq 1} H(a, a)\Lambda_N(a, a) + \sum_{a, b \geq 1} \tilde{H}(a, b)\delta(a+b | N). \quad (1.3)$$

Or

$$\Lambda_N(a, a) = \#\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a(x+y) = N\} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \nmid N \\ \frac{N}{a} - 1 & \text{si } a | N \end{cases}$$

puis  $H(a, a) = \tilde{H}(a, 0) = H(a, 0)$  d'où

$$\begin{aligned} \sum_{a \geq 1} H(a, a)\Lambda_N(a, a) &= \sum_{a|N} H(a, 0) \left( \frac{N}{a} - 1 \right) \\ &= \sum_{r \geq 1} h_{r,1} \sum_{a|N} a^{r-1} \left( \frac{N}{a} - 1 \right) \\ &= \sum_{r \geq 1} h_{r,1} (N\sigma_{r-2}(N) - \sigma_{r-1}(N)) \\ &= \sum_{j \geq 0} (Nh_{j+1,1} - h_{j,1})\sigma_{j-1}(N). \end{aligned} \quad (1.4)$$

*Remarque 4* - Pour écrire l'égalité (1.4), on a utilisé la convention  $h_{0,1} = 0$ .

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \sum_{a,b \geq 1} \tilde{H}(a,b) \delta(a+b | \mathbb{N}) &= \sum_c \delta(c | \mathbb{N}) \sum_{1 \leq b < c} \tilde{H}(c-b, b) \\
 &= \sum_{c | \mathbb{N}} \sum_{1 \leq b < c} H(c, b) \\
 &= \sum_{j \geq 1} \gamma_j \sum_{c | \mathbb{N}} c^{j-1} \\
 &= \sum_{j \geq 1} \gamma_j \sigma_{j-1}(\mathbb{N}).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Par report de (1.4), (1.5) dans (1.3) on a

$$\sum_{a,b \geq 1} (\tilde{H}(a,b) - H(a,b)) \Lambda_{\mathbb{N}}(a,b) = \sum_{j \geq 0} (\gamma_j - \mathbb{N} h_{j+1,1} + h_{j,1}) \sigma_{j-1}(\mathbb{N}). \tag{1.6}$$

*Remarque 5* - Pour écrire l'égalité (1.6), on a utilisé la convention  $\gamma_0 = 0$ .

Enfin,

$$\sum_{a,b \geq 1} H(a,b) \Lambda_{\mathbb{N}}(a,b) = \sum_{r,s \geq 1} h_{r,s} \sum_{a,b \geq 1} a^{r-1} b^{s-1} \Lambda_{\mathbb{N}}(a,b)$$

puis

$$\sum_{a,b \geq 1} a^{r-1} b^{s-1} \Lambda_{\mathbb{N}}(a,b) = \sum_{\substack{(a,b,x,y) \in \mathbb{N}^4 \\ ax+by=\mathbb{N}}} a^{r-1} b^{s-1} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \\ k+\ell=\mathbb{N}}} \sum_{a|k} a^{r-1} \sum_{b|\ell} b^{s-1}$$

ayant posé  $k = ax$  et  $\ell = by$ . On a donc

$$\sum_{a,b \geq 1} (\tilde{H}(a,b) - H(a,b)) \Lambda_{\mathbb{N}}(a,b) = \sum_{r,s \geq 1} (\tilde{h}_{r,s} - h_{r,s}) \sum_{k=1}^{\mathbb{N}-1} \sigma_{r-1}(k) \sigma_{s-1}(\mathbb{N}-k). \tag{1.7}$$

La formule de la proposition s'obtient par report de (1.7) dans (1.6).  $\square$

Choisissons

$$H(X, Y) = \frac{1}{2} (X^2 - XY + Y^2).$$

On a

$$H(X, X+Y) = \frac{1}{2} (X^2 + XY + Y^2) = H(X+Y, Y) = \tilde{H}(X, Y).$$

On calcule

$$\sum_{m=1}^{n-1} H(n, m) = \frac{5}{12} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{12} n$$

de sorte que

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_4 = \frac{5}{12}.$$

Par ailleurs,

$$h_{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (3,1) \\ & \text{ou } (r,s) = (1,3) \\ -\frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (2,2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{h}_{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (r,s) = (3,1) \\ & \text{ou } (r,s) = (1,3) \\ & (r,s) = (2,2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{r,s} (\tilde{h}_{r,s} - h_{r,s}) \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{r-1}(k) \sigma_{s-1}(N-k) = \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1(k) \sigma_1(N-k)$$

et

$$\sum_{j \geq 0} (\gamma_j - N h_{j+1,1} + h_{j,1}) \sigma_{j-1}(N) = \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2} N \right) \sigma_1(N) + \frac{5}{12} \sigma_3(N).$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1(k) \sigma_1(N-k) = \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2} N \right) \sigma_1(N) + \frac{5}{12} \sigma_3(N).$$

Avec

$$H(X, Y) = \frac{1}{4} (XY(X - Y))^2$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_3(k) \sigma_3(N-k) = \frac{1}{120} (\sigma_7(N) - \sigma_3(N)).$$

Ce cours fournira des outils permettant de situer ces égalités dans un cadre conceptuel. Cette conceptualisation conduit à de nouvelles égalités telles que

$$\sum_{a=1}^{n-1} a \sigma_1(a) \sigma_3(n-a) = -\frac{n}{40} \left( n \sigma_3(n) - \frac{7}{6} \sigma_5(n) + \frac{1}{6} \sigma_1(n) \right).$$

## 1.2 Les propriétés de coefficients issus d'un produit

Pour tout nombre complexe  $z$  de partie imaginaire strictement positive, on définit

$$\Delta(z) = e^{2i\pi z} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z})^{24}.$$

La fonction  $\Delta$  est périodique de période 1 et admet un développement de Fourier

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{\Delta}(n) e^{2i\pi n z}.$$

La calcul des produits partiels permet de constater expérimentalement les formules suivantes.

1) Pour tous entiers  $m$  et  $n$ , on a

$$\widehat{\Delta}(m)\widehat{\Delta}(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11/2} \widehat{\Delta}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

en ayant noté  $(m, n)$  le plus grand diviseur commun de  $m$  et  $n$ . Si  $p$  est un nombre premier et  $v \geq 0$  un entier, on a

$$\frac{\widehat{\Delta}(p^v)}{p^{11v/2}} = X_v\left(\frac{\widehat{\Delta}(p)}{p^{11/2}}\right)$$

où  $X_v$  est un polynôme de Tchebychev de seconde espèce (voir l'annexe A.4).

2) Pour tout entier  $n$ , on a la majoration

$$|\widehat{\Delta}(n)| \leq \sigma_0(n) n^{11/2}.$$

3) Définissons  $\lambda_\Delta(n) = \widehat{\Delta}(n)/n^{11/2}$  et notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Pour tout intervalle  $[a, b] \subset [-2, 2]$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x, \lambda_\Delta(p) \in [a, b]\}}{\#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\}} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx.$$

4) Pour tout entier  $n$ , on a  $\widehat{\Delta}(n) \neq 0$ .

Nous démontrerons le premier point. Le deuxième point a été démontré (sous une forme plus générale) par Deligne en 1974, la preuve est au delà des objectifs de ce cours. Le troisième point, connu jusqu'à récemment sous le nom de conjecture de Sato-Tate a été démontré en 2009 par Barnet-Lamb, Geraghty, Harris & Taylor. Ces trois résultats ont comme point de départ l'interprétation des coefficients de Fourier de  $\Delta$  comme valeurs propres d'opérateurs que nous allons étudier : les opérateurs de Hecke. Le dernier point est encore conjectural.

## 1.3 Fonctions arithmétiques

### 1.3.1) Généralités

Une fonction arithmétique est une fonction de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{C}$ . Elle est *multiplicative* si

$$(m, n) = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n)$$

pour tous couples d'entiers naturels non nuls  $(m, n)$  et si elle n'est pas la fonction nulle. Si  $f$  est multiplicative, alors il existe un entier  $n$  tel que  $f(n) \neq 0$  et puisque  $(n, 1) = 1$  alors  $f(1 \cdot n) = f(1)f(n)$  de sorte que  $f(1) = 1$ . Par ailleurs, si

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

est la décomposition en facteurs premiers distincts de  $n$ , alors

$$f(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} f(p^{v_p(n)}).$$

Autrement dit, une fonction multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs en les puissances de nombres premiers. L'ensemble des fonctions arithmétiques est muni d'un intéressant produit (sa définition est justifiée par la proposition 349).

**Définition 6**– Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions arithmétiques, on définit leur produit de convolution,  $f * g$ , par

$$f * g(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

Le changement de variable  $n \leftarrow n/d$  montre que le produit de convolution est commutatif. L'unité pour ce produit est la fonction  $\delta$  définie par :

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{N}^* &\rightarrow \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Proposition 7**– Le produit de convolution de deux fonctions multiplicatives est multiplicatif.

*Démonstration.* Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions multiplicatives. On a

$$f * g(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right).$$

Si  $(m, n) = 1$ , la décomposition des entiers en facteurs premiers de façon unique implique qu'on a une bijection

$$\begin{aligned} \{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a | m, b | n\} &\xrightarrow{\sim} \{d \in \mathbb{N}^* : d | mn\} \\ (a, b) &\mapsto ab. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la multiplicativité de  $f$  et  $g$ , on obtient

$$f * g(mn) = \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) = f * g(m) \cdot f * g(n).$$

□

En faisant le changement de variable  $d \leftarrow n/d$  dans la définition (1.8), on voit que le produit est commutatif.

**Corollaire 8**– *L'ensemble des fonctions arithmétiques, muni de l'addition, du produit externe des fonctions et du produit de convolution est une algèbre commutative sur  $\mathbb{C}$  que l'on note  $\mathcal{A}$ .*

On étudie ensuite les éléments inversibles de l'algèbre des fonctions arithmétiques.

**Proposition 9**– *L'ensemble des fonctions arithmétiques inversibles pour le produit de convolution est l'ensemble des fonctions arithmétiques ne s'annulant pas en 1.*

*Démonstration.* Si  $f$  est inversible d'inverse  $f^{*-1}$ , alors  $f * f^{*-1}(1) = \delta(1) = 1$  et donc  $f(1) \neq 0$ . Supposons réciproquement que  $f(1) \neq 0$ . La fonction  $g$  définie par récurrence par  $g(1) = 1$  et

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

vérifie  $f * g = \delta$  et est donc un inverse pour  $f$ .  $\square$

Enfin, on montre que l'ensemble des fonctions multiplicatives est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions arithmétiques

**Proposition 10**– *Si  $f$  est une fonction multiplicative, son inverse est multiplicative.*

*Démonstration.* On a vu que  $f^{*-1} = 1/f(1)$ . Si  $m = 1$  alors

$$f^{*-1}(1 \times m) = f^{*-1}(m) = f^{*-1}(1)f^{*-1}(m).$$

Supposons que si  $m'n' < mn$  alors  $f^{*-1}(m'n') = f^{*-1}(m')f^{*-1}(n')$ . Si  $m > 1$  et  $n > 1$ , alors

$$f^{*-1}(mn) = -\sum_{\substack{d|mn \\ d>1}} f(d)f^{*-1}\left(\frac{mn}{d}\right) = -\sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab>1}} f(a)f(b)f^{*-1}\left(\frac{m}{a}\right)f^{*-1}\left(\frac{n}{b}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} f^{*-1}(mn) &= -f^{*-1}(m) \sum_{\substack{b|n \\ b>1}} f(b)f^{*-1}\left(\frac{n}{b}\right) - f^{*-1}(n) \sum_{\substack{a|m \\ a>1}} f(a)f^{*-1}\left(\frac{m}{a}\right) \\ &\quad - \sum_{\substack{a|m \\ a>1}} f(a)f^{*-1}\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{\substack{b|n \\ b>1}} f(b)f^{*-1}\left(\frac{n}{b}\right) \end{aligned}$$

puis

$$f^{*-1}(mn) = f^{*-1}(m)f^{*-1}(n) + f^{*-1}(n)f^{*-1}(m) - f^{*-1}(m)f^{*-1}(n) = f^{*-1}(m)f^{*-1}(n).$$

$\square$

### 1.3.2) Fonction de Möbius

**Définition 11**– La fonction de Möbius est  $\mu: \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  définie par  $\mu(1) = 1$  et

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } p \mid n \text{ tel que } v_p(n) \geq 2 \\ (-1)^{\#\{p \in \mathcal{P}: p \mid n\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} p^{v_p(n)}$$

est la décomposition en facteurs premiers de  $n$ .

La fonction  $\mu$  est multiplicative parce que deux entiers sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucun diviseur premier commun.

On dit qu'un entier est sans facteur carré s'il n'est divisible par le carré d'aucun entier au moins égal à 2. L'entier 1 est sans facteur carré et, si  $n \geq 2$  admet la décomposition en facteurs premiers

$$n = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} p^{v_p(n)}$$

il est sans facteur carré si et seulement si  $v_p(n) = 1$  pour tout  $p \mid n$ . Un entier est donc sans facteur carré si et seulement si  $\mu(n)^2 = 1$ .

**Lemme 12** (Inversion de Möbius)– Pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \delta(n).$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer  $\mu * \mathbb{1} = \delta$  où

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Puisque  $\mu * \mathbb{1}$  et  $\delta$  sont multiplicatives, il suffit de démontrer le résultat pour  $n$  une puissance de nombre premier. Or si  $p$  est premier et  $\alpha \geq 1$ , alors

$$\sum_{d \mid p^\alpha} \mu(d) = 1 + \mu(p) = 0.$$

□

Ce lemme exprime que  $\mathbb{1}$  est inversible dans l'anneau  $\mathcal{A}$  d'inverse  $\mu$ .

### 1.3.3) Fonctions sommes de diviseurs

Si  $v \in \mathbb{C}$ , on définit la fonction arithmétique  $\sigma_v$  par

$$\sigma_v(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d|n}} d^v.$$

**Lemme 13**– Si  $v \in \mathbb{C}$ , la fonction  $\sigma_v$  est multiplicative.

*Démonstration.* La fonction  $\sigma_v$  est le produit de convolution des fonctions multiplicatives  $\mathbb{1}$  et  $n \mapsto n^v$ .  $\square$

**Lemme 14**– Soit  $p$  un nombre premier. Si  $v \in \mathbb{C}$ , et si  $\alpha \geq 2$ , alors

$$\sigma_v(p^\alpha) = \sigma_v(p)\sigma_v(p^{\alpha-1}) - p^v \sigma_v(p^{\alpha-2}).$$

*Démonstration.* On calcule

$$\sigma_v(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} d^v = \sum_{j=0}^{\alpha} p^{jv} = \frac{p^{(\alpha+1)v} - 1}{p^v - 1} \quad (1.9)$$

et on constate que

$$\frac{p^{(\alpha+1)v} - 1}{p^v - 1} = \frac{(p^v + 1)(p^{\alpha v} - 1) - p^{\alpha v} + p^v}{p^v - 1} = \frac{p^{2v} - 1}{p^v - 1} \cdot \frac{p^{\alpha v} - 1}{p^v - 1} - p^v \frac{p^{(\alpha-1)v} - 1}{p^v - 1}.$$

$\square$

Les polynômes de Tchebychef de seconde espèce (voir l'annexe A.4) permettent d'écrire la relation de multiplicativité de  $\sigma_v$  d'une façon remarquable. On normalise la fonction  $\sigma_v$  en posant

$$\tilde{\sigma}_v(n) = \frac{\sigma_v(n)}{n^{v/2}}.$$

**Corollaire 15**– Alors, pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $\alpha \geq 0$ , on a

$$\tilde{\sigma}_v(p^\alpha) = X_\alpha(\tilde{\sigma}_v(p)).$$

*Démonstration.* On définit les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  par

$$u_n = \tilde{\sigma}_v(p^n) \quad \text{et} \quad v_n = X_n(\tilde{\sigma}_v(p)).$$

Le lemme 14 implique

$$u_n = \tilde{\sigma}_v(p)u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Par ailleurs, l'équation (A.6) évaluée en  $\tilde{\sigma}_v(p)$  conduit à

$$v_n = \tilde{\sigma}_v(p)v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Le résultat est alors une conséquence directe de  $u_0 = v_0$  et  $u_1 = v_1$ .  $\square$

**Corollaire 16**– Pour tous entiers  $m$  et  $n$ , on a

$$\sigma_v(m)\sigma_v(n) = \sum_{d|(m,n)} d^v \sigma_v\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord  $m = p^\alpha$  et  $n = p^\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  positifs ou nuls. Grâce au corollaire 15 et à la formule de Clebsch-Gordan (lemme 239), on écrit

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_v(p^\alpha)\tilde{\sigma}_v(p^\beta) &= X_\alpha(\tilde{\sigma}_v(p))X_\beta(\tilde{\sigma}_v(p)) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(\alpha,\beta)} X_{\alpha+\beta-2i}(\tilde{\sigma}_v(p)) \\ &= \sum_{i=0}^{\min(\alpha,\beta)} \tilde{\sigma}_v(p^{\alpha+\beta-2i}) \\ &= \sum_{d|(p^\alpha,p^\beta)} \tilde{\sigma}_v\left(\frac{p^\alpha \cdot p^\beta}{d^2}\right). \end{aligned}$$

Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers premiers entre eux, le résultat est une conséquence directe de la multiplicativité de  $\sigma_v$ . Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers quelconques, on écrit les décompositions en facteurs premiers de  $m$  et  $n$  :

$$m = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(m)} \quad \text{et} \quad n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

les entiers  $v_p(m)$  et  $v_p(n)$  étant nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de  $p$ . On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_v(m)\tilde{\sigma}_v(n) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{d|(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)})} \tilde{\sigma}_v\left(\frac{p^{v_p(m)+v_p(n)}}{d^2}\right) \\ &= \sum_{d|(m,n)} \tilde{\sigma}_v\left(\frac{mn}{d^2}\right) \end{aligned}$$

par multiplicativité de  $\tilde{\sigma}_v$  et bijectivité de l'application

$$\begin{aligned} \left\{ (d_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{P}} : d_p | (p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}) \right\} &\xrightarrow{\sim} \{d \in \mathbb{N}^* : d | (m, n)\} \\ (d_p)_{p \in \mathcal{P}} &\mapsto \prod_{p \in \mathcal{P}} d_p = \prod_{p|(m,n)} d_p. \end{aligned}$$

La formule de multiplicativité annoncée résulte alors de l'écriture de  $\tilde{\sigma}_v$  en fonction de  $\sigma_v$ .  $\square$

Par inversion de Möbius, on peut exprimer la valeur par  $\sigma_v$  d'un produit d'entiers.

**Corollaire 17**– Si  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  sont des entiers, alors

$$\sigma_v(mn) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^v \sigma_v\left(\frac{m}{d}\right) \sigma_v\left(\frac{n}{d}\right).$$

*Démonstration.* On calcule

$$S(m, n) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^v \sigma_v\left(\frac{m}{d}\right) \sigma_v\left(\frac{n}{d}\right)$$

en reportant la valeur  $\sigma_v(m/d)\sigma_v(n/d)$  tirée du corollaire 16. On trouve

$$S(m, n) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^v \sum_{r|(m/d, n/d)} r^v \sigma_v\left(\frac{mn}{d^2 r^2}\right).$$

Le choix  $\ell = rd$  conduit à

$$S(m, n) = \sum_{\ell|(m,n)} \ell^v \sigma_v\left(\frac{mn}{\ell^2}\right) \sum_{d|\ell} \mu(d).$$

Par inversion de Möbius (lemme 12) on obtient

$$S(m, n) = \sigma_v(mn).$$

□

*Remarque 18*– Ce lemme peut-être démontré sans utiliser la relation de Möbius mais en utilisant une relation sur les polynômes des Tchebychef (voir le lemme 240).

*Remarque 19*– Les relations de multiplicativité démontrées dans cette partie appartiennent à la théorie des opérateurs de Hecke. Ces opérateurs seront étudiés dans la suite de ce cours.

## Chapitre 2

# Formes modulaires sur le groupe modulaire

### 2.1 Définition et structure linéaire

On appelle *groupe modulaire*, le groupe multiplicatif des matrices  $2 \times 2$  à coefficients entiers et déterminant 1, défini par

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, ad - bc = 1 \right\}.$$

En définissant

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a le

**Théorème 20**– Les matrices  $S$  et  $T$  engendrent  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* Notons  $G$  le sous-groupe de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  engendré par  $S$  et  $T$ . Il suffit de montrer que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset G$ . Si ce n'est pas le cas, on considère  $a \in \mathbb{Z}$  tel qu'il existe des entiers  $b, c$  et  $d$  vérifiant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus G$$

et tel que

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus G \Rightarrow |a'| \geq |a|.$$

Nécessairement,  $a \neq 0$ , sinon  $b = -c = \pm 1$  or

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & d \end{pmatrix} = \mp ST^{\mp d} \in G \quad \text{avec} \quad -I = S^2.$$

Soit  $q$  le quotient de la division euclidienne de  $-b$  par  $a$ , on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma^q S = \begin{pmatrix} aq + b & * \\ * & * \end{pmatrix} \notin G$$

et  $|aq + b| < |a|$  ce qui contredit la minimalité de  $|a|$ . □

On note  $\mathcal{H}$  le *demi-plan de Poincaré*

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

On complète  $\mathcal{H}$  par ajout de  $\mathbb{Q}$  et du point  $\infty$  pour obtenir  $\overline{\mathcal{H}}$ . Si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  avec  $c \neq 0$ , on pose  $-\frac{d}{c} = \frac{a}{c} = \infty$ . Le groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit <sup>(a)</sup> sur  $\overline{\mathcal{H}}$  par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \overline{\mathcal{H}} \setminus \{\infty, -\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

On a l'expression pratique suivante :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}. \quad (2.2)$$

L'action est sur  $\overline{\mathcal{H}}$  grâce à la formule

$$\text{Im} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2} \quad (2.3)$$

valable dès que  $ad - bc = 1$  ; si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dans  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , si  $z \in \overline{\mathcal{H}}$ , alors  $\gamma(\gamma'z) = (\gamma\gamma')z$  puis  $Iz = z$ . En particulier, on a

$$\tau = \gamma z \implies z = \gamma^{-1} \tau$$

et on définit une relation d'équivalence sur  $\overline{\mathcal{H}}$  en disant que deux éléments sont *congrus modulo*  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  si l'un est obtenu par action d'une matrice de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur l'autre. L'*orbite* d'un élément  $z \in \mathcal{H}$  est sa classe d'équivalence modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , c'est-à-dire, l'ensemble

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z = \{\gamma z : \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})\}.$$

Les matrices  $\gamma$  et  $-\gamma$  agissent de la même façon :

$$\gamma z = (-\gamma)z$$

pour  $z \in \overline{\mathcal{H}}$ , et, on note souvent  $-\gamma z$  le nombre  $(-\gamma)z$ . Il n'y a pas d'ambiguïté lorsque  $z \in \mathcal{H}$  car l'opposé du nombre  $\gamma z$  n'est pas dans  $\mathcal{H}$ . On a

$$S z = -\frac{1}{z} \quad \text{et} \quad T z = z + 1.$$

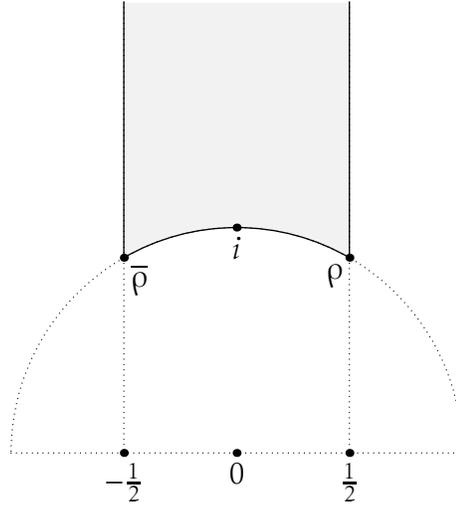
Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathcal{H} : |\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\} \quad (2.4)$$

(voir la figure 2.1). On note  $\rho = \exp(i\pi/3)$ .

---

a. Il n'est pas nécessaire de détailler cette notion puisque nous donnons dans les lignes suivantes les propriétés utiles. Pour approfondir, voir l'annexe A.3.

FIGURE 2.1 – L'ensemble  $\mathcal{F}$ 

On va montrer que tout point de  $\mathcal{H}$  est congru modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  à un point de  $\mathcal{F}$  et que, si deux points de  $\mathcal{F}$  sont congrus modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , alors ils sont sur la frontière de  $\mathcal{F}$ .

**Théorème 21**– 1. Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , il existe  $\tau \in \mathcal{F}$  et  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  tels que  $\tau = \gamma z$ .

2. Si  $\tau$  et  $z$  sont deux points de  $\mathcal{F}$  tels que  $\tau = \gamma z$  avec  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \{\pm 1\}$ , alors soit  $|\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(\tau)| = \frac{1}{2}$ , soit  $|z| = |\tau| = 1$ .

*Démonstration.* 1. On note  $z = x + iy$ . Il s'agit de montrer que l'intersection de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$  avec  $\mathcal{F}$  est non vide. Pour cela, on commence par montrer que l'ensemble  $\mathcal{Y}$  des réels  $y' \geq y$  qui sont parties imaginaires de points de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$  est fini (il est non vide car  $y \in \mathcal{Y}$ ). Soit  $y' \in \mathcal{Y}$ . Alors,  $y' = \mathrm{Im}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)z$  et

$$y' = \frac{y}{|cz + d|^2}. \quad (2.5)$$

De  $y' \geq y$ , on tire  $|cz + d|^2 \leq 1$ . Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $c$  et  $d$  vérifiant cette dernière relation puisque<sup>(b)</sup> le disque de centre  $O$  et rayon 1 ne contient qu'un nombre fini de points du quadrillage  $z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ . Ainsi,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$  contient (au moins) un point de partie imaginaire maximale. Notons  $w$  l'un d'eux. Soit  $n$  l'unique entier de l'intervalle  $[-\frac{1}{2} - \mathrm{Re} w, \frac{1}{2} - \mathrm{Re} w]$ . Alors  $|\mathrm{Re} T^n w| \leq \frac{1}{2}$ . D'autre part  $|T^n w| \geq 1$ , sinon

$$\mathrm{Im} S(T^n w) = \frac{\mathrm{Im} T^n w}{|T^n w|^2} = \frac{\mathrm{Im} w}{|T^n w|^2} > \mathrm{Im} w$$

ce qui contredirait la maximalité de  $\mathrm{Im} w$ . Le point  $\tau = T^n w$  est donc dans  $\mathcal{F}$ .

b. On peut aussi montrer que  $|c| \leq 1/y$  puis  $\sqrt{1 - 2y^2} - cx \leq d \leq \sqrt{1 - c^2 y^2} - cx$ .

2. On note  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  puis  $z = x + iy$  et  $\tau = \sigma + it$ . On a  $|x| \leq 1/2$ ,  $|z| \geq 1$  et  $y \geq \sqrt{3}/2$ . On va restreindre notre preuve au cas où  $\text{Im } \tau \geq \text{Im } z$ . En effet, si cette inégalité n'est pas vraie, alors  $\text{Im } z \geq \text{Im } \tau$  et  $z = \gamma^{-1}\tau$  de sorte qu'il suffit d'appliquer le raisonnement qui suit à  $(z, \tau, \gamma^{-1})$  au lieu de  $(\tau, z, \gamma)$ . De  $\text{Im } \gamma z \geq \text{Im } z$ , on déduit  $|cz + d| \leq 1$ . Alors  $1 \geq |cz + d| \geq |c|y$  donc  $|c| \leq 2/\sqrt{3}$  et  $c \in \{-1, 0, 1\}$ .

- (a) Si  $c = 1$ , alors  $|z + d| \leq 1$  donc  $(x + d)^2 \leq 1 - y^2 \leq 1/4$  puis

$$-1 \leq -\frac{1}{2} - x \leq d \leq \frac{1}{2} - x \leq 1.$$

Ainsi  $d \in \{-1, 0, 1\}$ .

- i. Si  $d = 1$  alors  $(x + 1)^2 \leq 1/4$  conduit à  $x \leq -1/2$  et donc  $x = -1/2$ . On a alors  $1/4 \leq 1 - y^2 \leq 1/4$  d'où  $y = \sqrt{3}/2$ . Ensuite  $z = -\bar{\rho}$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  d'où  $\tau = a - \bar{\rho}$ . De  $\sigma = a - 1/2$  on tire  $a \in \{0, 1\}$ . Si  $a = 0$  alors  $\gamma = \text{ST}$  et  $z = \tau = -\bar{\rho}$ . Si  $a = 1$  alors  $\gamma = \text{TST}$  et  $z = -\bar{\rho}$ ,  $\tau = \rho$ ;
- ii. Si  $d = 0$  alors  $b = -c = 1$ . On a donc  $|z| \leq 1$  puis  $|z| = 1$ . Ainsi,  $\tau = a - \bar{z}$ . De  $|\sigma| \leq 1/2$ , on tire

$$-1 \leq x - \frac{1}{2} \leq a \leq x + \frac{1}{2} \leq 1$$

d'où  $a \in \{-1, 0, 1\}$ . Si  $a = 1$  alors  $x = 1/2$  tandis que si  $a = -1$  alors  $x = -1/2$ . On a donc  $z = \tau = \rho$  et  $\gamma = \text{TS}$  ou  $z = \tau = -\bar{\rho}$  et  $\gamma = \text{T}^{-1}\text{S}$  ou  $|z| = 1$ ,  $\tau = -\bar{z}$  et  $\gamma = \text{S}$ ;

- iii. Si  $d = -1$  alors  $(x - 1)^2 \leq 1/4$  et donc  $x = 1/2$ . On a alors  $y = \sqrt{3}/2$  puis  $z = \rho$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} a & -a-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $\tau = a + \rho$  et  $a \in \{-1, 0\}$ . Si  $a = 0$  alors  $\gamma = \text{ST}^{-1}$  et  $z = \tau = \rho$ . Si  $a = -1$  alors  $\gamma = \text{STS}$  et  $z = \rho$ ,  $\tau = -\bar{\rho}$ .

- (b) Si  $c = 0$  alors  $a = d = \pm 1$ . Ainsi,  $\gamma = \pm \text{T}^{\pm b}$  et  $z$  et  $\tau$  étant deux points de distance horizontale  $|b| \geq 1$  dans une bande de largeur 1, ils sont sur les bords de cette bande. Ainsi  $|\text{Re}(z)| = |\text{Re}(\tau)| = \frac{1}{2}$ .

- (c) Si  $c = -1$ . On échange  $\gamma$  et  $-\gamma$  (ce qui ne change rien à  $\tau$ ) et on se ramène au cas  $c = 1$ .

□

*Remarque 22* - Soit  $a = \frac{a}{c}$  un nombre rationnel avec <sup>(c)</sup>  $(a, c) = 1$ . Alors, d'après le théorème de Bezout, il existe une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  et alors  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = a$ . Il en résulte que tout point de  $\bar{\mathcal{H}}$  est congru modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  à un point de  $\mathcal{F} \cup \{\infty\}$ . D'autre part,  $\infty$  n'est congru à aucun point de  $\mathcal{F}$  puisqu'il n'est congru qu'à lui-même ou à des nombres rationnels.

Pour comprendre ce qu'est le point  $\infty$ , on envoie  $\mathcal{H}$  sur le disque unité épointé

$$\mathring{D}(0, 1) := \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$$

c. Le plus grand diviseur commun de deux entiers  $m$  et  $n$  est noté  $(m, n)$ . Le contexte empêche de confondre cette notation avec celle désignant le couple  $(m, n)$ .

via  $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ . Si  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et périodique de période 1, il existe une fonction holomorphe  $\tilde{f}: \mathring{D}(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(z) = \tilde{f}(\exp(2i\pi z))$  pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . La fonction  $\tilde{f}$  admet alors un développement en série de Laurent normalement convergent sur tout compact de  $\mathring{D}(0,1)$  qu'on écrit

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)q^n$$

i.e. la fonction  $f$  admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}$$

normalement convergent sur tout compact de  $\mathcal{H}$ . (Voir l'annexe B.2).

**Définition 23**– Une fonction  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe sur  $\mathcal{H}$  et 1-périodique est holomorphe à l'infini si  $\tilde{f}$  est holomorphe en 0.

*Remarque 24*– Il est équivalent de dire que  $f$  a un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}$$

normalement convergent sur tout compact de  $\mathcal{H}$ .

**Définition 25**– Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On appelle forme modulaire de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  toute fonction holomorphe  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant :

1. pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ ,

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z);$$

2. la fonction  $f$  est holomorphe à l'infini.

*Remarque 26*– La seconde condition a un sens puisque le choix de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T$  dans le premier point implique que  $f$  est 1-périodique. Cette seconde condition s'appelle *condition aux pointes*. La première condition s'appelle *condition de modularité*.

On note  $\mathcal{M}_k$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des formes modulaires de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Le choix de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -I$  implique que la seule forme modulaire de poids impair sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  est la fonction constante nulle.

**Désormais, on suppose  $k$  pair.**

On remarque aisément que  $\mathcal{M}_k \mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}$  et donc l'ensemble

$$\mathcal{M}_* = \sum_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} \mathcal{M}_k$$

est une algèbre. On précise cette remarque.

**Définition 27**– Une algèbre graduée est une algèbre  $A$  pour laquelle existe un ensemble  $J$  d'indices et une famille  $(A_j)_{j \in J}$  de sous-groupes additifs de  $A$  telles que

- 1)  $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ ;
- 2)  $A_i A_j \subset A_{i+j}$  pour tous  $i$  et  $j$  dans  $J$ .

**Proposition 28**– L'algèbre  $\mathcal{M}_*$  est une algèbre graduée :

a)

$$\mathcal{M}_* = \bigoplus_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} \mathcal{M}_k;$$

b) pour tous  $k$  et  $\ell$  dans  $2\mathbb{N} - \{2\}$ , on a

$$\mathcal{M}_k \mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{M}_{k+\ell}.$$

*Démonstration.* Le second point ayant déjà été signalé, nous prouvons le premier. On suppose par l'absurde l'existence d'éléments non nuls  $f_i \in \mathcal{M}_{k_i}$  où les  $k_1 < k_2 < \dots < k_\delta$  sont des éléments de  $2\mathbb{N} - \{2\}$ , tels que

$$\sum_{i=1}^{\delta} f_i = 0.$$

Fixons  $z \in \mathcal{H}$  n'annulant aucune des fonctions  $f_i$ . On a

$$(z+d)^{-k_\delta} \sum_{i=1}^{\delta} f_i \left( \frac{z+d-1}{z+d} \right) = 0$$

pour tout  $d \in \mathbb{Z}$ . Par modularité des  $f_i$ , il en résulte

$$\sum_{i=1}^{\delta} (z+d)^{k_i - k_\delta} f_i(z).$$

Puisque  $k_i - k_\delta < 0$  si  $i \neq \delta$ , on trouve en faisant tendre  $d$  vers l'infini que  $f_\delta(z) = 0$  ce qui contredit le choix de  $z$ .  $\square$

**Proposition 29**– Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe est une forme modulaire de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  si et seulement si :

1. elle est 1-périodique;

2. elle vérifie

$$z^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ ;

3. elle est holomorphe à l'infini.

*Démonstration.* En notant  $f|_{\gamma}(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$  si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on a

$$(f|_{\gamma})|_{\gamma'} = f|_{\gamma\gamma'}$$

pour toute matrice  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Si  $f|_{\gamma} = f$  et  $f|_{\gamma'} = f$  on a donc  $f|_{\gamma\gamma'} = f$ . La 1-périodicité de  $f$  équivaut donc à  $f|_{T^n} = f$  pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ . Le point 2 équivaut quant à lui à  $f|_{S^n} = f$  pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ . Enfin, si  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ , on l'écrit comme produit de puissances de T et S pour voir que si  $f$  vérifie les points 1 et 2 alors  $f|_{\gamma} = f$ .  $\square$

**Définition 30**– Une forme modulaire de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  est appelée forme parabolique de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  si  $\widehat{f}(0) = 0$ .

*Remarque 31*– Cela revient à demander que  $\widetilde{f}$  s'annule en 0. On dit que  $f$  s'annule en l'infini.

On note  $\mathcal{S}_k$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_k$  constitué des formes paraboliques de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Si une forme modulaire  $f$  est parabolique, l'existence de son développement de Fourier implique en particulier l'existence de  $C > 0$  tel que

$$|\widehat{f}(n)| \leq C e^{\pi n} \quad (2.6)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (voir l'annexe B.2). On utilise la modularité et la parabolicité pour améliorer cette majoration.

**Lemme 32**– Si  $f$  est une forme parabolique de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ , alors il existe  $C > 0$  tel que,

$$|\widehat{f}(n)| \leq C n^{k/2}$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* Soit

$$\varphi(z) = |f(z)|(Im z)^{k/2}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . Pour  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , on a

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varphi(z)$$

donc, pour montrer que  $\varphi$  est bornée sur  $\mathcal{H}$ , il suffit de montrer que  $\varphi$  est bornée sur  $\mathcal{F}$ . En reportant dans le développement de Fourier de  $f$  la majoration (2.6) et en utilisant

que la partie imaginaire d'un point de  $\mathcal{F}$  vaut au moins  $y_0 = \sqrt{3}/2$ , on trouve  $C > 0$  et  $D > 0$  tels que

$$|f(z)| = C \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\pi n(1-3y/2)} e^{-\pi n y/2} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y/2} \leq D e^{-\pi y/2} \quad (2.7)$$

pour tout  $z = x + iy \in \mathcal{F}$ . Ainsi

$$\lim_{\substack{\text{Im } z \rightarrow +\infty \\ z \in \mathcal{F}}} \varphi(z) = 0.$$

Puisque, pour tout  $M > 0$ , l'ensemble  $\mathcal{F} \cap \{z \in \mathcal{H} : \text{Im } z \leq M\}$  est compact, il en résulte que  $\varphi$  est bornée sur  $\mathcal{F}$  et donc  $\mathcal{H}$ . On a donc

$$|f(z)| \leq \|\varphi\|_{\infty} (\text{Im } z)^{-k/2}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . Puisque

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2i\pi n(x+iy)} dx$$

pour tout  $y > 0$ , on déduit

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|\varphi\|_{\infty} e^{2\pi n y} y^{-k/2}$$

et on termine en choisissant  $y = 1/n$ .  $\square$

Si  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et non constamment nulle et si  $\tau \in \mathcal{H}$ , on note  $v_{\tau}(f)$  l'ordre d'annulation de  $f$  en  $\tau$  : c'est l'unique entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-\tau)^n}$  est holomorphe et non nulle en  $\tau$ . Si, de plus,  $f$  est 1-périodique et holomorphe en l'infini, on note  $v_{\infty}(f)$  l'ordre d'annulation  $v_0(\tilde{f})$  de  $\tilde{f}$  en 0.

**Lemme 33**– Si  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et non constamment nulle, périodique de période 1 et holomorphe en l'infini, il n'y a qu'un nombre fini de points  $\tau \in \mathcal{F}$  tels que  $v_{\tau}(f) \neq 0$ .

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{f}$  est holomorphe sur

$$D(0, 1) := \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\},$$

elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur le compact

$$\overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right) := \left\{q \in \mathbb{C} : |q| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

On pose

$$\widetilde{\tilde{f}}(q) := \frac{\tilde{f}(q)}{q^{v_0(\tilde{f})}}$$

de sorte que  $\widetilde{\tilde{f}}$  est holomorphe et non nulle en 0. Soit  $2r > 0$  le plus petit des modules de zéros de  $\tilde{f}$  dans  $\overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$  (on pose  $2r = 1$  si  $\tilde{f}$  ne s'annule pas dans ce disque). Alors,

$\tilde{f}$  ne s'annule pas dans  $\overline{D}(0, r)$  puis  $\tilde{f}$  ne s'annule pas dans  $\mathring{D}(0, r)$ . Finalement,  $f$  ne s'annule pas dans

$$\mathcal{F} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right\}.$$

Ensuite,  $f$  est holomorphe sur le compact

$$\mathcal{F} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} z \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right\}.$$

où elle ne s'annule donc qu'un nombre fini de fois.  $\square$

**Lemme 34**— Si  $f \in \mathcal{M}_k \setminus \{0\}$ , si  $\tau \in \mathcal{H}$  et si  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , alors  $v_\tau(f) = v_{\gamma\tau}(f)$ .

*Démonstration.* On sait que  $X: z \mapsto (z - \tau)^{-v_\tau(f)} f(z)$  est holomorphe et non nulle en  $\tau$  et on doit montrer que  $Y: z \mapsto (z - \gamma\tau)^{-v_\tau(f)} f(z)$  est holomorphe et non nulle en  $\gamma\tau$ . Écrivons  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Grâce à la relation de modularité, on a

$$X(z) = (cz + d)^{-k} [\gamma^{-1}(\gamma z) - \tau]^{-v_\tau(f)} f(\gamma z).$$

L'égalité

$$\frac{\gamma^{-1}u - \gamma^{-1}v}{u - v} = \frac{1}{(cu - a)(cv - a)}$$

appliquée à  $u = \gamma z$  et  $v = \gamma\tau$  donne alors  $X(z) = A(z)Y(\gamma z)$  avec

$$A(z) = \frac{(c\gamma z - a)^{v_\tau(f)} (c\gamma\tau - a)^{v_\tau(f)}}{(cz + d)^k}.$$

On déduit le résultat du fait que la fonction  $A$  est holomorphe et ne s'annule pas sur  $\mathcal{H}$ .  $\square$

L'orbite d'un zéro de  $f$  n'est donc constituée que de zéros de  $f$  et, tous ses points annulent  $f$  au même ordre. On définit

$$\rho = \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right).$$

On peut alors énoncer le théorème fondamental suivant qui donne une formule de comptage (pondéré) du nombre d'orbites de zéros d'une forme modulaire.

**Théorème 35** (Formule  $\frac{k}{12}$ )— Si  $f \in \mathcal{M}_k \setminus \{0\}$  alors

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{\tau} v_\tau(f) = \frac{k}{12}$$

la somme se faisant sur un système de représentants de  $\mathcal{H}$  modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  excluant les classes de  $i$  et  $\rho$ .

Remarque 36- Comme ensemble de sommation, on peut prendre

$$\left\{ z \in \mathcal{F} : \operatorname{Re} z \neq \frac{1}{2}, |z| = 1 \Rightarrow \operatorname{Re} z < 0 \right\}.$$

Démonstration de la formule  $\frac{k}{12}$ . On suppose dans un premier temps que  $f$  n'a pas de zéro sur la frontière de  $\mathcal{F}$ , sauf éventuellement en  $i$  ou  $\rho$  (et donc en  $\rho^2 = S\rho$ ). Puisque  $f$  est holomorphe, on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  $f$  n'a pas de zéros dans l'intersection avec  $\mathcal{F}$  des disques épointés de rayon  $\varepsilon$  et de centres  $\rho, i$  et  $\rho^2$ . On fixe aussi  $H > 0$  tel que  $f$  n'a pas de zéro (complexe) dans l'intersection de  $\mathcal{F}$  avec le demi-plan  $\operatorname{Im} z > H$ . On considère alors le chemin  $\alpha$  déterminé par  $A, B, C, D, D', C', B'$  et  $A'$  comme sur la figure 2.2.

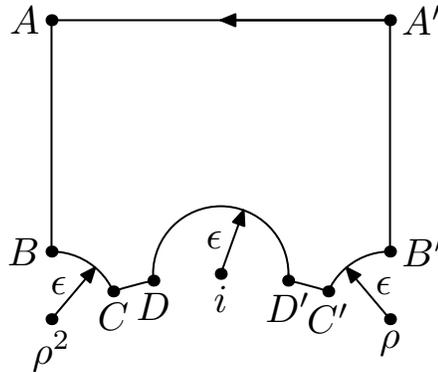


FIGURE 2.2 -

Le théorème des résidus implique

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\tau} v_{\tau}(f).$$

Par périodicité, la somme des intégrales sur  $AB$  et  $B'A'$  s'annule. On évalue la somme des intégrales sur  $\overline{CD}$  et  $\overline{D'C'}$ . On pose  $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ . Le chemin  $\overline{C'D'}$  est image de  $\overline{CD}$  par l'action de  $S$  donc si  $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est une paramétrisation de  $\overline{CD}$ , alors  $\tilde{\beta}(t) = -\beta(t)^{-1}$  paramétrise  $\overline{C'D'}$ . Ainsi,

$$\int_{\overline{CD}} g(z) dz = \int_0^1 g(\beta(t)) \beta'(t) dt$$

et

$$\int_{\overline{D'C'}} g(z) dz = - \int_0^1 g(\tilde{\beta}(t)) \tilde{\beta}'(t) dt.$$

De  $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$ , on déduit

$$\frac{1}{z^2} g\left(-\frac{1}{z}\right) = g(z) + \frac{k}{z}$$

donc

$$\int_{\overline{D'C'}} g(z) dz = - \int_0^1 g(\beta(t)) \beta'(t) dt - k \int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt,$$

puis

$$\frac{1}{2i\pi} \left( \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{D'C'}} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \frac{k}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt.$$

Notons  $\theta_0(\varepsilon) \in [\pi/2, 2\pi/3]$  l'angle  $(\overline{Ox}, \overline{OD})$  et  $\theta_1(\varepsilon) \in [\pi/2, 2\pi/3]$  l'angle  $(\overline{Ox}, \overline{OC})$ . Une paramétrisation de  $\overline{CD}$  est  $\beta(t) = e^{i(\theta_0(\varepsilon) - \theta_1(\varepsilon))t + i\theta_1(\varepsilon)}$  de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi} \left( \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{D'C'}} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k \frac{\theta_1(\varepsilon) - \theta_0(\varepsilon)}{2\pi}.$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 les angles  $\theta_1(\varepsilon)$  et  $\theta_0(\varepsilon)$  tendent respectivement vers  $2\pi/3$  et  $\pi/2$  d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \left( \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{D'C'}} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{k}{12}.$$

On évalue ensuite l'intégrale sur le segment  $A'A$  de longueur 1. On a

$$\frac{f'}{f}(z) = 2i\pi e^{2i\pi z} \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}(e^{2i\pi z})$$

puis

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{A'}^A \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\omega} \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq$$

où  $\omega$  est l'image de  $A'A$  par  $z \mapsto e^{2i\pi z}$ , c'est-à-dire un cercle de centre 0 parcouru dans le sens antitrigonométrique. Le seul zéro éventuel de  $\tilde{f}$  à l'intérieur de ce cercle (image du demi-plan  $\text{Im } z > H$ ) est 0. Ainsi,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\omega} \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq = -v_0(\tilde{f})$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{A'}^A \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -v_{\infty}(f).$$

On évalue ensuite l'intégrale sur  $\overline{BC}$ . La fonction  $\frac{f'}{f}$  admet un développement de Laurent autour de  $\rho^2$  qui s'écrit

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{v_{\rho^2}(f)}{z - \rho^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \rho^2)^n.$$

Ainsi <sup>(d)</sup>,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = v_{\rho^2}(f) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{BC}} \frac{1}{z - \rho^2} dz = -i \frac{\pi}{3} v_{\rho^2}(f).$$

On en déduit

$$\frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{BC}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{6} v_{\rho^2}(f) = -\frac{1}{6} v_{\rho}(f).$$

De même (ou bien par action de S), on a

$$\frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{C'B'}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{6} v_{\rho}(f).$$

Enfin, le même raisonnement conduit à

$$\frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{DD'}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{2} v_i(f).$$

On obtient la formule  $\frac{k}{12}$  par ajout des différentes contributions. Maintenant, s'il y a d'autres zéros sur la frontière, ils vont par paires  $(\tau, T\tau)$  avec  $\operatorname{Re} \tau = -\frac{1}{2}$  ou  $(\tau, S\tau)$  avec  $|\tau| = 1$  et on modifie le contour  $\alpha$  comme l'indique la figure 2.3. Noter que  $z$  et  $Su$  apparaissent comme des zéros à l'intérieur du contour mais que leurs images respectives  $Tz$  et  $u$  ne sont elles pas comptées. Le chemin  $\overline{A'B'}$  reste l'image du chemin  $\overline{AB}$  par T et le chemin  $\overline{C'D'}$  reste l'image du chemin  $\overline{CD}$  par S. Nous avons donc toujours l'annulation de la somme des intégrales sur  $\overline{AB}$  et  $\overline{B'A'}$  et

$$\frac{1}{2i\pi} \left( \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{D'C'}} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{k}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt.$$

Cette dernière intégrale ne dépend que de la valeur de la primitive de la fonction continue  $\beta'/\beta$  en 0 et en 1. En choisissant le cercle autour de  $u$  de rayon suffisamment petit, le chemin  $\overline{CD}$  est un arc de cercle de rayon 1 et de centre 1 au voisinage de C et de D. La fonction  $\beta'/\beta$  a donc même primitive au voisinage de 0 et 1 que dans le cas précédemment calculé. La suite de la démonstration est donc identique.  $\square$

Une première conséquence de la formule  $\frac{k}{12}$  est le

### **Théorème 37–**

- 1) Si  $k < 0$ , alors  $\mathcal{M}_k = \{0\}$ .
- 2) On a  $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ .
- 3) On a  $\mathcal{M}_2 = \{0\}$ .

*d.* Notons  $\alpha(\theta_0, \theta_1)$  l'arc du cercle de centre  $\tau$  et de rayon R délimité par les points d'angles  $\theta_0$  et  $\theta_1$  tous deux dans  $[0, 2\pi[$ . Le paramétrage  $z(t) = \tau + Re^{it}$  avec  $t \in [\theta_0, \theta_1]$  montre que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha(\theta_0, \theta_1)} \frac{dz}{z - \tau} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{2\pi}.$$

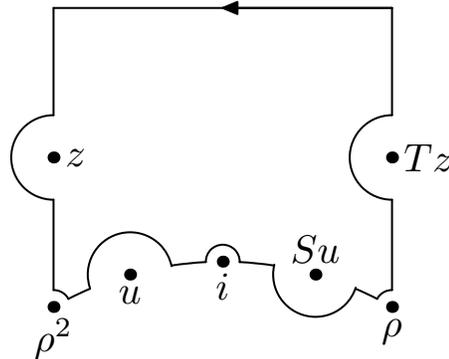


FIGURE 2.3 –

*Démonstration.* Le premier point résulte du fait que, dans la formule  $\frac{k}{12}$  le terme de gauche est somme de termes positifs ou nuls. On montre le deuxième point. Les fonctions constantes sont des formes modulaires de poids 0, donc si  $f \in \mathcal{M}_0$  alors  $g = f - \widehat{f}(0) \in \mathcal{M}_0$  et  $g$  s'annule à l'infini. Si  $g$  n'est pas la fonction constante nulle, alors dans la formule  $\frac{k}{12}$  appliquée à  $g$ , le terme de gauche vaut au moins 1 alors que le terme de droite est nul. Ainsi  $g = 0$  et  $f = \widehat{f}(0)$  est constante. Maintenant, si  $f \in \mathcal{M}_2$ , la formule  $\frac{k}{12}$  implique

$$6v_\infty + 6 \sum_{\tau} v_{\tau}(f) + 3v_i(f) + 2v_{\rho}(f) = 1$$

et l'équation  $6a + 3b + 2c = 1$  n'a pas de solution  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ . □

D'autre part, le résultat suivant, dont on pourrait se passer dans le cas de  $SL_2(\mathbb{Z})$  se généralise aisément au cas des formes modulaires avec système multiplicatif et donne une majoration de la dimension ([28, Annexe]).

**Proposition 38**– Si  $k > 0$ , alors

$$\dim \mathcal{M}_k \leq 1 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor.$$

*Remarque 39*– La notation  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ : le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

*Démonstration de la proposition 38.* On note  $N = 2 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$ . Par l'absurde, on suppose que  $\dim \mathcal{M}_k \geq N$  ce qui implique l'existence d'une famille libre  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq N}$  de  $N$  éléments de  $\mathcal{M}_k$ . Choisissons  $\tau$  à l'intérieur de  $\mathcal{F}$  (en particulier  $\tau$  est différent de  $i$  et  $\rho$ ). Le système

$$\begin{cases} f_1(\tau)x_1 + \dots + f_N(\tau)x_N = 0 \\ f'_1(\tau)x_1 + \dots + f'_N(\tau)x_N = 0 \\ \vdots \\ f_1^{(N-2)}(\tau)x_1 + \dots + f_N^{(N-2)}(\tau)x_N = 0 \end{cases}$$

a plus d'équations que d'inconnues et admet au moins  $(0, \dots, 0)$  comme solution. Il admet donc une infinité de solutions, on choisit  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$  l'une d'entre elle non nulle. Par liberté de la famille  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq N}$ , la fonction

$$f := \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i$$

n'est pas la fonction constante nulle et elle s'annule à l'ordre au moins  $N - 1$  en  $\tau$ . On a donc

$$v_\tau(f) \geq 1 + \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor > \frac{k}{12}$$

ce qui contredit la formule  $\frac{k}{12}$ .  $\square$

Pour les petites valeurs de  $k$ , on a donc des espaces de dimension 1 au plus. Il nous faut maintenant montrer l'existence de formes modulaires de poids  $k$  pour tout entier pair  $k \geq 4$ .

**Définition 40**– Soit  $k \geq 4$  un entier pair. On appelle série d'Eisenstein de poids  $k$  la série

$$G_k(z) := \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

**Proposition 41**– La série  $G_k$  est normalement convergente sur tout compact de  $\mathcal{H}$  et définit une fonction holomorphe sur  $\mathcal{H}$ .

*Démonstration.* Puisque  $G_k$  est une série de fonctions holomorphes, il suffit de montrer la convergence normale.

Montrons que si  $K > 0$  et  $T > 0$  sont deux réels, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|\operatorname{Re} z| \leq K$  et  $\operatorname{Im} z \geq T$ , on a  $|mz + n| \geq \varepsilon \sqrt{m^2 + n^2}$ . Le résultat est évidemment vrai pour  $(m, n) = (0, 0)$ . Montrons le pour  $(m, n)$  tel que  $m^2 + n^2 = 1$ . On a  $|mz + n| \geq |m(x + iT) + n|$  et la fonction  $(m, n, x) \mapsto |m(x + iT) + n|$  est continue sur le compact  $\{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : m^2 + n^2 = 1\} \times [-K, K]$  où elle atteint son minimum strictement positif qu'on note  $\varepsilon$ . Passons maintenant au cas général lorsque  $(m, n) \neq (0, 0)$ . Posant  $M = m/\sqrt{m^2 + n^2}$  et  $N = n/\sqrt{m^2 + n^2}$ , on a  $M^2 + N^2 = 1$  et donc, grâce au cas précédent  $|Mz + N| \geq \varepsilon$ . En multipliant cette inégalité par  $\sqrt{m^2 + n^2}$ , on trouve  $|mz + n| \geq \varepsilon \sqrt{m^2 + n^2}$ .<sup>(e)</sup>

Il existe alors  $C > 0$  telle que pour tout  $z \in \mathcal{H}$  vérifiant  $|\operatorname{Re} z| \leq K$  et  $\operatorname{Im} z \geq T$ , on a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mz+n|^k} \leq C \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}.$$

En sommant séparément sur les couples ayant  $m = 0$  ou  $n = 0$ , on obtient :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}} = 4\zeta(k) + 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}.$$

e. Ce type de raisonnement s'appelle un raisonnement par *homogénéité*.

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{k/2}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + n^2)^{k/2}} + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + 1)^{k/2}} + \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{k/2}} \\
&\leq 2\zeta(k) + \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{k/2}} \\
&\leq 2\zeta(k) + \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{k/2}} \\
&\leq 2\zeta(k) + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}(0,1)} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{k/2}} \\
&\leq 2\zeta(k) + \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=1}^{+\infty} \frac{r dr}{r^k}
\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant finie puisque  $k > 2$ . □

Les séries d'Eisenstein admettent des développements de Fourier que l'on calcule maintenant. Les nombres de Bernoulli  $B_k$  sont définis en annexe B.4.

**Proposition 42**– Pour  $k \geq 4$  pair, on a

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2i\pi n z}.$$

*Démonstration.* En posant  $q = e^{2i\pi z}$  pour  $z \in \mathcal{H}$ , on a

$$\pi \cotan(\pi z) = i\pi - \frac{2i\pi}{1-q} = i\pi - 2i\pi \sum_{d=0}^{+\infty} q^d$$

donc, en utilisant l'équation (B.14),

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right) = i\pi - 2i\pi \sum_{d=0}^{+\infty} \exp(2i\pi d z).$$

En dérivant cette équation  $k-1$  fois, on obtient

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{+\infty} d^{k-1} \exp(2i\pi d z).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!} G_k(z) &= 2\zeta(k) + 2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\ell z + n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} d^{k-1} \exp(2i\pi d\ell z) \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{d>0 \\ d|n}} d^{k-1} \right) \exp(2i\pi n z).
\end{aligned}$$

On termine grâce à la relation (B.4).  $\square$

*Remarque 43*– La normalisation de  $G_k$  est celle utilisée lorsqu'on veut un développement de Fourier ayant 1 comme coefficient de  $e^{2i\pi z}$ . En posant  $q = e^{2i\pi z}$ , on a

$$G_4(z) = \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + 344q^7 + 585q^8 + O(q^9)$$

$$G_6(z) = -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + 3126q^5 + 8052q^6 + 16808q^7 + 33825q^8 + O(q^9)$$

$$G_8(z) = \frac{1}{480} + q + 129q^2 + 2188q^3 + 16513q^4 + 78126q^5 + 282252q^6 + 823544q^7 + 2113665q^8 + O(q^9)$$

$$G_{10}(z) = -\frac{1}{264} + q + 513q^2 + 19684q^3 + 262657q^4 + 1953126q^5 + 10097892q^6 + 40353608q^7 + 134480385q^8 + O(q^9)$$

$$G_{12}(z) = \frac{691}{65520} + q + 2049q^2 + 177148q^3 + 4196353q^4 + 48828126q^5 + 362976252q^6 + 1977326744q^7 + 8594130945q^8 + O(q^9).$$

Un intérêt de la normalisation choisie pour  $G_k$  est que la fonction  $\widehat{G}_k$  (qui est donc  $\sigma_{k-1}$ ) est multiplicative (voir l'annexe 1.3).

On a alors le résultat suivant qui justifie l'introduction des séries d'Eisenstein.

**Proposition 44**– Pour  $k \geq 4$  pair, la série d'Eisenstein  $G_k$  est une forme modulaire non parabolique de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* L'holomorphie a déjà été montrée, l'holomorphie en l'infini et la 1-périodicité résultent du développement de Fourier et  $\widehat{G}_k(0) \neq 0$  car  $B_k \neq 0$ . Il reste à montrer la transformation par  $S$ . On a

$$\begin{aligned}
z^{-k} G_k\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(-m + nz)^k} \\
&= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{(q,r) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(qz + r)^k} \\
&= G_k(z).
\end{aligned}$$

$\square$

On en déduit le

**Théorème 45**– Pour  $k \geq 4$ , on a

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \oplus \mathbb{C}G_k.$$

*Démonstration.* L'inclusion  $\mathcal{S}_k + \mathbb{C}G_k \subset \mathcal{M}_k$  est conséquence de  $G_k \in \mathcal{M}_k$ . Soit maintenant  $f \in \mathcal{M}_k$ . Alors, comme  $\widehat{G}_k(0) \neq 0$ , on a

$$f - \frac{\widehat{f}(0)}{\widehat{G}_k(0)} G_k \in \mathcal{S}_k$$

d'où  $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{S}_k + \mathbb{C}G_k$ . Il résulte de  $G_k \notin \mathcal{S}_k$  que la somme est directe.  $\square$

On peut alors calculer les structures de  $\mathcal{M}_k$  et  $\mathcal{S}_k$  pour les premières valeurs de  $k$ .

**Théorème 46**– Si  $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$  alors  $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}G_k$  et  $\mathcal{S}_k = \{0\}$ .

Pour  $k \in \{4, 6, 8, 10\}$ , la proposition 38 implique  $\dim \mathcal{M}_k \leq 1$ . Grâce à la proposition 44, on a donc  $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}G_k$ . Pour  $k = 14$ , on sait grâce à la proposition 44 que  $\dim \mathcal{M}_{14} \geq 1$ . Mais, la formule  $\frac{k}{12}$  s'écrit alors

$$6m + 3v_i + 2v_\rho = 7$$

avec  $m \in \mathbb{N}$  qui n'a comme seule solution que  $v_i = 1$ ,  $v_\rho = 2$  et  $m = 0$ . Ainsi, les formes non nulles de  $\mathcal{M}_{14}$  s'annulent toutes aux mêmes points ( $i$  et  $\rho$ ) aux mêmes ordres. Le quotient de deux telles formes est donc toujours holomorphe sur  $\mathcal{H}$  et en l'infini et est une forme modulaire de poids 0, c'est-à-dire une constante. Il en résulte que  $\dim \mathcal{M}_{14} = 1$  puis  $\mathcal{M}_{14} = \mathbb{C}G_{14}$ . Dans tous ces cas, le théorème 45 implique  $\mathcal{S}_k = \{0\}$ .

On construit maintenant une forme parabolique. Pour cela, il est pratique de re-normaliser les séries d'Eisenstein pour le coefficient de Fourier d'ordre 0 soit 1. On pose donc

$$E_k = -\frac{2k}{B_k} G_k.$$

On a alors

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2i\pi n z}. \quad (2.8)$$

En particulier, posant  $q = e^{2i\pi z}$ , on a

$$E_4(z) = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 + 60480q^6 + 82560q^7 + O(q^8)$$

$$E_6(z) = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - 4058208q^6 - 8471232q^7 + O(q^8)$$

$$E_8(z) = 1 + 480q + 61920q^2 + 1050240q^3 + 7926240q^4 + 37500480q^5 + 135480960q^6 + 395301120q^7 + O(q^8)$$

$$E_{10}(z) = 1 - 264q - 135432q^2 - 5196576q^3 - 69341448q^4 - 515625264q^5 - 2665843488q^6 - 10653352512q^7 + O(q^8)$$

$$E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691}q + \frac{134250480}{691}q^2 + \frac{11606736960}{691}q^3 + \frac{274945048560}{691}q^4 + \frac{3199218815520}{691}q^5 + \frac{23782204031040}{691}q^6 + O(q^7)$$

$$E_{14}(z) = 1 - 24q - 196632q^2 - 38263776q^3 - 1610809368q^4 - 29296875024q^5 - 313495116768q^6 - 2325336249792q^7 + O(q^8).$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des propositions 44 et 28.

**Théorème 47**– La fonction

$$\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$$

est une forme parabolique non nulle de poids 12 sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

*Remarque 48*– Que cette fonction est la même que la fonction  $\Delta$  définie dans l'introduction sera démontré à la proposition 133.

*Remarque 49*– Toujours en posant  $q = e^{2i\pi z}$ , on calcule

$$\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + O(q^8).$$

Puisque  $\Delta$  s'annule en l'infini (comme toute forme parabolique), on déduit de la formule  $\frac{k}{12}$  le résultat suivant.

**Proposition 50**– La fonction  $\Delta$  ne s'annule qu'en l'infini où elle s'annule à l'ordre 1.

Pour  $k \geq 12$ , si  $f \in \mathcal{S}_k$ , la fonction  $\frac{f}{\Delta}$  est holomorphe sur  $\mathcal{H}$  et en l'infini et elle est modulaire de poids  $k - 12$ . On en déduit une relation de récurrence entre les espaces de formes modulaires.

**Théorème 51**– Pour  $k \geq 12$ ,

$$\mathcal{S}_k = \Delta \mathcal{M}_{k-12}.$$

Compte-tenu du théorème 37, on a en particulier le corollaire suivant.

**Corollaire 52**–

$$\mathcal{S}_{12} = \mathbb{C}\Delta.$$

Finalement, on peut calculer la dimension de  $\mathcal{M}_k$  pour toutes les valeurs paires  $k \geq 0$ .

**Théorème 53**– Si  $k \geq 0$  est pair,

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Posons

$$D(k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a  $D(k+12) = D(k) + 1$  pour tout entier  $k \geq 0$ . Le théorème 51 implique  $\dim \mathcal{S}_{k+12} = \dim \mathcal{M}_k$  et le théorème 45 implique  $\dim \mathcal{S}_{k+12} + 1 = \dim \mathcal{M}_{k+12}$ . On en déduit  $\dim \mathcal{M}_{k+12} = \dim \mathcal{M}_k + 1$ . Les suites  $(D(2j))_{j \geq 1}$  et  $(\dim \mathcal{M}_{2j})_{j \geq 1}$  satisfont donc la même relation de récurrence. Elles coïncident en  $2j = 0$  et  $2j = 2$  grâce au théorème 37 et pour toutes les valeurs  $2j \in \{4, 6, 8, 10\}$  grâce au théorème 46. Les deux suites sont donc égales.  $\square$

Les calculs de la dimension de  $\mathcal{M}_k$  et des développements de Fourier des séries d'Eisenstein impliquent d'intéressantes relations arithmétiques. On va donner deux exemples.

1. Partant de  $G_4^2 \in \mathcal{M}_8$ ,  $G_8 \in \mathcal{M}_8$  et puisque  $\dim \mathcal{M}_8 = 1$ , on a

$$G_8 = \lambda G_4^2 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\widehat{G_8}(0)}{\widehat{G_4^2}(0)} = 120.$$

En calculant ensuite le développement de Fourier complet de  $G_4^2$  et en comparant avec celui de  $G_8$ , on obtient

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

2. L'espace  $\mathcal{M}_{16}$  est de dimension 2 et  $\mathcal{M}_{16} = \mathcal{S}_{16} \oplus \mathbb{C}G_{16}$ . L'espace  $\mathcal{S}_{16}$  est donc de dimension 1. Notons  $\Delta_{16}$  la forme parabolique qui engendre  $\mathcal{S}_{16}$  dont le premier coefficient de Fourier non nul vaut 1 (d'après la formule  $\frac{k}{12}$ , cette forme ne s'annule à l'infini qu'à l'ordre 1, donc ce coefficient est  $\widehat{\Delta_{16}}(1)$ ). On a  $E_8^2 \in \mathcal{M}_{16}$  et  $E_{16} \in \mathcal{M}_{16}$ . De plus, la comparaison des coefficients de Fourier d'ordre 1 implique  $E_8^2 \neq E_{16}$ . Ainsi, puisque  $\widehat{E_8^2}(0) = \widehat{E_{16}}(0) = 1$ , on a

$$E_{16} - E_8^2 \in \mathcal{S}_{16} \setminus \{0\}$$

et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\Delta_{16} = \lambda(E_{16} - E_8^2) \in \mathcal{S}_{16}$$

Puisque  $\widehat{\Delta_{16}}(1) = 1$ , on peut calculer  $\lambda$  et obtenir

$$\Delta_{16} = \frac{3617}{3456000}(E_8^2 - E_{16}).$$

En particulier,

$$\Delta_{16}(z) = q + 216q^2 - 3348q^3 + 13888q^4 + 52110q^5 - 723168q^6 + O(q^7)$$

avec  $q = e^{2i\pi z}$ . On aurait aussi pu utiliser  $E_4^4$  et  $E_4E_6^2$  pour trouver

$$\Delta_{16} = \frac{1}{1728}(E_4^4 - E_4E_6^2) = \Delta E_4. \quad (2.9)$$

On peut aisément retrouver (2.9) à l'aide de  $\Delta$  en constatant que  $\Delta E_4 \in \mathcal{S}_{16}$ .

## 2.2 Structure hermitienne

L'espace des formes paraboliques peut être muni d'une structure d'espace hermitien. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{S}_k$ , on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy \quad (z = x + iy).$$

La convergence de l'intégrale résulte de la majoration (2.7). On montre maintenant qu'on peut remplacer dans la définition l'ensemble  $\mathcal{F}$  par n'importe laquelle de ses images par une matrice de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . À cette fin, rappelons que si  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et si  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  est holomorphe en  $a \in D$ , alors les équations de Cauchy-Riemann sont

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x}(a) = \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial y}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial y}(a) = -\frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial x}(a)$$

et on a

$$\varphi'(a) = \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x}(a) + i \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial x}(a).$$

Il en résulte que le jacobien

$$\operatorname{Jac}[\varphi](a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x}(a) & \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial x}(a) & \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

a pour déterminant  $\det \operatorname{Jac}[\varphi](a) = |\varphi'(a)|^2$ . Ainsi,

$$\int_{\gamma \mathcal{F}} F(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{F}} F(\varphi(x, y)) |\varphi'(x + iy)|^2 dx dy.$$

On choisit  $\varphi(z) = \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}$ . Grâce à (2.3), c'est un difféomorphisme  $C^1$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\gamma \mathcal{F}$  et

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy &= \int_{\mathcal{F}} f(\gamma z) \overline{g(\gamma z)} |cz + d|^{-2k} \frac{(\operatorname{Im} \gamma z)^{k-2}}{|cz + d|^{-2k+4}} dx dy \\ &= \int_{\mathcal{F}} f(\varphi(z)) \overline{g(\varphi(z))} (\operatorname{Im} \varphi(z))^{k-2} |\varphi'(z)|^2 dx dy \\ &= \int_{\gamma \mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy. \end{aligned}$$

On montre aisément que

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &\geq 0 \\ \langle f, f \rangle = 0 &\Rightarrow f = 0 \\ \overline{\langle f, g \rangle} &= \langle g, f \rangle. \end{aligned}$$

On appelle l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le *produit scalaire de Petersson*.

**Proposition 54**– Pour tout entier pair  $k > 0$ , l'espace  $\mathcal{S}_k$  acquiert une structure d'espace hermitien grâce au produit scalaire de Petersson.

On va maintenant construire une généralisation des séries d'Eisenstein dont on va montrer qu'elles engendrent l'espace de toutes les formes modulaires. Afin d'exprimer leur développement de Fourier, on aura besoin de deux nouveaux objets. Si  $m, n$  et  $c \geq 1$  sont des entiers, la somme de Kloosterman  $\text{Kl}(m, n; c)$  est définie par

$$\text{Kl}(m, n; c) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \exp\left(2i\pi \frac{mx + n\{x, c\}}{c}\right)$$

où  $\{x, c\}$  désigne l'inverse de  $x$  modulo  $c$ . Le choix des représentants des éléments de  $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$  est sans conséquence. Un résultat difficile de Deligne implique la majoration

$$|\text{Kl}(m, n; c)| \leq \sqrt{(m, n, c)} 2^{\omega(c)} \sqrt{c} \quad (2.10)$$

où  $\omega(c)$  est le nombre de diviseurs premiers (distincts) de  $c$ . On trouvera plus de renseignements en annexe C.4. D'autre part, on définit pour  $\nu \in \mathbb{N}$ , la fonction  $J$  de Bessel d'ordre  $\nu$  par

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

La série est normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{C}$  et elle définit donc une fonction entière. Pour tout entier  $\nu \geq 0$  et tout réel  $x$  on a  $|J_\nu(x)| \leq \min\left(1, \frac{|x|^\nu}{2^\nu \nu!}\right)$  (voir l'annexe B.14).

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $e_m$  la fonction  $z \mapsto \exp(2i\pi mz)$  et  $e = e_1$ . On définit alors la série de Poincaré d'ordre  $m$  (et de poids  $k \geq 0$  pair) par

$$P_m(z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} e_m(M[c, d]z).$$

La somme se fait sur tous les couples de  $\mathbb{Z}^2$  d'entiers premiers entre eux et, étant donné  $(c, d)$  un tel couple,  $M[c, d]$  désigne une matrice de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  de la forme

$$M[c, d] = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le choix des coefficients supérieurs, donnés par le théorème de Bezout, n'influe pas sur le calcul de  $P_m$ . La série définissant  $P_m$  est normalement convergente sur tout compact de  $\mathcal{H}$ : en effet,

$$|P_m(z)| \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mz+n|^k}.$$

Elle définit donc une fonction holomorphe sur  $\mathcal{H}$ . Puisque

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n)=\ell}} \frac{1}{(mz+n)^k} \\ &= \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\ell^k} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz+d)^k} \\ &= \frac{B_k}{2k} P_0(z) \end{aligned}$$

ces séries apparaissent bien comme une généralisation des séries d'Eisenstein.

**Lemme 55**– Soit  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , alors

$$(\gamma z + \delta)^{-k} P_m \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) = P_m(z).$$

*Démonstration.* On note  $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Alors

$$P_m(Mz) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} (cMz+d)^{-k} e_m(M[c,d]Mz).$$

On a  $M[c,d]M = M[\alpha c + \gamma d, \beta c + \delta d]$  et l'application

$$\begin{aligned} \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (c,d) = 1\} &\rightarrow \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (c,d) = 1\} \\ (c,d) &\mapsto (\alpha c + \gamma d, \beta c + \delta d) \end{aligned}$$

est bijective d'inverse

$$\begin{aligned} \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (c,d) = 1\} &\rightarrow \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (c,d) = 1\} \\ (c,d) &\mapsto (\delta c - \gamma d, \alpha d - \beta c) \end{aligned}$$

comme on le voit en calculant  $M[c,d]M^{-1}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} P_m(Mz) &= \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \left( (\delta c - \gamma d) \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \alpha d - \beta c \right)^{-k} e_m(M[c,d]z) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma z + \delta)^k \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-k} e_m(M[c,d]z). \end{aligned}$$

□

On calcule ensuite le développement de Fourier de  $P_m$  pour  $m > 0$ . Via la bijection

$$\begin{aligned} \{(c,q,r) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 0 \leq r < |c|, (c,r) = 1\} &\rightarrow \{(c,d) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} : (c,d) = 1\} \\ (c,q,r) &\mapsto (c, cq+r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{(c,d)=1} \varphi(c,d) &= \varphi(0,-1) + \varphi(0,1) + \sum_{c>0} \sum_{\substack{r=0 \\ (c,r)=1}}^{c-1} \sum_{q \in \mathbb{Z}} [\varphi(c, cq+r) + \varphi(-c, -cq+r)] \\
&= \varphi(0,-1) + \varphi(0,1) + \sum_{c>0} \sum_{\substack{r=0 \\ (c,r)=1}}^{c-1} \sum_{q \in \mathbb{Z}} [\varphi(c, cq+r) + \varphi(-c, cq+r)]
\end{aligned}$$

pour toute application  $\varphi: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  telle que les sommes convergent absolument. Puisque  $k$  est pair et  $-I$  agit trivialement, on a

$$\sum_{\substack{r=0 \\ (c,r)=1}}^{c-1} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{e_m(M[-c, cq+r]z)}{(-cz + cq+r)^k} = \sum_{\substack{r=0 \\ (c,r)=1}}^{c-1} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{e_m(M[c, -cq-r]z)}{(c(z-q) - r)^k}.$$

Par le changement de variable  $(q, r) \mapsto (n = -q - 1, d = c - r)$  on obtient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r=0 \\ (c,r)=1}}^{c-1} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{e_m(M[-c, cq+r]z)}{(-cz + cq+r)^k} &= \sum_{\substack{d=1 \\ (c,d)=1}}^c \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e_m(M[c, cq+d]z)}{(c(z+n) + d)^k} \\
&= \sum_{\substack{d=0 \\ (c,d)=1}}^{c-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e_m(M[c, cn+d]z)}{(c(z+n) + d)^k}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.2) et en remarquant que si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  alors  $a$  et  $d$  sont inverses l'un de l'autre modulo  $c$ , on obtient

$$P_m(z) = e_m(z) + \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{\substack{d=0 \\ (c,d)=1}}^{c-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [c(z+n) + d]^{-k} e_m \left( \frac{\{d, c\}}{c} - \frac{1}{c[c(z+n) + d]} \right)$$

où  $\{d, c\}$  est n'importe quel représentant de l'inverse de  $d$  modulo  $c$ . On note

$$I_{c,d}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [c(z+n) + d]^{-k} e_m \left( \frac{\{d, c\}}{c} - \frac{1}{c[c(z+n) + d]} \right).$$

Grâce à la formule de Poisson, on a

$$\begin{aligned}
I_{c,d}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} [c(z+t) + d]^{-k} e_m \left( \frac{\{d, c\}}{c} - \frac{1}{c[c(z+t) + d]} - \frac{n}{m}t \right) dt \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e \left( nz + \frac{m\{d, c\} + nd}{c} \right) \int_{-\infty + iy}^{\infty + iy} (cu)^{-k} e \left( -\frac{m}{c^2 u} - nu \right) du
\end{aligned}$$

pour n'importe quelle valeur de  $y > 0$  grâce au théorème des résidus. En particulier,  $y \rightarrow +\infty$  implique

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cu)^{-k} e\left(-\frac{m}{c^2u} - nu\right) du = 0$$

pour  $n < 0$ . Si  $n > 0$ , le changement de variable  $t = -2i\pi nu$  conduit à

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cu)^{-k} e\left(-\frac{m}{c^2u} - nu\right) du = \left(\frac{2i\pi}{c}\right)^k n^{k-1} \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{2\pi ny-i\infty}^{2\pi ny+i\infty} t^{-k} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt$$

avec  $z = 4\pi\sqrt{mn}/c$ . Puisque

$$J_{k-1}(z) = \frac{(z/2)^{k-1}}{2i\pi} \int_{2\pi ny-i\infty}^{2\pi ny+i\infty} t^{-k} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt$$

(voir le lemme 333), on obtient le résultat suivant.

**Proposition 56**– Pour tout  $m > 0$ ,

$$P_m(z) = e^{2i\pi mz} + 2i^k \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)/2} \sum_{c=1}^{+\infty} \left[ \frac{\text{Kl}(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \right] e^{2i\pi nz}.$$

Autrement dit,

$$\widehat{P}_m(n) = \begin{cases} 2i^k \pi \left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)/2} \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{\text{Kl}(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) & \text{si } m \neq n; \\ 1 + 2i^k \pi \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{\text{Kl}(m, m; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi m}{c}\right) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

*Remarque 57*– La proposition précédente montre en particulier que les coefficients de Fourier des séries de Poincaré sont réels.

Le résultat suivant est alors conséquence du lemme 55 et de la proposition 56.

**Proposition 58**– Si  $m > 0$  alors  $P_m$  est une forme parabolique de poids  $k$ .

**Corollaire 59**– Si  $k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 14\}$  alors

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{e_m(M[c, d]z)}{(cz + d)^k} = 0$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ .

En particulier, en considérant les coefficients de Fourier, on a

**Corollaire 60**– Si  $k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 14\}$  alors

$$\frac{2\pi}{i^k} \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{\text{Kl}(m, n; c)}{c} J_{k-1} \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c} \right) = \delta(m = n)$$

pour tout  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

*Remarque 61*– Je ne connais pas de preuve directe de ces égalités.

**Corollaire 62**– Si  $m$  et  $n$ , sont des entiers strictement positifs alors

$$\widehat{P}_m(n) = m^{1-k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \widehat{P}_1 \left( \frac{mn}{d^2} \right).$$

*Démonstration.* La relation de Selberg sur les sommes de Kloosterman (voir en annexe la proposition 363) conduit à

$$\widehat{P}_m(n) - \delta(m = n) = m^{1-k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \widehat{P}_1 \left( \frac{mn}{d^2} \right) - m^{1-k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \delta \left( 1 = \frac{mn}{d^2} \right).$$

Si  $d$  divise  $(m, n)$  vérifie  $d^2 = mn$  alors  $d = m$  et  $d = n$  donc

$$\delta(m, n) = m^{1-k} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \delta \left( 1 = \frac{mn}{d^2} \right)$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante rend très utiles les séries de Poincaré.

**Proposition 63**– Soit  $f \in \mathcal{S}_k$  et  $m > 0$ . Alors

$$\langle f, P_m \rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \widehat{f}(m).$$

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{S}_k$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle f, P_m \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} y^k f(z) \sum_{(c,d)=1} (c\bar{z} + d)^{-k} e_m \left( -\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \int_{\mathcal{F}} F[\varphi(z)] |\varphi'(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

avec  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  et  $F(z) = y^{k-2} f(z) e_m(-\bar{z})$ . Ainsi

$$\langle f, P_m \rangle = \frac{1}{2} \int_{\bigcup_{(c,d)=1} \varphi^{-1}(\mathcal{F})} y^k f(z) e_m(-\bar{z}) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Notant

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

on a une bijection

$$\begin{aligned} B \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 : (c, d) = 1\} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (c, d). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\bigcup_{(c,d)=1} \varphi^{-1}(\mathcal{F}) = \bigcup_{B \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma \mathcal{F}$$

Or,

$$\bigcup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma \mathcal{F} = \mathcal{H} \sqcup \mathcal{H}$$

est la copie de deux exemplaires de  $\mathcal{H}$  (car  $(-\gamma)\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}$  pour toute matrice  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ).

On a donc

$$\bigcup_{B \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma \mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} : 0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\} \sqcup \{z \in \mathcal{H} : 0 \leq \mathrm{Re} z \leq 1\}$$

et

$$\langle f, P_m \rangle = \int_{y=0}^{+\infty} \int_{x=0}^1 y^k f(z) e_m(-\bar{z}) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Insérant le développement de Fourier de  $f$ , on déduit

$$\begin{aligned} \langle f, P_m \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \int_0^1 e_{n-m}(x) dx \int_0^{+\infty} y^{k-2} e^{-2\pi(n+m)y} dy \\ &= \widehat{f}(m) \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}}. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 64**— L'espace  $\mathcal{S}_k$  est engendré par les séries de Poincaré  $P_m$  avec  $m > 0$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{S}_k$  est de dimension finie on a

$$\mathrm{Vect}\{P_m, m \in \mathbb{Z}\}^\perp \oplus \mathrm{Vect}\{P_m, m \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{S}_k.$$

Or la proposition 63 implique  $\mathrm{Vect}\{P_m, m \in \mathbb{Z}\}^\perp = \{0\}$ .

□

On va maintenant établir une formule de moyenne des coefficients de Fourier sur une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$  appelée *formule de trace de Petersson*<sup>(f)</sup>. On désigne par  $H_k$  une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$ . On commence par établir le développement dans cette base des séries de Poincaré.

f. Ce terme ne pourra être expliqué qu'une fois introduits les opérateurs de Hecke.

**Proposition 65**– Soit  $m > 0$ , on a

$$P_m = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{f \in H_k} \frac{\widehat{f}(m)}{\|f\|^2} f.$$

*Démonstration.* L'orthogonalité de  $H_k$  implique

$$P_m = \sum_{f \in H_k} \frac{\langle P_m, f \rangle}{\|f\|^2} f = \sum_{f \in H_k} \frac{\overline{\langle f, P_m \rangle}}{\|f\|^2} f$$

et la proposition 63 permet de conclure.  $\square$

Le coefficient harmonique de  $f \in H_k$  est défini par

$$\omega_k(f) = \frac{(k-2)!}{4\pi^{k-1}\|f\|^2}.$$

**Corollaire 66**– Soit  $m$  et  $n$  deux entiers strictement positifs. On a

$$\sum_{f \in H_k} \omega_k(f) \frac{\overline{\widehat{f}(m)}\widehat{f}(n)}{(mn)^{(k-1)/2}} = \delta(m=n) + 2i^k \pi \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{Kl(m, n; c)}{c} J_{k-1} \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c} \right).$$

*Démonstration.* On calcule  $\widehat{P}_m(n)$  à l'aide de la proposition 65 et on compare le résultat obtenu avec la proposition 56.  $\square$

La formule de traces Petersson (corollaire 66) peut être vue comme une formule d'orthogonalité approchée des coefficients de Fourier des formes de  $H_k$  grâce au corollaire suivant. La fonction  $\tau_3$  est la fonction arithmétique définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $\tau_3(n) = \#\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : n = abc\}$ . On a donc  $\tau_3 = \sigma_0 * \mathbb{1}$ .

**Corollaire 67**– Il existe  $C > 0$  tel que pour tous entiers  $m$  et  $n$  et tout entier pair  $k \geq 2$  on a

$$\left| \sum_{f \in \mathcal{S}_k} \omega_k(f) \lambda_f(m) \lambda_f(n) - \delta(m=n) \right| \leq Ck^{-1/2} (mn)^{1/4} \tau_3((m, n)) (\log k + \log(2mn)).$$

*Démonstration.* Il s'agit d'estimer

$$R(k) = \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{Kl(m, n; c)}{c} J_{k-1} \left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c} \right).$$

On pose  $K = k - 1$ . La majoration de Deligne pour les sommes de Kloosterman (2.10) et les corollaires 329 et 331 impliquent

$$|R(k)| \leq \sum_{c \leq X} \frac{(m, n, c) 2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} + X^K \sum_{c \geq X} \frac{(m, n, c) 2^{\omega(c)}}{c^{K+1/2}}$$

avec  $X = 2\pi\sqrt{mn}/(K!)^{1/K}$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{c \leq X} \frac{(m, n, c)2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} &\leq \sum_{d|(m, n)} \sqrt{d} \sum_{r \leq X/d} \frac{2^{\omega(rd)}}{\sqrt{r}} \\ &\leq \sum_{d|(m, n)} \sqrt{d} \sigma_0(d) \sum_{r \leq X/d} \frac{\sigma_0(r)}{\sqrt{r}} \end{aligned}$$

car  $\omega(rd) \leq \omega(r) + \omega(d)$  et  $2^\omega \leq \sigma_0$  (voir l'annexe C.1.2). Le corollaire 356 implique alors

$$\sum_{c \leq X} \frac{(m, n, c)2^{\omega(c)}}{\sqrt{c}} \leq c_0 \sqrt{X} |\log X| \sum_{d|(m, n)} \sigma_0(d) = c_0 \sqrt{X} |\log X| \tau_3((m, n)).$$

Le corollaire 357 implique

$$\sum_{c \geq X} \frac{(m, n, c)2^{\omega(c)}}{c^{K+1/2}} \leq c_1 X^{-K+1/2} |\log X| \tau_3((m, n)).$$

On a donc

$$|R(k)| \leq c_2 \sqrt{X} |\log X| \tau_3((m, n)) \leq c_3 \frac{(mn)^{1/4} \tau_3((m, n))}{\sqrt{k}} (\log k + \log(2mn)).$$

□

## 2.3 Opérateurs de Hecke

### 2.3.1) Opérateurs de Hecke sur les fonctions périodiques

On note  $\text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$ , périodiques de période 1 et holomorphes en  $\infty$ . Toute fonction  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z} \quad (2.11)$$

convergeant normalement sur tout compact de  $\mathcal{H}$ .

**Définition 68**– Soit  $p \in \mathcal{P}$ . On définit l'application linéaire  $T_p: \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$  par

$$T_p f(z) = p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p-1} f\left(\frac{z+n}{p}\right).$$

Il faut remarquer qu'on oublie de marquer la dépendance en  $k$  dans la notation  $T_p$ . Si on veut insister sur cette dépendance, on note  $T_{k,p}$ . On appelle  $T_p$  le  $p^e$  opérateur de Hecke. Si  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , on voit aisément que  $T_p f$  est holomorphe sur  $\mathcal{H}$ .

**Lemme 69**– Si  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , alors  $T_p f$  est périodique de période 1.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} T_p f(z+1) &= p^{k-1} f(pz+p) + \frac{1}{p} \left( \sum_{n=0}^{p-1} f\left(\frac{z+n}{p}\right) - f\left(\frac{z}{p}\right) + f\left(\frac{z+p}{p}\right) \right) \\ &= T_p f(z) \end{aligned}$$

en utilisant la périodicité de  $f$ . □

On peut alors calculer le développement de Fourier de  $T_p f$ . On prouve aisément le résultat suivant.

**Lemme 70**– Soit  $p$  un nombre premier. Alors

$$T_p e_n = \begin{cases} p^{k-1} e_{np} + e_{n/p} & \text{si } p \mid n \\ p^{k-1} e_{np} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On déduit alors aisément du développement (2.11) le résultat suivant.

**Proposition 71**– Si  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , alors

$$\widehat{T_p f}(n) = \begin{cases} p^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np) & \text{si } p \mid n \\ \widehat{f}(np) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Remarque 72*– Pour toute fonction  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , on fait la convention  $\widehat{f}(r) = 0$  si  $r \notin \mathbb{Z}$ . Le résultat de la proposition 71 s'énonce alors

$$\widehat{T_p f}(n) = p^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{f}(np).$$

Par la suite, on fera cette convention sans la préciser.

**Corollaire 73**– Si  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , alors  $T_p f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ .

Si  $p$  et  $q$  sont premiers, on calcule  $T_q e_n$  grâce au lemme 70 puis  $T_p T_q e_n$  par réapplication de ce même lemme. On obtient un résultat symétrique en  $p$  et  $q$  ce qui démontre que les opérateurs  $T_p$  et  $T_q$  commutent.

**Corollaire 74**– Si  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers, alors

$$T_p T_q = T_q T_p.$$

**Lemme 75**– Soit  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  un vecteur propre non constant de tous les opérateurs de Hecke alors  $\widehat{f}(1) \neq 0$ .

*Démonstration.* On suppose  $T_p f = \lambda_p f$  pour tout  $p \in \mathcal{P}$  et  $\widehat{f}(1) = 0$ . De la proposition 71 appliquée à  $n = 1$  on déduit  $\widehat{f}(p) = 0$  pour tout  $p \in \mathcal{P}$ . Par récurrence il résulte alors de la proposition 71 appliquée à  $n = p^{\alpha-1}$  que  $\widehat{f}(p^\alpha) = 0$  pour tout  $\alpha \geq 1$ . Ensuite, si  $\widehat{f}(n) = 0$  et  $p \nmid n$  la proposition 71 implique  $\widehat{f}(pn) = 0$  puis cette même proposition avec  $p^{\alpha-1}n$  au lieu de  $n$  donne  $\widehat{f}(p^\alpha n) = 0$  pour tout  $\alpha \geq 0$ . Finalement par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de  $n$  on a  $\widehat{f}(n) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $f$  est constante.  $\square$

**Définition 76**– Une fonction  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  est appelée fonction de Hecke si elle est vecteur propre non constante de tous les opérateurs de Hecke et si  $\widehat{f}(1) = 1$ .

*Remarque 77*– Si  $g \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , alors  $\widehat{g}(1) \neq 0$  d'après le lemme 75. On construit donc à partir de  $g$  une fonction de Hecke par simple normalisation  $f = g/\widehat{g}(1)$ .

*Exemple 78*– Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On va montrer que

$$T_p(G_k + \alpha) = \sigma_{k-1}(p)(G_k + \alpha).$$

Soit  $n \geq 1$ . Écrivons  $n = p^\beta n'$  avec  $(p, n') = 1$  et  $\beta \geq 0$ . On fait la convention  $\sigma_{k-1}(r) = 0$  si  $r \notin \mathbb{Z}$ . D'après la proposition 71 on a

$$\begin{aligned} \widehat{T_p G_k}(n) &= \widehat{T_p G_k}(p^\beta n') = p^{k-1} \sigma_{k-1}(p^{\beta-1} n') + \sigma_{k-1}(p^{\beta+1} n') \\ &= \sigma_{k-1}(p) \sigma_{k-1}(p^\beta) \sigma_{k-1}(n') = \sigma_{k-1}(p) \sigma_{k-1}(n) \end{aligned}$$

en utilisant (1.9). Il en résulte que  $T_p G_k = \sigma_{k-1}(p) G_k$ . D'autre part  $T_p \alpha = \alpha T_p e_0 = \alpha \sigma_{k-1}(p)$  d'après le lemme 70. Ainsi pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  la fonction  $G_k + \alpha$  est une valeur propre de tous les opérateurs de Hecke et puisque  $\widehat{G_k + \alpha}(1) = 1$  alors  $G_k + \alpha$  est une fonction de Hecke. En particulier,  $G_k - \widehat{G_k}(0)$  est une fonction de Hecke nulle en  $\infty$ .

L'intérêt des fonctions de Hecke est qu'on sait relier leurs coefficients de Fourier aux valeurs propres de opérateurs de Hecke, donnant ainsi une structure algébrique à ces coefficients de Fourier.

**Proposition 79**– Si  $f$  est une fonction de Hecke, alors  $T_p f = \widehat{f}(p) f$  pour tout nombre premier  $p$ .

*Démonstration.* On a  $T_p f = \lambda_p f$  avec  $\lambda_p \in \mathbb{C}$ , d'où  $\widehat{T_p f}(1) = \lambda_p \widehat{f}(1) = \lambda_p$ . Par la proposition 71, on a aussi  $\widehat{T_p f}(1) = \widehat{f}(p)$ .  $\square$

Les coefficients de Fourier d'ordres premiers des fonctions de Hecke sont déterminés par le spectre des opérateurs de Hecke. On va voir que c'est en fait le cas de tous les coefficients de Fourier.

**Lemme 80**– Soit  $f$  une fonction de Hecke,  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier naturel. Alors

$$\widehat{f}(p) \widehat{f}(n) = \begin{cases} \widehat{f}(pn) + p^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{n}{p}\right) & \text{si } p \mid n \\ \widehat{f}(pn) & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* De  $T_p f = \widehat{f}(p)f$  on déduit  $\widehat{T_p f}(n) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(n)$  que l'on compare avec l'expression obtenue par la proposition 71.  $\square$

**Théorème 81**– Soit  $f$  une fonction de Hecke. Alors

1. pour tout  $p \in \mathcal{P}$  et tout entier  $v \geq 1$ ,

$$\widehat{f}(p^{v+1}) = \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1});$$

2. pour tous entiers positifs  $m$  et  $n$  premiers entre eux,

$$\widehat{f}(mn) = \widehat{f}(m)\widehat{f}(n).$$

*Démonstration.* Le premier point résulte du lemme 80 en prenant  $n = p^v$ . On prouve le second point. Supposons d'abord que  $m = p^v$ . Si  $v = 0$ , le résultat vient de  $\widehat{f}(1) = 1$ . Si  $v = 1$ , il est conséquence du lemme 80. Supposons le résultat vrai pour tout  $m = p^\ell$  avec  $\ell \leq v$ . Alors

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p^{v+1})\widehat{f}(n) &= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v)\widehat{f}(n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1})\widehat{f}(n) \quad \text{d'après le point 1} \\ &= \widehat{f}(p)\widehat{f}(p^v n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1} n) \quad \text{d'après l'hypothèse} \\ &= \widehat{f}(p^{v+1} n) + p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1} n) - p^{k-1}\widehat{f}(p^{v-1} n) \quad \text{d'après le lemme 80} \\ &= \widehat{f}(p^{v+1} n). \end{aligned}$$

Par récurrence, le résultat est donc vrai dès que  $m$  est une puissance de nombre premier. Si  $m \neq 1$ , on écrit la décomposition de  $m$  en produit de nombres premiers distincts

$$m = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_i}.$$

En écrivant  $n_1 = \frac{m}{p_1^{v_1}}$ , on a

$$\widehat{f}(m) = \widehat{f}(p_1^{v_1} n_1) = \widehat{f}(p_1^{v_1})\widehat{f}(n_1)$$

de sorte que par répétitions sur les facteurs premiers distincts de  $m$ , on a

$$\widehat{f}(m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \widehat{f}(p^{v_p(m)}).$$

Montrons enfin le second point. On écrit

$$m = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{v_i} \quad \text{et} \quad n = \prod_{i=\omega+1}^{\tau} p_i^{v_i}$$

les décompositions en facteurs premiers de  $m$  et  $n$ . Les facteurs premiers  $p_i$  sont tous distincts. On a alors

$$\widehat{f}(m)\widehat{f}(n) = \prod_{i=1}^{\tau} \widehat{f}(p_i^{v_i}) = \widehat{f}\left(\prod_{i=1}^{\tau} p_i^{v_i}\right) = \widehat{f}(mn).$$

$\square$

Le résultat suivant implique que les opérateurs de Hecke seront surtout utilisés sur les fonctions qui s'annulent à l'infini.

**Corollaire 82**– Soit  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  une fonction de Hecke (pour la famille  $\{T_{k,p}\}_{p \in \mathcal{P}}$ ) qui ne s'annule pas à l'infini. Alors, il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que

$$f = \alpha + G_k.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 80, on a  $\widehat{f}(p)\widehat{f}(0) = (1 + p^{k-1})\widehat{f}(0)$  pour tout  $p$ . Ainsi  $\widehat{f}(p) = \sigma_{k-1}(p)$ . D'autre part,  $\widehat{f}(1) = 1$  par définition. Le premier point du théorème 81 et le lemme 14 impliquent par récurrence  $\widehat{f}(p^v) = \sigma_{k-1}(p^v)$  pour tout  $v \geq 0$  puis le second point de ce théorème donne  $\widehat{f}(n) = \sigma_{k-1}(n)$  pour tout  $n \geq 1$ . On a donc  $f - \widehat{f}(0) = G_k - \widehat{G}_k(0)$  ce qui fournit le résultat avec  $\alpha = \widehat{f}(0) - \widehat{G}_k(0)$ .  $\square$

On définit, pour toute fonction de Hecke  $f$ ,

$$\lambda_f(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{n^{(k-1)/2}}.$$

On va voir que la première relation du théorème 81 se traduit en relation remarquable sur  $\lambda_f$  faisant intervenir les polynômes de Tchebychef de seconde espèce (voir l'annexe A.4).

Soit alors  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  une fonction de Hecke. En posant  $u_n = \lambda_f(p^n)$  et  $v_n = X_n(\lambda_f(p))$ , on a

$$v_{n+2} = \lambda_f(p)v_{n+1} - v_n$$

grâce à (A.6) évalué en  $\lambda_f(p)$  et

$$u_{n+2} = \lambda_f(p)u_{n+1} - u_n$$

grâce au premier point du théorème 81. Puisque  $u_0 = v_0$  et  $u_1 = v_1$ , on en déduit

$$\lambda_f(p^n) = X_n(\lambda_f(p)) \tag{2.12}$$

pour tout  $n \geq 0$ . La relation de Clebsch-Gordan conduit alors à une intéressante formule de multiplicativité des coefficients de Fourier d'une fonction de Hecke.

**Proposition 83**– Soit  $f$  une fonction de Hecke. Pour tous entiers  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$ , on a

$$\widehat{f}(m)\widehat{f}(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d|(m,n)}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

*Démonstration.* Si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, le résultat est donné par le point 2 du théorème 81. Soit  $p$  un nombre premier,  $m = p^\alpha$  et  $n = p^\beta$ , alors par (2.12), on a

$$\lambda_f(p^\alpha)\lambda_f(p^\beta) = X_\alpha X_\beta(\lambda_f(p)).$$

On utilise ensuite la formule de Clebsch-Gordan (lemme 239) pour obtenir

$$\begin{aligned}\lambda_f(p^\alpha)\lambda_f(p^\beta) &= \sum_{\gamma=0}^{\inf(\alpha,\beta)} X_{\alpha+\beta-2\gamma}(\lambda_f(p)) = \sum_{\gamma=0}^{\inf(\alpha,\beta)} \lambda_f(p^{\alpha+\beta-2\gamma}) \\ &= \sum_{d|(p^\alpha, p^\beta)} \lambda_f\left(\frac{p^\alpha p^\beta}{d^2}\right)\end{aligned}$$

ce qui, après normalisation, donne le résultat énoncé. Supposons maintenant  $m$  et  $n$  quelconques. Alors,

$$\begin{aligned}\lambda_f(m)\lambda_f(n) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{d_p | (p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)})} \lambda_f\left(\frac{p^{v_p(m)+v_p(n)}}{d_p^2}\right) \\ &= \sum_{d|(m,n)} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)\end{aligned}$$

par multiplicativité de  $\lambda_f$  et bijectivité de l'application

$$\begin{aligned}\{(d_p)_{p \in \mathcal{P}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{P}} : d_p | (p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)})\} &\xrightarrow{\sim} \{d \in \mathbb{N}^* : d | (m, n)\} \\ (d_p)_{p \in \mathcal{P}} &\mapsto \prod_{p \in \mathcal{P}} d_p = \prod_{p|(m,n)} d_p.\end{aligned}$$

□

On note  $\mu$  la fonction de Möbius (voir l'annexe 1.3.2).

**Corollaire 84**— Si  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  sont des entiers, alors

$$\widehat{f}(mn) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{m}{d}\right) \widehat{f}\left(\frac{n}{d}\right).$$

*Démonstration.* On calcule

$$S(m, n) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{m}{d}\right) \widehat{f}\left(\frac{n}{d}\right)$$

en reportant la valeur  $\widehat{f}(m/d)\widehat{f}(n/d)$  tirée de la proposition 83. On trouve

$$S(m, n) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} \sum_{r|(m/d, n/d)} r^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2 r^2}\right).$$

Le choix  $\ell = rd$  conduit à

$$S(m, n) = \sum_{\ell|(m,n)} \ell^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{\ell^2}\right) \sum_{d|\ell} \mu(d).$$

Par inversion de Möbius (lemme 12) on obtient

$$S(m, n) = \widehat{f}(mn).$$

□

*Remarque 85*– Ce lemme peut-être démontré sans utiliser la relation de Möbius mais en utilisant une relation sur les polynômes des Tchebychef (voir le lemme 240).

On utilise cette relation de multiplicativité pour construire des opérateurs de Hecke  $T_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

**Définition 86**– Soit  $n \geq 1$  un entier. Si  $n = 1$ , le premier opérateur de Hecke est  $T_1 = I$ . Si  $n = p^\nu$  avec  $p \in \mathcal{P}$  et  $\nu \geq 2$ , l'opérateur de Hecke d'ordre  $p^\nu$  est défini par la relation de récurrence

$$T_{p^\nu} = T_p \circ T_{p^{\nu-1}} - p^{k-1} T_{p^{\nu-2}}.$$

Enfin, si  $n > 1$ , l'opérateur de Hecke d'ordre  $n$  est défini par

$$\bigcirc_{p \in \mathcal{P}} T_{p^{v_p(n)}} \quad \text{si } n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}.$$

*Remarque 87*– Soit  $p$  et  $q$  deux nombres premiers (éventuellement égaux). À partir de la définition de  $T_{p^\nu}$  et du corollaire 74, on montre par récurrence sur  $\nu$  que  $T_{p^\nu}$  et  $T_q$  commutent pour tout  $\nu$ . On déduit alors par récurrence sur  $\omega$  que  $T_{p^\nu}$  et  $T_{q^\omega}$  commutent pour tout  $\omega$ . Cette remarque justifie qu'on ne se préoccupe pas de l'ordre des compositions dans la définition de  $T_n$ . Elle montre aussi que  $T_n$  et  $T_m$  commutent.

La relation définissant  $T_{p^\nu}$  implique

$$\frac{1}{p^{\nu(k-1)/2}} T_{p^\nu} = X_\nu \left( \frac{1}{p^{(k-1)/2}} T_p \right).$$

Le raisonnement est identique à celui menant à (2.12).

*Exemple 88*– On exprime  $T_{50}$  à l'aide de  $T_2$  et  $T_5$  :

$$\begin{aligned} T_{50} &= T_{25} \circ T_2 = 5^{k-1} X_2 \left( \frac{1}{5^{(k-1)/2}} T_5 \right) \circ T_2 = 5^{k-1} \left( \frac{1}{5^{k-1}} T_5 \circ T_5 - I \right) \circ T_2 \\ &= T_5 \circ T_5 \circ T_2 - 5^{k-1} T_2. \end{aligned}$$

**Proposition 89**– Pour tous entiers  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  on a

$$T_n \circ T_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mn/d^2}.$$

*Démonstration.* On pose  $\widetilde{T}_n = \frac{1}{n^{(k-1)/2}} T_n$ . Pour tous  $m$  et  $n$  on a

$$\begin{aligned} T_m \circ T_n &= \bigcirc_{p \in \mathcal{P}} \left( X_{v_p(n)}(\widetilde{T}_p) \circ X_{v_p(m)}(\widetilde{T}_p) \right) \\ &= \bigcirc_{p \in \mathcal{P}} \left( X_{v_p(n)} X_{v_p(m)}(\widetilde{T}_p) \right) \\ &= \bigcirc_{p \in \mathcal{P}} \left( \sum_{d \mid (p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)})} \widetilde{T}_{p^{v_p(m)+v_p(n)/d^2}} \right) \end{aligned}$$

comme dans la preuve de la proposition 83. Le résultat en découle.  $\square$

**Proposition 90**– Si  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$  alors

$$\widehat{T}_m f(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid (m, n)}} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

pour tous entiers  $m$  et  $n$ .

*Démonstration.* Si  $m = 1$  le résultat est immédiat. Si  $m$  est un nombre premier c'est le résultat de la proposition 71. Supposons  $m = p^v$  avec  $p$  premier et  $v \geq 2$ , et supposons le résultat vrai si on remplace  $m$  par  $p^{v-1}$  et  $p^{v-2}$ . La définition de  $T_{p^v}$  donne

$$\widehat{T}_{p^v} f(n) = T_p(\widehat{T}_{p^{v-1}} f)(n) - p^{k-1} \widehat{T}_{p^{v-2}} f(n).$$

La proposition 71 conduit alors à

$$\widehat{T}_{p^v} f(n) = p^{k-1} \widehat{T}_{p^{v-1}} f\left(\frac{n}{p}\right) + \widehat{T}_{p^{v-1}} f(np) - p^{k-1} \widehat{T}_{p^{v-2}} f(n)$$

et par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{p^v} f(n) &= \delta(p \mid n) p^{k-1} \sum_{d \mid (p^{v-1}, n/p)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-1} n/p}{d^2}\right) + \sum_{d \mid (p^{v-1}, np)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-1} np}{d^2}\right) \\ &\quad - p^{k-1} \sum_{d \mid (p^{v-2}, n)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^{v-2} n}{d^2}\right). \end{aligned}$$

Dans les première et dernière sommes, on pose  $\delta = pd$  pour trouver

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{p^v} f(n) &= \sum_{\substack{\delta \mid (p^v, n) \\ p \mid \delta}} \delta^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right) + \sum_{d \mid (p^{v-1}, np)} d^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^v n}{d^2}\right) \\ &\quad - \sum_{\substack{\delta \mid (p^{v-1}, np) \\ p \mid \delta}} \delta^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Les deux dernières sommes se compensent, ne laissant que le terme provenant de  $d = 1$  de la deuxième somme. On réintègre ce terme à la première somme pour déduire

$$\widehat{T_{p^v} f}(n) = \sum_{\delta|(p^v, n)} \delta^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{p^v n}{\delta^2}\right).$$

Si  $m$  admet la décomposition en nombres premiers  $m = p_1^{v_1} \cdots p_\omega^{v_\omega}$  alors

$$\widehat{T_m f}(n) = \sum_{\substack{d_1|(p_1^{v_1}, n) \\ \vdots \\ d_\omega|(p_\omega^{v_\omega}, n)}} (d_1 \cdots d_\omega)^{k-1} \widehat{f}\left(\frac{mn}{(d_1 \cdots d_\omega)^2}\right).$$

Les entiers  $p_1^{v_1}, \dots, p_\omega^{v_\omega}$  étant premiers entre eux, on obtient le résultat énoncé grâce à la bijection

$$\begin{aligned} \{(d_1, \dots, d_\omega) : d_1 | (p_1^{v_1}, n), \dots, d_\omega | (p_\omega^{v_\omega}, n)\} &\rightarrow \{d : d | (p_1^{v_1} \cdots p_\omega^{v_\omega}, n)\} \\ (d_1, \dots, d_\omega) &\mapsto d_1 \cdots d_\omega. \end{aligned}$$

□

*Remarque 91* - La proposition 90 implique en particulier

$$\widehat{T_m f}(n) = \widehat{T_n f}(m) \quad (2.13)$$

Enfin, par construction et grâce au théorème 81, si  $f$  est une fonction de Hecke, alors

$$T_n f = \widehat{f}(n) f. \quad (2.14)$$

### 2.3.2) Opérateurs de Hecke sur les formes modulaires

On étudie maintenant le comportement des opérateurs de Hecke vis-à-vis des formes modulaires. L'espace des formes modulaires étant engendré par des séries de Poincaré, on commence par étudier l'image de ces séries.

**Proposition 92** – Pour tous entiers  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  on a

$$m^{k-1} T_n P_m = n^{k-1} T_m P_n.$$

*Démonstration.* Grâce à la proposition 90 et au corollaire 62, on a

$$\widehat{T_n P_m}(\ell) = \frac{1}{m^{k-1}} \sum_{\substack{d|(n, \ell) \\ \delta|(m, \frac{n\ell}{d^2})}} (d\delta)^{k-1} \widehat{P_1}\left(\frac{mn\ell}{(d\delta)^2}\right).$$

La proposition 90 implique donc  $m^{k-1} \widehat{T_n P_m}(\ell) = \widehat{T_n \circ T_m P_1}(\ell)$  puis

$$m^{k-1} T_n P_m = T_n \circ T_m P_1. \quad (2.15)$$

On déduit alors le résultat de la commutativité des opérateurs de Hecke. □

**Théorème 93**– La restriction des opérateurs de Hecke  $T_n$  à  $\mathcal{M}_k$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_k$ . La restriction des opérateurs de Hecke  $T_n$  à  $\mathcal{S}_k$  est à valeurs dans  $\mathcal{S}_k$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer les résultats pour les formes paraboliques puisque  $\mathcal{M}_k = \mathbb{C}G_k \oplus \mathcal{S}_k$  et  $G_k$  est un vecteur propre des opérateurs de Hecke. Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $T_n P_1 = n^{k-1} P_n$  d'après la proposition 92 (et parce que  $T_1$  est l'identité) donc  $T_n P_1$  est une forme parabolique. L'équation (2.15) et la proposition 89 conduisent à

$$T_n P_m = m^{1-k} \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} T_{mn/d^2} P_1$$

et donc  $T_n P_m$  est parabolique pour tous entiers  $n \geq 1$  et  $m \geq 1$ . Puisque les séries de Poincaré engendrent  $\mathcal{S}_k$ , cet espace est stable par les opérateurs de Hecke.  $\square$

On peut alors montrer qu'il existe une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$  constituée de fonctions de Hecke.

**Proposition 94**– Les opérateurs de Hecke  $T_n$  sont autoadjoints pour le produit scalaire de Petersson :

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle$$

pour toutes formes  $f \in \mathcal{S}_k$  et  $g \in \mathcal{S}_k$ .

*Démonstration.* Puisque les séries de Poincaré  $P_m$  avec  $m \geq 1$  engendrent  $\mathcal{S}_k$ , il suffit de montrer le résultat pour  $f = P_m$  et  $g = P_\ell$ . On a

$$\begin{aligned} \langle T_n P_m, P_\ell \rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi\ell)^{k-1}} \widehat{T_n P_m}(\ell) \quad \text{d'après la proposition 63} \\ &= (k-2)! \left( \frac{n}{4\pi\ell m} \right)^{k-1} \widehat{T_m P_n}(\ell) \quad \text{d'après la proposition 92} \\ &= (k-2)! \left( \frac{n}{4\pi\ell m} \right)^{k-1} \widehat{T_\ell P_n}(m) \quad \text{d'après l'équation (2.13)} \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \widehat{T_n P_\ell}(m) \quad \text{d'après la proposition 92} \\ &= \langle T_n P_\ell, P_m \rangle \\ &= \langle P_m, T_n P_\ell \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Les opérateurs de Hecke étant commutatifs et autoadjoints on déduit le théorème suivant.

**Théorème 95**– Il existe une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$  constituée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke  $T_n$ .

**Définition 96**– On appelle forme primitive de  $\mathcal{S}_k$  tout vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke de premier coefficient de Fourier égal à 1.

*Remarque 97* – Une forme primitive est donc une fonction de Hecke.

Les formes de  $\mathcal{S}_k \setminus \{0\}$  n'étant pas constantes, si  $f$  appartient à une base comme celle donnée par le théorème 95 alors  $\widehat{f}(1) \neq 0$  grâce au lemme 75. En particulier, après division par le coefficient de Fourier d'ordre 1 de chaque élément d'une base fournie par le théorème 95 on voit qu'il existe une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$  formée de formes primitives. On va voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes primitives et que leur ensemble constitue la seule base de formes primitives.

**Proposition 98** – L'ensemble des formes primitives de  $\mathcal{S}_k$  est une base orthogonale de  $\mathcal{S}_k$ . On note  $H_k^*$  cette base.

*Démonstration.* Soit  $f_1, \dots, f_d$  une base de formes primitives de  $\mathcal{S}_k$  construite à partir du théorème 95. Soit  $g$  une forme primitive de  $\mathcal{S}_k$ . Il existe des nombres complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  tels que

$$g = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i.$$

Choisissons  $j$  tel que  $\alpha_j \neq 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$T_n g = \sum_{i=1}^d \alpha_i T_n f_i = \sum_{i=1}^d \alpha_i \widehat{f}_i(n) f_i$$

d'après (2.14). D'autre part

$$T_n g = \widehat{g}(n) g = \sum_{i=1}^d \alpha_i \widehat{g}(n) f_i.$$

On a donc  $\alpha_j \widehat{f}_j(n) = \alpha_j \widehat{g}(n)$  puis  $\widehat{g}(n) = \widehat{f}_j(n)$ . Finalement,  $g = f_j$ . Les seules formes primitives sont donc les fonctions  $f_1, \dots, f_d$  et, par construction leur ensemble est une base orthogonale.  $\square$

**Proposition 99** – Les coefficients de formes primitives sont réels.

*Démonstration.* Grâce à l'équation (2.14) on a  $\langle T_n f, f \rangle = \widehat{f}(n) \|f\|^2$ . Les opérateurs de Hecke étant autoadjoints on a ensuite  $\langle T_n, f \rangle = \langle f, T_n f \rangle$  or  $\langle f, T_n f \rangle = \langle f, \widehat{f}(n) f \rangle = \overline{\widehat{f}(n)} \|f\|^2$  ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 100** – La fonction  $\Delta$  est une forme primitive de  $\mathcal{S}_{12}$ .

*Démonstration.* Soit  $n \geq 0$  un entier,  $T_n \Delta \in \mathcal{S}_{12}$  et  $\mathcal{S}_{12} = \mathbb{C} \Delta$  d'où  $T_n \Delta = \widehat{\Delta}(n) \Delta$ .  $\square$

On peut alors démontrer la première des conjectures mentionnées page 11. Les propositions 100 et 83 montrent en effet que, pour tous entiers  $m$  et  $n$ , on a

$$\widehat{\Delta}(m) \widehat{\Delta}(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11/2} \widehat{\Delta}\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Enfin, on ne peut pas achever cette partie sans mentionner le résultat très difficile suivant de Deligne. C'est ce résultat qui permet de prouver la deuxième des conjectures mentionnées page 11.

**Théorème 101**– Soit  $f \in \mathcal{S}_k$  une forme primitive. Alors

$$|\widehat{f}(n)| \leq \sigma_0(n)n^{(k-1)/2}$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

Le corollaire suivant du corollaire 67 montre que le coefficient harmonique pour les formes primitives<sup>(g)</sup> se comporte asymptotiquement comme  $1/\#\mathbb{H}_k^*$ .

**Corollaire 102**– Le coefficient harmonique vérifie

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{f \in \mathbb{H}_k^*} \omega_k(f) = 1.$$

On introduit donc l'opérateur de moyenne harmonique. Si  $X: \mathbb{H}_k^* \rightarrow \mathbb{C}$ , la moyenne harmonique de  $\mathbb{C}$  est

$$\mathbb{E}_k^h(X) = \sum_{f \in \mathbb{H}_k^*} \omega_k(f)X(f).$$

En définissant pour tout entier  $n \geq 1$  la fonction coefficient de Fourier

$$\begin{aligned} \lambda(n) &: \mathbb{H}_k^* \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \lambda_f(n) \end{aligned}$$

le corollaire 67 montre qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour tout entiers  $m$  et  $n$  et tout entier pair on a

$$|\mathbb{E}_k^h(\lambda(m)\lambda(n)) - \delta(m=n)| \leq C \frac{(mn)^{1/4}}{k^{1/2}} \tau_3((m,n)) (\log k + \log(2mn)).$$

### 2.3.3) Intervalles sans valeurs propres

Le but de cette partie est de déterminer un majorant de la longueur minimum que doit avoir un intervalle pour contenir nécessairement une valeur propre de Hecke. Jusqu'à la fin de la partie  $p$  est un nombre premier fixé, dont toutes les constantes peuvent dépendre.

**Théorème 103**– Soit  $p$  un nombre premier. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $k_{p,\varepsilon} \geq 2$  et un réel  $C_{p,\varepsilon} > 0$  tels que pour tout entier pair  $k \geq k_{p,\varepsilon}$  et tout intervalle  $I$  de longueur de Sato-Tate

$$\mu_{\text{ST}}(I) \geq \frac{C_{p,\varepsilon}}{\log^{1-\varepsilon} k}$$

il existe une forme primitive  $f$  de poids  $k$  dont le coefficient  $\lambda_f(p)$  appartient à  $I$ .

<sup>g</sup>. Noter qu'on n'utilise pas que les formes primitives sont vecteurs propres des opérateurs de Hecke, mais simplement que leur ensemble forme une base orthogonale et que leurs premiers coefficients de Fourier valent 1.

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  on note  $\mathbb{1}_I$  sa fonction caractéristique :

$$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On exhibe une approximation lisse de cette fonction ayant des propriétés qui nous seront nécessaires pour la suite.

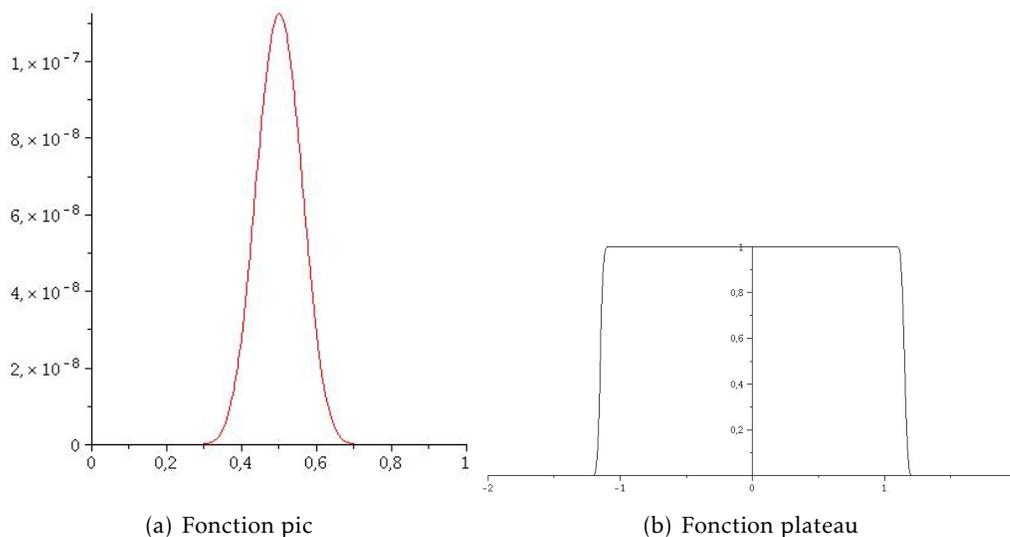


FIGURE 2.4 – Construction d'une approximation lisse de  $\mathbb{1}_{[-1,1]}$

**Lemme 104**– Pour tout intervalle  $[a, b]$  de  $[-2, 2]$  et tout  $\Delta \in [0, 2]$  il existe une fonction  $F_{\Delta, a, b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  sur  $[-2, 2]$  telle que

- 1)  $F_{\Delta, a, b}(x) = 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ ;
- 2)  $F_{\Delta, a, b}(x) = 0$  pour tout  $x \notin [a - \Delta, b + \Delta] \cap [-2, 2]$ ;
- 3) il existe une suite  $(\widehat{F}(n))_{n \geq 0}$  telle que pour tout  $\ell \geq 1$  et tout  $n \geq \ell$  on a

$$|\widehat{F}(n)| \leq C_\ell (\Delta n)^{-\ell} \quad (2.16)$$

où  $C_\ell > 0$  ne dépend ni de  $\Delta$  ni de  $n$  et telle que la série  $\sum_{n \geq 0} \widehat{F}(n) X_n$  converge normalement vers  $F_{\Delta, a, b}$  sur  $[-2, 2]$ .

*Démonstration.* On introduit la fonction  $C^\infty$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{t^2(t-1)^2}\right) & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

puis

$$\widetilde{F}_{\Delta,a,b} : t \mapsto G_{1-a/\Delta} \left( \frac{t}{\Delta} \right) G_{1+b/\Delta} \left( -\frac{t}{\Delta} \right) \quad (2.17)$$

avec

$$G_u(t) = \frac{\int_0^{u+t} g}{\int_{\mathbb{R}} g}.$$

Enfin,  $F_{\Delta,a,b} = \widetilde{F}_{\Delta,a,b} \mathbb{1}_{[-2,2]}$  vérifie les deux premières conditions. Posons

$$\begin{aligned} \widehat{F}(n) &= \int_{-2}^2 F_{\Delta,a,b} X_n \, d\mu_{\text{ST}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_{\Delta,a,b}(2 \cos \varphi) \sin((n+1)\varphi) \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_{\Delta,a,b}(2 \cos \varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_{\Delta,a,b}(2 \cos \varphi) \cos((n+2)\varphi) \, d\varphi. \end{aligned}$$

En effectuant  $\ell$  intégrations par parties on trouve la majoration (2.16) puis (2.17) donne  $\|F_{\Delta,a,b}^{(\ell)}\|_\infty \ll_\ell \Delta^{-\ell}$ . Puisque  $\|X_n\|_\infty = n+1$ , on tire de cette majoration la convergence normale de

$$\widetilde{F}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{F}(n) X_n$$

sur  $[-2, 2]$ . Par orthonormalité,

$$\widehat{F}(n) = \int_{-2}^2 \widetilde{F} X_n \, d\mu_{\text{ST}}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \text{H} : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto (F_{\Delta,a,b}(2 \cos \varphi) - \widetilde{F}(2 \cos \varphi)) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Cette fonction impaire a tous les coefficients de son développement de Fourier nuls donc elle est nulle<sup>(h)</sup>  $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème 103.

*Démonstration du théorème 103.* Puisque  $p$  est fixé on note  $\lambda = \lambda(p)$ . Soit  $I$  un intervalle de  $] -2, 2[$  ne contenant aucune valeur  $\lambda_f(p)$ . Soit  $\Delta$  suffisamment petit et  $J$  le sous-intervalle de  $I$  tel que si  $J = [a, b]$  alors  $[a - \Delta, b + \Delta] = I$ . Soit  $F$  la fonction obtenue par le lemme 104 à partir de  $J$  et  $\Delta$ . On a alors

$$|\mathbb{E}_k^h(F(\lambda))| = |\mathbb{E}_k^h(F(\lambda) \mathbb{1}_I(\lambda))| = 0. \quad (2.18)$$

*h.* On aurait aussi pu faire le raisonnement suivant : les polynômes  $X_n$  constituent une base de  $\mathbb{R}[X]$  et, pour tout  $n$ , l'intégrale  $\int_{-2}^2 (F_{\Delta,a,b} - \widetilde{F}) X_n \, d\mu_{\text{ST}}$  est nulle. Par densité de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $L^2([-2, 2], \mu_{\text{ST}})$ , on en déduit que l'intégrale  $\int_{-2}^2 (F_{\Delta,a,b} - \widetilde{F}) f \, d\mu_{\text{ST}}$  est nulle pour toute fonction  $f$  de  $L^2([-2, 2], \mu_{\text{ST}})$ . Ainsi  $F_{\Delta,a,b} - \widetilde{F}$  est presque partout nulle et donc nulle par continuité.

Par ailleurs,

$$\left| \mathbb{E}_k^h(F(\lambda)) - \int_{-2}^2 F d\mu_{ST} \right| \leq I + II + III$$

où

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}_k^h(1) \|F - F_M\|_\infty \\ II &= \int_{-2}^2 \|F_M - F\|_\infty d\mu_{ST} \\ III &= \left| \mathbb{E}_k^h(F_M(\lambda)) - \int_{-2}^2 F_M d\mu_{ST} \right| \end{aligned}$$

et  $F_M$  est la série partielle

$$F_M = \sum_{n=0}^M \widehat{F}(n) X_n.$$

Pour tout  $\ell \geq 2$ , les majorations (2.16) et  $\|X_n\|_\infty \leq n+1$  impliquent  $I + II \ll_\ell (\Delta M)^{-\ell} M^2$ .  
Ensuite

$$III \leq \sum_{n=0}^M |F(n)| \cdot \left| \mathbb{E}_k^h(X_n(\lambda)) - \int_{-2}^2 X_n d\mu_{ST} \right|.$$

Puisque  $X_n(\lambda) = \lambda(p^n)$  et  $\int_{-2}^2 X_n d\mu_{ST} = \delta(n=0)$ , la formule de trace de Petersson implique

$$\mathbb{E}_k^h(X_n(\lambda)) - \int_{-2}^2 X_n d\mu_{ST} \ll_\ell k^{-1/2} p^{n/4} (n + \log k)$$

et donc

$$III \ll_\ell k^{-1/2} \log(k) M \cdot p^{M/4}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}_k^h(F(\lambda)) - \int_{-2}^2 F d\mu_{ST} \ll_\ell (\Delta M)^{-\ell} M^2 + k^{-1/2} \log(k) M \cdot p^{M/4}.$$

Grâce à (2.18), on obtient

$$\int_{-2}^2 F d\mu_{ST} \ll_\ell (\Delta M)^{-\ell} M^2 + k^{-1/2} \log(k) M \cdot p^{M/4}.$$

Puisque  $\mathbb{1}_J \leq F$ , on a  $\mu_{ST}(J) \ll_\ell (\Delta M)^{-\ell} M^2 + k^{-1/2} \log(k) M \cdot p^{M/4}$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \mu_{ST}(I) &\leq \mu_{ST}(J) + \int_{a-\Delta}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx + \int_{b-\Delta}^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \\ &\leq \mu_{ST}(J) + \int_{a-\Delta}^a dx + \int_{b-\Delta}^b dx \\ &\leq \mu_{ST}(J) + 2\Delta \\ &\ll_\ell \Delta + (\Delta M)^{-\ell} M^2 + k^{-1/2} \log(k) M \cdot p^{M/4}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat énoncé en choisissant

$$M = \lfloor \log k \rfloor, \quad \Delta = \log^{-1+\varepsilon}(k) \quad \text{et} \quad \ell = \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

□

**Corollaire 105**– Soit  $p$  un nombre premier. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $k_{p,\varepsilon} \geq 2$  et un réel  $D_{p,\varepsilon} > 0$  tels que si  $k \geq k_{p,\varepsilon}$  est un entier pair, alors

$$\#\{\lambda_f(p) : f \in H_k^*\} \geq D_{p,\varepsilon} (\log k)^{1-\varepsilon}.$$

*Démonstration.* D'après le théorème 103, tout intervalle de longueur (relativement à  $\mu_{ST}$ ) au moins  $\ell_k = C_{p,\varepsilon} (\log k)^{-1+\varepsilon}$  contient une valeur propre  $\lambda_f(p)$ . On peut placer  $\lceil 1/\ell_k \rceil$  tels intervalles dans  $[-2, 2]$  qui peuvent avoir des bords communs. Pour éviter le cas où une valeur propre se trouverait au bord d'un intervalle (et donc dans deux intervalles) on ne considère qu'un intervalle sur deux de sorte que le cardinal cherché vaut au moins  $\lceil 1/\ell_k \rceil / 2$  et on conclue par le choix  $D_{p,\varepsilon} = 1/(2C_{p,\varepsilon})$ . □

*Remarque 106*– Une conjecture de Maeda prédit que les polynômes caractéristiques opérateurs de Hecke sont irréductibles sur  $\mathbb{Q}$ . Ce sont donc aussi les polynômes minimaux et les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont simples. En admettant cette conjecture, on a :

$$\#\{\lambda_f(p) : f \in H_k^*\} = \#H_k^*.$$

## 2.4

### Propriétés intégrales des coefficients de formes primitives

Nous étudions les propriétés d'intégralité des opérateurs de Hecke. On va montrer en détail que les coefficients de Fourier des formes de  $H_k^*$  sont des entiers algébriques totalement réels, c'est-à-dire des entiers algébriques dont tous les conjugués sont réels<sup>(i)</sup>.

**Lemme 107**– Soit  $n \geq 1$  un entier. Il existe une base de  $\mathcal{S}_k$  dans laquelle la matrice de  $T_n$  est à coefficients entiers.

*Démonstration.* Grâce à la proposition 90, les coefficients de Fourier de l'image d'une forme parabolique par un opérateur de Hecke sont dans le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les coefficients de Fourier de cette forme. Il suffit donc de prouver l'existence d'une base de l'espace  $\mathcal{S}_k$  à coefficients entiers. Une telle base est construite dans le lemme suivant. □

**Lemme 108**– Il existe une base  $f_1, \dots, f_d$  de  $\mathcal{S}_k$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et telle que, pour tous  $1 \leq i, j \leq d$  on a  $\widehat{f}_i(j) = \delta(i = j)$ .

i. Autrement dit, un entier algébrique totalement réel est une racine d'un polynôme unitaire, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et dont toutes les racines sont réelles.

*Démonstration.* On choisit  $a$  et  $b$  des entiers naturels tels que pour  $j = 1, \dots, d$ , la forme parabolique  $g_j = \Delta^j E_6^{2(d-j)+a} E_4^b$  soit de poids  $k$ . Ces formes sont à coefficients entiers et, si  $i \leq j$ , alors  $\widehat{g}_j(i) = \delta(i = j)$  puisque  $\Delta$  est parabolique de premier coefficient  $\widehat{\Delta}(1) = 1$  et  $\widehat{E}_4(0) = \widehat{E}_6(0) = 1$ . On construit  $f_d, f_{d-1}, \dots, f_1$  en posant  $f_d = g_d$  et

$$f_{d-i} = g_{d-i} - \sum_{j=0}^{i-1} \widehat{g}_{d-i}(d-j) f_{d-j} \quad (i = 1, \dots, d-1).$$

□

On note  $\mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$  l'ensemble des formes paraboliques de poids  $k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  à coefficients de Fourier entiers.

**Proposition 109**– L'ensemble  $\mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang la dimension de  $\mathcal{S}_k$  et stable par les opérateurs de Hecke.

*Démonstration.* On note  $d$  la dimension de  $\mathcal{S}_k$  et  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d}$  la base du lemme 108. Par construction de cette base, on a

$$\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z} f_i \subset \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$$

et il reste à montrer l'inclusion opposée. Soit donc  $f \in \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}$ . Grâce au lemme 108, il existe  $\{c_i\}_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$  tel que

$$f = \sum_{i=1}^d c_i f_i.$$

Soit  $j \in \{1, \dots, d\}$ , on va montrer que  $c_j \in \mathbb{Z}$ . On a

$$\widehat{f}(j) = \sum_{i=1}^d c_i \widehat{f}_i(j)$$

et, par construction des formes  $f_i$ , il en résulte  $\widehat{f}(j) = c_j$ . Ainsi,  $c_j \in \mathbb{Z}$  et

$$\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z} f_i = \mathcal{S}_k^{\mathbb{Z}}.$$

La stabilité par les opérateurs de Hecke résulte du lemme 107. □

Grâce au lemme 107, le polynôme caractéristique de  $T_n$  est à coefficients entiers et les valeurs propres sont des entiers algébriques. Elles sont réelles puisque les opérateurs de Hecke sont autoadjoints. Les racines conjuguées sont aussi réelles puisqu'elles sont aussi des valeurs propres des opérateurs de Hecke. Ces racines conjuguées sont en

fait valeurs propres de formes primitives, ce qu'on montre maintenant. Soit  $\sigma$  un automorphisme de  $\mathbb{C}$  (il préserve  $\mathbb{Q}$ ) et  $f \in H_k^*$ . On définit

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma[\widehat{f}(n)] e(nz).$$

Avec la base du lemme 108, on écrit

$$f = \sum_{i=1}^d t_i f_i.$$

Puisque  $f_i$  est à coefficients entiers on a

$$f^\sigma(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^d \sigma(t_i) \widehat{f}_i(n) \right] e(nz) = \sum_{i=1}^d \sigma(t_i) f_i \in \mathcal{S}_k.$$

D'autre part,  $T_n f^\sigma = \widehat{f}^\sigma(n) f^\sigma$  : en effet, soit  $m \geq 1$ , on a

$$\widehat{T_n f^\sigma}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \sigma \left[ \widehat{f} \left( \frac{mn}{d^2} \right) \right] = \sigma \left[ \widehat{T_n f}(m) \right] = \widehat{f}^\sigma(n) \widehat{f}^\sigma(m).$$

On en déduit que les conjugués par les automorphismes de  $\mathbb{C}$  des valeurs propres de Hecke sont coefficients de formes primitives donc réels.

On note  $\mathcal{T}_k$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  engendré par les opérateurs de Hecke. On va montrer que  $\mathcal{T}_k$  est isomorphe à l'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_k)$  des formes linéaires de  $\mathcal{S}_k$  et que  $\mathcal{S}_k$  est isomorphe à l'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{T}_k)$  des formes linéaires de  $\mathcal{T}_k$ .

**Lemme 110**– Les applications linéaires

$$\begin{array}{ll} \mathcal{T}_k & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}_k) \\ T & \mapsto (f \mapsto \widehat{T}f(1)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_k & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{T}_k) \\ f & \mapsto (T \mapsto \widehat{T}f(1)) \end{array}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

*Démonstration.* On note  $\varphi_1$  l'application linéaire de  $\mathcal{T}_k$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_k)$  et  $\varphi_2$  l'application linéaire de  $\mathcal{S}_k$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{T}_k)$ . Soit  $T \in \mathcal{T}_k$  tel que  $\varphi_1(T) = 0$ . Alors, pour toute  $f \in \mathcal{S}_k$ , on a  $\widehat{T}f(1) = 0$  et, en particulier, pour toute  $f \in \mathcal{S}_k$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\widehat{T_n f}(1) = 0$ . Par commutativité des opérateurs de Hecke, on en déduit  $\widehat{T_n(Tf)}(1) = 0$  puis  $\widehat{T}f(n) = 0$  (voir la proposition 90) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc  $Tf = 0$  pour toute  $f \in \mathcal{S}_k$  puis  $T = 0$  et  $\varphi_1$  est injective. Soit maintenant  $f \in \mathcal{S}_k$  telle que  $\varphi_2(f) = 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\widehat{T_n f}(1) = 0$ , i.e.  $\widehat{f}(n) = 0$  et donc  $f = 0$ . Ainsi  $\varphi_2$  est injective. L'injectivité de  $\varphi_1$  implique  $\dim \mathcal{T}_k \leq \dim \mathcal{S}_k$  et l'injectivité de  $\varphi_2$  implique  $\dim \mathcal{S}_k \leq \dim \mathcal{T}_k$ . On a donc  $\dim \mathcal{S}_k = \dim \mathcal{T}_k$  et les applications linéaires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont bijectives.  $\square$

**Corollaire 111**– Les espaces vectoriels  $\mathcal{T}_k$  et  $\mathcal{S}_k$  sont duaux.

*Remarque 112*– Le lemme 110 peut se résumer en l'énoncé suivant. L'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k \times \mathcal{S}_k &\rightarrow \mathbb{C} \\ (T, f) &\mapsto \widehat{Tf}(1) \end{aligned}$$

est un accouplement parfait (voir l'annexe A.6).

**Lemme 113**– Une base de  $\mathcal{T}_k$  est  $\{T_i\}_{1 \leq i \leq d}$  où  $d$  est la dimension de  $\mathcal{S}_k$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{T}_k$  est de dimension  $d$ , il suffit de montrer que la famille  $\{T_i\}_{1 \leq i \leq d}$  est libre. Soit  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq d}$  tel que

$$\sum_{i=1}^d t_i T_i = 0.$$

En notant  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d}$  la base construite au lemme 108, on a

$$\sum_{i=1}^d t_i \widehat{T_i f_j}(1) = 0$$

pour tout  $j \in [1, d]$ . Il en résulte

$$\sum_{i=1}^d t_i \widehat{f_j}(i) = 0$$

puis  $t_j = 0$  pour tout  $j$ . □

On note  $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$  et on appelle  $\mathbb{Z}$ -module de Hecke sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les opérateurs de Hecke.

**Lemme 114**– Le module  $\mathcal{T}_k^{\mathbb{Z}}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang la dimension de  $\mathcal{S}_k$  admettant  $\{T_i\}_{1 \leq i \leq \dim \mathcal{S}_k}$  comme base.

*Démonstration.* On note  $d$  la dimension de  $\mathcal{S}_k$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , il suffit de montrer que

$$T_n = \sum_{i=1}^d t_i T_i$$

avec  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{Z}^d$ . L'existence de  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$  est donnée par le lemme 113. Soit  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq d}$  la base construite au lemme 108, pour tout  $j \in [1, d]$ , on a

$$\widehat{T_n f_j}(1) = \sum_{i=1}^d t_i \widehat{f_j}(i) = t_j$$

puis, comme  $\widehat{T_n f_j}(1) = \widehat{f_j}(n) \in \mathbb{Z}$ , on a  $t_j \in \mathbb{Z}$ . □

## Chapitre 3

# Formes quasimodulaires sur le groupe modulaire

### 3.1 Définition

On note à partir de maintenant

$$D := \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dz}.$$

Si  $f \in \mathcal{M}_k$  vérifie  $Df = 0$  alors  $f$  est constante et donc  $k = 0$  ou  $f = 0$ . D'autre part, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z}$$

alors

$$Df(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z}.$$

Si  $f \in \mathcal{M}_k$ , alors  $Df$  vérifie

$$(cz + d)^{-(k+2)} Df\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = Df(z) + \frac{k}{2i\pi} f(z) \frac{c}{cz + d} \quad (3.1)$$

pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Si  $f$  n'est pas une fonction constante, la fonction  $Df$  ne vérifie pas la condition de modularité et n'est donc pas modulaire. Supposons en effet, par l'absurde, que  $Df$  est modulaire de poids  $\ell$  avec  $f$  non constante (soit  $k \neq 0$ ). En comparant (3.1) et la condition de modularité de poids  $\ell$ , on obtient

$$\left[ (cz + d)^\ell - (cz + d)^{k+2} \right] Df(z) = \frac{k}{2i\pi} c (cz + d)^{k+1} f(z).$$

Ayant fixé  $z \in \mathcal{H}$  et  $c = 1$ , on en déduit que le polynôme

$$\left[ (z + X)^\ell - (z + X)^{k+2} \right] Df(z) - \frac{k}{2i\pi} (z + X)^{k+1} f(z) \quad (3.2)$$

s'annulant sur l'ensemble infini des entiers est nul. Si  $\ell = k + 2$ , cela implique  $f = 0$ . Si  $\ell \neq k + 2$ , la considération du coefficient de  $X^{\max(\ell, k+2)}$  implique  $Df(z) = 0$  puis  $f(z) = 0$ . Le but de ce chapitre est d'agrandir l'espace des formes modulaires de façon à obtenir un espace stable par dérivation. Pour aider à choisir la bonne définition, on établit aisément par récurrence une formule donnant les les dérivées successives d'une forme modulaire.

**Proposition 115**– Soit  $f$  une forme modulaire de poids  $k$  et  $m \geq 0$  un entier. Pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  la  $m^{\text{e}}$  dérivée de  $f$  vérifie

$$(cz + d)^{-(k+2m)} D^m f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(k+m-1)!}{(k+m-j-1)!} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^j D^{m-j} f(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j.$$

**Définition 116**– Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Étant donnés des entiers  $k, s \geq 0$ , on dit que  $f$  est une fonction quasimodulaire de poids  $k$  et profondeur  $s$  (sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ) s'il existe des fonctions holomorphes  $f_0, \dots, f_s$  sur  $\mathcal{H}$  avec  $f_s$  non identiquement nulle, telles que

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \sum_{j=0}^s f_j(z) \left(\frac{c}{cz+d}\right)^j \quad (3.3)$$

pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ . Par convention, la fonction nulle est quasimodulaire de profondeur nulle pour tout poids.

On note  $\mathrm{FM}_k^s$  l'ensemble des fonctions quasimodulaires de poids  $k$  et profondeur  $s$  et  $\mathrm{FM}_k^{\leq s}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions quasimodulaires de poids  $k$ , profondeur inférieure ou égale à  $s$ . On note aussi

$$\mathrm{FM}_k^\infty := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{FM}_k^{\leq s}.$$

Avec les notations de la définition 116, on définit pour tout entier  $j$  l'opérateur  $Q_j$  en posant  $Q_j(f) := f_j$ .

On remarque que l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec

$$f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad (3.4)$$

définit une action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur les fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$ . De plus, pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on définit

$$X(A) : \mathcal{H} \rightarrow \frac{\mathbb{C}}{cz + d}$$

de sorte que (3.3) se réécrit

$$\left( f \middle| A \right)_k = \sum_{j=0}^s Q_j(f) X(A)^j. \quad (3.5)$$

Les applications  $Q_j$  sont bien définies grâce au résultat d'unicité suivant.

**Lemme 117**– *S'il existe des fonctions  $f_0, \dots, f_s$  telles que, pour toute matrice  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  et tout  $z \in \mathcal{H}$  on a*

$$\sum_{j=0}^s f_j(z) X(A)^j(z) = 0$$

alors  $f_j = 0$  pour tout  $j$ .

*Démonstration.* On évalue l'égalité en  $A = \begin{pmatrix} 1 & d-1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  et on obtient

$$\sum_{j=0}^s f_j(z) \left( \frac{1}{z+d} \right)^j = 0 \text{ puis } \sum_{j=0}^s f_j(z) (z+d)^{s-j} = 0$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$  et  $d \in \mathbb{Z}$ . Il en résulte que le polynôme

$$\sum_{j=0}^s f_j(z) (z+X)^{s-j}$$

s'annule une infinité de fois. Les coefficients de son développement de Taylor en  $-z$  sont donc nuls et les  $f_j$  sont nuls.  $\square$

*Remarque 118*– Noter que si  $f \in \mathcal{M}_k$  l'équation (3.1) se réécrit  $\left( Df \middle| A \right)_{k+2} = Df + \frac{k}{2i\pi} f X(A)$ . On retrouve rapidement cette égalité en remarquant qu'en dérivant (3.4), on a pour toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathcal{H}$  l'égalité

$$D \left( f \middle| A \right)_k = -\frac{k}{2i\pi} \left( f \middle| A \right)_k X(A) + \left( Df \middle| A \right)_{k+2}. \quad (3.6)$$

**Lemme 119**– *Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , alors*

$$\left( X(A) \middle| B \right)_2 = X(AB) - X(B).$$

*Démonstration.* Pour toute matrice  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on écrit  $M = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix}$ . Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On vérifie que que l'application  $j$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  dans l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  ne s'annulant pas et définie par

$$\forall A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \forall z \in \mathcal{H} \quad j(A)(z) = c_A z + d_A$$

est un *cocycle*, c'est-dire vérifie  $j(AB) = \begin{pmatrix} j(A)|B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot j(B)$ . On vérifie aussi que  $c_{AB}j(B) - c_Bj(AB) = c_A$ . On en déduit le résultat en divisant par  $j(AB)j(B) = j(B)^2 \begin{pmatrix} j(A)|B \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\square$

*Remarques 120-* i) Le choix de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans (3.3) montre que  $Q_0 = I$ . Autrement dit

$$f \in FM_k^\infty \implies Q_0(f) = f.$$

ii) De même, le choix de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  implique

$$f \in FM_k^\infty \implies f \text{ est périodique de période } 1.$$

iii) Soit  $f \in FM_k^\infty$ . On note  $\text{Prof}(f)$  sa profondeur et  $\text{Poids}(f)$  son poids.

iv) Si  $f \in FM_k^\infty$  et  $g \in FM_\ell^\infty$  ne sont pas la fonction nulle, on a  $\text{Prof}(fg) = \text{Prof}(f) + \text{Prof}(g)$ .

v) Soit  $f \in FM_k^\infty$ . On pose  $Q_j(f) = 0$  pour tous  $j < 0$  et  $j > \text{Prof}(f)$ . On vérifie aisément que pour tout  $n$ , l'application  $Q_n$  est linéaire et

$$Q_n(fg) = \sum_{j=0}^n Q_j(f)Q_{n-j}(g). \tag{3.7}$$

Le lemme technique suivant va être utile par la suite.

**Lemme 121**– *Considérons la matrice unipotente supérieure*

$$M(x) = \left( \begin{pmatrix} \beta - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} x^{\beta - \alpha} \right)_{\substack{1 \leq \alpha \leq s+1 \\ \alpha \leq \beta \leq s+1}}$$

alors

$$M(x + y) = M(x)M(y).$$

En particulier, la matrice  $M(x)$  est inversible d'inverse

$$M(x)^{-1} = M(-x).$$

*Démonstration.* Le coefficient d'indice  $(\alpha, \beta)$  du produit  $M(x)M(y)$  est

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^{s+1} \delta(\gamma \geq \alpha) \binom{\gamma - 1}{\alpha - 1} \delta(\beta \geq \gamma) \binom{\beta - 1}{\gamma - 1} x^{\gamma - \alpha} y^{\beta - \gamma} &= \delta(\beta \geq \alpha) \binom{\beta - 1}{\alpha - 1} \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta} \binom{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} x^{\gamma - \alpha} y^{\beta - \gamma} \\ &= \delta(\beta \geq \alpha) \binom{\beta - 1}{\alpha - 1} (x + y)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

$\square$

Ce lemme permet de montrer que les fonctions  $Q_n(f)$  sont elles-mêmes quasimodulaires.

**Proposition 122**– Soit  $f \in \text{FM}_k^{\leq s}$ . Pour tout  $m \in \{0, \dots, s\}$ , on a

$$\left( Q_m(f) \mid_{k-2m} A \right) = \sum_{v=0}^{s-m} \binom{m+v}{v} Q_{m+v}(f) X(A)^v$$

pour toute matrice  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Autrement dit,

$$Q_\ell \circ Q_m = \binom{\ell+m}{m} Q_{\ell+m}$$

pour tous  $\ell$  et  $m$ .

*Démonstration.* Puisque  $\left( f \mid_k AB \right) = \left( \left( f \mid_k A \right) \mid_k B \right)$ , on a

$$\left( f \mid_k AB \right) = \sum_{n=0}^s \left( Q_n(f) \mid_{k-2n} B \right) \left( X(A) \mid_2 B \right)^n.$$

Le lemme 119 implique alors

$$\left( f \mid_k AB \right) = \sum_{j=0}^s \left( \sum_{n=j}^s \binom{n}{j} (-X(B))^{n-j} \left( Q_n(f) \mid_{k-2n} B \right) \right) X(AB)^j.$$

En comparant avec le développement de  $\left( f \mid_k AB \right)$ , on en déduit

$$Q_j(f) = \sum_{n=j}^s \binom{n}{j} (-X(B))^{n-j} \left( Q_n(f) \mid_{k-2n} B \right)$$

pour tout  $j$ . Ces équations peuvent se réécrire en

$$M(-X(B)) \begin{pmatrix} \left( Q_0(f) \mid_k B \right) \\ \vdots \\ \left( Q_s(f) \mid_{k-2s} B \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix}$$

et en utilisant le lemme 117,

$$\begin{pmatrix} \left( Q_0(f) \mid_k B \right) \\ \vdots \\ \left( Q_s(f) \mid_{k-2s} B \right) \end{pmatrix} = M(X(B)) \begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\left( Q_n(f) \Big|_{k-2n} B \right) = \sum_{j=n}^s \binom{j}{n} Q_j(f) X(B)^{j-n}$$

pour tout  $n$ . Le résultat en découle.  $\square$

*Remarque 123* - On définit une action sur les vecteurs colonnes de fonctions de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} \Big|_k \gamma = \begin{pmatrix} \left( f_0 \Big|_k \gamma \right) \\ \vdots \\ \left( f_n \Big|_{k-2n} \gamma \right) \\ \vdots \\ \left( f_s \Big|_{k-2s} \gamma \right) \end{pmatrix}$$

pour tout  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On a montré que si  $f$  est quasimodulaire de poids  $k$  et profondeur  $s$  alors

$$\begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_n(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix} \Big|_k \gamma = M(X(\gamma)) \begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_n(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix}.$$

On donne une seconde preuve de l'importante proposition 122.

*Démonstration alternative de la proposition 122.* Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On a

$$\left( \left( f \Big|_k B \right) \Big|_k A^{-1} \right) = \sum_{n=0}^s \left( Q_n(f) X(B)^n \Big|_k A^{-1} \right) \quad (3.8)$$

$$= \sum_{n=0}^s \left( Q_n(f) \Big|_{k-2n} A^{-1} \right) \left( X(B) \Big|_2 A^{-1} \right)^n \quad (3.9)$$

$$= \sum_{n=0}^s \left( Q_n(f) \Big|_{k-2n} A^{-1} \right) \left( X(BA^{-1}) - X(A^{-1}) \right)^n \quad (3.10)$$

d'après le lemme 119

$$= \sum_{m=0}^s \left[ \sum_{n=m}^s (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \left( Q_n(f) \Big|_{k-2n} A^{-1} \right) X(A^{-1})^{n-m} \right] X(BA^{-1})^m \quad (3.11)$$

par développement du terme  $\left( X(BA^{-1}) - X(A^{-1}) \right)^n$  puis permutation des sommes. D'autre part,

$$\left( \left( f \Big|_k B \right) \Big|_k A^{-1} \right) = \left( f \Big|_k BA^{-1} \right) = \sum_{m=0}^s Q_m(f) X(BA^{-1})^m$$

donc

$$Q_m(f) = \sum_{v=0}^{s-m} (-1)^v \binom{v+m}{m} \left( Q_{v+m}(f) \Big|_{k-2v-2m} A^{-1} \right) X(A^{-1})^v.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left( Q_m(f) \Big|_{k-2m} A \right) &= \sum_{v=0}^{s-m} (-1)^v \binom{v+m}{m} \left( \left( Q_{v+m}(f) \Big|_{k-2v-2m} A^{-1} \right) \Big|_{k-2v-2m} A \right) \left( X(A^{-1}) \Big|_2 A \right)^v \\ &= \sum_{v=0}^{s-m} \binom{v+m}{m} Q_{v+m}(f) X(A)^v \end{aligned}$$

car, le lemme 119 conduit à  $\left( X(A^{-1}) \Big|_2 A \right) = X(I) - X(A) = -X(A)$ . □

**Corollaire 124**— Pour tout entier  $r \geq 1$ , on a

$$Q_r = \frac{1}{r!} \underbrace{Q_1 \circ \cdots \circ Q_1}_{r \text{ iterations}}.$$

**Corollaire 125**— Pour tout  $m \leq s$ , on a l'inclusion

$$Q_m \left( \text{FM}_k^s \right) \subset \text{FM}_{k-2m}^{s-m}.$$

Il résulte du corollaire 125 que si  $f \in \text{FM}_k^s$  alors  $Q_s(f)$  vérifie l'équation de modularité de poids  $k - 2s$  : pour toute matrice  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  on a

$$\left( Q_s(f) \Big|_{k-2s} A \right) = Q_s. \quad (3.12)$$

Nous voudrions ajouter une condition à notre définition des fonctions quasimodulaires pour assurer que cette fonction  $Q_s(f)$  soit modulaire tout en préservant la structure d'espace vectoriel. Puisque tous les coefficients  $Q_j(f)$  d'une fonction quasimodulaire sont des fonctions quasimodulaires, ils sont périodiques de période 1 et admettent donc un développement de Fourier. On introduit alors la définition suivante.

**Définition 126**— Une fonction quasimodulaire  $f$  de poids  $k$  et profondeur  $s$  sur  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  est une forme quasimodulaire si les développements de Fourier de toutes les fonctions coefficients de sa transformation quasimodulaire n'ont pas de terme d'ordre strictement négatif :

$$Q_j(f)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{Q_j(f)}(n) e^{2i\pi n z}$$

pour tout  $j \in \{0, \dots, s\}$ .

On note  $\mathcal{M}_k^s$  l'ensemble des formes quasimodulaires de poids  $k$  et profondeur  $s$  et  $\mathcal{M}_k^{\leq s}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des formes quasimodulaires de poids  $k$ , profondeur inférieure ou égale à  $s$  sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On note aussi

$$\mathcal{M}_k^\infty := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k^{\leq s} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{2\mathbb{N}}^\infty := \bigcup_{k \in 2\mathbb{N}} \mathcal{M}_k^\infty.$$

On a une structure graduée grâce au bon comportement du produit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k^{\leq s} \times \mathcal{M}_\ell^{\leq t} &\rightarrow \mathcal{M}_{k+\ell}^{\leq s+t} \\ (f, g) &\mapsto fg. \end{aligned}$$

*Remarques 127-* i) Une forme quasimodulaire de poids  $k$  et profondeur nulle est une forme modulaire de poids  $k$ .

ii) Puisque les formes modulaires non constantes sont de poids strictement positif, si  $f$  est une forme quasimodulaire alors

$$\mathrm{Prof}(f) \leq \frac{\mathrm{Poids}(f)}{2}.$$

D'autre part  $\mathrm{Poids}(f)$  est pair.

**Théorème 128**— La somme sur le poids  $k$  des espaces  $\mathcal{M}_k^\infty$  est directe.

*Démonstration.* Soit  $f_1, \dots, f_r$  des formes quasimodulaires telles qu'aucune n'est identiquement nulle et leur somme est nulle. Quitte à les réordonner et à sommer celles de même poids, on considère  $k_1 < \dots < k_r$  la suite de leurs poids respectifs. On note  $s$  le maximum de leurs profondeurs. On fixe  $z \in \mathcal{H}$ . Pour tout entier  $d$ , on a  $\begin{pmatrix} 1 & d-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . La relation de quasimodularité implique que le polynôme

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^s Q_j(f_i)(z)(z+X)^{k_i+s-j}$$

s'annule en  $d$  et donc une infinité de fois. Son terme de plus haut degré,  $Q_0(f_r)(z) = f_r(z)$ , est donc nul et ce pour tout choix de  $z \in \mathcal{H}$ . L'hypothèse de départ est contredite.  $\square$

On montre dans le théorème suivant, et c'est l'un des intérêts des formes quasimodulaires, que l'anneau gradué des formes quasimodulaires est stable par la dérivation.

**Théorème 129**— Soit  $f \in \mathcal{M}_k^s$  non constante, alors  $Df \in \mathcal{M}_{k+2}^{s+1}$ . Plus précisément,

$$Q_0(Df) = Df,$$

$$Q_n(Df) = D(Q_n f) + \frac{k-n+1}{2i\pi} Q_{n-1}(f)$$

si  $1 \leq n \leq s$  et

$$Q_{s+1}(Df) = \frac{k-s}{2i\pi} Q_s(f).$$

*Démonstration.* Puisque

$$DX(A) = -\frac{1}{2i\pi} X(A)^2$$

on a, par dérivation de (3.3), l'égalité

$$D\left(f \Big|_k A\right) = \sum_{j=0}^s D(Q_j(f)) X(A)^j - \frac{j}{2i\pi} Q_j(f) X(A)^{j+1}. \quad (3.13)$$

La comparaison de (3.13) et (3.6) et l'utilisation de (3.5) conduisent à

$$\left(Df \Big|_{k+2} A\right) = \sum_{j=0}^s D(Q_j(f)) X(A)^j - \frac{j}{2i\pi} Q_j(f) X(A)^{j+1} + \frac{k}{2i\pi} Q_j(f) X(A)^{j+1}. \quad (3.14)$$

Le quasimodularité de  $Df$  ainsi que les valeurs de  $Q_n(Df)$  découlent de (3.14). Les développements de Fourier des  $Q_n(Df)$  n'ont que des coefficients d'indice positif puisque c'est le cas des coefficients  $Q_n(f)$ .  $\square$

*Remarque 130*– Soit  $n \in \{0, \dots, s+1\}$ . Le théorème 129 est équivalent à

$$[Q_n, D] = \frac{k-n+1}{2i\pi} Q_{n-1}$$

où on a noté  $[ , ]$  le commutateur.

Soit  $f$  une forme modulaire de poids  $k$ . En divisant l'équation (3.1) par  $\left(f \Big|_k A\right) = f$ , on a

$$(cz+d)^{-2} \frac{Df}{f} \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{Df}{f}(z) + \frac{k}{2i\pi} \frac{c}{cz+d}. \quad (3.15)$$

Pour garantir l'holomorphie sur  $\mathcal{H}$  de  $Df/f$ , il est suffisant que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{H}$ . Si on veut construire une forme quasimodulaire de poids 2, il suffit donc de prendre une forme modulaire sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  ne s'annulant pas sur  $\mathcal{H}$ . Une telle forme s'annulera nécessairement à la pointe infinie (d'après le théorème 35) mais au même ordre que sa dérivée comme on le voit sur le développement de Fourier. On choisit alors pour  $f$  la fonction  $\Delta$ .

**Proposition 131**– La fonction  $E_2$  définie par

$$E_2 := \frac{D\Delta}{\Delta} \quad (3.16)$$

est une forme quasimodulaire de poids 2 et profondeur 1. On a

$$Q_1(E_2) = \frac{6}{i\pi}.$$

La notation est justifiée par la proposition suivante que l'on comparera à l'équation (2.8).

**Proposition 132**– *Le développement de Fourier de  $E_2$  est donné par*

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e^{2i\pi n z}.$$

Il existe différentes preuves de ce développement. On en donne une utilisant l'expression en produit de  $\Delta$ . Une autre sera donnée en annexe B.15. Pour simplifier l'écriture, on définit la fonction

$$\begin{aligned} e &: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{2i\pi z}. \end{aligned}$$

Cette fonction est 1-périodique et vérifie  $De = e$ .

**Proposition 133**– *Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , on a*

$$\Delta(z) = e(z) \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e(nz))^{24}.$$

Noter que la convergence du produit résulte de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |e(nz)| = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n \operatorname{Im} z}$$

(voir l'annexe B.10). Soit

$$\eta(z) = e\left(\frac{z}{24}\right) \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e(nz)).$$

Pour démontrer la proposition 133 on commence par démontrer le lemme suivant <sup>(a)</sup>.

**Lemme 134**– *La fonction  $\eta$  vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \eta(z).$$

*Démonstration.* On suit la preuve donnée par Siegel dans [38]. En développant le logarithme comme indiqué dans la proposition 293, on calcule :

$$\begin{aligned} e\left(-\frac{z}{24}\right) \eta(z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \exp \log(1 - e(nz)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e(knz)}{k}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{e(-kz) - 1}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>a</sup>. Le logarithme que nous considérons est la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par  $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$  avec  $\arg(z) \in ]-\pi, \pi]$ . Cette fonction est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et coïncide avec le logarithme népérien sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . En particulier,  $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}$ . Pour les détails, se reporter à l'annexe B.3

l'interversion étant justifiée par la convergence de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{e(knz)}{k} \right|.$$

L'égalité du lemme équivaut à

$$\frac{e\left(\frac{1}{24z}\right)\eta\left(-\frac{1}{z}\right)}{e\left(-\frac{z}{24}\right)\eta(z)} = \sqrt{\frac{z}{i}} e\left(\frac{z+1/z}{24}\right).$$

Par (3.17), elle est donc conséquence de l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{e(-kz)-1} - \frac{1}{e(k/z)-1} \right) = i \frac{\pi}{12} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \log(-iz). \quad (3.18)$$

Or,

$$\cotan(\pi kz) = i + \frac{2i}{e(kz)-1}$$

l'égalité (3.18) équivaut donc à l'égalité

$$\frac{1}{2} \log(-iz) = -i \frac{\pi}{12} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \cotan(\pi kz) + \cotan\left(\frac{\pi k}{z}\right) \right).$$

Soit  $z \in \mathcal{H}$ . On introduit

$$u \mapsto f_z(u) = \cotan(u) \cotan\left(\frac{u}{z}\right).$$

Pour tout entier  $n$ , on pose  $v_n = (n + 1/2)\pi$  puis

$$u \mapsto g_{n,z}(u) = \frac{1}{u} f_z(v_n u).$$

Cette fonction  $g_{n,z}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Elle a un pôle d'ordre 3 en 0 et des pôles simples en chacun des points  $u = \pi k/v_n$  et  $u = \pi kz/v_n$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ . En  $u = \pi k/v_n$ , le résidu est :

$$\operatorname{Res}_{\pi k/v_n}(g_{n,z}) = \frac{1}{\pi k} \cotan\left(\frac{\pi k}{z}\right).$$

En  $u = \pi kz/v_n$ , le résidu est :

$$\operatorname{Res}_{\pi kz/v_n}(g_{n,z}) = \frac{1}{\pi k} \cotan(\pi kz).$$

En écrivant le développement limité de  $g_{n,z}$  au voisinage de 0 on obtient

$$\operatorname{Res}_0(g_{n,z}) = -\frac{1}{3}(z + z^{-1}).$$

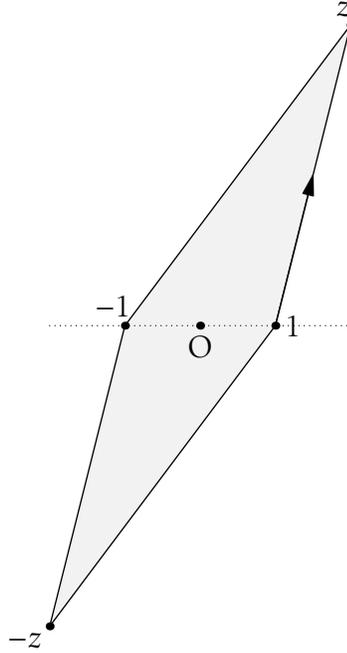


FIGURE 3.1 – Le contour C et le domaine D

Notons alors C le contour composé des segments reliant dans cet ordre les quatre points  $1, z, -z$  et  $1$ , et notons D l'intérieur de ce contour (voir la figure 3.1).

On a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C g_{n,z}(u) du = \sum_{\rho \in D} \operatorname{Res}_{\rho}(g_{n,z}).$$

Or  $\pi k/v_n \in D$  si et seulement si  $k \in \{-n, \dots, n\}$  et  $\pi kz/v_n \in D$  si et seulement si  $k \in \{-n, \dots, n\}$ . On trouve donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C g_{n,z}(u) du = -\frac{1}{3}(z + z^{-1}) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \cotan(\pi kz) + \cotan\left(\frac{\pi k}{z}\right) \right).$$

Ainsi,

$$\int_C f_z(v_n u) \frac{du}{8u} = -\frac{i\pi}{12}(z + z^{-1}) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \cotan(\pi kz) + \cotan\left(\frac{\pi k}{z}\right) \right).$$

On fait tendre  $n$  vers l'infini. On a

$$\begin{aligned} \cotan(v_n u) &= i + \frac{2i}{e^{-2v_n \operatorname{Im} u} e^{\left(\frac{v_n}{\pi} \operatorname{Re} u\right)} - 1} \\ &= i + \frac{2ie\left(-\frac{v_n}{\pi} \operatorname{Re} u\right)}{e^{-2v_n \operatorname{Im}(u)} - e^{\left(-\frac{v_n}{\pi} \operatorname{Re} u\right)}}. \end{aligned}$$

Or  $v_n$  tend vers  $+\infty$  et

i) sur les segments ouverts reliant 1 à  $z$  et  $z$  à  $-1$ , on a  $\text{Im } u > 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2v_n \text{Im } u} = 0 \text{ puis } \lim_{n \rightarrow \infty} \cotan(v_n u) = -i.$$

ii) sur les segments ouverts reliant  $-1$  à  $-z$  et  $-z$  à 1, on a  $\text{Im } u < 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2v_n \text{Im } u} = +\infty \text{ puis } \lim_{n \rightarrow \infty} \cotan(v_n u) = i.$$

De même

i) pour  $u$  sur  $]z, -1[$  et  $] -1, -z[$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{v_n u}{z}\right) = -i;$$

ii) pour  $u$  sur  $] -z, 1[$  et  $]1, z[$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cotan\left(\frac{v_n u}{z}\right) = i.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_z(v_n u) \frac{du}{8u} = \int_{\mathcal{C}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_z(v_n u) \frac{du}{8u} = \left[ \int_1^z - \int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z} - \int_{-z}^1 \right] \left( \frac{du}{8u} \right).$$

Or,

$$\left[ - \int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z} \right] \frac{du}{u} = \left[ - \int_{-z}^1 + \int_1^z \right] \frac{du}{u}$$

donc

$$\left[ \int_1^z - \int_z^{-1} + \int_{-1}^{-z} - \int_{-z}^1 \right] \left( \frac{du}{8u} \right) = \left[ \int_1^{-z} + \int_1^z \right] \left( \frac{du}{4u} \right).$$

On a

$$\left[ \int_1^{-z} + \int_1^z \right] \left( \frac{du}{4u} \right) = \frac{1}{4} (\log(z) + \log(-z))$$

(voir l'équation (B.1)). Or  $z \in \mathcal{H}$  donc  $\arg(z) > 0$  puis  $\arg(-z) = \arg(z) - \pi$ . Ainsi

$$\log(z) + \log(-z) = 2 \left( \log|z| + i \arg z - i \frac{\pi}{2} \right) = 2 (\log z + \log(-i)).$$

Puisque  $\arg z + \arg(-i) \in [-\pi/2, \pi/2]$ , le lemme 289 implique

$$\log(z) + \log(-z) = 2 \log\left(\frac{z}{i}\right).$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{z}{i}\right) = -\frac{i\pi}{12} (z + z^{-1}) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \cotan(\pi k z) + \cotan\left(\frac{\pi k}{z}\right) \right)$$

ce qui démontre le lemme. □

*Démonstration de la proposition 133.* Grâce au lemme 134, la fonction  $\eta^{24}$  appartient à l'espace des formes paraboliques de poids 12 engendré par  $\Delta$ . Donc  $\eta^{24}$  et  $\Delta$  sont proportionnelles. Elles sont égales en comparant les premiers coefficients de Fourier.  $\square$

*Démonstration de la proposition 132.* En prenant  $u_n(z) = (1 - e(nz))^{24} - 1$  dans la proposition 314, la proposition 133 implique

$$\frac{D\Delta}{\Delta}(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne(nz)}{1 - e(nz)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{\ell=1}^{+\infty} e(\ell nz)$$

et on obtient le développement de  $E_2$  en permutant la somme en  $n$  et la somme en  $\ell$ .  $\square$

*Remarque 135-* Considérons la fonction

$$f = \frac{E_4^3}{\Delta}(E_6 - E_4E_2).$$

C'est une fonction quasimodulaire de poids 6 et profondeur 1 et son développement de Fourier est

$$-\frac{1}{720}f(z) = 1 + 762e^{2i\pi z} + 210360e^{4i\pi z} + 25100460e^{6i\pi z} + 1267943784e^{8i\pi z} + O(e^{10i\pi z}).$$

Cependant ce n'est pas une forme quasimodulaire puisque

$$Q_1(f) = -\frac{6}{i\pi} \frac{E_4^4}{\Delta} = -\frac{6}{i\pi} \left( \frac{1}{e^{2i\pi z}} + 984 + O(e^{2i\pi z}) \right).$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des formes modulaires, il existe des formes quasimodulaires dont le développement de Fourier a un terme constant nul et qui ne se factorisent pas par  $\Delta$ .

## 3.2 Théorèmes de structure

**Théorème 136**– Soit  $f \in \mathcal{M}_k^s$ . Il existe des formes modulaires  $F_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$  telles que

$$f = \sum_{i=0}^s F_i E_2^i.$$

Plus précisément,

$$\mathcal{M}_k^{\leq s} = \bigoplus_{i=0}^s \mathcal{M}_{k-2i} E_2^i.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord

$$\mathcal{M}_k^{\leq s} = \sum_{i=0}^s \mathcal{M}_{k-2i} E_2^i.$$

Pour les formes de profondeur nulle (donc les formes modulaires), le résultat est vrai. On le suppose vrai pour les formes de profondeurs inférieures ou égales à  $s-1$  et on considère  $f \in \mathcal{M}_k^s$ . On se ramène au cas des profondeurs inférieures ou égales à  $s-1$  en remarquant que

$$f - \left(\frac{i\pi}{6}\right)^s Q_s(f) E_2^s$$

est de profondeur au plus  $s-1$ .

On montre ensuite que la somme est directe. Soit  $f_0, \dots, f_s$  des formes modulaires telles que, pour tout  $i$ , le poids de  $f_i$  est  $k-2i$ . On suppose  $f_s \neq 0$  et on pose

$$F = \sum_{i=0}^s f_i E_2^i.$$

Par (3.7), on a

$$Q_s(F) = Q_s(f_s E_2^s) = f_s Q_s(E_2^s) = \left(\frac{6}{i\pi}\right)^s f_s E_2^s.$$

On en déduit  $Q_s(F) \neq 0$  et donc  $F \neq 0$ . □

*Remarque 137* - Reconsidérons la fonction

$$f = \frac{E_4^3}{\Delta} (E_6 - E_4 E_2)$$

étudiée page 77. Elle n'est pas de la forme  $F_1 + F_2 E_2$  avec deux formes modulaires  $F_1, F_2$ . Si c'était le cas, la considération de la profondeur permettrait de déduire de

$$\frac{E_4^3}{\Delta} E_6 - F_1 = \left(\frac{E_4^4}{\Delta} + F_2\right) E_2$$

que

$$F_1 = \frac{E_4^3}{\Delta} E_6 \quad \text{et} \quad F_2 = -\frac{E_4^4}{\Delta}$$

ce qui est incompatible avec la modularité de  $F_1$  et  $F_2$ .

*Remarque 138* - La relation de transformation de  $E_2$  implique, qu'avec les notations du théorème 136, on a

$$Q_j(f) = \left(\frac{6}{i\pi}\right)^j \sum_{\ell=j}^s \binom{\ell}{j} F_\ell E_2^{\ell-j}.$$

pour tout  $j \in \{0, \dots, s\}$ .

On montre ensuite un second théorème de structure faisant intervenir les dérivées de formes modulaires.

**Théorème 139**– Soit  $f \in \mathcal{M}_k^s$ . Il existe un réel  $\alpha$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, \min(s, k/2 - 1)\}$ , il existe des formes modulaires  $F_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$  tels que

$$f = \begin{cases} \sum_{i=0}^s D^i F_i & \text{si } s < \frac{k}{2} \\ \sum_{i=0}^{k/2-2} D^i F_i + \alpha D^{k/2-1} E_2 & \text{si } s = \frac{k}{2}. \end{cases}$$

Plus précisément,

$$\mathcal{M}_k^{\leq k/2} = \bigoplus_{i=0}^{k/2-2} D^i \mathcal{M}_{k-2i} \oplus \mathbb{C} D^{k/2-1} E_2.$$

*Démonstration.* On procède par descente sur la profondeur  $s$  grâce à la remarque suivante. On a besoin de  $g \in \mathcal{M}_{k-2s}$  tel que  $Q_s(D^s g) = Q_s(f)$ . On aura ainsi  $f - D^s g \in \mathcal{M}_k^{\leq s-1}$ . Soit donc  $g \in \mathcal{M}_{k-2s}$ , par réitération du théorème 129, on a

$$Q_s(D^s g) = \frac{s!}{(2i\pi)^s} \binom{k-s-1}{s} g. \quad (3.19)$$

Si  $\binom{k-s-1}{s} \neq 0$ , ce qui est le cas dès que  $s \neq \frac{k}{2}$ , on choisit

$$g := \frac{(2i\pi)^s}{s!} \frac{1}{\binom{k-s-1}{s}} Q_s(f)$$

qui appartient à  $\mathcal{M}_{k-2s}$  grâce au corollaire 125. Si  $s = \frac{k}{2}$ , ce procédé ne peut pas être efficace puisque le coefficient binomial est nul (cela correspond au fait que  $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ ). En revanche, par réitération du théorème 129, on a

$$Q_{k/2}(D^{k/2-1} E_2) = \frac{(k/2-1)!}{(2i\pi)^{k/2-1}} Q_1(E_2) = \frac{(k/2-1)!}{(2i\pi)^{k/2-1}} \frac{6}{i\pi}. \quad (3.20)$$

Puisque  $Q_{k/2}(f) \in \mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ , on peut poser

$$\alpha := \frac{i\pi}{6} \frac{(2i\pi)^{k/2-1}}{(k/2-1)!} Q_{k/2}(f) \in \mathbb{C}$$

pour obtenir  $f - \alpha D^{k/2-1} E_2 \in \mathcal{M}_k^{\leq k/2-1}$ . En utilisant  $\mathcal{M}_2 = \{0\}$ , on a donc

$$\mathcal{M}_k^{\leq k/2} = \sum_{i=0}^{k/2-2} D^i \mathcal{M}_{k-2i} + \mathbb{C} D^{k/2-1} E_2.$$

Montrons maintenant que la somme est directe. Soit  $f_0, \dots, f_s$  des formes modulaires telles que, pour tout  $i$ , le poids de  $f_i$  est  $k - 2i$ . On suppose  $s < k/2$  et  $f_s \neq 0$ . Soit

$$F = \sum_{i=0}^s D^i f_i.$$

Par (3.19), on a  $Q_s(D^s f_s) \neq 0$  donc  $Q_s(F) \neq 0$  et  $F \neq 0$ . Considérons ensuite  $f_0, \dots, f_{k/2-2}$  des formes modulaires telles que, pour tout  $i$ , le poids de  $f_i$  est  $k - 2i$  et  $\alpha \neq 0$ . Soit

$$F = \sum_{i=0}^{k/2-2} D^i f_i + \alpha D^{k/2-1} E_2.$$

Par (3.20), on a  $Q_{k/2}(F) = \alpha Q_{k/2}(D^{k/2-1} E_2) \neq 0$  donc  $F \neq 0$ . □

*Remarque 140* – Peut-on se passer de  $E_2$ ? On voudrait une forme modulaire  $f \in \mathcal{M}_\ell$  et un entier  $r$  tels que  $D^r f \in \mathcal{M}_k^{k/2}$ . Cela implique  $k = \ell + 2r$  et  $k/2 = \ell + r$  d'où  $\ell = 0$ . Mais  $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$  et  $D\mathcal{M}_0 = \{0\}$ . La fonction  $E_2$  agit donc comme une « une dérivée non nulle d'une forme modulaire de poids 0 ».

Ce théorème de structure permet de linéariser des produit de convolution (additive) de fonctions sommes de diviseurs faisant intervenir  $\sigma_1$ . On a par exemple,  $E_2^2 \in \mathcal{M}_4^{\leq 2} = \mathcal{M}_4 \oplus \mathbb{C}DE(2) = \mathbb{C}E_4 \oplus \mathbb{C}DE(2)$ . En identifiant les coefficients de Fourier d'indice 0 et 1, on obtient  $E_2^2 = E_4 + 12DE(2)$ . L'égalisation des coefficients de Fourier conduit alors à l'égalité

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sigma_1(a)\sigma_1(n-a) = \frac{1}{12} (\sigma_1(n) + 5\sigma_3(n) - 6n\sigma_1(n))$$

pour tout entier  $n \geq 1$ . De la même façon, en utilisant  $E_4 DE_2 \in \mathcal{M}_8^{\leq 3} = \mathcal{M}_8 \oplus D\mathcal{M}_6 \oplus D^2\mathcal{M}_4$ , on obtient

$$\sum_{a=1}^{n-1} a\sigma_1(a)\sigma_3(n-a) = -\frac{n}{40} \left( n\sigma_3(n) - \frac{7}{6}\sigma_5(n) + \frac{1}{6}\sigma_1(n) \right)$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

### 3.3 Opérateurs de Hecke quasimodulaires

Dans ce paragraphe, on note la dépendance en  $k$  dans les opérateurs de Hecke. On commence par montrer que les opérateurs de Hecke et la dérivation « commutent ».

**Proposition 141** – Pour toute fonction  $f \in \text{Hol}_\infty(\mathcal{H}/\mathbb{Z})$ , on a

$$T_{k+2,n}(Df) = nD(T_{k,n}f).$$

*Démonstration.* On applique la proposition 90 et on utilise que la dérivation est une multiplication de chaque coefficient de Fourier par son ordre pour obtenir

$$\widehat{D(\mathbb{T}_{k,n})}(m) = m \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \widehat{f\left(\frac{mn}{d^2}\right)}.$$

Ensuite, on dérive  $f$  et on applique la proposition 90 à la fonction obtenue. On obtient

$$\widehat{\mathbb{T}_{k+2,n}(Df)}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k+1} \widehat{Df\left(\frac{mn}{d^2}\right)} = \sum_{d|(m,n)} d^{k+1} \frac{mn}{d^2} \widehat{f\left(\frac{mn}{d^2}\right)} = n \widehat{D(\mathbb{T}_{k,n}f)}(m).$$

□

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 142**— *L'image par l'opérateur de Hecke  $\mathbb{T}_{k,n}$  de toute forme quasimodulaire de poids  $k$  et profondeur  $s$  est une forme quasimodulaire de poids  $k$  et profondeur  $s$ .*

*Démonstration.* On pose  $G_2 = -E_2/24$ . Soit  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  de profondeur  $s$ . On note  $s' = \min(s, k/2 - 2)$ . D'après le théorème 139, il existe des formes modulaires  $f_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$ , des complexes  $c_i$  et un complexe  $c_{k/2}$  non nul si et seulement si  $s = k/2$  tels que

$$f = \sum_{i=0}^{s'} c_i D^i f_i + c_{k/2} D^{k/2-1} G_2.$$

Grâce à la proposition 141, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{k,n}f &= \sum_{i=0}^{s'} c_i \mathbb{T}_{k,n}(D^i f_i) + c_{k/2} \mathbb{T}_{k,n}(D^{k/2-1} G_2) \\ &= \sum_{i=0}^{s'} n^i c_i D^i (\mathbb{T}_{k-2i,n} f_i) + n^{k/2-1} c_{k/2} D^{k/2-1} (\mathbb{T}_{2,n} G_2). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{T}_{k-2i,n} f_i \in \mathcal{M}_{k-2i}$  et  $\mathbb{T}_{2,n} G_2 = \sigma_1(n) G_2$  (voir l'exemple page 47), on a  $\mathbb{T}_{k,n}f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$ . D'autre part,  $\mathbb{T}_{k,n}f$  est de profondeur  $s$  si et seulement si  $c_s \neq 0$  et donc si et seulement si  $f$  est de profondeur  $s$ . □

On peut alors étendre la notion de formes modulaires primitives.

**Proposition 143**— *Soit  $k \geq 2$ . Il existe une base de  $\mathcal{M}_k^{\leq \infty}$  formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke. Plus précisément, on définit*

$$\mathbb{H}_k^{\leq \infty} = \bigcup_{i=0}^{k/2-2} D^i \mathbb{H}_{k-2i}^*$$

et

$$N_k^{\leq \infty} = \left\{ D^i G_{k-2i} : 0 \leq i \leq \frac{k}{2} - 2 \right\} \cup \{ D^{k/2-1} G_2 \}.$$

Alors l'ensemble  $H_k^{\leq \infty} \cup N_k^{\leq \infty}$  est formé de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke et constitue une base pour  $M_k^{\leq \infty}$ .

*Démonstration.* On a

$$\mathcal{M}_{k-2i} = \mathbb{C}G_{k-2} \oplus \text{Vect}(H_{k-2i}^*)$$

de sorte que l'injectivité de  $D$  implique

$$D^i \mathcal{M}_{k-2i} = \mathbb{C}D^i G_{k-2i} \oplus \text{Vect}(D^i H_{k-2i}^*).$$

Si  $f \in H_{k-2i}^*$  alors l'égalité  $T_{n,k-2i} f = \widehat{f}(n)f$  implique  $T_{n,k}(D^i f) = n^i \widehat{f}(n)D^i f$ . De même  $T_{n,k}(D^i G_{k-2i}) = n^i \sigma_{k-2i-1}(n)D^i G_{k-2i}$ .  $\square$

### 3.4 Formes modulaires presque holomorphes

La notion de forme modulaire presque holomorphe est proche de la notion de forme quasimodulaire : au lieu de garder l'holomorphie puis de modifier de façon mesurable la modularité, on garde la modularité en modifiant de façon mesurable l'holomorphie. Nous allons montrer que les notions sont finalement les mêmes.

**Définition 144**— Une forme modulaire presque holomorphe de poids  $k$  et profondeur  $s$  est une fonction  $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

- pour toute matrice  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on a  $(F|_k \gamma) = F$ ;
- il existe des applications holomorphes  $f_0, \dots, f_s$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  avec  $f_s$  non identiquement nulle telle que

$$F(z) = \sum_{n=0}^s \frac{f_n(z)}{(\text{Im } z)^n}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ ;

- pour tout  $n$ , la fonction  $f_n$  admet un développement de Fourier sans coefficient d'indice strictement négatif :

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{f}_n(j) e(jz).$$

On définit

$$\begin{aligned} Y &: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ z &\mapsto \text{Im}(z) \end{aligned}$$

et, les fonctions  $f_n$  de la définition 144, sont notées  $R_n(F)$ . Ainsi, une forme modulaire presque holomorphe est-elle de la forme

$$F = \sum_{n=0}^s \frac{R_n(F)}{Y^n}.$$

La possibilité de définir  $R_n$  est justifiée par le lemme d'unicité suivant.

**Lemme 145**– Si  $f_0, \dots, f_s$  et  $g_0, \dots, g_t$  sont des applications holomorphes de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\sum_{n=0}^s \frac{f_n}{Y^n} = \sum_{n=0}^t \frac{g_n}{Y^n}$$

alors  $s = t$  et  $f_n = g_n$  pour tout  $n$ .

*Démonstration.* Quitte à ajouter des fonctions nulles, on peut supposer  $s = t$ . On pose alors  $h_n = f_n - g_n$  pour tout  $n$  et, par l'absurde on suppose l'existence d'un plus grand entier  $v$  tel que la fonction  $h_v$  ne soit pas la fonction nulle. En dérivant par rapport à  $x$  d'une part et à  $y$  d'autre part l'égalité

$$\sum_{n=0}^v \frac{h_n(x+iy)}{y^n} = 0 \quad (3.21)$$

on trouve

$$\sum_{n=0}^v \frac{h'_n}{Y^n} = 0 \quad (3.22)$$

et

$$\sum_{n=0}^v \left( \frac{ih'_n}{Y^n} - n \frac{h_n}{Y^{n+1}} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Après soustraction de (3.23) au produit par  $i$  de (3.22) on trouve

$$\sum_{n=1}^v \frac{nh_n}{Y^n} = 0. \quad (3.24)$$

On a donc supprimé de notre somme la fonction  $h_0$ . On itère  $v$  fois le procédé qui a permis de passer de (3.21) à (3.24) jusqu'à trouver  $h_v = 0$ . Cela contredit l'existence de  $v$  et achève la démonstration.  $\square$

*Remarques 146*– i) Une forme modulaire presque holomorphe de poids  $k$  et profondeur nulle est une forme modulaire de poids  $k$ .

ii) La dernière condition de la définition porte sur les coefficients de développements de Fourier dont l'existence est fournie par les points précédents. En effet,  $\left( F \Big|_k \gamma \right) = F$  conduit à

$$\sum_{n=0}^s \frac{f_n(z+1)}{Y(z)^n} = \sum_{n=0}^s \frac{f_n(z)}{Y(z)^n}.$$

On déduit alors du lemme 145 que les fonctions  $f_n$  sont toutes périodiques de période 1. Étant par ailleurs holomorphes, elles admettent un développement de Fourier.

Le point clé de notre démarche est que les fonctions  $R_n(F)$  sont des formes quasimodulaires. La preuve est comparable à la preuve de la proposition 122.

**Proposition 147**– Soit

$$F = \sum_{n=0}^s \frac{R_n(F)}{Y^n}$$

une forme modulaire presque holomorphe de poids  $k$  et profondeur  $s$ . Alors, chaque coefficient  $R_n(F)$  est une forme quasimodulaire de poids  $k - 2n$  et profondeur  $s - n$ . De plus,

$$Q_j \circ R_n = (2i)^j \binom{n+j}{j} R_{n+j}$$

pour tout  $j$ .

*Démonstration.* On note  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . En utilisant

$$\frac{1}{Y(\gamma z)} = \frac{|cz + d|^2}{Y(z)} = (cz + d) \left( -2ic + \frac{cz + d}{Y(z)} \right)$$

on trouve

$$\left( F \Big|_{k} \gamma \right) = \sum_{j=0}^s \left( \sum_{n=j}^s (-2i)^{n-j} \binom{n}{j} \left( R_n(F) \Big|_{k-2n} \gamma \right) X(\gamma)^{n-j} \right) \frac{1}{Y^j}. \quad (3.25)$$

Puisque  $\left( F \Big|_{k} \gamma \right) = F$ , le lemme 145 implique

$$R_j(F) = \sum_{n=j}^s (-2i)^{n-j} \binom{n}{j} \left( R_n(F) \Big|_{k-2n} \gamma \right) X(\gamma)^{n-j}$$

pour tout  $j$ . On peut réécrire ces équations en

$$M(-2iX(\gamma)) \begin{pmatrix} \left( R_0(f) \Big|_{k} \gamma \right) \\ \vdots \\ \left( R_s(f) \Big|_{k-2s} \gamma \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix}.$$

Grâce au lemme 121 on obtient

$$\begin{pmatrix} \left( R_0(f) \Big|_{k} \gamma \right) \\ \vdots \\ \left( R_s(f) \Big|_{k-2s} \gamma \right) \end{pmatrix} = M(2iX(\gamma)) \begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\left( R_n(F) \mid_{k-2n} \gamma \right) = \sum_{\beta=n}^s \binom{\beta}{n} (2iX(\gamma))^{\beta-n} R_\beta(F).$$

Ceci conduit au résultat puisque les conditions sur les développements de Fourier des coefficients  $Q_n$  des formes quasimodulaires et des coefficients  $R_n$  des formes modulaires presque holomorphes sont identiques.  $\square$

*Remarque 148* - On a une action sur les vecteurs colonnes de fonctions de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  à la remarque 123. On a montré que si  $f$  est modulaire presque holomorphe de poids  $k$  et profondeur  $s$  alors

$$\begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_n(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix} \Big|_k \gamma = M(2iX(\gamma)) \begin{pmatrix} R_0(f) \\ \vdots \\ R_n(f) \\ \vdots \\ R_s(f) \end{pmatrix}.$$

Il faut noter le ressemblance avec la remarque 123. La relation de quasimodularité et l'action modulaire sur les formes presque holomorphe se ramènent à une multiplication par un élément d'un groupe à un paramètre.

Puisque  $Q_j R_0 = (2i)^j R_j$  alors, si  $F$  est une forme modulaire presque holomorphe de poids  $k$ , il existe une forme quasimodulaire  $f (= R_0(F))$  de même poids et profondeur telle que

$$F = \sum_{n=0}^s \frac{Q_n(f)}{(2iY)^n}. \tag{3.26}$$

Grâce aux lemmes 145 et 117, cette forme quasimodulaire  $f$  est unique. Réciproquement, si  $f$  est quasimodulaire de poids  $k$ , on définit  $F$  par (3.26), ainsi :

$$F = \sum_{n=0}^s \frac{Q_n(f)/(2i)^n}{Y^n}.$$

Grâce à (3.25), on a

$$\left( F \mid_k \gamma \right) = \sum_{j=0}^s \left( \sum_{n=j}^s \binom{n}{j} \left( Q_n(f) \mid_{k-2n} \gamma \right) (-X(\gamma))^{n-j} \right) \frac{1}{(2iY)^j}.$$

On a

$$M(-X(\gamma)) \begin{pmatrix} \left( Q_0(f) \mid_k \gamma \right) \\ \vdots \\ \left( Q_s(f) \mid_{k-2s} \gamma \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0(f) \\ \vdots \\ Q_s(f) \end{pmatrix}$$

donc

$$\left( F \Big|_k \gamma \right) = \sum_{j=0}^s \frac{Q_j(f)}{(2iY)^j} = F.$$

On déduit le résultat d'identification suivant.

**Théorème 149**– *L'application linéaire*

$$\Phi: f \mapsto \sum_{n=0}^s \frac{Q_n(f)}{(2iY)^n}$$

de l'espace des formes quasimodulaires de poids  $k$  et profondeur inférieure à  $s$  dans l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids  $k$  et profondeur inférieure à  $s$  est un isomorphisme d'inverse

$$\Phi^{-1}: \sum_{n=0}^s \frac{f_n}{Y^n} \mapsto f_0.$$

Les formes quasimodulaires étant décrites à l'aide de  $E_2$  et des dérivées de formes modulaires (voir § 3.2), il nous reste à étudier l'image de  $E_2$  et de la dérivation  $D$  par  $\Phi$ . Puisque  $Q_1(E_2) = \frac{6}{i\pi}$ , la forme modulaire presque holomorphe image par  $\Phi$  de  $E_2$  est

$$E_2^* = E_2 - \frac{3}{\pi Y}.$$

Enfin l'image de  $D$  est

$$\delta = \Phi D \Phi^{-1}.$$

Les fonctions presque holomorphes ne sont certes pas holomorphes mais elles sont dérivables comme fonction de  $\mathbb{R}^2$  donc, après changement de variables comme fonctions de  $z$  et  $\bar{z}$ . On a

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Si  $f$  est holomorphe, il résulte des conditions de Cauchy-Riemann que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = D(f) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

La dérivation  $D$  est donc prolongée par  $\partial/\partial z$  de sorte que  $2iy = (z - \bar{z})$  implique

$$DY = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{2i}.$$

En particulier, la dérivée d'une forme modulaire presque holomorphe

$$F = \sum_{n=0}^s \frac{R_n(F)}{Y^n}$$

est

$$DF = \sum_{n=0}^s \frac{DR_n(F)}{Y^n} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{s+1} \frac{(n-1)R_{n-1}(F)}{Y^n}.$$

**Proposition 150**– La dérivation image de  $D$  dans l'espace des formes modulaires presque holomorphes de poids  $k$  est définie par

$$\delta F = DF - \frac{k}{4\pi Y} F.$$

*Démonstration.* On calcule

$$\delta F = \Phi DR_0(F) = \sum_{n=0}^{s+1} \frac{Q_n DR_0(F)}{(2iY)^n}.$$

Grâce au théorème 129 on obtient

$$\delta F = \sum_{n=0}^s \frac{DQ_n R_0(F)}{(2iY)^n} + \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)Q_{n-1} R_0(F)}{(2iY)^n}.$$

La proposition 147 implique alors

$$\delta F = \sum_{n=0}^s \frac{DR_n(F)}{Y^n} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{s+1} \frac{(k-n+1)R_{n-1}(F)}{Y^n}$$

c'est à dire

$$\delta F = DF - \frac{k}{4\pi Y} F.$$

□

## 3.5 Modularité et équations différentielles

### 3.5.1) Des équations satisfaites par les séries d'Eisenstein

Puisque  $DE_2$  est une forme quasimodulaire de poids 4 et profondeur 2, elle est combinaison linéaire de  $E_4$  et  $E_2^2$ . Par identification des premiers coefficients de Fourier, on trouve

$$DE_2 = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4). \quad (3.27)$$

De même,  $DE_4$  est une forme quasimodulaire de poids 6 et profondeur 1. Elle est donc combinaison linéaire de  $E_6$  et  $E_4E_2$ . On trouve

$$DE_4 = \frac{1}{3}(E_4E_2 - E_6). \quad (3.28)$$

Enfin,  $DE_6$  est une forme quasimodulaire de poids 8 et de profondeur 1. Elle est donc combinaison linéaire de  $E_4^2$  et  $E_6E_2$ . On trouve

$$DE_6 = \frac{1}{2}(E_6E_2 - E_4^2). \quad (3.29)$$

Les équations (3.27), (3.28) et (3.29) sont connues sous le nom d'*équations de Ramanujan*. On dérive (3.27) et on utilise (3.28) pour trouver

$$D^2E_2 = \frac{1}{72}E_2^3 - \frac{1}{24}E_2E_4 + \frac{1}{36}E_6. \quad (3.30)$$

En dérivant cette équation et en utilisant (3.27) et (3.29) on trouve

$$D^3E_2 = \frac{1}{288}E_2^4 - \frac{1}{96}E_4^2 - \frac{1}{48}E_2^2E_4 + \frac{1}{36}E_2E_6. \quad (3.31)$$

On multiplie ensuite (3.30) par  $E_2$  puis on reporte le résultat dans (3.31) pour obtenir

$$D^3E_2 = -\frac{1}{96}E_2^4 + E_2D^2E_2 + \frac{1}{48}E_2^2E_4 - \frac{1}{96}E_4^2.$$

Élevant (3.27) au carré et reportant le résultat dans l'équation précédente, on obtient

$$D^3E_2 = E_2D^2E_2 - \frac{3}{2}(DE_2)^2. \quad (3.32)$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 151**– La fonction

$$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}E_2$$

est solution de l'équation de Chazy

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2.$$

En remplaçant dans l'équation (3.32), la fonction  $E_2$  par sa définition  $E_2 = \frac{D\Delta}{\Delta}$ , on trouve une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 4 satisfaite par  $\Delta$ , à savoir

$$2\Delta^3D^4\Delta - 10\Delta^2D\Delta D^3\Delta - 3\Delta^2(D^2\Delta)^2 + 24\Delta(D\Delta)^2D^2\Delta - 13(D\Delta)^4 = 0. \quad (3.33)$$

On verra dans la partie 3.5.2 que  $\Delta$  satisfait une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 3.

L'obtention d'une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 3 satisfaite par  $E_2$  a été relativement aisée à partir des équations de Ramanujan. Ce n'est pas si simple pour  $E_4$  et  $E_6$ . Cependant, à l'aide des équations de Ramanujan, on trouve

$$DE_4 = \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6)$$

$$D^2E_4 = \frac{5}{36}(E_2^2E_4 - 2E_2E_6 + E_4^2)$$

$$D^3E_4 = \frac{5}{72}(E_2^3E_4 - 3E_2^2E_6 + 3E_2E_4^2 - E_4E_6).$$

On vérifie alors que

$$L_4(E_4, DE_4, D^2E_4, D^3E_4) = 0 \quad (3.34)$$

avec

$$L_4(X, Y, Z, T) = X^3Z^2 - \frac{5}{2}X^2Y^2Z - X^2T^2 + \frac{25}{16}XY^4 + 9XYZT - \frac{36}{5}XZ^3 - \frac{15}{2}Y^3T + \frac{27}{4}Y^2Z^2.$$

De même, les équations de Ramanujan conduisent à

$$DE_6 = \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2) \quad (3.35)$$

$$D^2E_6 = \frac{7}{24}(E_2^2E_6 - 2E_2E_4^2 + E_4E_6) \quad (3.36)$$

$$D^3E_6 = \frac{7}{72}(2E_2^3E_6 - 6E_2^2E_4^2 + 6E_2E_4E_6 - E_4^3 - E_6^2). \quad (3.37)$$

On vérifie alors que

$$L_6(E_6, DE_6, D^2E_6, D^3E_6) = 0 \quad (3.38)$$

avec

$$\begin{aligned} L_6(X, Y, Z, T) = & X^7Z^3 - \frac{7}{2}X^6Y^2Z^2 - X^6T^3 + \frac{49}{12}X^5Y^4Z + 12X^5YZT^2 - \frac{343}{216}X^4Y^6 \\ & - \frac{28}{3}X^4Y^3T^2 - 48X^4Y^2Z^2T - \frac{72}{7}X^4T^4 + \frac{224}{3}X^3Y^4ZT + 64X^3Y^3Z^3 \\ & + \frac{1152}{7}X^3YZT^3 - \frac{6144}{49}X^3Z^3T^2 - \frac{784}{27}X^2Y^6T - \frac{448}{3}X^2Y^5Z^2 - 128X^2Y^3T^3 \\ & - \frac{3840}{7}X^2Y^2Z^2T^2 + \frac{49152}{49}X^2YZ^4T - \frac{131072}{343}X^2Z^6 + \frac{3136}{27}XY^7Z + 1024XY^4ZT^2 \\ & - \frac{34816}{21}XY^3Z^3T + \frac{32768}{49}XY^2Z^5 - \frac{21952}{729}Y^9 - \frac{3584}{9}Y^6T^2 \\ & + \frac{2048}{3}Y^5Z^2T - \frac{2048}{7}Y^4Z^4. \end{aligned}$$

La provenance des polynômes  $L_4$  et  $L_6$  sera expliquée dans la partie 3.5.4 (voir le théorème 158 et les exemples 173 et 174).

### 3.5.2) Équations différentielles des formes quasimodulaires

À la partie 3.5.1, on a montré que les séries  $E_2$ ,  $E_4$  et  $E_6$  sont solutions d'équations différentielles d'ordre 3. On généralise cette remarque à toutes les formes quasimodulaires.

**Proposition 152**– *La famille*

$$\left\{ E_4^i E_6^j : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \mid 4i + 6j = k \right\}$$

est une base de  $\mathcal{M}_k$ .

$k$	0	2	4	6	8	10
$\mathcal{B}_k$	{1}	$\emptyset$	{ $E_4$ }	{ $E_6$ }	{ $E_8 = E_4^2$ }	{ $E_{10} = E_4 E_6$ }

TABLE 3.1 – La famille  $\mathcal{B}_k$ 

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B}_k = \left\{ E_4^i E_6^j : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \mid 4i + 6j = k \right\}$ . On commence par montrer, par récurrence sur  $k$ , que  $\mathcal{B}_k$  engendre  $\mathcal{M}_k$ . Pour les premières valeurs de  $k$ , on a facilement le tableau 3.1. Pour  $k \leq 10$ , le fait que  $\mathcal{B}_k$  engendre  $\mathcal{M}_k$  résulte donc des théorèmes 37 et 46. Soit  $k$  tel que  $\mathcal{B}_k$  engendre  $\mathcal{M}_k$ . On considère  $f \in \mathcal{M}_{k+12}$ . D'après le théorème de Bezout, il existe des entiers  $i_0$  et  $j_0$  tels que  $4i_0 + 6j_0 = k + 12$ . On a alors  $f - \widehat{f}(0)E_4^{i_0}E_6^{j_0} \in \mathcal{S}_{k+12}$  et il existe  $g \in \mathcal{M}_k$  tel que  $f - \widehat{f}(0)E_4^{i_0}E_6^{j_0} = \Delta g$  (théorème 51). Puisque  $\mathcal{B}_k$  engendre  $\mathcal{M}_k$ , on écrit

$$g = \sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_{\alpha\beta} E_4^\alpha E_6^\beta$$

pour en déduire

$$\Delta g = \frac{1}{1728} \sum_{4(\alpha+3)+\beta=k+12} \lambda_{\alpha\beta} E_4^{\alpha+3} E_6^\beta - \frac{1}{1728} \sum_{\alpha+6(\beta+2)=k+12} \lambda_{\alpha\beta} E_4^\alpha E_6^{\beta+2}.$$

On en tire que  $f$  est combinaison linéaire de  $\mathcal{B}_{k+12}$  ce qui achève la récurrence.

On montre ensuite que la famille  $\mathcal{B}_k$  est libre. On commence par remarquer que, grâce au théorème 35, la fonction  $E_4$  ne s'annule qu'en  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \rho$  où elle s'annule à l'ordre 1 et la fonction  $E_6$  ne s'annule qu'en  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot i$  où elle s'annule à l'ordre 1. Supposons  $\mathcal{B}_k$  non libre. Soit

$$F = \sum_{4\alpha+6\beta=k} \lambda_\alpha E_4^\alpha E_6^\beta = 0$$

avec l'un des coefficients  $\lambda_\alpha$  non nul. On a

$$F = \delta(4 \mid k) \lambda_{k/4} E_4^{k/4} + \sum_{\substack{4\alpha+6\beta=k \\ \beta \geq 1}} \lambda_\alpha E_4^\alpha E_6^\beta = 0.$$

L'évaluation en  $i$  conduit à  $\delta(4 \mid k) \lambda_{k/4} = 0$ . Soit  $\alpha_0$  le plus petit des  $\alpha$  tels que  $\lambda_\alpha \neq 0$ . (Il existe alors  $\beta \geq 1$  tel que  $4\alpha + 6\beta = k$ ). On a

$$0 = (z - \rho)^{-\alpha_0} F(z) = \sum_{\substack{4\alpha+6\beta=k \\ \beta \geq 1}} \lambda_\alpha \left( \frac{E_4}{z - \rho} \right)^\alpha (z - \rho)^{\alpha - \alpha_0} E_6^\beta.$$

Évaluant cette quantité en  $z = \rho$ , on trouve

$$\lambda_{\alpha_0} E_4'(\rho)^{\alpha_0} E_6(\rho)^{(k-4\alpha_0)/6} = 0.$$

On obtient la contradiction  $\lambda_{\alpha_0} = 0$ . La famille  $\mathcal{B}_k$  est libre.  $\square$

*Remarque 153*– La proposition 152 permet un nouveau calcul de la dimension de  $\mathcal{M}_k$  par décompte des solutions de l'équation  $4i + 6j = k$ .

**Corollaire 154**– Les formes quasimodulaires sont des polynômes en  $E_2, E_4$  et  $E_6$ .

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition 152 et du théorème 136.  $\square$

**Proposition 155**– Si  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  vérifie  $P(E_2, E_4, E_6) = 0$  alors  $P = 0$ .

*Démonstration.* Par regroupement des termes, on écrit

$$P = \sum_{k=1}^K \sum_{4\alpha+6\beta+2\gamma=k} p_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta X^\gamma.$$

Le théorème 128 implique

$$\sum_{4\alpha+6\beta+2\gamma=k} p_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta X^\gamma = 0$$

pour tout  $k$ . Par considération de la profondeur, on a  $\gamma = 0$  et donc

$$\sum_{4\alpha+6\beta=k} p_{\alpha\beta 0} Y^\alpha Z^\beta = 0.$$

Enfin, les coefficients  $p_{\alpha\beta 0}$  sont tous nuls grâce à la proposition 152.  $\square$

La proposition 155 implique que  $E_2, E_4$  et  $E_6$  sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ . Le corollaire 154 implique que  $\bigcup_k \mathcal{M}_k^\infty$  est algébriquement dépendant de  $\{E_2, E_4, E_6\}$  sur  $\mathbb{C}$  (voir l'annexe A.7). Il résulte alors du théorème 262 qu'étant données quatre formes quasimodulaires, elles sont nécessairement algébriquement dépendantes sur  $\mathbb{C}$ . (Et, puisque  $\bigoplus_k \mathcal{M}_k = \mathbb{C}[E_4, E_6]$  qu'étant données trois formes modulaires, elles sont nécessairement algébriquement dépendante sur  $\mathbb{C}$ ). On résume ces résultats dans la proposition suivante.

**Proposition 156**–

- 1) Si  $f, g$  et  $h$  sont trois formes modulaires, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  tel que  $P(f, g, h) = 0$ .
- 2) Si  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont quatre formes quasimodulaires, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X, Y, Z, T]$  tel que  $Q(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0$ .

Pour les formes modulaires, la proposition 156 est optimale.

**Proposition 157**– Soit  $f \in \mathcal{M}_k$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell$  non nulles. S'il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$  tel que  $P(f, g) = 0$  alors la fonction  $f^\ell/g^k$  est constante.

*Démonstration.* Par symétrie, on peut supposer  $\ell \geq k$ . La fonction  $f^\ell/g^k$  vérifie la condition de modularité de poids 0. Si elle n'est pas constante, elle ne peut donc pas être holomorphe. Il existe donc  $\rho \in \mathcal{H} \cup \{\infty\}$  tel que  $g$  s'annule à l'ordre  $v_\rho(g)$  en  $\rho$  et tel que si l'ordre d'annulation de  $f$  en  $\rho$  est  $v_\rho(f) \geq 0$  alors  $\ell v_\rho(f) < k v_\rho(g)$ . On en déduit  $v_\rho(g) > v_\rho(f)$ . Par ailleurs, si  $P(f, g) = 0$ , on peut supposer qu'il existe  $K \in 2\mathbb{N}$  tel que  $P$  soit de la forme

$$P(X, Y) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ ki + \ell j = K}} a_{ij} X^i Y^j = \sum_{j=0}^{\lfloor K/\ell \rfloor} b_j X^{i(j)} Y^j$$

avec

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{si } k \nmid K - \ell j \\ a_{i(j)j} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } i(j) = \frac{K - \ell j}{k}.$$

(En fait, tout polynôme est somme de termes de cette forme et, grâce à la proposition 28, chacun des termes annule  $(f, g)$ .) On note  $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : k \mid K - \ell j \text{ et } b_j \neq 0\}$ . Le polynôme

$$Q(X, Y) = \sum_{j=j_0}^{\lfloor K/\ell \rfloor} b_j X^{i(j)} Y^{j-j_0}$$

annule  $(f, g)$  et  $b_{j_0} \neq 0$ . On a donc

$$b_{j_0} f^{i(j_0)} = - \sum_{j=j_0+1}^{\lfloor K/\ell \rfloor} b_j f^{i(j)} g^{j-j_0}$$

et tout zéro de  $g$  annule  $f$  au moins au même ordre. C'est contradictoire avec le début de cette preuve.  $\square$

La proposition 156 implique en particulier le résultat suivant<sup>(b)</sup>.

**Théorème 158**– Toute forme quasimodulaire satisfait une équation différentielle d'ordre 3 à coefficients constants. Si  $f \in \mathcal{M}_k^\infty$ , il existe un polynôme non nul  $L \in \mathbb{C}[X, Y, Z, T]$  tel que

$$L(f, Df, D^2f, D^3f) = 0.$$

Après l'étude des crochets de Rankin-Cohen, on montrera que si une forme modulaire  $f$  n'est pas constante alors  $f, Df$  et  $D^2f$  sont algébriquement indépendante sur  $\mathbb{C}$ . Autrement dit, si  $P(f, Df, D^2f) = 0$  avec  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  alors  $P = 0$ . Cela revient à dire que  $f$  n'est solution d'aucune équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants (voir la proposition 177).

*Remarque 159*– On donnera plus loin (voir la remarque 172) une autre preuve (due à Resnikoff) dans le cas où  $f$  est une forme modulaire.

b. La restriction de ce résultat aux formes modulaires est un résultat de Hürwitz (1889).

L'équation (3.33) était une équation différentielle d'ordre 4 satisfaite par  $\Delta$ . Le théorème 158 nous indique que  $\Delta$  doit satisfaire une équation différentielle d'ordre 3. On a montré que

$$\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2).$$

On en déduit, grâce aux équations de Ramanujan les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D\Delta &= \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)E_2 \\ D^2\Delta &= \frac{1}{20736}(E_4^3 - E_6^2)(13E_2^2 - E_4) \\ D^3\Delta &= \frac{1}{124416}(E_4^3 - E_6^2)(91E_2^3 - 21E_2E_4 + 2E_6). \end{aligned}$$

À l'aide de ces équations, on vérifie

$$L_\Delta(\Delta, D\Delta, D^2\Delta, D^3\Delta) = 0 \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} L_\Delta(X, Y, Z, T) &= 48X^7 + 36X^4T^2 - 252X^3YZT + 48X^3Z^3 + 182X^2Y^3T + 285X^2Y^2Z^2 \\ &\quad - 468XY^4Z + 169Y^6. \end{aligned}$$

La provenance de ce polynôme  $L_\Delta$  sera expliquée dans la partie 3.5.4 (voir l'exemple 176).

### 3.5.3) Crochets de Rankin-Cohen

**Définition 160**— Soit  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ . Soit  $n \geq 0$  un entier. Le  $n^e$  crochet de Rankin-Cohen (associée au profondeur  $s$  et  $t$ ) de  $f$  et  $g$  est défini par

$$[f, g]_{n;s,t} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{k-s+n-1}{n-r} \binom{\ell-t+n-1}{r} D^r f D^{n-r} g.$$

*Remarque 161*— Si  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ , alors  $k$  et  $\ell$  sont déterminés par  $f$  et  $g$ . Il n'est donc pas nécessaire de préciser la dépendance en  $k$  et  $\ell$  de  $[f, g]_{n;s,t}$ . En revanche, rien ne dit que  $s$  soit la profondeur de  $f$  et  $t$  celle de  $g$ . Ce sont juste des majorants de ces profondeurs. Il est donc nécessaire de préciser la dépendance en  $s$  et  $t$ . On réservera la notation  $[f, g]_n$  pour  $[f, g]_{n;s,t}$  lorsque nous saurons que  $s$  est la profondeur de  $f$  et  $t$  celle de  $g$ .

D'après le théorème 129, on a  $[f, g]_{n;s,t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t+n}$ . Ce serait en fait le cas pour n'importe quelle combinaison linéaire

$$\sum_{r=0}^n a(r) D^r f D^{n-r} g.$$

Nous allons montrer que le choix fait pour  $a(r)$  permet de réduire la profondeur. En particulier, le crochet de Rankin-Cohen de deux formes modulaires sera toujours une forme modulaire. On commence par établir une formule pour les dérivées multiple d'une forme quasimodulaires. C'est une généralisation de la proposition 115 et du théorème 129.

**Lemme 162**– Si  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  alors

$$\left( D^r f \mid_{k+2r} \gamma \right) = \sum_{n=0}^{s+r} \left[ \sum_{j=0}^r \frac{1}{(2i\pi)^j} j! \binom{r}{j} \binom{k+r-n+j-1}{j} D^{r-j} Q_{n-j}(f) \right] X(\gamma)^n$$

pour tous  $r \geq 0$  et  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* Il s'agit de démontrer, qu'appliqué à des formes de poids  $k$ , l'opérateur  $Q_n D^r$  vérifie

$$Q_n D^r = \sum_{j=0}^r \frac{1}{(2\pi i)^j} j! \binom{r}{j} \binom{k+r-n+j-1}{j} D^{r-j} Q_{n-j}. \quad (3.40)$$

On le montre par récurrence. Lorsque  $r = 0$ , c'est immédiat. Lorsque  $r = 1$ , la formule est donnée par le théorème 129. Soit  $r \geq 1$  tel que la formule (3.40) soit vraie pour tout  $k$ . On applique cette formule à  $Df$  de poids  $k + 2$ . On obtient

$$Q_n D^{r+1} = \sum_{j=0}^r \frac{1}{(2\pi i)^j} j! \binom{r}{j} \binom{k+2+r-n+j-1}{j} D^{r-j} Q_{n-j}.$$

On applique ensuite le théorème 129. Il vient

$$\begin{aligned} Q_n D^{r+1} &= D^{r+1} Q_n + \frac{1}{(2i\pi)^{r+1}} (r+1)! \binom{k+2r-n+1}{r+1} Q_{n-r-1} \\ &+ \sum_{j=1}^r \frac{1}{(2i\pi)^j} \left[ \frac{r!}{(r-j)!} \binom{k+r-n+j+1}{j} + \frac{(k-n+j)r!}{(r-j+1)!} \binom{k+r-n+j}{j-1} \right] D^{r+1-j} Q_{n-j}. \end{aligned}$$

On termine en calculant

$$\frac{r!}{(r-j)!} \binom{k+r-n+j+1}{j} + \frac{(k-n+j)r!}{(r-j+1)!} \binom{k+r-n+j}{j-1} = j! \binom{r+1}{j} \binom{k+r-n+j}{j}.$$

□

Le résultat suivant est la raison d'être des crochets de Rankin-Cohen.

**Théorème 163**– Soit  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$[f, g]_{n;s;t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t}.$$

*Démonstration.* On pose  $a_r = (-1)^r \binom{k-s+n-1}{n-r} \binom{\ell-t+n-1}{r}$ . Grâce à (3.7), on a

$$Q_j([f, g]_{n;s,t}) = \sum_{r=0}^n a_r \sum_{j_1+j_2=j} Q_{j_1}(D^r f) Q_{j_2}(D^{n-r} g).$$

En utilisant le lemme 162, on obtient

$$\begin{aligned} Q_j([f, g]_{n;s,t}) &= \sum_{j_1+j_2=j} \sum_r a_r \sum_{i_1} \frac{1}{(2i\pi)^{i_1}} i_1! \binom{r}{i_1} \binom{k+r-j_1+i_1-1}{i_1} \\ &\quad \times \sum_{i_2} \frac{1}{(2i\pi)^{i_2}} i_2! \binom{n-r}{i_2} \binom{\ell+n-r-j_2+i_2-1}{i_2} D^{r-i_1} Q_{j_1-i_1}(f) D^{n-r-i_2} Q_{j_2-i_2}(g). \end{aligned}$$

Les intervalles de définition des indices sont indiqués par les coefficients binomiaux. On fait les changements de variables

$$\begin{aligned} u &= j_1 - i_1 & v &= j_2 - i_2 \\ \alpha &= r - i_1 & \beta &= n - r - i_2 \end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} Q_j([f, g]_{n;s,t}) &= \sum_{u,v} \sum_{\alpha,\beta} \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^{n-\alpha-\beta} \frac{1}{(k+\alpha-u-1)!(\ell+\beta-v-1)!} \\ &\quad \times \left[ \sum_r a_r \binom{r}{\alpha} \binom{n-r}{\beta} (k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)! \right] D^\alpha Q_u(f) D^\beta Q_v(g). \quad (3.41) \end{aligned}$$

On veut que cette quantité soit nulle pour tout  $j \in \{s+t+1, \dots, s+t+n\}$ . Il suffit pour cela que

$$\sum_r a_r \binom{r}{\alpha} \binom{n-r}{\beta} (k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)! = 0 \quad (3.42)$$

pour tout  $(u, v, \alpha, \beta)$  dans l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(u, v, \alpha, \beta) \in \mathbb{N}^4 : u \leq s, v \leq t, u+v-s-t \leq \alpha+\beta \leq u+v+n-s-t-1\}.$$

Reportant la valeur de  $a_r$  dans (3.42) on obtient

$$\begin{aligned} &(k-s+n-1)!(s-u)!(\ell-t+n-1)(t-v)! \\ &\quad \sum_{r_1+r_2=n} \frac{(-1)^{r_1}}{r_1! r_2!} \binom{r_1}{\alpha} \binom{r_2}{\beta} \binom{k+r_1-u-1}{s-u} \binom{\ell+r_2-v-1}{t-v}. \quad (3.43) \end{aligned}$$

On définit deux séries de rayon de convergence infini par

$$P_1(X) = \sum_{r_1} \frac{(-1)^{r_1}}{r_1!} \binom{r_1}{\alpha} \binom{k+r_1-u-1}{s-u} X^{r_1}$$

et

$$P_2(X) = \sum_{r_2} \frac{1}{r_2!} \binom{r_2}{\beta} \binom{\ell + r_2 - v - 1}{t - v} X^{r_2}.$$

Puisque la somme en facteur dans l'expression (3.43) est le coefficient de degré  $n$  de la série  $P_1 P_2$ . On va montrer que si  $(u, v, \alpha, \beta) \in \mathcal{E}$  alors, la série  $P_1 P_2$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$ .

Puisque  $s \leq k/2$ , on peut écrire

$$P_1(X) = \binom{k + \alpha - u - 1}{s - u} \frac{(-X)^\alpha}{\alpha!} \sum_{r=0}^{+\infty} p(r)$$

avec

$$p(r) = \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\binom{k + \alpha - u - 1 + r}{r}}{\binom{k + \alpha - s - 1 + r}{r}} X^r.$$

On calcule

$$\frac{p(r+1)}{p(r)} = \frac{r + k + \alpha - u}{(r + k + \alpha - s)(r + 1)} (-X)$$

pour obtenir (voir l'annexe B.13)

$$P_1(X) = \binom{k + \alpha - u - 1}{s - u} (-X)^\alpha {}_1F_1 \left[ \begin{matrix} k + \alpha - u \\ k + \alpha - s \end{matrix} \right] (-X).$$

Grâce au corollaire 327, on a

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} k + \alpha - u \\ k + \alpha - s \end{matrix} \right] (-X) = e^{-X} {}_1F_1 \left[ \begin{matrix} u - s \\ k + \alpha - s \end{matrix} \right] (X)$$

puis

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} u - s \\ k + \alpha - s \end{matrix} \right] (X) = \sum_{r=0}^{s-u} (-1)^r \frac{\binom{s-u}{r}}{\binom{k + \alpha - s - 1 + r}{k + \alpha - s - 1}} \frac{X^r}{r!}.$$

On a alors

$$P_1(X) = e^{-X} \sum_{r=\alpha}^{s-u+\alpha} \binom{k + \alpha - u - 1}{k + r - s - 1} \binom{r}{\alpha} \frac{X^r}{r!}.$$

De façon identique,

$$P_2(X) = e^X \sum_{r=\beta}^{t-v+\beta} \binom{\ell + \beta - v - 1}{\ell + r - t - 1} \binom{r}{\beta} \frac{(-X)^r}{r!}.$$

Le produit  $P_1 P_2$  est donc un polynôme de degré au plus

$$s + t - u - v + \alpha + \beta \leq n - 1.$$

□

Restreignons notre étude à celle du premier crochet sur les formes modulaires. On note

$$\mathcal{M}_* = \bigoplus_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} \mathcal{M}_k \quad (3.44)$$

l'algèbre de toutes les formes modulaires. Le crochet  $[\ , \ ]_{1;0,0}$  n'est pas défini sur  $\mathcal{M}_*$  (puisque  $[f, g]_{1;0,0}$  dépend du poids de  $f$  et  $g$ ). Cependant, la somme (3.44) étant directe, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathcal{M}_*$ , elles s'écrivent de façon unique

$$f = \sum_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} f_k, \quad g = \sum_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} g_k$$

où, pour tout  $k$ , on a  $f_k$  et  $g_k$  modulaires de poids  $k$ . On étend alors le premier crochet de Rankin-Cohen par linéarité en posant

$$[f, g]_1 = \sum_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} \sum_{\substack{\ell \in 2\mathbb{N} \\ \ell \neq 2}} [f_k, g_\ell]_{1;0,0}.$$

Munie de ce crochet, l'algèbre complexe de toutes les formes modulaires est une algèbre de Poisson.

**Proposition 164**— *L'algèbre  $\mathcal{M}_*$  munie du crochet  $[\ , \ ]_1$  est une algèbre de Poisson. Autrement dit,  $[\ , \ ]_1$  est une application bilinéaire antisymétrique de  $\mathcal{M}_* \times \mathcal{M}_*$  dans  $\mathcal{M}_*$  vérifiant*

- 1) la loi de Leibniz :  $[fg, h]_1 = f[g, h]_1 + [f, h]_1 g$ ;
- 2) l'identité de Jacobi :  $[f, [g, h]_1]_1 + [g, [h, f]_1]_1 + [h, [f, g]_1]_1 = 0$

pour tout triplet  $(f, g, h)$  de formes modulaires.

*Démonstration.* Il est immédiat que le crochet est antisymétrique puisque chacun des crochets  $[\ , \ ]_{1;0,0}$  l'est. Par bilinéarité, il suffit de vérifier la loi de Leibniz et l'identité de Jacobi pour les formes modulaires. On vérifie la loi de Leibniz. Soit donc  $f \in \mathcal{M}_k$ ,  $g \in \mathcal{M}_\ell$  et  $h \in \mathcal{M}_m$ . On a

$$\begin{aligned} [fg, h]_1 &= (k + \ell)fgDh - mD(f)gh - mfD(g)h \\ &= f(\ell gD(h) - mD(g)h) + (kfD(h) - mD(f)h)g = f[g, h]_1 + [f, h]_1 g. \end{aligned}$$

On vérifie ensuite l'identité de Jacobi. On rappelle que  $[g, h]_1$  est de poids  $\ell + m + 2$  et donc

$$\begin{aligned} [f, [g, h]_1]_1 &= kg(\ell D(g)D(h) + \ell gD^2(h) - mD^2(g)h - mD(g)D(h)) \\ &\quad - (\ell + m + 2)D(f)(\ell gD(h) - mD(g)h) \\ &= klfgD^2(h) + k(\ell - m)fD(g)D(h) - kmfD^2(g)h \\ &\quad - (\ell + m + 2)\ell D(f)gD(h) + (\ell + m + 2)mD(f)D(g)h. \end{aligned}$$

On en déduit

$$[g, [h, f]_1]_1 = \ell m g h D^2(f) + \ell(m-k)g D(h)D(f) - \ell k g D^2(h)f - (m+k+2)m D(g)h D(f) + (m+k+2)k D(g)D(h)f$$

et

$$[h, [f, g]_1]_1 = m k h f D^2(g) + m(k-\ell)h D(f)D(g) - m \ell h D^2(f)g - (k+\ell+2)k D(h)f D(g)' + (k+\ell+2)\ell D(h)D(f)g$$

et on obtient 0 par sommation de ces trois égalités.  $\square$

*Remarque 165* - D'après l'exemple 275, il existe une seule application bilinéaire  $\{ \cdot, \cdot \}$  de  $\mathbb{C}[X, Y] \times \mathbb{C}[X, Y]$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$  donnant à  $\mathbb{C}[X, Y]$  une structure d'algèbre de Poisson et vérifiant  $\{X, Y\} = -2(X^3 - Y^2)$ . Puisque

$$[E_4, E_6]_1 = -2(E_4^3 - E_6^2) \quad (3.45)$$

(cette relation est obtenue en remarquant que  $[E_4, E_6] \in \mathcal{S}_{12}$  et en utilisant les premiers coefficient de Fourier non nul), l'isomorphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X, Y] &\mapsto \mathcal{M}_* \\ P &\mapsto P(E_4, E_6) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de Poisson. Le crochet  $[ \cdot, \cdot ]_1$  est l'unique application bilinéaire donnant à  $\mathcal{M}_*$  une structure d'algèbre de Poisson et vérifiant (3.45).

*Remarque 166* - Le crochet  $[ \cdot, \cdot ]_1$  ne se prolonge pas en un crochet de Poisson sur  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} [E_2, E_4]_1 &= P(E_2, E_4, E_6) \\ [E_2, E_6]_1 &= Q(E_2, E_4, E_6) \\ [E_4, E_6]_1 &= R(E_2, E_4, E_6) \end{aligned}$$

avec

$$P = -\frac{1}{3}XZ + \frac{1}{3}Y^2, Q = -\frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}YZ, \quad \text{et} \quad R = -2Y^3 + 2Z^2.$$

Si ces relation permettaient de définir un crochet de Poisson sur  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty} = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ , alors on aurait  $\text{Rot}(P, Q, R) \cdot (P, Q, R) = 0$  (voir l'exemple 276). Cependant

$$\text{Rot}(P, Q, R) \cdot (P, Q, R) = -\frac{1}{6}Y(Y^3 - Z^2).$$

On rappelle que, par définition,  $D\Delta = \Delta E_2$ . Par récurrence, on montre alors que, pour tout  $j \geq 0$ , on a  $D^j \Delta = \Delta \delta_j$  où  $\delta_j \in \mathcal{M}_{2j}^{\leq j}$  est défini par

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_j = (D + E_2)\delta_{j-1} \end{cases} \quad (3.46)$$

où on note abusivement  $E_2$  l'opérateur de multiplication par  $E_2$ . Si  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ , on a donc

$$[\Delta f, g]_{n;s,t} = \Delta h \quad (3.47)$$

avec  $h \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}^{\leq s+t}$ . Par exemple,

$$[\Delta f, g]_{1;0,0} = \Delta[f, g]_{1;0,0}$$

puisque la restriction aux formes modulaires du premier crochet est de Poisson (voir la proposition 164).

*Remarque 167* – Soit  $f \in \mathcal{M}_k$ . En utilisant  $D\Delta = \Delta E_2$ , on calcule

$$\frac{[\Delta, f]_1}{12\Delta} = Df - \frac{k}{12}fE_2.$$

Grâce à la remarque 268 (ou bien par vérification directe), on en déduit que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &\rightarrow \mathcal{M}_{k+2} \\ f &\mapsto Df - \frac{k}{12}fE_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

induit par prolongement linéaire une dérivation sur  $\mathcal{M}_*$  (voir la définition 264). Cette dérivation s'appelle la *dérivation de Serre*.

On utilise maintenant le calcul de  $Q_j([f, g]_{n;s,t})$  fait dans la preuve du théorème 163 pour donner un résultat de structure de même type que le théorème 139.

**Proposition 168** – Soit  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ . Soit  $n > 0$ . On a

$$[f, g]_{n;s,t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} D^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

Si, de plus, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

i)  $n > s + t$ ;

ii)  $n = s + t$  et  $f$  ou  $g$  a un développement de Fourier de terme constant nul

alors

$$[f, g]_{n;s,t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t-1} D^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j} \oplus D^{s+t} \mathcal{S}_{k+\ell+2n-2s-2t}.$$

*Démonstration.* Puisque  $n > 0$ , on a  $s + t < \frac{k + \ell + 2n}{2}$ . En utilisant les théorèmes 163 et 139, on a alors

$$[f, g]_{n;s,t} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} D^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

On écrit

$$[f, g]_{n;s,t} = f_0 + \sum_{j=1}^{s+t} D^j f_j$$

avec  $f_j \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}$  pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Si  $n \geq 1$ , chacune des fonctions  $D^j f D^{n-j} g$  lorsque  $j$  parcourt  $\{0, \dots, n\}$  a un développement de Fourier de terme constant nul. C'est donc aussi le cas de  $[f, g]_{n;s,t}$ . Comme lorsque  $j$  parcourt  $\{1, \dots, s+t\}$ , les fonctions  $D^j f_j$  ont toutes un développement de Fourier de terme constant nul, c'est le cas de

$$[f, g]_{n;s,t} - \sum_{j=1}^{s+t} D^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

La forme modulaire  $f_0$  est donc une forme parabolique et

$$[f, g]_{n;s,t} \in \mathcal{S}_{k+\ell+2n} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s+t} D^j \mathcal{M}_{k+\ell+2n-2j}.$$

Si  $j \leq s+t-1$ , la forme  $D^j f_j$  est de profondeur strictement inférieure à  $s+t$ . On a donc  $Q_{s+t}([f, g]_{n;s,t}) = Q_{s+t}(D^{s+t} f_{s+t})$ . Puisque  $f_{s+t}$  est modulaire (de poids  $k+\ell+2n-2s-2t$ ), la formule (3.40) implique

$$Q_{s+t}(D^{s+t} f_{s+t}) = \frac{1}{(2i\pi)^{s+t}} \cdot \frac{(k+\ell+2n-s-t-1)!}{(k+\ell+2n-2s-2t-1)!} f_{s+t}.$$

pour montrer que  $f_{s+t}$  est parabolique, il est donc suffisant de montrer que le développement de Fourier de  $Q_{s+t}(D^{s+t} f_{s+t})$  a un coefficient de Fourier constant nul. Grâce à (3.41), on a

$$\begin{aligned} Q_{s+t}([f, g]_{n;s,t}) &= \sum_{u,v} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha+\beta=u+v+n-s-t}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-\alpha-\beta} \frac{1}{(k+\alpha-u-1)!(\ell+\beta-v-1)!} \\ &\quad \times \left[ \sum_r a_r \binom{r}{\alpha} \binom{n-r}{\beta} (k+r-u-1)!(\ell+n-r-v-1)! \right] D^\alpha Q_u(f) D^\beta Q_v(g) \end{aligned}$$

avec  $a_r = (-1)^r \binom{k-s+n-1}{n-r} \binom{\ell-t+n-1}{r}$ . Les contributions de  $D^\alpha Q_u(f) D^\beta Q_v(g)$  lorsque  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  ont des coefficients de Fourier constants nuls. Si  $n > s+t$  alors  $u+v+n-s-t > u+v \geq 0$  donc  $\alpha+\beta > 0$  et  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Ainsi,  $Q_{s+t}([f, g]_{n;s,t})$  puis  $f_{s+t}$  sont des formes paraboliques. On suppose maintenant que  $n = s+t$  et que  $f$  ou  $g$  a un développement de Fourier de terme constant nul. Si  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  alors  $(u, v) = (0, 0)$  et seul  $Q_0(f)Q_0(g)$  peut fournir un coefficient de Fourier constant non nul. Mais  $Q_0(f)Q_0(g) = fg$  donc il n'y a pas de tel coefficient.  $\square$

### 3.5.4) Crochets de Rankin-Cohen et équations différentielles

On peut maintenant exprimer les relations de Ramanujan (3.27), (3.28) et (3.29) à l'aide des crochets de Rankin-Cohen.

**Proposition 169**– *Les équations de Ramanujan sont*

$$\begin{aligned} [E_2, \Delta]_{1;1,0} &= \Delta E_4 \\ [E_4, \Delta]_{1;0,0} &= 4\Delta E_6 \\ [E_6, \Delta]_{1;0,0} &= 6\Delta E_4^2. \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'équation (3.47) implique  $[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta h$  avec  $h \in \mathcal{M}_4 \oplus D\mathcal{M}_2 = \mathbb{C}E_4$ . En comparant les premiers coefficients de Fourier, on trouve  $[E_2, \Delta]_{1;1,0} = \Delta E_4$ . Il reste à vérifier que cette équation est équivalente à (3.27). En remplaçant le crochet par sa définition, on obtient

$$D(\Delta)E_2 - 12\Delta DE_2 = \Delta E_4.$$

Il reste à diviser par  $\Delta$  puis à utiliser la définition  $E_2 = \frac{D\Delta}{\Delta}$  pour obtenir (3.27). Les deux autres équations s'obtiennent de même.  $\square$

On donne ensuite une interprétation en terme de crochets de Rankin-Cohen de l'équation de Chazy (3.32) satisfaite par  $E_2$ .

**Proposition 170**– *L'équation de Chazy satisfaite par  $E_2$  est*

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1,0,0} = 24\Delta K^2$$

avec  $K = [E_2, \Delta]_{1;1,0}$ .

*Démonstration.* Par la proposition (169), on a  $K = \Delta E_4$ . En particulier c'est une forme modulaire et il est légitime d'évaluer  $[K, \Delta]_{1;0,0}$ . Comme  $[ \ , \ ]_{1;0,0}$  est un crochet de Poisson, on a

$$[K, \Delta]_{1;0,0} = [\Delta E_4, \Delta]_{1;0,0} = \Delta [E_4, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2 E_6$$

d'après la proposition 169. On a alors

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, K]_{1,0,0} = [4\Delta^2 E_6, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2 [E_6, \Delta]_{1;0,0} = 24\Delta^3 E_4^2 = 24\Delta K^2$$

toujours d'après la proposition 169. Il reste à vérifier que  $[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1,0,0} = 24\Delta K^2$  est bien l'équation de Chazy. Par définition, on a  $K = E_2 D\Delta - 12DE_2 \cdot \Delta$  et, grâce à  $D\Delta = \Delta E_2$ , on trouve

$$K = \Delta(E_2^2 - 12DE_2). \quad (3.49)$$

On a ensuite

$$16K D\Delta = 16K \Delta E_2 = 16\Delta^2 (E_2^2 - 12DE_2) E_2$$

et

$$12DK \cdot \Delta = 12\Delta^2 E_2 (E_2^2 - 12DE_2) + 12\Delta^2 (2E_2 DE_2 - 12D^2 E_2)$$

de sorte que

$$[K, \Delta]_{1;0,0} = 4\Delta^2(E_2^3 - 18E_2DE_2 + 36D^2E_2).$$

On note  $L = 4\Delta^2(E_2^3 - 18E_2DE_2 + 36D^2E_2)$ . Enfin,

$$30LD\Delta = 30L\Delta E_2 = 120\Delta^3(E_2^4 - 18E_2^2DE_2 + 36E_2D^2E_2)$$

et

$$12DL \cdot \Delta = 48\Delta^3(2E_2^4 - 33E_2^2DE_2 + 54E_2D^2E_2 - 18(DE_2)^2 + 36D^3E_2)$$

d'où

$$[[K, \Delta]_{1;0,0}, \Delta]_{1;0,0} = 24\Delta^3(E_2^4 - 24E_2^2DE_2 + 72E_2D^2E_2 + 36(DE_2)^2 - 72D^3E_2). \quad (3.50)$$

On élève (3.49) au carré

$$24\Delta K^2 = 24\Delta^3(E_2^4 - 24E_2^2DE_2 + 144(DE_2)^2). \quad (3.51)$$

Finalement, en égalisant (3.50) et (3.51), on obtient

$$2D^3E_2 - 2E_2D^2E_2 + 3(DE_2)^2 = 0.$$

C'est l'équation de Chazy. □

On montre maintenant comment calculer les équations différentielles satisfaites par  $\Delta$ ,  $E_4$  et  $E_6$ , c'est-à-dire comment calculer les polynômes  $L_\Delta$ ,  $L_4$  et  $L_6$ . La méthode est due à Resnikoff [35]. Définissons

$$\partial_2 f = [f, Df]_{1;0,1} \quad (3.52)$$

pour toute forme modulaire  $f$ . En utilisant la définition des corchets, on voit que

$$\partial_2 f = \frac{1}{k+1} [f, f]_2 \quad (3.53)$$

si  $k$  est le poids de  $f$ . Il en résulte en particulier que  $\partial_2 f$  est modulaire parabolique (de poids  $2k+4$ ). On peut donc définir

$$\partial_3 f = [f, \partial_2 f]_{1;0,0}$$

qui est une forme modulaire parabolique de poids  $3k+6$ . D'après la proposition 156, les trois formes modulaires  $f$ ,  $\partial_2 f$  et  $\partial_3 f$  sont algébriquement dépendantes. On a donc démontré le résultat suivant.

**Proposition 171**– Si  $f$  est une forme modulaire, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  tel que

$$P(f, \partial_2 f, \partial_3 f) = 0.$$

*Remarque 172*- Cette proposition implique l'existence d'une équation différentielle d'ordre 3 satisfaite par les formes modulaires puisque

$$\partial_2 f = kf D^2 f - (k+1)(Df)^2 \quad (3.54)$$

et

$$\partial_3 f = 2(k+1)(k+2)(Df)^3 - 3k(k+2)f \cdot Df \cdot D^2 f + k^2 f^2 D^3 f. \quad (3.55)$$

Elle fournit donc une nouvelle preuve du théorème 158.

*Exemple 173*- On a  $E_4 \in \mathcal{M}_4$ ,  $\partial_2 E_4 \in \mathcal{S}_{12}$  et  $\partial_3 E_4 \in \mathcal{S}_{18}$ . Le plus petit multiple commun des poids de ces trois formes est 36 et la dimension de  $\mathcal{S}_{36}$  est 3. Il existe donc une combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls des quatre éléments de  $\mathcal{S}_{36}$  suivants :  $(\partial_2 E_4)^3$ ,  $(\partial_3 E_4)^2$ ,  $\partial_2 E_4 \cdot E_4^6$  et  $(\partial_2 E_4)^2 \cdot E_4^3$ . En calculant les débuts des développements de Fourier, on trouve

$$(\partial_2 E_4)^3 = -\frac{5}{144}(\partial_3 E_4)^2 + \frac{5}{9}(\partial_2 E_4)^2 \cdot E_4^3.$$

Remplaçant  $E_4$  par  $X$ ,  $\partial_2 E_4$  par  $4XZ - 5Y^2$  et  $\partial_3 E_4$  par  $60Y^3 - 72XYZ + 16X^2T$  (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que  $L_4(E_4, D E_4, D^2 E_4, D^3 E_4) = 0$  avec

$$L_4(X, Y, Z, T) = X^3 Z^2 - \frac{5}{2} X^2 Y^2 Z - X^2 T^2 + \frac{25}{16} X Y^4 + 9 X Y Z T - \frac{36}{5} X Z^3 - \frac{15}{2} Y^3 T + \frac{27}{4} Y^2 Z^2.$$

*Exemple 174*- Le cas de  $E_6$  est un peu plus délicat. On a  $E_6 \in \mathcal{M}_6$ ,  $\partial_2 E_6 \in \mathcal{S}_{16}$  et  $\partial_3 E_6 \in \mathcal{S}_{24}$ . On voudrait donc travailler dans  $\mathcal{S}_{48}$  qui est de dimension 4. On ne peut cependant pas construire 5 formes paraboliques à partir de  $E_6$ ,  $\partial_2 E_6$  et  $\partial_3 E_6$ . En effet, cela revient à compter les triplets  $(a, b, c)$  tels que  $E_6^a (\partial_2 E_6)^b (\partial_3 E_6)^c \in \mathcal{S}_{48}$ , c'est-à-dire  $6a + 16b + 24c = 48$  avec  $b + c \neq 0$  et il n'y en a que 3. Ces triplets conduisent aux fonctions  $(\partial_2 E_6)^3$ ,  $(\partial_3 E_6)^2$  et  $E_6^4 \partial_3 E_6$ . Les premiers coefficients des développements de Fourier montrent qu'elles ne sont pas liées. On cherche donc à travailler dans  $\mathcal{S}_{96}$  qui est de dimension 8. Comme il n'y a que 8 triplets  $(a, b, c)$  tels que  $6a + 16b + 24c = 96$  avec  $b + c \neq 0$ , on ne peut encore pas construire assez de fonctions. On pourrait considérer  $\mathcal{S}_{192}$  qui est de dimension 16 : il existe 24 triplets  $(a, b, c)$  tels que  $6a + 16b + 24c = 192$  avec  $b + c \neq 0$ , et on peut donc construire suffisamment de fonctions linéairement liées. Avant cela, on vérifie cependant s'il existe une relation linéaire entre les 8 fonctions de  $\mathcal{S}_{96}$ . Ces 8 fonctions sont  $(\partial_3 E_6)^4$ ,  $(\partial_2 E_6)^3 (\partial_3 E_6)^2$ ,  $(\partial_2 E_6)^6$ ,  $E_6^4 (\partial_3 E_6)^3$ ,  $E_6^4 (\partial_2 E_6)^3 \partial_3 E_6$ ,  $E_6^8 (\partial_3 E_6)^2$ ,  $E_6^8 (\partial_2 E_6)^3$  et  $E_6^{12} \partial_3 E_6$ . La considération des premiers coefficients de Fourier conduit à la relation conjecturale<sup>(c)</sup> :

$$(\partial_3 E_6)^4 = -\frac{512}{7} (\partial_2 E_6)^3 (\partial_3 E_6)^2 - \frac{65536}{49} (\partial_2 E_6)^6 - \frac{7}{2} E_6^4 (\partial_3 E_6)^3 + 756 E_6^8 (\partial_2 E_6)^3. \quad (3.56)$$

c. Puisqu'on utilise qu'un nombre fini de coefficient de Fourier sans avoir *a priori* qu'il existe une relation linéaire.

Une fois l'égalité (3.56) conjecturée, il est aisé de la démontrer. Il suffit de remplacer  $\partial_2 E_6$  et  $\partial_3 E_6$  par leurs expressions polynomiales en  $E_4$  et  $E_6$ . Cela est fait en utilisant les équations de Ramanujan qui conduisent à (3.35) puis à

$$\begin{aligned}\partial_2 E_6 &= -\frac{7}{4}E_4^4 + \frac{7}{4}E_4E_6^2 \\ \partial_3 E_6 &= -14E_4^6 + \frac{35}{2}E_4^3E_6^2 - \frac{7}{2}E_6^4.\end{aligned}$$

Dans (3.56), on remplace  $E_6$  par  $X$ ,  $\partial_2 E_6$  par  $6XZ - 7Y^2$  et  $\partial_3 E_6$  par  $112Y^3 - 144XYZ + 36X^2T$  (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que  $L_6(E_6, DE_6, D^2E_6, D^3E_6) = 0$  avec

$$\begin{aligned}L_6(X, Y, Z, T) &= X^7Z^3 - \frac{7}{2}X^6Y^2Z^2 - X^6T^3 + \frac{49}{12}X^5Y^4Z + 12X^5YZT^2 - \frac{343}{216}X^4Y^6 \\ &\quad - \frac{28}{3}X^4Y^3T^2 - 48X^4Y^2Z^2T - \frac{72}{7}X^4T^4 + \frac{224}{3}X^3Y^4ZT + 64X^3Y^3Z^3 \\ &\quad + \frac{1152}{7}X^3YZT^3 - \frac{6144}{49}X^3Z^3T^2 - \frac{784}{27}X^2Y^6T - \frac{448}{3}X^2Y^5Z^2 - 128X^2Y^3T^3 \\ &\quad - \frac{3840}{7}X^2Y^2Z^2T^2 + \frac{49152}{49}X^2YZ^4T - \frac{131072}{343}X^2Z^6 + \frac{3136}{27}XY^7Z + 1024XY^4ZT^2 \\ &\quad - \frac{34816}{21}XY^3Z^3T + \frac{32768}{49}XY^2Z^5 - \frac{21952}{729}Y^9 - \frac{3584}{9}Y^6T^2 \\ &\quad + \frac{2048}{3}Y^5Z^2T - \frac{2048}{7}Y^4Z^4.\end{aligned}$$

*Exemple 175* - Pour  $E_8$ , la même méthode (dans  $\mathcal{S}_{120}$ ) donne

$$(\partial_3 E_8)^4 + \frac{288}{5}(\partial_2 E_8)^3(\partial_3 E_8)^2 + \frac{20736}{25}(\partial_2 E_8)^6 - 4096E_8^5(\partial_2 E_8)^4 = 0.$$

Pour vérifier cette relation, on utilise  $E_8 = E_4^2$  et les relations de Ramanujan <sup>(d)</sup> qui donnent

$$\begin{aligned}DE_8 &= \frac{2}{3}E_2E_4^2 - \frac{2}{3}E_4E_6 \\ D^2E_8 &= \frac{1}{2}E_2^2E_4^2 - E_2E_4E_6 + \frac{5}{18}E_4^3 + \frac{2}{9}E_6^2 \\ D^3E_8 &= \frac{5}{12}E_2^3E_4^2 - \frac{5}{4}E_2^2E_4E_6 + \frac{25}{36}E_2E_4^3 + \frac{5}{9}E_2E_6^2 - \frac{5}{12}E_4^2E_6\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\partial_2 E_8 &= \frac{20}{9}E_4^5 - \frac{20}{9}E_4^2E_6^2 \\ \partial_3 E_8 &= \frac{160}{9}E_4^6E_6 - \frac{160}{9}E_4^3E_6^3.\end{aligned}$$

d. Ou des arguments dimensionnels.

On en déduit  $L_8(E_8, DE_8, D^2E_8, D^3E_8) = 0$  avec

$$\begin{aligned} L_8(X, Y, Z, T) = & 102400X^9Z^4 - 460800X^8Y^2Z^3 - 102400X^8T^4 + 777600X^7Y^4Z^2 \\ & + 1536000X^7YZT^3 - 737280X^7Z^3T^2 - 583200X^6Y^6Z - 1152000X^6Y^3T^3 \\ & - 6151680X^6Y^2Z^2T^2 + 5529600X^6YZ^4T - 1327104X^6Z^6 + 164025X^5Y^8 \\ & + 10160640X^5Y^4ZT^2 - 1209600X^5Y^3Z^3T - 1410048X^5Y^2Z^5 - 3810240X^4Y^6T^2 \\ & - 13608000X^4Y^5Z^2T + 5099760X^4Y^4Z^4 + 12830400X^3Y^7ZT + 855360X^3Y^6Z^3 \\ & - 3207600X^2Y^9T - 6735960X^2Y^8Z^2 + 4234032XY^{10}Z - 793881Y^{12}. \end{aligned}$$

*Exemple 176* – Enfin, on termine cette série d'exemples par le calcul de  $L_\Delta$ . Dans  $\mathcal{S}_{84}$ , on a les fonctions  $(\partial_3\Delta)^2$ ,  $(\partial_2\Delta)^3$  et  $\Delta^7$ . La considération des premiers coefficients de Fourier permet de conjecturer la relation

$$(\partial_3\Delta)^2 = -16(\partial_2\Delta)^3 - 27648\Delta^7. \quad (3.57)$$

Comme  $\mathcal{S}_{84}$  est de dimension 7, cette relation n'est que conjecturale. Pour la vérifier on utilise  $1728\Delta = E_4^3 - E_6^2$  et (3.46) qui conduit à

$$\begin{aligned} D\Delta &= \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)E_2 \\ D^2\Delta &= \frac{1}{20736}(E_4^3 - E_6^2)(13E_2^2 - E_4) \\ D^3\Delta &= \frac{1}{124416}(E_4^3 - E_6^2)(91E_2^3 - 21E_2E_4 + 2E_6) \end{aligned}$$

puis à

$$\begin{aligned} \partial_2\Delta &= -\frac{1}{2985984}E_4^7 + \frac{1}{1492992}E_4^4E_6^2 - \frac{1}{2985984}E_4E_6^4 \\ \partial_3\Delta &= \frac{1}{1289945088}E_4^9E_6 - \frac{1}{429981696}E_4^6E_6^3 + \frac{1}{429981696}E_4^3E_6^5 - \frac{1}{1289945088}E_6^7. \end{aligned}$$

Dans (3.57), on remplace  $\Delta$  par  $X$ ,  $\partial_2\Delta$  par  $12XZ - 13Y^2$  et  $\partial_3\Delta$  par  $364Y^3 - 504XYZ + 144X^2T$  (grâce à (3.54) et (3.55)), on trouve que  $L_\Delta(\Delta, D\Delta, D^2\Delta, D^3\Delta) = 0$  avec

$$\begin{aligned} L_\Delta(X, Y, Z, T) = & 48X^7 + 36X^4T^2 - 252X^3YZT + 48X^3Z^3 + 182X^2Y^3T + 285X^2Y^2Z^2 \\ & - 468XY^4Z + 169Y^6. \end{aligned}$$

Enfin, nous montrons que le théorème 158 est optimal pour les formes modulaires. La preuve est inspirée de [4].

**Proposition 177** – *Si  $f$  est une forme modulaire non constante, elle ne satisfait aucune équation différentielle d'ordre 2*

Pour simplifier l'écriture de la preuve, on démontre un lemme intermédiaire.

**Lemme 178**— Soit  $f$  une forme modulaire de poids  $k$ , soit  $g$  une forme modulaire de poids  $\ell$  et soit  $F$  une forme quasimodulaire de poids  $m$  et profondeur 1. S'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[T, U, V]$  tel que  $P(f, g, F) = 0$  alors il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[U, V]$  tel que  $Q(f, g) = 0$ .

*Démonstration.* Il existe une forme modulaire non nulle  $r$  de poids  $m - 2$  telle que

$$\left( \begin{matrix} F \\ m \end{matrix} \middle| \gamma \right) = F + rX(\gamma)$$

pour tout  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . par regroupement des termes de mêmes poids et en utilisant le théorème 128, on peut supposer que  $P$  est de la forme

$$P = \sum_{\substack{a,b,c \\ ka+\ell b+mc=K}} p(a, b, c) T^a U^b V^c$$

pour un entier pair  $K$ . Si on définit

$$b(a, c) = \begin{cases} \frac{K - ka - mc}{\ell} & \text{si cette quantité est entière} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a

$$P = \sum_{a,c} p(a, b(a, c), c) T^a U^{b(a,c)} V^c.$$

On note  $C_0$  le degré en  $V$  de  $P$ , c'est-à-dire le plus grand entier tel que le polynôme

$$\sum_a p(a, b(a, C_0), C_0) T^a U^{b(a,C_0)}$$

ne soit pas le polynôme nul. Si  $C_0$  n'existe pas, on pose  $Q = P$ .

Pour tout  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ , on a  $P(f, g, F)(\gamma z) = 0$ . Ceci implique

$$P\left(\left(\begin{matrix} f \\ k \end{matrix} \middle| \gamma\right), \left(\begin{matrix} g \\ \ell \end{matrix} \middle| \gamma\right), \left(\begin{matrix} F \\ m \end{matrix} \middle| \gamma\right)\right) = 0$$

et donc  $P(f, g, F + rX(\gamma)) = 0$ . Cette égalité devient

$$\sum_{j=0}^{C_0} r^j X(\gamma)^j \sum_{\substack{a,c \\ j \leq c \leq C_0}} \binom{c}{j} p(a, b(a, c), c) f^a g^{b(a,c)} F^{c-j} = 0.$$

Grâce au lemme 117, on en déduit

$$\sum_{\substack{a,c \\ j \leq c \leq C_0}} \binom{c}{j} p(a, b(a, c), c) f^a g^{b(a,c)} F^{c-j} = 0$$

pour tout  $j$ . Le choix de  $j = C_0$  (qui fixe  $c = C_0$ ) donne  $Q(f, g) = 0$  avec

$$Q = \sum_a p(a, b(a, C_0), C_0) T^a U^{b(a, C_0)}$$

et ce polynôme est non nul par construction de  $C_0$ . □

*Démonstration de la proposition 177.* Soit  $f$  une forme modulaire de poids  $k$  et  $P$  un polynôme tel que  $P(f, Df, D^2f) = 0$ . Puisque

$$D^2f = \frac{1}{kf} [\partial_2 f - (k+1)(Df)^2],$$

la fraction rationnelle

$$P\left(X, Y, \frac{Z - (k+1)Y^2}{kX}\right)$$

annule  $(f, Df, \partial_2 f)$ . Son numérateur est donc un polynôme annulant  $(f, Df, \partial_2 f)$ . Grâce au lemme 178, on en déduit l'existence d'un polynôme annulant  $(f, \partial_2 f)$ . Grâce à la proposition 157, soit ce polynôme, et donc  $P$ , est nul, soit la fonction

$$h = \frac{(\partial_2 f)^k}{f^{2k+4}}$$

est constante. On montre maintenant que  $h$  n'est pas constante. Soit  $n_0$  le plus petit entier non nul tel que  $\widehat{f}(n_0) \neq 0$ .

1) Si  $f$  est parabolique, alors

$$h = -\frac{n_0^{2k}}{\widehat{f}(n_0)^4} e^{-8i\pi n_0 z} (1 + O(e^{2i\pi z}))$$

n'est pas constante.

2) Si  $f$  n'est pas parabolique alors, comme  $\partial_2 f$  est parabolique, si  $h$  est contante, on a  $\partial_2 f = 0$ . C'est impossible car

$$\partial_2 f = kn_0^2 \widehat{f}(0) \widehat{f}(n_0) e^{2i\pi n_0 z} + O(e^{2i\pi(n_0+1)z}).$$

□

### 3.5.5) Crochets de Rankin-Cohen et formes presque holomorphes

## 3.6 Autour de l'équation de Chazy

*c.f. documents marios?*

En cours de rédaction

## Chapitre 4

# Le théorème des nombres premiers

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème de nombres premiers avec majoration du reste. Nous suivons essentiellement la présentation d'Ellison & Mendès-France dans [10].

### **4.1** Préliminaire : notation en théorie analytique des nombres

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles définies sur un ensemble  $E$ , on écrit

$$f(u) \ll g(u)$$

s'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall u \in E \quad |f(u)| \leq Cg(u).$$

On écrit

$$f(u) \ll g(u) \quad (u \rightarrow +\infty)$$

s'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $C > 0$  tel que

$$\forall u \in E \quad u > u_0 \implies |f(u)| \leq Cg(u).$$

Enfin, si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions définies sur  $E$ , on écrit

$$f = g + O(h)$$

si

$$f - g \ll |h|.$$

Soit  $f$  et  $g$  définies sur  $[a, +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que le quotient  $f/g$  est continu sur  $[a, +\infty[$  et que  $f \ll g$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Il existe donc  $x_0$  et  $C_1 > 0$  tels que  $|f(x)| \leq C_1 g(x)$  pour tout  $x > x_0$ . Or,  $f/g$  est continue sur le compact  $[a, x_0]$ , il existe donc  $C_2$  tel que

$$\forall x \in [a, x_0] \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2.$$

On en déduit

$$\forall x \in [a, +\infty[ \quad |f(x)| \leq \max(C_1, C_2)g(x)$$

autrement dit  $f(x) \ll g(x)$ . Autrement dit, sous les bonnes hypothèses de continuité, démontrer une majoration « pour  $x$  assez grand » équivaut à la montrer pour tout  $x$  dans le domaine de définition. Cette remarque sera plusieurs fois utilisée sans mention dans la suite.

## 4.2 La fonction Zeta de Riemann

### 4.2.1) Définition et prolongement holomorphe

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Puisque

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}},$$

cette série converge normalement sur tout compact du demi-plan  $\operatorname{Re} s > 1$ . Cette série est reliée à l'ensemble  $\mathcal{P}$  des nombres premiers par le résultat suivant.

**Théorème 179** (Développement eulérien)– Pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re} s > 1$ , on a

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

*Démonstration.* On note que

$$\left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = 1 + \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{vs}}.$$

De plus, la série

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{vs}}$$

converge normalement sur tout compact de  $\operatorname{Re} s > 1$ . En effet, si  $\sigma_0 > 1$ , et si  $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$ , on a

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \left\| \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{vs}} \right\|_{\infty} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{\sigma_0}} \frac{1}{1 - p^{-\sigma_0}} \leq \left( 1 - \frac{1}{2^{\sigma_0}} \right)^{-1} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^{\sigma_0}} \leq \left( 1 - \frac{1}{2^{\sigma_0}} \right)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}.$$

Le produit infini définit donc une fonction holomorphe sur  $\text{Re } s > 1$ . Par ailleurs, en notant

$$\mathcal{E}(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} : (p \mid n \text{ et } p \in \mathcal{P}) \Rightarrow p \leq \mathbb{N}\}$$

l'ensemble des entiers<sup>(a)</sup> dont les diviseurs premiers valent au plus  $\mathbb{N}$  on a

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq \mathbb{N}}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \in \mathcal{E}(\mathbb{N})} \frac{1}{n^s}.$$

Puisque  $\mathcal{E}(\mathbb{N})$  contient  $\{1, 2, \dots, \mathbb{N}\}$  on a

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \in \mathcal{E}(\mathbb{N})} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{E}(\mathbb{N})} \frac{1}{n^{\text{Re } s}} \leq \sum_{n=\mathbb{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\text{Re } s}}.$$

On obtient le résultat énoncé en faisant tendre  $\mathbb{N}$  vers l'infini.  $\square$

On définit  $\Gamma_{\mathbb{R}}(z) = \pi^{-z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ . Afin d'étudier les propriétés de prolongement de  $\zeta$ , on définit

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = 2\pi(s-1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+2) \zeta(s).$$

**Théorème 180**– La fonction  $\xi$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et vérifie l'équation fonctionnelle  $\xi(s) = \xi(1-s)$ .

*Démonstration.* On définit la fonction  $\theta$  par

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

pour tout  $t > 0$ . C'est une série de classe  $C^\infty$  puisque pour tout entier  $k \geq 0$  la série des dérivées d'ordre  $k$  de  $t \mapsto e^{-\pi n^2 t}$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$ . La formule sommatoire de Poisson conduit alors à

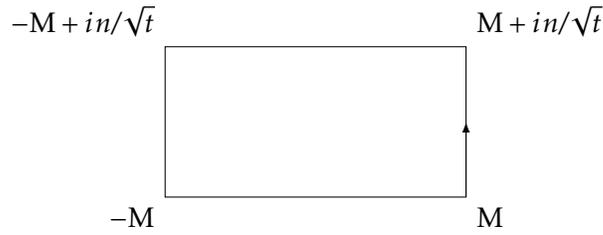
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi n x} dx.$$

On calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi n x} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi n^2/t} \int_{-\infty+i n/\sqrt{t}}^{+\infty+i n/\sqrt{t}} e^{-\pi u^2} du.$$

Pour évaluer cette intégrale, on intègre  $u \mapsto e^{-\pi u^2}$  sur le contour de la figure 4.1. La contribution sur les deux verticales tendant vers 0 lorsque  $M$  tends vers  $+\infty$ , on trouve

$$\int_{-\infty+i n/\sqrt{t}}^{+\infty+i n/\sqrt{t}} e^{-\pi u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du = 1.$$

FIGURE 4.1 – Contour d'intégration de  $u \mapsto e^{-u^2}$ 

On a donc

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right). \quad (4.1)$$

En utilisant la représentation intégrale de  $\Gamma$ , on écrit

$$\frac{1}{s(s-1)} \xi(s) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t}{\pi n^2}\right)^{s/2} e^{-t} \frac{dt}{t}$$

qui nous conduit à

$$\frac{1}{s(s-1)} \xi(s) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{s/2} \frac{du}{u}.$$

Utilisant (4.1), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\theta(u) - 1) u^{s/2} \frac{du}{u} &= \int_0^1 (u^{-1/2} \theta(u^{-1}) - 1) u^{s/2} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^{+\infty} (\theta(t) t^{(1-s)/2} - t^{-s/2}) \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{+\infty} (\theta(t) - 1) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{2}{1-s} - \frac{2}{s}. \end{aligned}$$

On a finalement

$$\xi(s) = 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} (\theta(t) - 1) (t^{(1-s)/2} + t^{s/2}) \frac{dt}{t}. \quad (4.2)$$

Cette égalité a été établie pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . Mais, puisque

$$|\theta(t) - 1| = 2e^{-\pi t} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi(n^2-1)t} \right) \leq 2e^{-\pi t} \left( 1 + \frac{e^{-2\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \right),$$

on a pour tout  $t \geq 1$  la majoration

$$|\theta(t) - 1| \leq 3e^{-\pi t}. \quad (4.3)$$

a. Noter que cet ensemble contient 1

Il en résulte que l'intégrale de (4.2) converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$  puis que le membre de droite de (4.2) définit une fonction entière définissant un prolongement holomorphe de  $\xi$  qu'on continue à noter  $\xi$ . L'équation fonctionnelle se lit alors directement sur (4.2).  $\square$

**Corollaire 181**– *La fonction  $\zeta$  admet un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$ , holomorphe en dehors d'un unique pôle simple en 1 de résidu 1.*

*Démonstration.* On a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{2\pi\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2)} \xi(s)$$

et les fonctions  $s \mapsto \Gamma_{\mathbb{R}}(s/2)^{-1}$  et  $\xi$  sont entières. Le point  $s = 1$  est donc l'unique pôle éventuel. Son résidu est 1 puisque  $\Gamma_{\mathbb{R}}(3) = (2\pi)^{-1}$  et  $\xi(1) = 1$  d'après (4.2).  $\square$

On évalue aisément  $\zeta(0)$ . En effet, de (4.2), on tire  $\xi(0) = 1$  et donc

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2\pi\Gamma_{\mathbb{R}}(2)} = -\frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

#### 4.2.2) Étude des zéros

De l'holomorphie de  $\xi$  sur  $\mathbb{C}$  alors que  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  a des pôles en les entiers négatifs ou nuls pairs, on déduit que  $\zeta$  s'annule aux entiers strictement négatifs pairs.

**Lemme 182**– *La fonction  $\zeta$  s'annule en tous les éléments de  $-2\mathbb{N}^*$ . Ces points d'annulation sont appelés zéros triviaux de  $\zeta$ . Ce sont exactement les points d'annulation de  $s \mapsto \Gamma_{\mathbb{R}}(s+2)^{-1}$ .*

Sur le demi plan  $\operatorname{Re} s > 1$ , l'écriture en produit eulérien implique que  $\zeta$  ne s'annule pas. De l'équation fonctionnelle on déduit que

$$\zeta(s) = \frac{s}{1-s} \Gamma_{\mathbb{R}}(3-s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+2)^{-1} \zeta(1-s) \quad (4.5)$$

de sorte que les seuls zéros de  $\zeta$  sur le demi plan  $\operatorname{Re} s < 0$  sont les zéros triviaux. Les zéros non triviaux de  $\zeta$  sont donc tous dans la région  $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$  qu'on appelle *bande critique*.

L'équation fonctionnelle implique que les zéros non triviaux de  $\zeta$  sont symétriques par rapport à  $1/2$ . D'autre part, on déduit de (4.2) que

$$\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s}).$$

Si  $\rho$  est un zéro de  $\zeta$ , il en est donc de même pour  $\bar{\rho}$ . L'axe  $\operatorname{Im} s = 0$  est donc un axe de symétrie des zéros de  $\zeta$ . Par composition, l'axe  $\operatorname{Re} s = 1/2$  est un axe de symétrie des zéros non triviaux. On a donc montré le résultat suivant, résumé par la figure 4.2.

**Proposition 183**– *L'ensemble  $Z(\zeta)$  des zéros non triviaux de  $\zeta$  est un sous-ensemble de la bande critique la bande critique  $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ . Il est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et par rapport au point  $1/2$ . C'est l'ensemble de tous les zéros de  $\xi$ .*

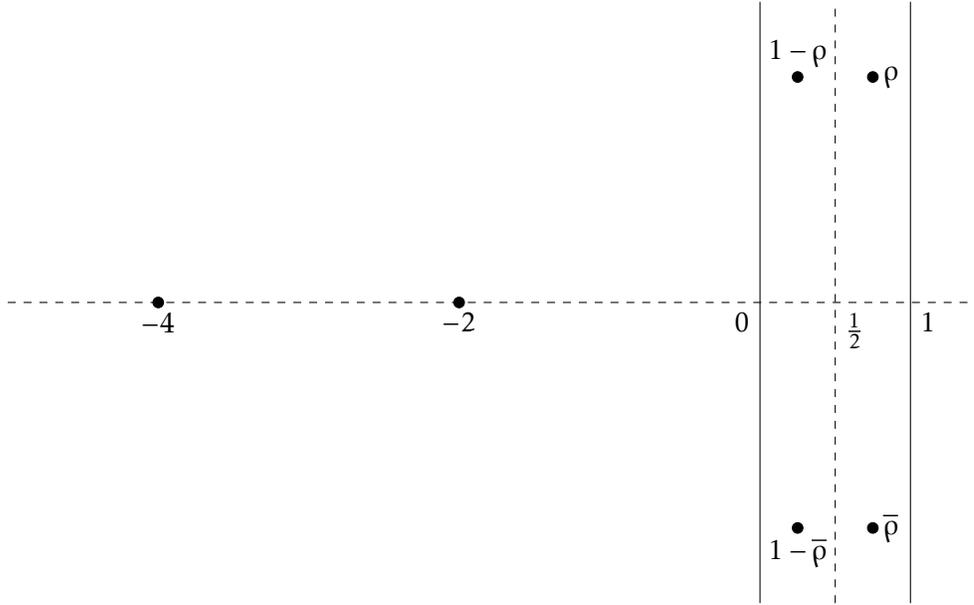


FIGURE 4.2 – Les zéros de  $\zeta$

Sauf mention du contraire,  $Z(\zeta)$  désigne le multiensemble des zéros non triviaux de  $\zeta$  répétés avec multiplicité. En particulier

$$\sum_{\rho \in Z(\zeta)} f(\rho) = \sum_{\substack{\rho \in \mathbb{C} \\ 0 \leq \text{Re } \rho \leq 1 \\ \zeta(\rho) = 0}} \text{ord}_{\rho}(\zeta) f(\rho), \quad \prod_{\rho \in Z(\zeta)} f(\rho) = \prod_{\substack{\rho \in \mathbb{C} \\ 0 \leq \text{Re } \rho \leq 1 \\ \zeta(\rho) = 0}} f(\rho)^{\text{ord}_{\rho}(\zeta)}.$$

**Proposition 184**– La fonction  $\zeta$  prend des valeurs réelles et strictement négatives sur le segment réel  $]0, 1[$ . En particulier, elle ne s’y annule pas.

*Démonstration.* Puisque  $\zeta(0) = -1/2$  il suffit de montrer le résultat réel sur  $]0, 1[$ . Pour  $\text{Re } s > 1$ , on a

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}. \tag{4.6}$$

Les sommes partielles  $\sum_{n=1}^N (-1)^n$  étant bornées, la série de terme général  $(-1)^n n^{-s}$  définit une fonction holomorphe sur  $\text{Re } s > 0$ . Par unicité du développement holomorphe de  $\zeta$  – et donc de  $s \mapsto (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$  – on déduit que (4.6) est vraie dès que  $\text{Re } s > 0$ . Soit  $\sigma \in ]0, 1[$ . La série de terme général  $(-1)^n n^{-\sigma}$  est alternée, à terme général tendant vers 0 en décroissant en valeur absolue. On a alors

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\sigma}} = 1 + R \quad \text{avec } |R| \leq \frac{1}{2^{\sigma}}.$$

En particulier

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\sigma} > 0$$

et donc  $\zeta(\sigma) < 0$ . □

On montre ensuite que  $\zeta$  ne s'annule pas sur la droite  $\operatorname{Re} s = 1$ . Pour cela, on commence par définir un « logarithme » de  $\zeta$ .

**Proposition 185**– Définissons la série

$$D(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{v} p^{-vs}.$$

Cette série normalement convergente sur tout compact de  $\operatorname{Re} s > 1$  définit une fonction holomorphe sur  $\operatorname{Re} s > 1$  et vérifie

$$e^{D(s)} = \zeta(s).$$

En particulier

$$D'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pour  $\operatorname{Re} s > 1$ .

*Démonstration.* On note

$$u_p(s) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{v} p^{-vs}.$$

Cette série converge normalement sur tout compact de  $\operatorname{Re} s > 1$ , elle définit donc une fonction holomorphe sur  $\operatorname{Re} s > 1$ . Par ailleurs, si  $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0 > 1$  alors

$$\|u_p\|_\infty \leq \frac{1}{p^{\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)^{-1} \leq \frac{2}{p^{\sigma_0}}$$

de sorte que la série de fonctions de terme général  $u_p$  converge normalement sur  $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$ . Ceci implique l'holomorphie de  $D$  sur  $\operatorname{Re} s > 1$ . Supposons  $s = \sigma \in \mathbb{R}$  avec  $\sigma > 1$ . Alors,

$$u_p(\sigma) = -\log\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)$$

où  $\log$  est le logarithme usuel sur  $\mathbb{R}^+$ . On a alors

$$D(\sigma) = \log \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1}$$

puis  $e^{D(\sigma)} = \zeta(\sigma)$ . Les fonctions  $e^D$  et  $\zeta$  sont holomorphes sur  $\operatorname{Re} s > 1$  et coïncident sur l'intervalle réel  $]1, +\infty[$ . Elles sont donc égales. □

*Remarque 186*– En prenant la norme de l'égalité  $e^{D(s)} = \zeta(s)$  puis le logarithme réel de l'égalité obtenue, on a

$$\operatorname{Re} D(s) = \log|\zeta(s)|$$

pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . D'autre part, en dérivant la série définissant  $D$ , on trouve

$$D'(s) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{\log(p)}{p^{vs}}.$$

On a donc

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{4.7}$$

où  $\Lambda$  est la *fonction de Von Mangoldt* définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^v \text{ avec } p \in \mathcal{P} \text{ et } v \in \mathbb{N}^*; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que la définition de  $D$  se récrit alors

$$D(s) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} \frac{1}{n^s}. \tag{4.8}$$

**Lemme 187**– Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs ou nuls tels que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

converge pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . Si

$$Z(s) = \exp \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \right)$$

alors, pour tous réels  $\sigma > 1$  et  $t$  on a

$$|Z(\sigma + it)|^4 |Z(\sigma + 2it)| |Z(\sigma)|^3 \geq 1.$$

*Démonstration.* Si  $a \in \mathbb{C}$  est de norme 1 on a

$$(a + \bar{a})^4 = a^4 + \bar{a}^4 + 4(a^2 + \bar{a}^2) + 6$$

d'où on tire

$$\operatorname{Re}(a^4) + 4 \operatorname{Re}(a^2) + 3 \geq 0.$$

On applique cette inégalité à  $a = n^{-it/2}$  pour obtenir, après multiplication par le réel positif  $n^{-\sigma} a_n$  puis sommation l'inégalité

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+2it}} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}} \right) \geq 0. \tag{4.9}$$

□

La série D construite proposition 185 est à coefficients positifs ainsi que le montre l'équation (4.8). On peut donc écrire

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| (\zeta(\sigma)(\sigma - 1))^3 \geq \frac{1}{\sigma - 1} \quad (4.10)$$

pour tout  $\sigma > 1$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ . Supposons l'existence de  $t \neq 0$  tel que  $\zeta(\sigma + it) = 0$ . Alors,

$$\frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} = \frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta'(\sigma + it)$$

de sorte que le membre de gauche de (4.10) converge vers

$$|\zeta(1 + it)|^4 |\zeta(1 + 2it)|$$

lorsque  $\sigma$  tend vers 1 par valeurs supérieures. On en déduit la non annulation de  $\zeta$  sur l'axe  $Re s = 1$ . Il résulte ensuite de (4.5) et de (4.4) que  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $Re s = 0$ . On a donc prouvé la proposition suivante.

**Proposition 188**– La fonction  $\zeta$  ne s'annule ni sur l'axe  $Re s = 0$  ni sur l'axe  $Re s = 1$ .

Afin d'obtenir une expression de  $\zeta$  relative à ses zéros, on établit le résultat fondamental suivant.

**Théorème 189**– La fonction  $\xi$  est d'ordre au plus 1.

*Démonstration.* On note  $\sigma = Re s$ . En utilisant (4.2) et (4.3) on obtient

$$\begin{aligned} |\xi(s)| &\leq 1 + 3(1 + |s|)^2 \int_1^{+\infty} e^{-t} (t^{\sigma/2} + t^{(1-\sigma)/2}) \frac{dt}{t} \\ &\leq 1 + 6(1 + |s|)^2 \Gamma\left(\frac{1 + |\sigma|}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

La formule de Stirling l'existence de  $C > 0$  telle que, pour tout  $\sigma > 0$  on a

$$\Gamma\left(\frac{1 + |\sigma|}{2}\right) \leq C \exp\left(|\sigma| \log\left(\frac{1 + |\sigma|}{2}\right)\right).$$

Ainsi, pour tout  $s$  tel que  $Re s > 1$ , on a

$$\Gamma\left(\frac{1 + |\sigma|}{2}\right) \leq C \exp\left(|s| \log\left(\frac{1 + |s|}{2}\right)\right).$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $K(\varepsilon) > 0$  telle que pour tout  $s$  tel que  $Re s > 1$ , on a

$$2 \log(1 + |s|) + |s| \log\left(\frac{1 + |s|}{2}\right) \leq K(\varepsilon) |s|^{1+\varepsilon/2}.$$

On a donc

$$|\xi(s)| \leq 1 + 6C e^{K(\varepsilon)|s|^{1+\varepsilon/2}} \leq (1 + 6C) e^{K(\varepsilon)|s|^{1+\varepsilon/2}}$$

et  $\xi$  est d'ordre au plus 1. □

**Corollaire 190**– Pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a

$$\xi(s) = ae^{bs} \prod_{\rho \in Z(\zeta)} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

avec  $a = 1$  et  $b = \xi'(0)$ . Le produit converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

*Remarque 191*– On peut montrer que

$$b = \log(2) + \log \sqrt{\pi} - 1 - \frac{1}{2}\gamma, \tag{4.12}$$

où  $\gamma = -\Gamma'(1)$  est la constante d'Euler.

On va maintenant évaluer le nombre de zéros dans la bande critique en étudiant

$$N(T) = \#\{\rho \in Z(\zeta) : |\operatorname{Im} \rho| \leq T, \zeta(\rho) = 0\}.$$

Il s'agit en fait d'un multiensemble, les zéros étant comptés avec multiplicité.

**Proposition 192**– Il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $T \geq 2$ , on a

$$N(T+1) - N(T) \leq K \log T.$$

*Démonstration.* De la convergence normale sur tout compact de  $\mathbb{C}$  de la série

$$\sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} - 1 \right)$$

on déduit celle de la série

$$\sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho} \right)$$

sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus Z(\zeta)$  vers la dérivée logarithmique de

$$\prod_{\rho \in Z(\zeta)} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}.$$

On a donc

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{s}{2} + 1 \right) - b - \log \sqrt{\pi}. \tag{4.13}$$

Soit  $\sigma_0 < \sigma_1$ . On note

$$B(\sigma_0, \sigma_1) = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_1, |\operatorname{Im} s| \geq 2\}.$$

Pour tout  $s \in B(\sigma_0, \sigma_1)$  on a

$$\left| \frac{1}{s-1} - b - \log \sqrt{\pi} \right| \leq \frac{1}{2} + |b| + \log \sqrt{\pi}.$$

D'autre part, si  $s \in B(\sigma_0, \sigma_1)$  alors  $|\arg s| \leq \pi - \delta$  avec  $\delta = \arctan(2/(|\sigma_0| + 1))$ . On peut donc utiliser le développement asymptotique de  $\Gamma'/\Gamma$  pour trouver  $C_0$  tel que, pour tout  $s \in B(\sigma_0, \sigma_1)$  on ait

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} - \log \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \right| \leq C_0.$$

Or

$$\operatorname{Re} \log \left( \frac{s}{2} + 1 \right) = \log \left| \frac{s}{2} + 1 \right| = \log |Im s| + \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\operatorname{Re} s + 2}{Im s} \right)^2 \right) - \log 2.$$

Comme de plus,

$$\left| \operatorname{Im} \log \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \right| \leq \pi,$$

il existe  $C_1$  tel que, pour tout  $s \in B(\sigma_0, \sigma_1)$  on ait

$$\left| \log \left( \frac{s}{2} + 1 \right) - \log |Im s| \right| \leq C_1$$

puis

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \log |Im s| \right| \leq C_2 \quad (4.14)$$

avec  $C_2 = C_0 + C_1 + 1/4 + |b| + \log \sqrt{\pi}$ . Choisissons  $s = 2 + it$  avec  $|t| > 2$ . Grâce à (4.7) on a

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(2 + it) \right| = \left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^{2+it} - 1} \right| \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\log p}{p^2 - 1}.$$

Il existe donc  $C_3$  tel que, pour tout  $t$  tel que  $|t| \geq 2$  on ait

$$\left| \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{2 + it - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \log |t| \right| \leq C_3$$

puis

$$\left| \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{2 + it - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right| \leq C_4 \log |t|$$

avec  $C_4 = 2C_3 + 1$  et

$$\left| \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \operatorname{Re} \frac{1}{2 + it - \rho} + \operatorname{Re} \frac{1}{\rho} \right) \right| \leq C_4 \log |t|.$$

Or,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2+it-\rho} = \frac{2-\operatorname{Re} \rho}{(2-\operatorname{Re} \rho)^2 + (t-\operatorname{Im} \rho)^2} > 0$$

et

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{Re} \rho}{|\rho|^2} > 0$$

donc

$$0 < \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{2-\operatorname{Re} \rho}{(2-\operatorname{Re} \rho)^2 + (t-\operatorname{Im} \rho)^2} \leq C_4 \log |t|$$

et donc, pour  $t$  satisfaisant  $|t| \geq 2$ , on a

$$\sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{1}{4+(t-\operatorname{Im} \rho)^2} \leq C_4 \log |t|. \quad (4.15)$$

Par positivité, pour tout  $T > 2$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{1}{4+(T-\operatorname{Im} \rho)^2} &\geq \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ T < \operatorname{Im} \rho \leq T+1}} \frac{1}{4+(T-\operatorname{Im} \rho)^2} \\ &\geq \frac{1}{5} \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ T < \operatorname{Im} \rho \leq T+1}} 1 = \frac{1}{10} (N(T+1) - N(T)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $N(T+1) - N(T) \leq 10C_4 \log T$ . □

*Remarque 193* - Puisque  $N(2)$  est fini, la proposition 192 implique  $N(T+1) - N(T) \leq K \log(T+2)$  pour tout  $T \geq 0$ .

En écrivant, pour  $T \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} N(T) &\leq N(2) + \sum_{t=1}^{\lfloor T \rfloor} (N(t+1) - N(t)) \\ &\leq N(2) + \sum_{t=1}^{\lfloor T \rfloor} \log(t+1) \\ &\leq N(2) + KT \log(T+1). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 194**— Il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $T \geq 0$  on a

$$N(T) \leq KT \log(T+1).$$

La proposition *a priori* technique ci-dessous nous servira par la suite.

**Proposition 195**— Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $s \in \mathbb{C} \setminus Z(\zeta)$  différent de 1 vérifiant  $|\operatorname{Re} s| < 2$  et  $|\operatorname{Im} s| > 2$ , on ait

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1}} \frac{1}{s - \rho} \right| \leq C \log |\operatorname{Im} s|.$$

*Démonstration.* En utilisant (4.14) appliquée à  $s$  et  $2 + i \operatorname{Im} s$ , on trouve

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(2 + i \operatorname{Im} s) - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right) - 2 \log |\operatorname{Im} s| \right| \leq C_1.$$

On a, d'après (4.7), la majoration

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(2 + i \operatorname{Im} s) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} = C_2$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho| \geq 1}} \left| \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right| &\leq (2 - \operatorname{Re} s) \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho| \geq 1}} \frac{1}{|\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho|^2} \\ &\leq 4 \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho| \geq 1}} \frac{5}{4 + |\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho|^2} \\ &\leq 20 \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \frac{1}{4 + |\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho|^2} \\ &\leq 20D_3 \log |\operatorname{Im} s| \end{aligned}$$

d'après (4.15). Prenant  $C_3 = 2 + (C_1 + C_2 + 20D_3)/\log(2)$ , on obtient alors

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1}} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right) \right| \leq C_3 \log |\operatorname{Im} s|.$$

et il reste à majorer

$$\sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1}} \left| \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right|.$$

On a, lorsque  $|\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1$ , la majoration

$$\left| \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + (\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho)^2}$$

puis

$$\sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1}} \left| \frac{1}{2 + i \operatorname{Im} s - \rho} \right| \leq \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - \operatorname{Im} s| < 1}} \frac{1}{4 + (\operatorname{Im} s - \operatorname{Im} \rho)^2} \leq C_4 \log |\operatorname{Im} s|$$

d'après (4.15). □

On décrit ensuite une bande horizontale ne contenant aucun zéro triviaux de  $\zeta$  (on sait déjà que l'axe réel n'en contient pas).

**Proposition 196**– *La fonction  $\zeta$  n'a pas de zéros non triviaux dans la bande horizontale  $\{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} s| < 6\}$ .*

*Démonstration.* On applique (4.13) à  $s = \sigma$  réel strictement supérieur à 1. En particulier, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{1}{\sigma - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) &= \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sigma - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \\ &= \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{\sigma - \operatorname{Re} \rho}{(\sigma - \operatorname{Re} \rho)^2 + (\operatorname{Im} \rho)^2} + \frac{\operatorname{Re} \rho}{|\rho|^2} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{\sigma - \operatorname{Re} \rho}{(\sigma - \operatorname{Re} \rho)^2 + (\operatorname{Im} \rho)^2} + \frac{\operatorname{Re} \rho}{|\rho|^2} \right) \\ = \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) - b - \log \sqrt{\pi}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Soit  $\rho_m$  un zéro de partie imaginaire minimale en valeur absolue. Si  $\operatorname{Re} \rho_m = 1/2$  alors  $\rho_m$  et  $\bar{\rho}_m$  sont deux points distincts de  $Z(\zeta)$  et (4.16) conduit à

$$\frac{2\sigma - 1}{(\sigma - 1/2)^2 + (\operatorname{Im} \rho_m)^2} + \frac{1}{1/4 + (\operatorname{Im} \rho_m)^2} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) - b - \log \sqrt{\pi}.$$

On choisit alors  $\sigma = 2$ . Compte-tenu de (4.12) on trouve

$$\frac{3}{9/4 + (\operatorname{Im} \rho_m)^2} + \frac{1}{1/4 + (\operatorname{Im} \rho_m)^2} \leq 1 + \frac{\zeta'}{\zeta}(2) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2) - \log(2) - \log \pi + 1 + \frac{1}{2} \gamma$$

qui, puisque

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(2) = -0.570 \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2) = 0,423$$

conduit  $|\operatorname{Im} \rho_m| > 6,4$ . Supposons maintenant que  $\operatorname{Re} \rho_m \neq 1/2$ . Alors  $\rho_m, \overline{\rho_m}, 1 - \rho_m$  et  $1 - \overline{\rho_m}$  sont quatre éléments distincts de  $Z(\zeta)$  de même partie imaginaire en module. L'égalité (4.16) conduit alors à

$$4 \frac{\sigma - 1}{\sigma^2 + (\operatorname{Im} \rho_m)^2} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) - b - \log \sqrt{\pi}.$$

On choisit de nouveau  $\sigma = 2$  puis on obtient  $|\operatorname{Im} \rho_m| > 6,27$ . □

On peut maintenant établir une région sans zéro.

**Théorème 197**– Il existe  $C > 0$  tel que  $\zeta$  ne s'annule pas dans la région

$$\left\{ s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} s| > 6 \text{ et } \operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{35 \log |\operatorname{Im} s| + C} \right\} \cup \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} s| \leq 6\}.$$

*Démonstration.* Le point de départ est de nouveau l'inégalité (4.9) qui conduit, puisque les coefficients de  $-\zeta'/\zeta$  sont positifs, à

$$\operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) + 4 \operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) + 3 \operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right) \geq 0$$

pour tous  $\sigma > 1$  et  $t \in \mathbb{R}$ . L'égalité (4.16) fournit

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + 1 \right) - b - \log \sqrt{\pi}. \quad (4.17)$$

Sur  $[1, 2]$ , la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$$

est bornée. Il existe donc  $C_1 > 0$  tel <sup>(b)</sup> que

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} + C_1 \quad (4.18)$$

pour tout  $\sigma \in [1, 2]$ . On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) &= \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2} - \sum_{\rho \in Z(\zeta)} \left( \frac{\sigma - \operatorname{Re} \rho}{(\sigma - \operatorname{Re} \rho)^2 + (t - \operatorname{Im} \rho)^2} + \frac{\operatorname{Re} \rho}{|\rho|^2} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + i \frac{t}{2} + 1 \right) \right) - b - \log \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

b. La valeur de  $b$  donnée en (4.12) et la croissance de  $\Gamma'/\Gamma$  montrent qu'on peut prendre  $C_1 = 0$ .

Il existe des constantes  $C_2, C_3$  et  $C_4$  telles que, pour tout  $\sigma \in [1, 2]$  et  $|t| \geq 2$  on a

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + i \frac{t}{2} + 1 \right) \right) \right| &\leq \left| \log \left( \frac{\sigma}{2} + 1 + i \frac{t}{2} \right) \right| + C_2 \\ &\leq \log \left| \frac{\sigma}{2} + 1 + i \frac{t}{2} \right| + C_3 \\ &\leq \log |t| + C_4. \end{aligned}$$

Il existe donc  $C_5$  telle que, pour tout  $\rho_0 \in Z(\zeta)$ , tout  $\sigma \in [1, 2]$  et tout  $|t| \geq 2$  on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) &\leq -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sigma + it - \rho_0} \right) + \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2} + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\sigma}{2} + i \frac{t}{2} + 1 \right) \right) \\ &\quad - b - \log \sqrt{\pi} \\ &\leq -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sigma + it - \rho_0} \right) + \frac{1}{2} \log |t| + C_5. \end{aligned} \quad (4.19)$$

On en déduit l'existence de  $C_6$  telle que, pour tout  $\sigma \in [1, 2]$  et tout  $|t| \geq 2$  on a

$$\operatorname{Re} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right) \leq \frac{1}{2} \log |t| + C_6. \quad (4.20)$$

Le report dans (4.17) des inégalités (4.18), (4.19) et (4.20) fournit  $C_7$  telle que, pour tout  $\rho_0 \in Z(\zeta)$ , tout  $\sigma \in [1, 2]$  et tout  $|t| \geq 2$  on a

$$\operatorname{Re} \frac{4}{\sigma + it - \rho_0} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + \frac{5}{2} \log |t| + C_7.$$

On choisit  $t = \operatorname{Im} \rho_0$  (ce qui n'est pas limité par la contrainte  $|t| \geq 2$  grâce à la proposition 196) et on obtient

$$\operatorname{Re} \frac{4}{\sigma - \operatorname{Re} \rho_0} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + \frac{5}{2} \log |t| + C_7.$$

On choisit ensuite

$$\sigma = 1 + \frac{1}{5 \log |\operatorname{Im} \rho_0| + 2C_7}$$

qui est bien dans  $[1, 2]$  (car  $|\operatorname{Im} \rho_0| > 1$ ) pour trouver une constante  $C_8 > 0$  telle que, pour tout  $\rho_0 \in Z(\zeta)$  on a

$$\operatorname{Re} \rho_0 < 1 - \frac{1}{35 \log |\operatorname{Im} \rho_0| + C_8}.$$

Cela achève la démonstration en cours grâce à la proposition 196.  $\square$

### 4.3 Le théorème des nombres premiers

L'étude des zéros de  $\zeta$  permet d'obtenir des informations sur la fonction de comptage des nombres premiers :

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\}.$$

On commence par étudier la fonction intermédiaire  $\psi$  définie par

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{(p,v) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^* \\ p^v \leq x}} \log p.$$

**Théorème 198**— Il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $T \geq 2$  et tout  $x \geq 2T$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ , on a

$$\left| \psi(x) - x + \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im}(\rho)| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq C \frac{x}{T} \log(x) \log(T).$$

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps que  $T$  n'est pas la partie imaginaire d'un zéro de  $\zeta$ .

On a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} - \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} - \delta\left(\frac{x}{n}\right) \right]$$

pour tout  $\sigma > 1$ . Grâce à la formule de Perron, on en déduit

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} - \psi(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \min\left(1, \frac{1}{\pi T |\log \frac{x}{n}|}\right) \left(\frac{x}{n}\right)^\sigma.$$

On note que la série de droite converge puisque son sommande est majoré par

$$x^\sigma \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq x^\sigma \frac{\log(n)}{n^\sigma}.$$

On écrit cette somme comme  $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$  où  $\Sigma_1$  porte sur les  $n$  tels que  $|n-x| \leq \frac{x}{T}$  puis  $\Sigma_2$  porte sur les  $n$  tels que  $\frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}$  et enfin  $\Sigma_3$  porte sur les  $n$  tels que  $|n-x| > \frac{x}{2}$ . Pour  $\Sigma_1$ , on a

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \sum_{(1-\frac{1}{T})x \leq n \leq (1+\frac{1}{T})x} \Lambda(n) \left(\frac{T}{T-1}\right)^\sigma \\ &\leq \left(\frac{T}{T-1}\right)^\sigma \log\left(\left(1+\frac{1}{T}\right)x\right) \#\left\{n \in \mathbb{N}^* : \left(1-\frac{1}{T}\right)x \leq n \leq \left(1+\frac{1}{T}\right)x\right\}. \end{aligned}$$

La cardinal à évaluer est majoré par

$$\left[ \left(1 + \frac{1}{T}\right)x \right] - \left[ \left(1 - \frac{1}{T}\right)x \right] + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{T}\right)x - \left(1 - \frac{1}{T}\right)x + 1 \\ \leq 3 \frac{x}{T}$$

et, puisque  $T \geq 2$ , en supposant  $\sigma \in [1, 2]$ , on obtient

$$\Sigma_1 \leq 16 \frac{x}{T} \log(2x) \leq 24 \frac{x}{T} \log(x).$$

On majore maintenant  $\Sigma_2$ . Le théorème des accroissements finis donne  $c \in ]x, n[$  tel que

$$\left| \log \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x - n|}{c}.$$

On a donc

$$\Sigma_2 \leq \frac{1}{\pi T} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}}} \frac{\Lambda(n)}{|n-x|} \max(x, n) \left(\frac{x}{n}\right)^\sigma.$$

Sur le domaine de sommation de  $\Sigma_2$ , on a

$$\frac{x}{n} < 2 \quad \text{dans} \quad \left[ \frac{x}{2}, x - \frac{x}{T} \right] \quad \text{et} \quad \frac{x}{n} < \frac{T}{T+1} < 1 \quad \text{dans} \quad \left[ x + \frac{x}{T}, x + \frac{x}{2} \right]$$

et si  $n \geq x$ , alors  $n \leq \frac{3}{2}x$ . On a donc

$$\Sigma_2 \leq \frac{2^\sigma x}{2T} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}}} \frac{\Lambda(n)}{|n-x|} \\ \leq 2^{\sigma-1} \frac{x}{T} \log\left(\frac{3}{2}x\right) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}}} \frac{1}{|n-x|} \\ \leq 2^\sigma \frac{x}{T} \log(x) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}}} \frac{1}{|n-x|}.$$

On a

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{2} \leq n < (1 - \frac{1}{T})x}} \frac{1}{x-n} \leq \int_{x/2}^{(1 - \frac{1}{T})x+1} \frac{dt}{x-t} = \log \frac{x}{2} - \log\left(\frac{x}{T} - 1\right)$$

et

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (1 + \frac{1}{T})x < n \leq \frac{3}{2}x}} \frac{1}{n-x} \leq \int_{(1 + \frac{1}{T})x-1}^{\frac{3}{2}x} \frac{dt}{t-x} = \log \frac{3x}{2} - \log\left(\frac{x}{T} + 1\right)$$

d'où

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{x}{T} < |n-x| \leq \frac{x}{2}}} \frac{1}{|n-x|} \leq 2 \log(T) + \log \frac{3}{4} - \log \left(1 - \frac{T^2}{x^2}\right) \leq 2 \log T.$$

On a donc

$$\Sigma_2 \leq 2^{\sigma+1} \frac{x}{T} \log x \log T.$$

Ensuite,

$$\Sigma_3 \leq \frac{x^\sigma}{\pi T} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ |n-x| > x/2}} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma |\log \frac{x}{n}|}$$

et sur l'intervalle de sommation,  $|\log \frac{x}{n}| \geq \log \frac{3}{2}$  d'où

$$\Sigma_3 \leq \frac{1}{\pi \log(3/2)} \frac{x^\sigma}{T} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right).$$

La fonction  $-\frac{\zeta'}{\zeta}$  est méromorphe au voisinage de 1, avec un seul pôle en 1, ce pôle est simple et de résidu 1. Il existe donc  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$  tel que

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right| \leq \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma-1}$$

pour tout  $\sigma \in ]1, 1 + \varepsilon[$ . On a donc

$$\Sigma_3 \leq 2 \frac{x^\sigma}{T} \frac{1}{\sigma-1}.$$

On choisit  $\sigma = 1 + \frac{1}{\log x}$  et on obtient

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \leq 65 \frac{x}{T} \log x \log T$$

pour tout  $x > \exp(1/\varepsilon) = x_0$  c'est-à-dire

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} - \psi(x) \right| \ll \frac{x}{T} \log(x) \log(T)$$

si  $\sigma = 1 + \frac{1}{\log x}$  et  $x \geq x_0$ .

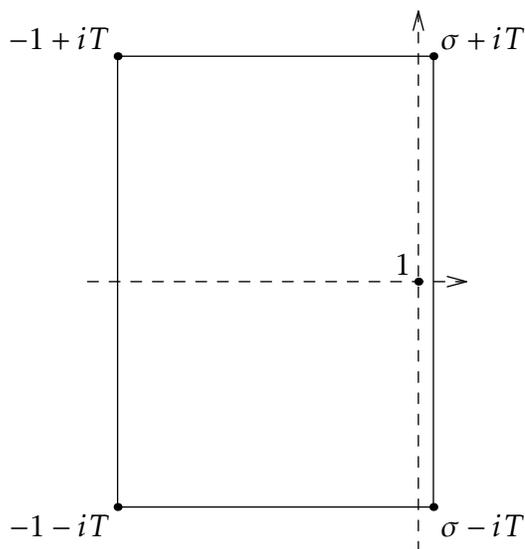
On évalue  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s}$  par intégration sur le contour donné figure 4.3.

Les pôles de  $s \mapsto -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s}$  sont 0 et 1 d'ordre 1, les zéros non triviaux de  $\zeta$ . On a

$$\operatorname{Res}_{s=1} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \right) = x, \quad \operatorname{Res}_{s=0} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \right) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(0)$$

et, si  $\zeta(\rho) = 0$ ,

$$\operatorname{Res}_{s=\rho} \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \right) = -\operatorname{ord}(\zeta) \frac{x^\rho}{\rho}.$$


 FIGURE 4.3 – Contour d'intégration de  $s \mapsto -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}$ 

On en déduit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s \frac{ds}{s} = x - \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$$

avec

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{\sigma} -\frac{\zeta'}{\zeta}(u+iT) \frac{x^{u+iT}}{u+iT} du, \quad \mathcal{I}_3 = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{\sigma} -\frac{\zeta'}{\zeta}(u-iT) \frac{x^{u-iT}}{u-iT} du = -\overline{\mathcal{I}_1}$$

et

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) \frac{x^{-1+it}}{-1+it} dt.$$

Puisque  $t \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) \frac{x^{-1+it}}{-1+it}$  est bornée sur le compact  $[-2, 2]$ , on a

$$\left| \int_{-2}^2 -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) \frac{x^{-1+it}}{-1+it} dt \right| \leq \int_{-2}^2 \left| -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) \frac{x^{-1+it}}{-1+it} \right| dt \ll 1,$$

puis

$$\left| \int_{-2}^T -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) \frac{x^{-1+it}}{-1+it} dt \right| \ll \frac{1}{x} \int_2^T \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - t| < 1}} \frac{1}{|-1+it-\rho|} \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_2^T \log(t) \frac{dt}{t}$$

par la proposition 195

$$\ll \frac{1}{x} \int_2^T (N(t) - N(t-1)) \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_2^T \log(t) \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \text{car } |-1 + it - \rho| &= \sqrt{(1 + \operatorname{Re} \rho)^2 + (t - \operatorname{Im} \rho)^2} \geq 1 \\ &\ll \frac{1}{x} \int_2^T \log(t) \frac{dt}{t} \ll \frac{1}{x} \log^2 T \ll 1, \end{aligned}$$

enfin

$$\int_{-T}^{-2} -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1 + it) \frac{x^{-1+it}}{-1 + it} dt = \int_2^T -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1 - it) \frac{x^{-1-it}}{-1 - it} dt = \overline{\int_2^T -\frac{\zeta'}{\zeta}(-1 + it) \frac{x^{-1+it}}{-1 + it} dt}$$

de sorte que  $|\mathcal{I}_2| \ll 1$ .

Toujours en utilisant la proposition 195, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_1| &\ll \frac{x}{T} \int_{-1}^{1+1/\log x} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(u + iT) \right| du \ll \frac{x}{T} \left( \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - T| < 1}} \int_{-1}^{1+1/\log x} \frac{1}{|u + iT - \rho|} du + \log T \right) \\ &\ll \frac{x}{T} \left( \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - T| < 1}} \frac{1}{|\operatorname{Im} \rho - T|} + \log T \right) \end{aligned}$$

Pour tout  $T \geq 2$  qui n'est pas partie imaginaire d'un zéro de  $\zeta$  et tout  $x \geq \max(x_0, 2T)$ , on a donc

$$\left| \psi(x) - x + \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \frac{x}{T} \left( \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho - T| < 1}} \frac{1}{|\operatorname{Im} \rho - T|} + \log x \log T \right). \quad (4.21)$$

Soit  $K > 0$  tel que  $N(T + 1) - N(T - 1) \leq K \log T$  pour tout  $T \geq 2$ . Soit  $T \geq 2$  qui n'est pas partie imaginaire d'un zéro de  $\zeta$  et  $x \geq \max(x_0, 2T)$ . Il y a au plus  $K \log T$  zéros de  $\zeta$  dont la partie imaginaire est comprise entre  $T - 1$  et  $T + 1$ . De plus, il existe au moins  $2K \log T$  bandes horizontales de largeur  $\frac{1}{4K \log T}$  dans la bande horizontale délimitée par les droites  $y = T - 1$  et  $y = T + 1$  (voir la figure 4.4). L'une de ces bandes ne contient donc pas de zéro de  $\zeta$ . Soit  $T'$  tel que la droite  $y = T'$  sépare cette bande en deux bandes horizontales de même largeur. Pour tout zéro  $\rho$  de  $\zeta$ , on a alors

$$|T' - \operatorname{Im} \rho| \geq \frac{1}{8K \log T}.$$

Appliquons alors (4.21) à  $T'$ . On trouve

$$\left| \psi(x) - x + \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho| < T'}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \frac{x}{T'} \left( (N(T + 1) - N(T - 1)) 8K \log T' + \log x \log T' \right) \ll \frac{x}{T} \log x \log T.$$

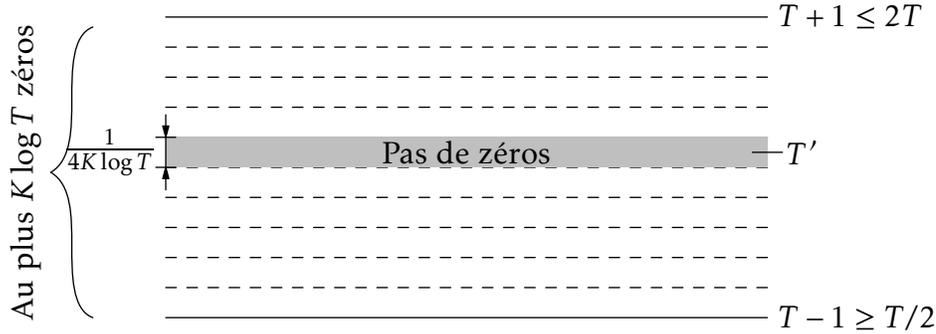


FIGURE 4.4 – Une bande sans zéros

Enfin,

$$\left| \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\text{Im } \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\text{Im } \rho| < T'}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ T' < |\text{Im } \rho| < T}} \frac{x}{T'} \leq \frac{x}{T'} (N(T) - N(T')) \leq \frac{x}{T'} (N(T) - N(T-1)) \tag{4.22}$$

$$\ll \frac{x}{T} \log T \tag{4.23}$$

donc

$$\left| \psi(x) - x + \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\text{Im } \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \frac{x}{T} \log x \log T.$$

Il reste à traiter le cas où  $T$  est une partie imaginaire de zéro de  $\zeta$ . On remplace  $T$  par  $T'$  comme précédemment et, l'erreur commise est la même qu'en (4.22). Le résultat est donc inchangé.  $\square$

**Théorème 199**– Il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $x \geq 2$ , on a

$$|\psi(x) - x| \leq Kx \exp\left(-\frac{1}{6} \sqrt{\log x}\right).$$

*Démonstration.* Si  $\rho$  est un zéro non trivial, le théorème 197 implique que

$$\text{Re } s \leq 1 - \frac{1}{35 \log |\text{Im } s| + C}$$

pour un réel  $C > 0$ . On a donc

$$\left| \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\text{Im } \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq x \exp\left(-\frac{\log x}{35 \log T + C}\right) \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\text{Im } \rho| < T}} \frac{1}{|\rho|}.$$

Or,

$$\sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho| < T}} \frac{1}{|\rho|} \leq \sum_{\substack{\rho \in Z(\zeta) \\ |\operatorname{Im} \rho| < T}} \frac{1}{|\operatorname{Im} \rho|} \leq \sum_{n=2}^{\lfloor T \rfloor} \frac{N(n+1) - N(n)}{n} \ll \sum_{n=2}^{\lfloor T \rfloor} \frac{\log n}{n} \ll \log^2 T$$

et donc le théorème 198 implique

$$|\psi(x) - x| \ll x \exp\left(-\frac{\log x}{35 \log T + C}\right) \log^2 T + \frac{x}{T} \log x \log T$$

On choisit  $T = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{35}} \sqrt{\log x}\right) \leq \frac{1}{2}x$  pour  $x$  suffisamment grand pour obtenir le résultat énoncé. On utilise un argument de compacité pour les petites valeurs de  $x$ .  $\square$

On définit alors

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} \log p$$

puis

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathcal{P} : p \leq x\}.$$

**Théorème 200**– Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \geq 2$ ,

$$|\theta(x) - x| \leq Cx \exp\left(-\frac{1}{6} \sqrt{\log x}\right)$$

et

$$\left| \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \leq Cx \exp\left(-\frac{1}{6} \sqrt{\log x}\right).$$

*Démonstration.* Pour établir la première inégalité, on compare  $\theta$  à  $\psi$  :

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{v=2 \\ p^v \leq x}}^{+\infty} \log p \leq \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq \sqrt{x}}} \log p \frac{\log x}{\log p} \leq \sqrt{x} \log x.$$

Le théorème 199 implique alors

$$|\theta(x) - x| \leq Cx \exp\left(-\frac{1}{6} \sqrt{\log x}\right).$$

Pour évaluer  $\pi$ , on la compare à

$$\Pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{\substack{p^v \leq x \\ v \geq 1}} \frac{1}{v} = \sum_{v=1}^{\lfloor \log x / \log 2 \rfloor} \frac{1}{v} \sum_{p \leq x^{1/v}} 1 = \sum_{v=1}^{\lfloor \log x / \log 2 \rfloor} \frac{1}{v} \pi(x^{1/v}).$$

On en déduit

$$|\Pi(x) - \pi(x)| \leq \frac{\log x}{\log 2} \pi(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{\log 2} \sqrt{x} \log x. \quad (4.24)$$

Par sommation d'Abel,

$$\Pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u \log^2 u} du$$

puis

$$\left| \Pi(x) - \frac{x}{\log x} - \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} \right| \leq \frac{|\psi(x) - x|}{\log x} + \int_2^x \frac{|\psi(u) - u|}{u \log^2 u} du$$

De plus,

$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} = -\frac{x}{\log x} + \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

donc

$$\left| \Pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \right| \leq \frac{|\psi(x) - x|}{\log x} + \int_2^x \frac{|\psi(u) - u|}{u \log^2 u} du + \frac{2}{\log 2}.$$

On note  $L(u) = \frac{1}{6} \sqrt{\log u}$ . Grâce au théorème 199, il existe  $K > 0$  tel que  $|\Psi(u) - u| \leq Kue^{-L(u)}$  pour tout  $u \geq 2$ . On a donc

$$\int_2^x \frac{|\psi(u) - u|}{u \log^2 u} du \leq K \int_2^x \frac{e^{\log u - L(u)}}{u \log^2 u} du.$$

Puisque  $u \mapsto \log u - L(u)$  croît sur  $[2, +\infty[$ , on a

$$\left| \Pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \right| \ll xe^{-L(x)} \int_2^x \frac{du}{u \log^2 u} \ll xe^{-L(x)}.$$

On a donc

$$\left| \Pi(x) - \int_2^{+\infty} \frac{du}{\log u} \right| \ll xe^{-L(x)}$$

puis

$$\left| \pi(x) - \int_2^{+\infty} \frac{du}{\log u} \right| \ll xe^{-L(x)}$$

grâce à (4.24). □

## Chapitre 5

# Fonctions L de formes modulaires

### 5.1 Fonctions L de formes modulaires

#### 5.1.1) Définition

Soit  $f \in \mathcal{S}_k$  on définit sa série de Dirichlet par

$$D(f, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

avec

$$\lambda_f(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{n^{(k-1)/2}}.$$

**Lemme 201**– Si  $f \in \mathcal{S}_k$ , la série de Dirichlet  $D(f, s)$  converge absolument sur le demi-plan  $\text{Re } s > 1$  et normalement sur tout compact de ce demi-plan. Elle définit donc une fonction holomorphe sur ce demi-plan.

*Démonstration.* Écrivons la décomposition de  $f$  dans la base des formes primitives de poids  $k$  :

$$f = \sum_{g \in \mathcal{H}_k^*} c(g)g.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , on a alors

$$\lambda_f(n) = \sum_{g \in \mathcal{H}_k^*} c(g)\lambda_g(n).$$

La majoration de Deligne (théorème 101) implique

$$\left| \sum_{g \in \mathcal{H}_k^*} c(g)\lambda_g(n) \right| \leq \sum_{g \in \mathcal{H}_k^*} |c(g)|\sigma_0(n).$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Le lemme 344 fournit alors  $C(\varepsilon)$  tel que

$$\left| \sum_{g \in \mathbb{H}_k^*} c(g) \lambda_g(n) \right| \leq C(\varepsilon) \sum_{g \in \mathbb{H}_k^*} |c(g)| n^\varepsilon.$$

Le résultat découle de cette inégalité grâce à la proposition 347.  $\square$

On donne une représentation intégrale qui permettra de prolonger analytiquement  $D(f, s)$  à  $\mathbb{C}$ .

**Lemme 202**– Soit  $f \in \mathcal{S}_k$ . On a

$$D(f, s) = \frac{(2\pi)^{s+(k-1)/2}}{\Gamma(s + \frac{k-1}{2})} \int_1^{+\infty} f(iy) \left[ y^{s+(k-1)/2} + i^k y^{1-s+(k-1)/2} \right] \frac{dy}{y}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) n^{-s} &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \left(\frac{y}{n}\right)^s e^{-y} \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^s e^{-y} \frac{dy}{y} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) \int_0^{+\infty} (2\pi u)^s e^{-2\pi n u} \frac{du}{u} \\ &= (2\pi)^s \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n) u^s e^{-2\pi n u} \frac{du}{u} \\ &= (2\pi)^s \int_0^{+\infty} f(iu) u^s \frac{du}{u}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma(s + \frac{k-1}{2})}{(2\pi)^{s+(k-1)/2}} D(f, s) = \int_1^{+\infty} f(iu) u^{s+(k-1)/2} \frac{du}{u} + \int_0^1 f(iu) u^{s+(k-1)/2} \frac{du}{u}.$$

Or

$$\int_0^1 f(iu) u^{s+(k-1)/2} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} f\left(-\frac{1}{iy}\right) y^{-s-(k-1)/2} \frac{dy}{y} = i^k \int_1^{+\infty} f(iy) y^{-s+(k+1)/2} \frac{dy}{y}$$

en utilisant la modularité de  $f$ .  $\square$

Dans la représentation intégrale (5.1), tant que 0 était une borne de l'intégrale, celle-ci ne convergeait que pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . En revanche, la convergence en  $+\infty$  était assurée pour toutes les valeurs de  $s$  grâce à la décroissance exponentielle de  $f$  (voir la majoration (2.7)). La modularité a permis de supprimer la borne 0. Puisque par ailleurs, la fonction  $1/\Gamma$  est entière (voir le corollaire 321) on a le corollaire suivant.

**Corollaire 203**– La fonction  $s \mapsto D(f, s)$  admet un prolongement en fonction entière.

Posons

$$D(f_\infty, s) = (2\pi)^{-s-(k-1)/2} \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right).$$

Le lemme 202 conduit à l'équation fonctionnelle suivante.

**Corollaire 204**— Soit  $f \in \mathcal{S}_k$ . On a l'équation fonctionnelle

$$D(f_\infty, s)D(f, s) = i^k D(f_\infty, 1-s)D(f, 1-s)$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}$ .

Le point  $s = \frac{1}{2}$  est donc un point de symétrie de l'ensemble des valeurs de  $s \mapsto D(f, s)$ . Cette remarque donne un intérêt particulier à la valeur  $D(f, \frac{1}{2})$ . On a le premier résultat suivant.

**Corollaire 205**— L'ordre d'annulation de  $D(f, s)$  en  $s = \frac{1}{2}$  est

- pair si  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- impair si  $k \equiv 2 \pmod{4}$ .

*Démonstration.* En dérivant<sup>(a)</sup>  $\ell$  fois l'équation fonctionnelle, on obtient (grâce à la formule de Leibniz)

$$\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} D^{(\ell-i)}(f_\infty, s) D^{(i)}(f, s) = i^k (-1)^\ell \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} D^{(\ell-i)}(f_\infty, 1-s) D^{(i)}(f, 1-s). \quad (5.2)$$

Si  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , on suppose que l'ordre d'annulation est au moins  $2n+1$ . Alors  $D^{(i)}(f, 1/2) = 0$  pour  $i \in \{0, \dots, 2n\}$ . L'équation (5.2) donne alors

$$D^{(2n+1)}(f, 1/2) = -D^{(2n+1)}(f, 1/2)$$

et donc  $D^{(2n+1)}(f, 1/2) = 0$ . L'ordre d'annulation ne peut donc être que pair. Lorsque  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , le raisonnement est le même.  $\square$

*Remarque 206*— En posant  $\Gamma_{\mathbb{R}}(z) = \pi^{-z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$  la formule de duplication de Legendre (voir la proposition 324) s'écrit

$$\Gamma(z) = \frac{(2\pi)^z}{2} \Gamma_{\mathbb{R}}(z) \Gamma_{\mathbb{R}}(z+1).$$

On a alors

$$D(f_\infty, s) = \frac{1}{2} \Gamma_{\mathbb{R}}\left(s + \frac{k-1}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{R}}\left(s + \frac{k+1}{2}\right).$$

a. On note  $s \mapsto D^{(j)}(f, s)$  la dérivée  $j^e$  de  $D(f, s)$ .

On suppose maintenant que  $f \in H_k^*$ . La multiplicativité des coefficients de Hecke permet d'utiliser la proposition 350 pour obtenir

$$D(f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=0}^{+\infty} X_v(\lambda_f(p)) p^{-vs}$$

si  $\operatorname{Re} s > 1$ . Le calcul de la série génératrice des polynômes de Tchebychef (A.7) implique alors

$$D(f, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

L'existence de ce *produit eulérien* implique que  $D(f, s)$  est une fonction L.

**Définition 207**– Si  $f \in H_k^*$  la fonction L de  $f$  est définie par

$$L(f, s) = D(f, s).$$

Cette fonction L est définie par une série de Dirichlet sur le demi-plan  $\operatorname{Re} s > 1$ , admet un prolongement en fonction entière, une équation fonctionnelle et un développement eulérien. On note  $L(f_\infty, s) = D(f_\infty, s)$  et  $\Lambda(f, s) = L(f_\infty, s)L(f, s)$ .

En particulier si  $\operatorname{Re} s > 1$  alors  $L(f, s) \neq 0$ . Il résulte donc de l'équation fonctionnelle que si  $\operatorname{Re} s < 0$  alors

$$\frac{L(f_\infty, s)}{L(f_\infty, 1-s)} L(f, s) \neq 0.$$

On en déduit que si  $\operatorname{Re} s < 0$  alors  $L(f, s) = 0$  (à un certain ordre) si et seulement si  $s$  est un pôle de

$$\frac{L(f_\infty, s)}{L(f_\infty, 1-s)} = (2\pi)^{-1+2s} \frac{\Gamma(1-s + \frac{k-1}{2})}{\Gamma(s + \frac{k-1}{2})}$$

(au même ordre). Puisque d'après le corollaire 321 la fonction  $1/\Gamma$  est entière, on en déduit que  $s$  est un pôle de  $\Gamma(1-s + \frac{k-1}{2})$ . Or les pôles de  $\Gamma$  sont simples et appartiennent à  $-\mathbb{N}$  (voir la proposition 317). Ainsi,

$$L(f, s) = 0 \text{ et } \operatorname{Re} s < 0 \iff s \in -\mathbb{N} - \frac{k-1}{2} \text{ et } s \text{ est un pôle simple.}$$

Les zéros de  $-\mathbb{N} - \frac{k-1}{2}$  s'appellent les *zéros triviaux*. Ce sont des zéros simples. Les autres zéros, dits *non triviaux*, sont tous dans la bande  $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ . L'équation fonctionnelle implique que ceux-ci sont symétriques par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . D'autre part la représentation intégrale de  $L(f, s)$  et le fait que les coefficients de Fourier de  $f$  sont réels impliquent

$$\overline{L(f, s)} = L(f, \bar{s}).$$

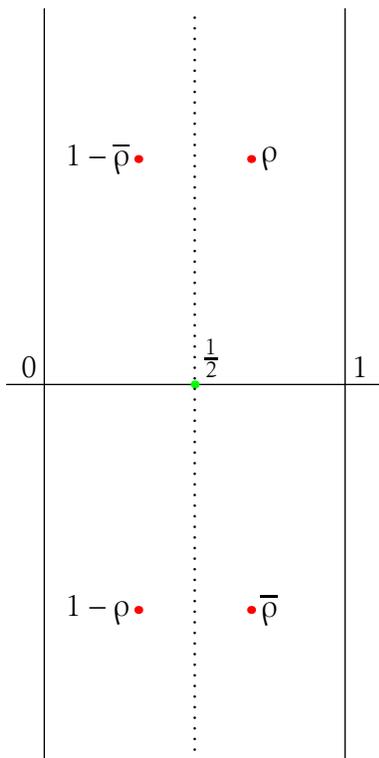


FIGURE 5.1 – Les zéros non triviaux des fonctions L de formes primitives

Les zéros non triviaux de  $L(f, s)$  sont donc symétriques par rapport à l'axe  $\text{Im } s = 0$  (voir la figure 5.1).

L'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de formes primitives prédit que pour toute forme primitive  $f$ , la fonction  $L(f, s)$  ne s'annule qu'en les zéros triviaux et sur la droite critique  $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ .

## Annexe A

# Compléments d'algèbre

### A.1 Série formelle

La notion de série formelle permet d'établir des égalités entre suite en manipulant leurs séries génératrices sans se préoccuper de domaine de convergence. Une série formelle d'un anneau  $A$  n'est rien d'autre qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ . L'ensemble  $A[[X]]$  de séries formelles est muni d'une structures d'anneau commutatif grâce aux opérations suivantes. Si  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux séries formelles, la somme  $a + b$  de  $a$  et  $b$  est la série formelle

$$a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et le produit  $ab$  de  $a$  et  $b$  est la série formelle

$$ab = \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

Avec cette structure, et en notant

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$$

on retrouve les formules d'addition et multiplication définies sur les séries. On calcule donc avec les séries formelles comme avec les séries.

Une série formelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est inversible si et seulement si  $a_0 \neq 0$ . Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est inversible, son inverse est la série formelle  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence par

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} \\ b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

*Exemple 208* - L'inverse de la série formelle  $1 - X$  est la série formelle

$$(1 - X)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} X^n.$$

Si  $\mathbb{K}$  est un corps, l'anneau  $\mathbb{K}[[X]]$  est une algèbre commutative sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 209** - Soit  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n X^n$  une série formelle. Sa dérivée est la série formelle

$$S' = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n X^n (n+1) s_{n+1} X^n.$$

La dérivation est un endomorphisme de  $A[[X]]$ . Si  $S$  et  $T$  sont deux séries formelles alors

$$(S + T)' = S' + T' \quad \text{et} \quad (ST)' = S'T + ST'.$$

*Exemple 210* - Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En dérivant le produit de  $S = (1 - X)^n$  et  $T = (1 - X)^{-n}$ , on trouve

$$(1 - X)^{-n'} = -n(1 - X)^{-n-1}.$$

Soit  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n X^n$  et  $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n X^n$  deux séries formelles. On voudrait définir la composée

$$S \circ T = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} t_m X^m \right)^n.$$

Pour garder nos habitudes de calculs sur les séries, il faudrait que cette série soit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} t_{m_1} \cdots t_{m_n} X^{m_1 + \dots + m_n}.$$

Pour tout entier  $n$ , le coefficient d'indice  $n$  est donc

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k \\ m_1 + \dots + m_k = n}} t_{m_1} \cdots t_{m_k}$$

et on a besoin que cette somme soit finie. Si  $t_0 \neq 0$ , elle ne sera pas finie pour certaine valeur de  $n$ . En revanche, si  $t_0 = 0$  seuls contribueront les  $m_i$  tels que  $m_i \geq 1$  et la condition  $m_1 + \dots + m_k = n$  donne donc  $k \leq n$ ; de plus, pour chaque valeur de  $k$  il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^{*k}$  tels que  $m_1 + \dots + m_k = n$ .

**Définition 211** - Soit  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n X^n$  et  $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n X^n$  deux séries formelles. On suppose  $t_0 = 0$ . La composée  $S \circ T$  est la série formelle

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$$

avec

$$u_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k \\ m_1 + \dots + m_k = n}} t_{m_1} \cdots t_{m_k}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . C'est la série obtenue en remplaçant dans la série  $S$  la variable  $X$  par  $T$ .

**Proposition 212**– Soit  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n X^n$  et  $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n X^n$  deux séries formelles. On suppose  $t_0 = 0$ . La dérivée de  $S \circ T$  est

$$(S \circ T)' = T' \cdot S' \circ T.$$

On définit quelques séries formelles usuelles.

**Définition 213**– La série formelle exponentielle est

$$\exp(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \cdot X^n.$$

**Proposition 214**– L'inverse de la série exponentielle est la série exponentielle composée avec  $-X$ :

$$\exp(X)^{-1} = \exp(-X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot X^n.$$

**Définition 215**– On note  $\ln(1 + X)$  la série formelle

$$\ln(1 + X) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot X^n.$$

**Proposition 216**– Dans l'anneau des séries formelles :

$$\exp(\ln(1 + X)) = 1 + X.$$

## A.2 Caractères

### A.2.1) Propriétés générales

On note  $\mathbb{U}$  le sous-groupe multiplicatif de  $\mathbb{C}^*$  des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

**Définition 217**– Un caractère d'un groupe  $G$  est un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $\mathbb{C}^*$ . Un caractère unitaire d'un groupe  $G$  est un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $\mathbb{U}$ .

Notons multiplicativement l'opération de  $G$  et  $e_G$  l'élément neutre. Un caractère de  $G$  est donc une application  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que  $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $G$ . Noter que même si  $G$  n'est pas commutatif, on a  $\chi(xy) = \chi(yx)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $G$ .

Si  $\chi$  est unitaire, on a

$$\chi(x^{-1}) = \chi(x)^{-1} = \overline{\chi(x)}$$

pour tout  $x \in G$ .

**Lemme 218**– *Un caractère d'un groupe fini est nécessairement unitaire.*

*Démonstration.* Si  $G$  est fini, notons  $|G|$  son ordre. Tout élément  $x$  de  $G$  vérifie  $x^{|G|} = e_G$  et donc  $\chi(x)^{|G|} = \chi(x^{|G|}) = \chi(e_G) = 1$ . On en tire  $|\chi(x)|^{|G|} = 1$  puis  $|\chi(x)| = 1$ .  $\square$

L'ensemble des caractères de  $G$  est un groupe multiplicatif commutatif, l'opération étant la multiplication héritée de celle de  $\mathbb{C}$ . L'élément neutre, noté  $\chi_0$ , est appelé *caractère trivial* du groupe

$$\begin{aligned} \chi_0 &: G \rightarrow \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto e_G. \end{aligned}$$

Si  $\chi$  est unitaire, on a  $\chi^{-1} = \bar{\chi}$  où

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \overline{\chi(x)}. \end{aligned}$$

**Définition 219**– *Le groupe commutatif des caractères d'un groupe  $G$  est appelé dual de Pontryagin de  $G$  et noté  $\widehat{G}$ .*

Dans la suite, on n'étudiera que le cas des groupes commutatifs finis. Les caractères sont alors tous unitaires. Ce sont des fonctions d'un ensemble fini dans un ensemble fini et  $\widehat{G}$  est donc fini.

### A.2.2) Une structure d'espace préhilbertien

Soit  $G$  un groupe commutatif fini. On note  $V$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $h \in G$ , on définit

$$\begin{aligned} \delta_h &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g = h; \\ 0 & \text{si } g \neq h. \end{cases} \end{aligned}$$

La famille  $(\delta_h : h \in G)$  est libre et elle engendre  $V$  : si  $v \in V$ , alors

$$v = \sum_{h \in G} v(h) \delta_h.$$

L'espace  $V$  a donc dimension  $|G|$ .

On munit  $V$  d'un produit scalaire hermitien :

$$\forall (u, v) \in V^2, \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g) \overline{v(g)}.$$

Nous montrons que  $\widehat{G}$  est une famille orthogonale pour ce produit scalaire hermitien. Si  $\chi \in \widehat{G}$  n'est pas le caractère trivial, il existe  $h \in G$  tel que  $\chi(h) \neq 1$ . Alors,

$$\chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(hg) = \sum_{g \in G} \chi(g)$$

la dernière égalité résultant du changement de variable  $g \mapsto hg$ . On en déduit

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Appliquant cette égalité au produit  $\chi\overline{\chi'}$  de deux caractères, on trouve

$$\sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi'(g)} = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi = \chi'; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Puisque  $\widehat{G}$  est une famille libre et que  $\dim V = |G|$ , il suffit de montrer que  $\widehat{G}$  et  $G$  ont même cardinal<sup>(a)</sup>.

**Lemme 220**– Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Soit  $\psi$  un caractère de  $H$ . Il existe un caractère  $\chi$  de  $G$  dont la restriction à  $H$  est  $\psi$ .

*Démonstration.* Si  $H = G$ , il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer  $H \neq G$  et trouver  $a \in G$  tel que  $a \notin H$ . Puisque  $a^{|G|} = e_G \in H$ , il existe un plus petit entier naturel non nul  $m$  tel que  $a^m \in H$ . Soit  $\zeta$  une solution dans  $\mathbb{C}^*$  de l'équation  $z^m = \psi(a^m)$ . Soit  $H_a$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $H$  et  $a$ . Tout élément de  $H_a$  s'écrit de façon unique sous la forme  $ha^n$  avec  $h \in H$  et  $n \in \{0, \dots, m-1\}$ . On définit

$$\begin{aligned} \psi_a &: H_a \rightarrow \mathbb{C} \\ ha^j &\mapsto \psi(h)\zeta^j. \end{aligned}$$

C'est un caractère de  $H_a$  dont la restriction à  $H$  est  $\psi$ . Si  $H_a = G$ , la preuve est terminée. Sinon, on applique le processus précédent à  $H_a$  est  $G$ . Le processus de répétition terminera puisque  $G$  est fini.  $\square$

Pour tout  $g \in G$  différent de  $e_G$ , il existe un caractère de  $G$  ne prenant pas la valeur 1 en  $g$ . Notons en effet  $\langle g \rangle$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $g$ . Si  $\zeta \neq 1$  une racine  $|G|^\text{e}$  de l'unité, on définit un caractère  $\psi$  de  $\langle g \rangle$  en posant  $\psi(g^j) = \zeta^j$  pour tout entier naturel  $j$ . Grâce au lemme 220, on prolonge ce caractère en un caractère  $\chi_1$  de  $G$ . On a alors  $\chi_1(g) = \zeta \neq 1$ . On calcule alors

$$\chi_1(g) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} (\chi_1\chi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g)$$

par le changement de variable  $\chi \mapsto \chi_1\chi$ . On en déduit

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = 0.$$

<sup>a</sup>. Une autre démonstration consiste à utiliser la théorie de la diagonalisation des endomorphismes unitaires d'espaces préhilbertiens. C'est la voie suivie par Stein & Shakarchi [43]. Notre preuve suit celle de Lidl & Niederreiter [25, Chapter 5, §1]

Appliquant cette égalité au produit  $gg'^{-1}$  de deux éléments de  $G$ , on trouve

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) \overline{\chi(g')} = \begin{cases} |\widehat{G}| & \text{si } g = g'; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On peut maintenant montrer l'égalité des cardinaux de  $G$  et  $\widehat{G}$ . On a

$$\sum_{g \in G} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = |\widehat{G}|$$

par (A.2). Ainsi

$$|\widehat{G}| = \sum_{g \in G} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) = |G|$$

par (A.1).

Nous résumons cette section dans le théorème suivant.

**Théorème 221**– *Le groupe  $\widehat{G}$  de ses caractères est un groupe commutatif fini de même ordre que  $G$ . Ce groupe  $\widehat{G}$  est une base orthonormale de l'espace préhilbertien  $V$  des applications de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  muni du produit scalaire hermitien*

$$\forall (u, v) \in V^2, \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g) \overline{v(g)}.$$

### A.2.3) Théorie de Fourier

Soit  $G$  un groupe commutatif fini.

De façon usuelle, l'existence d'une structure préhilbertienne sur un espace vectoriel conduit à une théorie de Fourier. On conserve les notation de la partie A.2.2. Soit  $v \in V$ . Sa décomposition dans la base  $\widehat{G}$  s'écrit

$$v = \sum_{\chi \in \widehat{G}} v_{\chi} \chi.$$

La base  $\widehat{G}$  étant orthonormale, on calcule

$$\langle v, \chi \rangle = \sum_{\psi \in \widehat{G}} v_{\psi} \langle \psi, \chi \rangle = v_{\chi}$$

pour tout  $\chi \in \widehat{G}$ . D'autre part

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{\psi \in \widehat{G}} v_{\chi} \overline{v_{\psi}} \langle \chi, \psi \rangle = \sum_{\chi \in \widehat{G}} |v_{\chi}|^2.$$

Enfin, par orthogonalité toujours, on a

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) \widehat{v}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} v(h) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) \overline{\chi(h)} = v(g).$$

pour tout  $g \in G$ .

**Définition 222** (Transformée de Fourier)– Pour toute fonction  $v: G \rightarrow \mathbb{C}$ , sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} \widehat{v} &: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle v, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v(g) \overline{\chi(g)}. \end{aligned}$$

**Théorème 223**– Soit  $G$  un groupe commutatif fini et  $v: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Le développement de Fourier de  $v$  est l'égalité

$$v = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{v}(\chi) \chi.$$

Le théorème de Plancherel est l'égalité

$$\|v\|^2 = \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{v}(\chi)|^2.$$

La formule d'inversion de Fourier est

$$\forall g \in G \quad v(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) \widehat{v}(\chi).$$

À l'aide de la notion de produit de convolution, on généralise le théorème de Plancherel.

**Définition 224** (Transformée de Fourier)– Soit  $G$  un groupe commutatif fini. Pour toutes fonctions  $u, v: G \rightarrow \mathbb{C}$ , le produit de convolution de  $u$  et  $v$  est

$$\begin{aligned} u * v &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} u(g) v(h^{-1}g). \end{aligned}$$

On montre ensuite que la transformée de Fourier d'une convolution est un produit de transformées de Fourier.

**Lemme 225**– Pour toutes fonctions  $u, v: G \rightarrow \mathbb{C}$ , on a  $\widehat{u * v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$ .

*Démonstration.* Soit  $\chi \in \widehat{G}$ . On calcule

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(\chi) &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} u(h)v(h^{-1}g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} u(h)\overline{\chi(h)} \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v(h^{-1}g)\overline{\chi(h^{-1}g)} \\ &= \widehat{u}(\chi)\widehat{v}(\chi). \end{aligned}$$

grâce au changement de variable  $g \mapsto h^{-1}g$  dans la somme en  $g$ .  $\square$

Ce lemme permet de démontrer la formule de Parseval qui généralise le théorème de Plancherel.

**Proposition 226** (Formule de Parseval)– Pour toutes fonctions  $u, v: G \rightarrow \mathbb{C}$ , on a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v(g)} = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u}(\chi)\overline{\widehat{v}(\chi)}.$$

*Démonstration.* Le lemme 225 conduit à

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u * v}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u}(\chi)\widehat{v}(\chi)$$

ce qui, compte-tenu de la formule d'inversion se réécrit

$$u * v(e_G) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u}(\chi)\widehat{v}(\chi)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g)v(g^{-1}) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u}(\chi)\widehat{v}(\chi). \quad (\text{A.3})$$

On applique cette égalité à la fonction  $v^*$  définie par  $v^*(g) = \overline{v(g^{-1})}$  pour tout  $g \in G$ . Pour cela, on commence par calculer

$$\widehat{v^*}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{v(g^{-1})} \cdot \overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\chi(h)}\chi(h) = \overline{\widehat{v}(\chi)}$$

par le changement de variable  $h = g^{-1}$ . L'équation A.3 devient

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v(g)} = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{u}(\chi)\overline{\widehat{v}(\chi)}.$$

$\square$

### A.3 Actions de groupes

Soit  $G$  un groupe multiplicatif dont on note  $1$  l'élément neutre et  $X$  un ensemble. On cherche à voir  $G$  comme un groupe de transformations de  $X$ .

**Définition 227** – On dit que le groupe  $G$  agit sur l'ensemble  $X$  s'il existe une application

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

- i) pour tout  $x \in X$  on a  $1 \cdot x = x$ ;
- ii) pour tous  $g, g'$  de  $G$  et tout  $x$  de  $X$ , on a  $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ .

L'application  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  est appelée action de  $G$  sur  $X$ .

**Remarque 228** – La définition précédente est celle d'une action à gauche. On peut définir la notion d'action à droite : c'est une application

$$\begin{aligned} X \times G &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g \end{aligned}$$

telle que

- i) pour tout  $x \in X$  on a  $x \cdot 1 = x$ ;
- ii) pour tous  $g, g'$  de  $G$  et tout  $x$  de  $X$ , on a  $x \cdot (gg') = (x \cdot g) \cdot g'$ .

Nous introduisons dans la suite les notions adaptées aux actions à gauche en laissant le soin au lecteur de les adapter aux actions à droites. On peut remarquer que si  $(x, g) \mapsto x \cdot g$  est une action à droite alors  $(g, x) \mapsto x \cdot g^{-1}$  est une action à gauche.

**Exemple 229** – Le groupe  $SL_2(\mathbb{R})$  – et donc son sous-groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  – agit sur  $\mathcal{H}$  par homographies, c'est-à-dire par l'action à gauche

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

**Exemple 230** – Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , le groupe  $SL_2(\mathbb{R})$  agit à droite sur l'espace vectoriel  $\text{Hol}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$  des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{H}$  par l'action :

$$\begin{aligned} \text{Hol}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Hol}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \\ \left( f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &\mapsto \left( z \mapsto (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \right) = \left( f \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les actions de groupes sont liées aux relations d'équivalence par le résultat suivant qu'on laisse en exercice.

**Proposition 231**– On suppose que le groupe  $G$  agit sur l'ensemble  $X$ . Deux éléments  $x$  et  $x'$  de  $X$  sont dits équivalents s'il existe  $g \in G$  tel que  $x' = g \cdot x$ . On note  $x' \sim_G x$  et on définit ainsi une relation d'équivalence sur  $X$ .

L'ensemble des éléments équivalents à  $x \in X$  pour la relation précédente s'appelle l'orbite de  $x$  sous  $G$ . On note cette orbite

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

L'ensemble des orbites d'éléments de  $X$  forme une partition de  $X$  : elles sont deux à deux disjointes et leur réunion est  $X$ .

*Exemple 232* – En remarquant que  $x + iy$  s'écrit

$$x + iy = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} i$$

on voit que  $\text{SL}_2(\mathbb{R})i = \mathcal{H}$ .

S'il n'existe qu'une orbite pour une action, cette action est dite *transitive*. Cela revient à dire que pour tous  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe  $g \in G$  tel que  $y = gx$ .

*Exemple 233* – L'exemple précédent montre que l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}$  est transitive, en effet

$$\begin{aligned} x' + iy' &= \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & x'/\sqrt{y'} \\ 0 & 1/\sqrt{y'} \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & x'/\sqrt{y'} \\ 0 & 1/\sqrt{y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}^{-1} (x + iy) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{y'}/\sqrt{y} & (x'y - xy')/\sqrt{yy'} \\ 0 & \sqrt{y}/\sqrt{y'} \end{pmatrix} (x + iy). \end{aligned}$$

L'ensemble des éléments de  $G$  laissant stable un élément de  $X$  s'appelle le *stabilisateur* de cet élément :

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

C'est un sous-groupe de  $G$ .

*Exemple 234* – Le stabilisateur de  $i$  par  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  est  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ . Soit en effet  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ , en comparant les parties imaginaires, on obtient  $c^2 + d^2 = 1$  de sorte qu'il existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $c = \cos \theta$  et  $d = \sin \theta$ . En comparant les parties réelles puis en écrivant l'équation du déterminant, on obtient

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \sin \theta = 0 \\ a \sin \theta - b \cos \theta = 1 \end{cases}$$

qui se résout en  $a = \sin \theta$  et  $b = -\cos \theta$ .

*Exemple 235* - On déduit de l'exemple précédent et de l'exemple 232 que le stabilisateur de  $x + iy \in \mathcal{H}$  par  $SL_2(\mathbb{R})$  est le sous-groupe conjugué

$$\text{Stab}_{SL_2(\mathbb{R})}(x + iy) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{y} & -x/\sqrt{y} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}.$$

L'action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est *libre* si le stabilisateur de tout point de  $X$  est minimal, c'est-à-dire réduit à  $\{1\}$ .

*Exemple 236* - L'action de  $SL_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}$  n'est pas libre. Mais le sous-groupe des translations

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

agit librement sur  $\mathcal{H}$  par l'action induite par celle de  $SL_2(\mathbb{R})$ :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \right) \mapsto z + t.$$

Une notion moins contraignante est celle de la fidélité qui demande que l'intersection de tous les stabilisateurs soit minimale :

$$\bigcap_{x \in X} \text{Stab}_G(x) = \{1\}.$$

*Exemple 237* - L'action de  $SL_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}$  n'est pas fidèle puisque les stabilisateurs contiennent tous, outre  $I$  la matrice  $-I$ . Mais l'intersection de tous les stabilisateurs est  $\{-I, I\}$  comme on le voit en considérant l'intersection des stabilisateurs de  $i$  et  $2i$ . Il en résulte qu'on définit une action fidèle de  $\{-I, I\} \backslash SL_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}$  par

$$\begin{aligned} \{-I, I\} \backslash SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \pm \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

## A.4 Polynômes de Tchebychef

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on définit une fonction sur  $[-2, 2]$  en posant

$$X_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ . En notant  $\xi = e^{i\theta}$ , on obtient

$$X_n(2 \cos \theta) = \sum_{i=0}^n \xi^{n-2i} = \frac{\xi^{-n-2} - \xi^n}{\xi^{-2} - 1}. \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
X_0 &= 1 \\
X_1 &= x \\
X_2 &= x^2 - 1 \\
X_3 &= x^3 - 2x \\
X_4 &= x^4 - 3x^2 + 1 \\
X_5 &= x^5 - 4x^3 + 3x \\
X_6 &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 \\
X_7 &= x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x \\
X_8 &= x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1 \\
X_9 &= x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x \\
X_{10} &= x^{10} - 9x^8 + 28x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1
\end{aligned}$$

TABLE A.1 – Premiers polynômes de Tchebychef de seconde espèce

Cette expression implique immédiatement la majoration suivante

$$\max_{x \in [-2, 2]} |X_n(x)| = n + 1 = X_n(2).$$

On a,

$$X_0(x) = 1 \quad X_1(x) = x. \quad (\text{A.5})$$

De  $\sin(n+3)\theta + \sin(n+1)\theta = 2\cos\theta\sin(n+2)\theta$ , on déduit la relation

$$\forall x \in [-2, 2] \quad X_{n+2}(x) = xX_{n+1}(x) - X_n(x) \quad (\text{A.6})$$

de sorte que, par récurrence, on prolonge  $X_n$  en fonction polynomiale à coefficients entiers.

*Remarque 238* - En posant

$$Y_n(2 \operatorname{ch} y) = \frac{\operatorname{sh}(n+1)y}{\operatorname{sh} y}$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^+$ , on définit une fonction  $Y_n$  sur  $[2, +\infty[$ . La relation  $\operatorname{sh}(n+3)y + \operatorname{sh}(n+1)y = 2 \operatorname{ch} y \operatorname{sh}(n+2)y$  montre qu'elle satisfait une relation semblable à (A.6). Puisqu'on a aussi  $Y_0 = 1$  et  $Y_1(y) = y$ , la fonction  $Y_n$  est la restriction de  $X_n$  à  $[2, +\infty[$ .

Les premiers exemples de polynômes de Tchebychef sont donnés table A.4.

Les équations (A.5) et (A.6) sont équivalentes à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x) T^n = \frac{1}{1 - xT + T^2}. \quad (\text{A.7})$$

Le polynôme  $X_n$ , de degré  $n$  et coefficient dominant 1, est appelé *polynôme de Tchebychef de seconde espèce de degré  $n$* . Définissant la mesure de Sato-Tate  $\mu_{\text{ST}}$  par

$$d\mu_{\text{ST}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 X_n(x)X_m(x) d\mu_{\text{ST}} &= \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque  $\deg X_n = n$  pour tout entier  $n$ , la famille  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale (pour  $\mu_{\text{ST}}$ ) de  $\mathbb{C}[X]$ . On en déduit que

$$X_n X_m = \sum_{j=0}^{n+m} c_j X_j$$

avec

$$c_j = \int_{-2}^2 X_n X_m X_j d\mu_{\text{ST}}.$$

On peut en fait retrouver explicitement les coefficients  $c_j$  à l'aide des formules A.4. On obtient la *formule de Clebsch-Gordan* :

**Lemme 239**– Pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , on a

$$X_n X_m = \sum_{\substack{j=|n-m| \\ j \equiv n+m \pmod{2}}}^{n+m} X_j = \sum_{i=0}^{\inf(n,m)} X_{n+m-2i}.$$

*Démonstration.* On suppose  $n \geq m$ . Grâce la formule (A.4) on a

$$\begin{aligned} X_m X_n(2 \cos \theta) &= \sum_{i=0}^m \xi^{m-2i} \cdot \frac{\xi^{-n-2} - \xi^n}{\xi^{-2} - 1} \\ &= \frac{1}{\xi^{-2} - 1} \left( \sum_{i=0}^m \xi^{m-n-2i-2} - \sum_{i=0}^m \xi^{m+n-2i} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i=0}^m \xi^{m+n-2i} = \sum_{j=0}^m \xi^{-m+n+2j}$$

donc

$$\begin{aligned} X_m X_n (2 \cos \theta) &= \frac{1}{\xi^{-2} - 1} \sum_{i=0}^m (\xi^{m-n-2i-2} - \xi^{-m+n+2i}) \\ &= \sum_{i=0}^m X_{n-m+2i} (2 \cos \theta). \end{aligned}$$

□

**Lemme 240**– Si  $\alpha \geq 1$  et  $\beta \geq 1$ , alors

$$X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta - X_{\alpha-1} X_{\beta-1}.$$

*Démonstration.* Grâce à la formule de Clebsch-Gordan (lemme 239), on a

$$X_{\alpha-1} X_{\beta-1} = \sum_{i=0}^{\inf(\alpha,\beta)-1} X_{\alpha+\beta-2i-2} = \sum_{i=1}^{\inf(\alpha,\beta)} X_{\alpha+\beta-2i} = X_\alpha X_\beta - X_{\alpha+\beta}.$$

□

## A.5 Polynômes symétriques

### A.5.1) Définition

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps  $\mathbb{K}$ . Un polynôme symétrique est un polynôme invariant par le groupe symétrique. Plus précisément, en notant  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , on a la définition suivante.

**Définition 241**– Soit  $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  un polynôme. On dit qu'il est symétrique si

$$P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$$

pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ .

Les polynômes symétriques élémentaires sont les premiers exemples de tels polynômes. Un entier  $n$  étant fixé, les polynômes symétriques élémentaires de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sont les polynômes symétriques définis par

$$\sigma_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k}$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

*Exemple 242*– Les deux polynômes symétriques élémentaires de  $\mathbb{K}[X_1, X_2]$  sont

$$\sigma_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad \sigma_2(X_1, X_2) = X_1 X_2.$$

Les trois polynômes symétriques élémentaires de  $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$  sont

$$\sigma_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3, \quad \sigma_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3$$

et

$$\sigma_3(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3.$$

Une raison naturelle d'introduire les polynômes symétriques élémentaires réside dans la proposition suivante établissant une relation entre racines et coefficients d'un polynôme. Sa démonstration est laissée au lecteur. On choisit une extension algébrique  $\Omega$  de  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 243**– Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des éléments de  $\Omega$ . Alors

$$(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

avec

$$a_j = (-1)^j \sigma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

L'ensemble des polynômes symétriques de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  constitue une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Cette base est engendrée par les polynômes symétriques élémentaires. Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 244** (Théorème fondamental des polynômes symétriques)– Si  $P$  est un polynôme symétrique de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , il existe un unique polynôme  $L$  de  $\mathbb{K}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$  tel que

$$P = L(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

La démonstration se trouve § A.5.3.

### A.5.2) Ordre sur les monômes

Pour établir le théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 244), il est nécessaire de définir et étudier un ordre sur les monômes unitaires  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , c'est-à-dire sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_n = \{X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}.$$

L'ordre que nous étudions est l'ordre *lexicographique*. D'autres ordres sont définis dans [6, Chapter 2, §2] ou [7, Chapter 1, §2]. Il faut remarquer que tout ordre  $<$  sur  $\mathbb{N}^n$  définit un ordre, qu'on note aussi  $<$ , sur  $\mathcal{M}_n$  en définissant

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} < X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdots X_n^{\beta_n} \text{ si et seulement si } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

**Définition 245**– L'ordre lexicographique sur  $\mathcal{M}_n$  est défini par

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n} \leq X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n}$$

si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

pour l'ordre lexicographique, c'est-à-dire si et seulement si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

ou s'il existe  $r \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$\alpha_i = \beta_i \text{ pour tout } i < r \text{ et } \alpha_r < \beta_r.$$

SI A et B sont deux monômes de  $\mathcal{M}_n$  tels que  $A \leq B$  et  $A \neq B$ , on note  $A < B$ . L'ordre lexicographique sur  $\mathcal{M}_n$  est un *ordre monomial*. Cela signifie qu'on a la proposition suivante dont la preuve est laissée au lecteur.

**Proposition 246**– L'ordre lexicographique sur  $\mathcal{M}_n$  est un ordre total :

- 1) si A et B sont deux monômes de  $\mathcal{M}_n$  tels que  $A \leq B$  et  $B \leq A$  alors  $A = B$ ;
- 2) si A et B sont deux monômes de  $\mathcal{M}_n$ , on a  $A \leq B$  ou  $B \leq A$ ;
- 3) si A, B et C sont trois monômes de  $\mathcal{M}_n$  tels que  $A \leq B$  et  $B \leq C$  alors  $A \leq C$ .

Cet ordre est compatible avec le produit : si A, B et C sont trois monômes de  $\mathcal{M}_n$  tels que  $A \leq B$  alors  $AC \leq BC$ . Enfin, cet ordre est un bon ordre : tout sous-ensemble  $\mathcal{E}$  non vide de  $\mathcal{M}_n$  admet un plus petit élément, c'est-à-dire un élément M tel que  $M \leq A$  pour tout A de  $\mathcal{E}$ .

On étend la notation  $<$  aux monômes multipliés par des scalaires non nuls en posant, si a et b sont des éléments de  $\mathbb{K}$  non nuls,

$$aX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n} < bX_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n} \Leftrightarrow X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n} < X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n}.$$

Si P est un polynôme non nul de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , on l'écrit comme combinaison linéaire de monômes :

$$P = \sum_{i_1=0}^{d_1} \dots \sum_{i_n=0}^{d_n} p_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Le *degré* de P est

$$\deg P = \max\{i_1 + \dots + i_n : p_{i_1, \dots, i_n} \neq 0\}.$$

Parmi l'ensemble fini des monômes de P, il y a un plus grand élément pour l'ordre lexicographique. Soit  $(j_1, \dots, j_n)$  le  $n$ -uplet d'entiers correspondant à ce maximum. Autrement dit, soit

$$X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n} = \max\{X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} : p_{i_1, \dots, i_n} \neq 0\},$$

le terme dominant de P est

$$\text{TD}(P) = p_{j_1, \dots, j_n} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}.$$

Il faut remarquer que le terme dominant n'est pas nécessairement le terme de plus haut degré (penser à  $X_1^5 X_2^{20} + X_1^6 X_2$ ). Le degré du polynôme nul est, par convention,  $-\infty$  et son terme dominant est 0.

Si P et Q sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $\text{TD}(PQ) = \text{TD}(P)\text{TD}(Q)$ . Enfin, si deux polynômes non nuls ont même terme dominant, alors

$$\text{TD}(P) = \text{TD}(Q) > \text{TD}(P - Q). \quad (\text{A.8})$$

Enfin, on résume sous forme de lemmes les résultats dont nous aurons besoin concernant les polynômes symétriques.

**Lemme 247–**

a) Soit P un polynôme symétrique de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . On suppose que son terme dominant est  $p_{j_1, \dots, j_n} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ . Alors

$$j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n.$$

b) Le terme dominant de  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}$  est

$$\text{TD}(\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}) = X_1^{r_1 + \dots + r_n} X_2^{r_2 + \dots + r_n} \dots X_n^{r_n}.$$

c) Les polynômes  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}$  et  $\sigma_1^{t_1} \dots \sigma_n^{t_n}$  sont égaux si et seulement s'ils ont même terme dominant.

*Démonstration.*

a) Si  $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  est un monôme du polynôme symétrique P alors

$$X_{\sigma(1)}^{i_1} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n} = X_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \dots X_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}}$$

l'est aussi pour toute permutation  $\sigma$ . Pour tout  $n$ -uplet  $(i_1, \dots, i_n)$ , il existe une permutation<sup>(b)</sup>  $\sigma$  telle que  $i_{\sigma^{-1}(1)} \geq \dots \geq i_{\sigma^{-1}(n)}$ . Tout  $n$ -uplet de P est donc inférieur ou égal à un monôme de la forme  $X_{\sigma(1)}^{i_1} \dots X_{\sigma(n)}^{i_n}$  avec  $i_1 \geq \dots \geq i_n$ . C'est en particulier le cas du monôme dominant.

b) Le terme dominant de  $\sigma_i$  est  $X_1 \dots X_i$ , celui de  $\sigma_i^{r_i}$  est donc  $X_1^{r_i} \dots X_i^{r_i}$ . On en déduit le résultat par multiplicativité.

c) L'égalité des termes dominants

$$X_1^{r_1 + \dots + r_n} X_2^{r_2 + \dots + r_n} \dots X_n^{r_n} = X_1^{t_1 + \dots + t_n} X_2^{t_2 + \dots + t_n} \dots X_n^{t_n}$$

conduit successivement à  $r_n = t_n$  puis  $r_{n-1} = t_{n-1}$  jusqu'à  $r_1 = t_1$ .

---

b. Définie par récurrence de la façon suivante:  $i_{\sigma^{-1}(1)} = \max\{i_1, \dots, i_n\}$  et  $i_{\sigma^{-1}(k)} = \max\{i_1, \dots, i_n\} \setminus \{i_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, i_{\sigma^{-1}(k-1)}\}$  pour tout  $2 \leq k \leq n$ .

□

**Corollaire 248**– Si un polynôme symétrique  $P$  a pour terme dominant

$$\text{TD}(P) = pX_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n}$$

alors ce terme dominant est le polynôme symétrique

$$\text{TD}(P) = p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n}.$$

### A.5.3) Preuve du théorème fondamental des polynômes symétriques

On démontre dans cette partie le théorème 244. Le point principal de la démonstration de l'existence de  $L$  est le corollaire 248 qui permet d'exprimer le terme dominant d'un polynôme en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

Par réitération, on définit une suite de couples de polynômes  $(P_i, Q_i)_{i \geq 0}$  en posant

$$P_0 = P, \quad Q_0 = 0$$

puis, pour tout  $i \geq 0$ ,

$$\text{si } P_i = 0, \quad \begin{cases} P_{i+1} = P_i \\ Q_{i+1} = Q_i \end{cases}$$

et,

$$\text{si } P_i \neq 0, \quad \begin{cases} P_{i+1} = P_i - p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n} \\ Q_{i+1} = Q_i + p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n} \end{cases}$$

où

$$\text{TD}(P_i) := pX_1^{r_1}X_2^{r_2}\cdots X_n^{r_n} = p\sigma_1^{r_1-r_2}\sigma_2^{r_2-r_3}\cdots\sigma_n^{r_n}$$

grâce au corollaire 248.

On remarque que  $P_i + Q_i = P$  pour tout  $i$  et que, pour tout  $i$ , le polynôme  $Q_i$  est produit d'un scalaire par un produit de polynômes symétriques élémentaires. S'il existe  $j$  tel que  $P_j = 0$ , on a donc  $P = Q_j$  et  $P$  est une combinaison linéaire de produit de polynômes symétriques élémentaires.

Montrons l'existence de  $j$  tel que  $P_j = 0$ . Grâce à l'équation (A.8), on a  $\text{TD}(P_{i+1}) < \text{TD}(P_i)$  tant que  $P_i$  est non nul. En notant

$$\text{TD}(P_i) = p_i X_1^{\alpha_1(i)} \cdots X_n^{\alpha_n(i)},$$

la suite  $((\alpha_1(i), \dots, \alpha_n(i)))_i$  est donc strictement décroissante (pour l'ordre lexicographique) tant qu'elle ne s'annule pas à valeurs dans l'ensemble

$$\{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, (a_1, \dots, a_n) \leq (\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0))\}.$$

Cet ensemble est fini (il a moins de  $(\alpha_1(0) + 1)^n$  éléments). Il existe donc  $k$  tel que  $(\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k)) = 0$ . On a alors  $\text{TD}(P_k) \in \mathbb{K}$  puis  $P_{k+1} = 0$ .

Il reste alors à démontrer l'unicité du polynôme  $L$ . Il suffit de montrer que si  $L(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$  alors  $L = 0$ . Soit donc

$$L(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \ell_{i_1, \dots, i_n} \sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}.$$

Si  $\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n} = \sigma_1^{j_1} \cdots \sigma_n^{j_n}$  alors  $i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n$  d'après le point b) du lemme 247. Les  $\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}$  intervenant dans  $L$  sont donc tous distincts. Toute famille de polynômes distincts est libre donc  $L = 0$ .

## A.6 Accouplements parfaits

**Définition 249**— Soit  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $B: V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  une application bilinéaire. On dit que  $B$  est un accouplement parfait si les deux applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \mathcal{L}(W) \\ x & \mapsto & (y \mapsto B(x, y)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} W & \rightarrow & \mathcal{L}(V) \\ y & \mapsto & (x \mapsto B(x, y)) \end{array}$$

sont des isomorphismes linéaires.

Si  $V$  et  $W$  sont de dimension finie, on a des isomorphismes linéaires entre  $V$  et son dual  $\mathcal{L}(V)$  puis entre  $W$  et son dual  $\mathcal{L}(W)$ . Pour montrer que  $B$  est un accouplement parfait, il suffit dans ce cas de montrer que les deux applications linéaires de la définition 249 sont injectives, c'est-à-dire de noyaux  $\{0\}$ . En effet, l'injectivité de la première application montre alors que  $\dim V \leq \dim \mathcal{L}(W) = \dim W$  et l'injectivité de la seconde application montre que  $\dim W \leq \dim \mathcal{L}(V) = \dim V$ . Ainsi,  $V$  et  $W$  ont même dimension et les deux applications sont des isomorphismes.

## A.7 Extensions transcendentes

Cette partie est essentiellement inspirée du chapitre 8 du cours de Milne [29].

Soit  $\mathbb{K}$  un corps contenant  $\mathbb{C}$ , par exemple  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(X, Y, Z)$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(E_2, E_4, E_6)$ .

**Définition 250**— Les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $\mathbb{K}$  sont algébriquement indépendants si 0 est leur seul polynôme annulateur, c'est-à-dire si le seul polynôme  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$  est  $P = 0$ .

Si des éléments ne sont pas algébriquement indépendants, ils sont dit algébriquement dépendants. Il admettent alors un polynôme annulateur non nul. Il faut noter que la notion d'indépendance algébrique élargit la notion d'indépendance linéaire qui se restreint aux polynômes annulateurs homogènes de degré 1.

Exemples 251—

1) Les éléments  $X, Y$  et  $Z$  de  $\mathbb{C}(X, Y, Z)$  sont algébriquement indépendants.

- 2) Les séries  $E_2, E_4$  et  $E_6$  de  $\mathbb{C}(E_2, E_4, E_6)$  sont algébriquement indépendantes (voir la proposition 155).
- 3) Grâce au corollaire 154, les dérivées des séries d'Eisenstein sont toutes des éléments de  $\mathbb{C}(E_2, E_4, E_6)$ . Les équations (3.32), (3.34) et (3.38) montrent que, pour tout  $j \in \{2, 4, 6\}$ , les séries  $E_j, DE_j, D^2E_j$  et  $D^3E_j$  sont algébriquement dépendantes.

Si une famille est linéairement indépendante, l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres et peut donc s'écrire comme un polynôme homogène de degré 1 en les autres éléments. On généralise cette notion.

**Définition 252**— Soit  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $\gamma \in \mathbb{K}$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  s'il existe des fractions rationnelles  $r_1, \dots, r_d$  en  $a_1, \dots, a_n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\gamma^d + r_1 \gamma^{d-1} + \dots + r_{d-1} \gamma + r_d = 0.$$

Autrement dit,  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  s'il existe un polynôme unitaire  $L \in \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)[X]$  tel que  $L(\gamma) = 0$ .

Au lieu de dire que  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , on dit aussi que  $\gamma$  est algébrique sur  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ .

*Exemple 253*— L'équation (3.34) montre que  $D^3E_4$  est algébriquement dépendant de  $\{E_4, DE_4, D^2E_4\}$ , un polynôme annulant  $D^3E_4$  étant

$$X^2 + \left( \frac{15}{2} \cdot \frac{(DE_4)^3}{E_4^2} - 9 \frac{DE_4 D^2E_4}{E_4} \right) X + \frac{5}{2} (DE_4)^2 D^2E_4 - \frac{25}{16} \cdot \frac{(DE_4)^4}{E_4} + \frac{36}{5} \cdot \frac{(D^2E_4)^3}{E_4} - \frac{27}{4} \cdot \frac{DE_4 (D^2E_4)^2}{E_4^2}.$$

**Proposition 254**— L'ensemble des éléments algébriquement dépendants de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}$ .

*Remarque 255*— La démonstration de cette proposition utilise des résultats sur les polynômes symétriques qui sont donnés en annexe A.5.

*Démonstration.* Commençons par montrer que si  $\gamma \neq 0$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , alors  $1/\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Si  $\gamma \neq 0$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  alors

$$\sum_{i=0}^{i_0} r_i(a_1, \dots, a_n) \gamma^{d-i} = 0$$

avec  $r_1, \dots, r_{i_0}$  des fractions rationnelles telles que  $r_{i_0}(a_1, \dots, a_n) = 0$  et  $r_0 = 1$ . On en tire

$$\sum_{i=0}^{i_0} \frac{r_i(a_1, \dots, a_n)}{r_{i_0}(a_1, \dots, a_n)} \left( \frac{1}{\gamma} \right)^i = 0$$

ce qui montre que  $1/\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

On considère ensuite  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , on va montrer que  $\gamma_1 + \gamma_2$ ,  $\gamma_1 - \gamma_2$  et  $\gamma_1 \gamma_2$  sont algébriquement dépendants de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Soit  $L_1$  et  $L_2$  deux polynômes unitaires de  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)[X]$  tels que  $L_1(\gamma_1) = 0$  et  $L_2(\gamma_2) = 0$ . Le polynôme  $L = L_1 L_2$  admet  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  comme racines. On a

$$L(X) = \sum_{i=0}^{d-1} \ell_i(a_1, \dots, a_n) X^i + X^d$$

avec  $\ell_i(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$  pour tout  $i$ . Dans une clôture algébrique  $\Omega$  de  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ , on écrit

$$L(X) = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$$

en numérotant les racines de sorte que  $\alpha_1 = \gamma_1$  et  $\alpha_2 = \gamma_2$ . La proposition 243 implique

$$\ell_{d-i}(a_1, \dots, a_n) = (-1)^i \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad (\text{A.9})$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Soit  $g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$ . On va montrer que  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Cela impliquera que  $\gamma_1 + \gamma_2$ ,  $\gamma_1 - \gamma_2$  et  $\gamma_1 \gamma_2$  sont algébriquement dépendants de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  après avoir choisi  $g(X_1, \dots, X_d) = X_1 + X_2$ ,  $g(X_1, \dots, X_d) = X_1 - X_2$  et  $g(X_1, \dots, X_d) = X_1 X_2$ . Considérons pour cela

$$G(X) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (X - g(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(d)})) = X^{d!} + \sum_{j=0}^{d!-1} h_j X^j.$$

L'ensemble  $\mathfrak{S}_d$  est le groupe des permutations de  $d$  éléments. L'une des racines de ce polynôme unitaire est  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . Nous allons montrer que ce polynôme  $G$  est à coefficients dans  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ . Cela impliquera que  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et achèvera donc la démonstration.

Si on ordonne arbitrairement les permutations en écrivant  $\mathfrak{S}_d = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{d!}\}$ , on a

$$h_j = (-1)^{d!-j} s_{d!-j}(g(\alpha_{\sigma_1(1)}, \dots, \alpha_{\sigma_1(d)}), \dots, g(\alpha_{\sigma_{d!}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma_{d!}(d)})) \quad (\text{A.10})$$

où  $s_{d!-j}$  est la  $(d! - j)^e$  fonction symétrique élémentaire à  $d!$  variables. Permuter les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  dans (A.10) c'est les remplacer par  $\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(d)}$  pour une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ . C'est donc permuter les variables dans  $s_{d!-j}$ . Par symétrie de  $s_{d!-j}$ , cela ne change pas  $h_j$  qui est donc un polynôme symétrique de  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ . Grâce au théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 244), il existe alors un polynôme  $L$  tel que  $h_j = L(\sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_d), \dots, \sigma_{d!}(\alpha_1, \dots, \alpha_d))$ . Grâce à l'égalité (A.9) on a donc

$$h_j = L(-\ell_{d-1}(a_1, \dots, a_n), \ell_{d-2}(a_1, \dots, a_n), \dots, (-1)^d \ell_0(a_1, \dots, a_n)).$$

Le coefficient  $h_j$  est donc bien un élément de  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ . □

On donne ensuite une autre caractérisation de la dépendance algébrique.

**Proposition 256**— L'élément  $\gamma$  de  $\mathbb{K}$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  si et seulement s'il existe  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  tel que

- a) le polynôme à une variable  $P(a_1, \dots, a_n, X_{n+1})$  n'est pas le polynôme nul;
- b) on a  $P(a_1, \dots, a_n, \gamma) = 0$ .

*Démonstration.* Si  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , alors il existe des polynômes à coefficients complexes  $p_1, q_1, \dots, p_d, q_d$  tels que

$$\gamma^d + \frac{p_1(a_1, \dots, a_n)}{q_1(a_1, \dots, a_n)}\gamma^{d-1} + \dots + \frac{p_d(a_1, \dots, a_n)}{q_d(a_1, \dots, a_n)} = 0.$$

On note  $p_0$  le produit de polynômes  $q_1 \cdots q_d$ . Si

$$P(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=0}^d p_i(X_1, \dots, X_n) X_{n+1}^{d-i}$$

on a donc  $P(a_1, \dots, a_n, \gamma) = 0$ . Le coefficient dominant du polynôme à une variable  $P(a_1, \dots, a_n, X_{n+1})$  est  $p_0(a_1, \dots, a_n)$ . Cette quantité est non nulle donc  $P(a_1, \dots, a_n, X_{n+1})$  n'est pas le polynôme nul.

Réciproquement, supposons que  $P(a_1, \dots, a_n, \gamma) = 0$  et que le polynôme à une variable  $P(a_1, \dots, a_n, X_{n+1})$  n'est pas le polynôme nul. Si  $Q(X) = P(a_1, \dots, a_n, X)$  alors  $Q$  n'est pas constant, sinon son évaluation en  $\gamma$  montre qu'il serait nul. Le degré  $d$  de  $Q$  est donc au moins égal à 1. On peut donc écrire

$$P(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=0}^d p_i(X_1, \dots, X_n) X_{n+1}^{d-i}$$

avec  $p_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . Par définition de  $d$ , on a  $p_0(a_1, \dots, a_n) \neq 0$  de sorte que  $L(\gamma) = 0$  avec

$$L(X) = X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{p_i(a_1, \dots, a_n)}{p_0(a_1, \dots, a_n)} X^{d-i} \in \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)[X].$$

Ainsi,  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . □

**Proposition 257**— Si  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  alors les fractions rationnelles en  $\gamma$  à coefficients dans  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$  sont des polynômes. Autrement dit,

$$\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)[\gamma] = \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)(\gamma).$$

*Démonstration.* On note  $\mathbb{L} = \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ . On a donc  $\mathbb{C} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{L}[\gamma] \subset \mathbb{L}(\gamma) \subset \mathbb{K}$ . On va montrer que  $\mathbb{L}[\gamma]$  est un corps ce qui implique  $\mathbb{L}[\gamma] = \mathbb{L}(\gamma)$ . On note  $e_\gamma$  l'application d'évaluation :

$$e_\gamma : \begin{array}{l} \mathbb{L}[X] \rightarrow \mathbb{K} \\ P \mapsto P(\gamma). \end{array}$$

C'est un morphisme d'anneaux d'image  $\text{Im } e_\gamma = \mathbb{L}[\gamma]$ . Puisque  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , le noyau  $\text{Ker } e_\gamma$  de cet morphisme est non nul et on a un isomorphisme d'anneaux  $\mathbb{L}[X]/\text{Ker } e_\gamma \simeq \mathbb{L}[\gamma]$ . Il suffit donc de montrer que l'anneau quotient  $\mathbb{L}[X]/\text{Ker } e_\gamma$  est un corps. Le noyau  $\text{Ker } e_\gamma$  est un idéal de l'anneau  $\mathbb{L}[X]$ . Cet anneau est principal puisque  $\mathbb{L}$  est un corps. Il existe donc un polynôme unitaire  $M \in \mathbb{L}[X]$  tel que  $\text{Ker } e_\gamma = M\mathbb{L}[X]$ . Si  $M = M_1 M_2$  alors  $M_1(\gamma) = 0$  ou  $M_2(\gamma) = 0$  donc  $M_1 \in \text{Ker } e_\gamma$  ou  $M_2 \in \text{Ker } e_\gamma$ . On en déduit que  $M_1$  ou  $M_2$  est un multiple de  $M$  puis que  $M$  est irréductible. Cette irréductibilité implique que l'anneau quotient  $\mathbb{L}[X]/\text{Ker } e_\gamma$  est un corps.  $\square$

*Remarque 258* - Soit  $\mathbb{L}$  un sous-corps quelconque de  $\mathbb{K}$ . Le polynôme  $M$  défini dans la preuve de la proposition 257, c'est-à-dire l'unique polynôme unitaire  $M$  tel que

$$\{P \in \mathbb{L}[X] : P(\gamma) = 0\} = M\mathbb{L}[X]$$

s'appelle le *polynôme minimal* de  $\gamma$  sur  $\mathbb{L}$ .

**Proposition 259**— *L'élément  $\gamma$  de  $\mathbb{K}$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  si et seulement si l'espace vectoriel  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)[\gamma]$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ .*

*Démonstration.* On note  $\mathbb{L} = \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)$ . Supposons que  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Une famille génératrice de  $\mathbb{L}[\gamma]$  est  $(\gamma^j)_{j \geq 0}$ . On note  $d$  le degré du polynôme minimal  $M$  de  $\gamma$  sur  $\mathbb{L}$ . Si  $j \geq d$ , on effectue la division euclidienne de  $X^j$  par  $M$  et on note  $R$  le polynôme reste. On a bien sûr  $\deg R < d$  et  $\gamma^j = R(\gamma)$ . Ainsi, une famille génératrice de  $\mathbb{L}[\gamma]$  est  $(\gamma^j)_{j \in \{0, \dots, d-1\}}$  et  $\mathbb{L}[\gamma]$  est de dimension finie inférieure à  $d$  sur  $\mathbb{L}$ .

Supposons réciproquement que  $\mathbb{L}[\gamma]$  est de dimension finie  $h$  sur  $\mathbb{L}$ . Alors la famille  $(\gamma^i)_{0 \leq i \leq h}$  est liée sur  $\mathbb{L}$ . La relation linéaire entre les éléments de cette famille fournit un polynôme annulateur de  $\gamma$  à coefficients dans  $\mathbb{L}$ .  $\square$

On montre ensuite une propriété de transitivité.

**Proposition 260**— *Si  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et si chaque  $a_i$  est algébriquement dépendant de  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$  alors  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , il est algébriquement dépendant de  $\{b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n\}$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n)[\gamma]$  est donc de dimension finie sur  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n)$  d'après la proposition 259. Les coefficients  $a_i$  sont tous algébriquement dépendants de  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ . En appliquant les propositions 257 et 259 successivement à  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)[a_1]$ ,  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1)[a_2]$ , ..., jusqu'à  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_{n-1})[a_n]$  on voit que  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)$ . On en déduit que  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n)[\gamma]$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)$ . L'ensemble  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)[\gamma]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell, a_1, \dots, a_n)[\gamma]$ , donc  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)[\gamma]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $\mathbb{C}(b_1, \dots, b_\ell)$ . Grâce à la proposition 259 cela implique que  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ .  $\square$

Enfin, avant la démonstration du théorème principal de cette partie, nous avons besoin d'un lemme technique.

**Lemme 261** (Lemme d'échange)– Si  $\gamma$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  mais algébriquement indépendant de  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  alors  $a_n$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_{n-1}, \gamma\}$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 256, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n+1}]$  tel que le polynôme à une variable  $P(a_1, \dots, a_n, X)$  est non nul mais la valeur  $P(a_1, \dots, a_n, \gamma)$  est nulle. On écrit

$$P(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_i p_i(X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1})X^n$$

Puisque

$$\sum_i p_i(a_1, \dots, a_{n-1}, X)a_i^n \neq 0,$$

il existe  $j$  tel que  $p_j(a_1, \dots, a_{n-1}, X) \neq 0$ . Puisque  $\gamma$  est algébriquement indépendant de  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ , on a  $p_j(a_1, \dots, a_{n-1}, \gamma) \neq 0$ . Le polynôme  $P(a_1, \dots, a_{n-1}, X, \gamma)$  n'est donc pas le polynôme nul. Ce polynôme s'annule cependant en  $a_n$ . La proposition 256 implique donc que  $a_n$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_{n-1}, \gamma\}$ .  $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental de cette partie. L'équivalent en algèbre linéaire de ce théorème est le résultat que les familles libres d'un espace vectoriel ont moins d'éléments que ses familles génératrices.

**Théorème 262**– Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles finis de  $\mathbb{K}$  tels que

- 1) l'ensemble  $A$  est algébriquement indépendant
- 2) tout élément de  $A$  est algébriquement dépendant de  $B$

alors  $\#A \leq \#B$ .

*Démonstration.* On note  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  puis  $k = \#A \cap B$ . Si  $k = m$  alors  $m \leq n$  et le résultat est démontré. On suppose maintenant  $k < m$ . On renumérote les éléments de  $A$  de sorte que  $A \cap B = \{a_1, \dots, a_k\}$ <sup>(c)</sup> et  $B = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ . Puisque  $A$  est algébriquement indépendant, en particulier  $a_{k+1}$  est algébriquement indépendant de  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . En revanche, il est algébriquement dépendant de  $B = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ . Il existe donc  $j$  tel que  $a_{k+1}$  est algébriquement indépendant de  $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_{j-1}\}$  et algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_j\}$  avec  $k+1 \leq j \leq n$ <sup>(d)</sup>. Grâce au lemme d'échange,  $b_j$  est algébriquement dépendant de  $\{a_1, \dots, a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, b_{j-1}\}$  et donc de  $B_1 = B \cup \{a_{k+1}\} \setminus \{b_j\}$ . On en déduit que tout élément de  $B$  est algébriquement dépendant de  $B_1$  puis, grâce à la proposition 260, que tout élément de  $A$  est algébriquement dépendant de  $B_1$ , c'est-à-dire d'un ensemble avec lequel il partage  $k+1$  éléments et qui a autant d'éléments que  $B$ . Par répétition de ce procédé, on construit

c. Avec la convention que  $\{a_1, \dots, a_k\} = \emptyset$  si  $k = 0$ .

d. Avec la convention que  $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_{j-1}\} = \{a_1, \dots, a_k\}$  si  $j = k+1$ .

un ensemble  $B_\ell$  ayant même cardinal que  $B$ , tel que  $\#A \cap B_\ell = m$  et tel que tout élément de  $A$  est algébriquement dépendant de  $B_\ell$ . Comme pour le cas initial ( $k = m$ ), on a  $\#A \leq \#B_\ell = \#B$  ce qui achève la preuve.  $\square$

## A.8 Algèbres de Poisson

Cette partie est inspirée de discussions avec mes collègues François Dumas [9] et Dominique Manchon [27].

**Définition 263**— Une algèbre  $A$  est dite algèbre de Poisson s'il existe une application bilinéaire antisymétrique  $\{ , \}$  de  $A^2$  dans  $A$  qui vérifie

- 1) la loi de Leibniz :  $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$  pour tous  $a, b$  et  $c$  dans  $A$ ;
- 2) l'identité de Jacobi :  $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$  pour tous  $a, b$  et  $c$  dans  $A$ .

L'application  $\{ , \}$  est appelée crochet de Poisson sur  $A$ .

La loi de Leibniz est à voir comme la dérivation d'un produit. Plus précisément, on fait la définition suivante.

**Définition 264**— Soit  $A$  une algèbre et  $D$  une application linéaire sur  $A$ . Cette application est une dérivation si pour tout  $(a, b) \in A^2$ , on a

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

*Exemple 265*— La multiplication par toute fonction arithmétique complètement additive<sup>(e)</sup> est une dérivation de l'anneau  $\mathcal{A}$  des fonction arithmétiques : soit  $h$  une fonction arithmétique complètement additive et  $f, g$  deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors

$$h \cdot (f * g) = (h \cdot f) * g + f * (h \cdot g).$$

En prenant  $a = b = 1$ , on trouve  $D(1) = 0$ . Par récurrence, on a  $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$  pour tout  $n \geq 1$  et cette égalité demeure pour  $n = 0$ .

**Définition 266**— Soit  $A$  une algèbre et  $\{ , \}$  une application bilinéaire de  $A^2$  dans  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , on définit l'application adjointe associée à  $a$  par

$$\begin{aligned} \text{ad}(a) : A &\rightarrow A \\ b &\mapsto \{a, b\}. \end{aligned}$$

L'application  $\text{ad}$  est une application linéaire de  $A$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(A)$  des endomorphismes linéaires de  $A$ .

e. Une fonction arithmétique  $h$  est complètement additive si  $h(mn) = h(m) + h(n)$  pour tous entiers  $m$  et  $n$ .

**Définition 267**– Soit  $A$  une algèbre et  $\{ , \}$  une application bilinéaire de  $A^2$  dans  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , on définit l'application adjointe étoile associée à  $a$  par

$$\begin{aligned} \text{ad}^*(a) : A &\rightarrow A \\ b &\mapsto \{b, a\}. \end{aligned}$$

L'application  $\text{ad}^*$  est une application linéaire de  $A$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(A)$ .

*Remarque 268*– Dire que  $\{ , \}$  vérifie la loi de Leibniz est équivalent à dire que, pour tout  $a \in A$ , l'endomorphisme linéaire  $\text{ad}^*(a)$  est une dérivation. Si le crochet est de plus antisymétrique, dire que  $\{ , \}$  vérifie la loi de Leibniz est aussi équivalent à dire que l'endomorphisme linéaire  $\text{ad}(a)$  est une dérivation.

Soit  $\{ , \}$  vérifiant la loi de Leibniz. On a donc  $\{1, b\} = 0$  pour tout  $b \in A$  puis si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $A$  et si  $n \geq 0$  est un entier,

$$\{a^n, b\} = na^{n-1}\{a, b\}.$$

On en déduit, si  $m \geq 0$  que

$$\{a^n, b^m\} = nma^{n-1}b^{m-1}\{a, b\}.$$

On voit alors que

$$\{a^n, a^m\} = 0. \quad (\text{A.11})$$

On a aussi  $\{a^n b, a^m\} = ma^{m+n-1}\{b, a\}$  puis

$$\{a^n b, a^m c\} = ma^{n+m-1}c\{b, a\} + na^{n+m-1}b\{a, c\} + a^{n+m}\{b, c\}. \quad (\text{A.12})$$

Enfin

$$\{a^n b^p, a^m b^q\} = (mp - nq)a^{n+m-1}b^{q+p-1}\{b, a\}. \quad (\text{A.13})$$

Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{C}[X, Y]$ , on écrit

$$P = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i,j} b_{i,j} X^i Y^j.$$

L'égalité (A.13) et la bilinéarité montrent alors que

$$\{P(x, y), Q(x, y)\} = J[P, Q](x, y)\{x, y\} \quad (\text{A.14})$$

où  $J[P, Q]$  est le polynôme

$$J[P, Q] = \sum_{i,j,p,q} (iq - pj)a_{i,j}b_{p,q}X^{i+p-1}Y^{j+q-1} = \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial P}{\partial Y}.$$

C'est donc le déterminant du jacobien de l'application  $(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ .

*Remarque 269*– Le lecteur vérifiera aisément que l'application  $(P, Q) \mapsto J[P, Q]$  de  $\mathbb{K}[X, Y] \times \mathbb{K}[X, Y]$  dans  $\mathbb{K}[X, Y]$  est un crochet de Poisson sur  $\mathbb{K}[X, Y]$ . Munie de ce crochet, l'algèbre de Poisson  $\mathbb{C}[X, Y]$  est appelée *algèbre de Poisson-Weyl* à deux indéterminées. L'algèbre de Poisson-Weyl à  $2n$  indéterminées est l'algèbre  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$  munie du crochet

$$\{P, Q\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{\partial Q}{\partial Y_i} - \frac{\partial Q}{\partial X_i} \frac{\partial P}{\partial Y_i}.$$

Une algèbre  $A$  sur un corps  $\mathbb{K}$  est dite de *type fini* s'il existe un nombre fini  $e_1, \dots, e_n$  d'éléments distincts de  $A$  tels que, pour tout élément de  $A$ , il existe un polynôme de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  vérifiant  $a = P(e_1, \dots, e_n)$ . On dit que  $A$  est de type fini *engendrée par*  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . On va généraliser l'égalité (A.14). Pour cela, on définit

$$J_{ij}[P, Q] = \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{\partial Q}{\partial X_j} - \frac{\partial Q}{\partial X_i} \frac{\partial P}{\partial X_j}$$

pour tous polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

**Lemme 270**– Soit  $A$  est une algèbre de type fini sur  $\mathbb{K}$  engendrée par  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . On suppose  $A$  munie d'une application bilinéaire antisymétrique  $\{, \}$  de  $A \times A$  dans  $A$  vérifiant la loi de Leibniz. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Alors

$$\{P(e_1, \dots, e_n), Q(e_1, \dots, e_n)\} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} J_{ij}[P, Q](e_1, \dots, e_n) \{e_i, e_j\}.$$

*Remarque 271*– La donnée d'une suite  $(\{e_i, e_j\})_{1 \leq i < j \leq n}$  d'éléments de  $A$  ne conduit pas nécessairement à un crochet de Poisson. Il faut en effet vérifier l'identité de Jacobi qui n'est ni utilisée ni vérifiée dans la démonstration du lemme 270. Si en revanche l'algèbre est isomorphe à  $\mathbb{K}[X, Y]$ , alors l'identité de Jacobi est toujours vérifiée. Ceci est démontré à la remarque 274.

*Démonstration du lemme 270.* Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour  $P = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  et  $Q = X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ .

On commence par étudier le cas où  $P = X_a^{i_a} \dots X_n^{i_n}$  et  $Q = X_{a-1}^{j_{a-1}}$  pour  $a \in \{2, \dots, n\}$ . Par la loi de Leibniz on a

$$\{e_a^{i_a} \dots e_n^{i_n}, e_{a-1}^{j_{a-1}}\} = e_a^{i_a} \{e_{a+1}^{i_{a+1}} \dots e_n^{i_n}, e_{a-1}^{j_{a-1}}\} + i_a e_a^{i_a-1} e_{a+1}^{i_{a+1}} \dots e_n^{i_n} \{e_a, e_{a-1}^{j_{a-1}}\}.$$

Par réitération, on en tire

$$\{e_a^{i_a} \dots e_n^{i_n}, e_{a-1}^{j_{a-1}}\} = \sum_{j=a}^n i_j \left( \prod_{\substack{k=a \\ k \neq j}}^n e_k^{i_k} \right) e_j^{i_j-1} \{e_j, e_{a-1}^{j_{a-1}}\}$$

c'est-à-dire

$$\{e_a^{i_a} \dots e_n^{i_n}, e_{a-1}^{j_{a-1}}\} = \sum_{j=a}^n \left( \frac{\partial X_a^{i_a} \dots X_n^{i_n}}{\partial X_j} \right) (e_1, \dots, e_n) \{e_j, e_{a-1}^{j_{a-1}}\}. \quad (\text{A.15})$$

On suppose ensuite  $P = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  et  $Q = X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ . Pour  $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ , on note  $P_\ell = X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}$  et  $Q_\ell = X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}$ . On note alors  $\mathcal{E}(\ell)$  l'égalité

$$\{P_\ell(e_1, \dots, e_n), Q_\ell(e_1, \dots, e_n)\} = \sum_{n-\ell \leq i < j \leq n} J_{ij}[P_\ell, Q_\ell](e_1, \dots, e_n)\{e_i, e_j\}.$$

et on veut démontrer  $\mathcal{E}(n-1)$ . L'égalité  $\mathcal{E}(0)$  est vraie puisque  $\{e_n^{i_n}, e_n^{j_n}\} = 0$  grâce à (A.11). Supposons avoir démontré  $\mathcal{E}(\ell)$  pour un entier  $\ell \in \{0, \dots, n-2\}$ . Utilisant (A.12), on écrit

$$\begin{aligned} \{e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \dots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}^{j_{n-\ell-1}} \dots e_n^{j_n}\} &= j_{n-\ell-1} e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots e_n^{j_n} \{e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}\} \\ &\quad - i_{n-\ell-1} e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots e_n^{i_n} \{e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots e_n^{j_n}, e_{n-\ell-1}\} \\ &\quad + e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} \{e_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots e_n^{i_n}, e_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots e_n^{j_n}\}. \end{aligned}$$

On utilise (A.15) et  $\mathcal{E}(\ell)$  pour écrire que  $\{e_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \dots e_n^{i_n}, e_{n-\ell-1}^{j_{n-\ell-1}} \dots e_n^{j_n}\}$  est égal à

$$\begin{aligned} &\sum_{j=n-\ell}^n \left( j_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}}{\partial X_j} \right) (e_1, \dots, e_n) \{e_j, e_{n-\ell-1}\} \\ &\quad - \sum_{j=n-\ell}^n \left( i_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}}{\partial X_j} \right) (e_1, \dots, e_n) \{e_j, e_{n-\ell-1}\} \\ &\quad + \sum_{n-\ell \leq i < j \leq n} \left( X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} J_{ij}[X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}] \right) (e_1, \dots, e_n) \{e_i, e_j\}. \end{aligned}$$

Cette quantité se réécrit

$$\sum_{n-(\ell+1) \leq i < j \leq n} J_{ij}[P_{\ell+1}, Q_{\ell+1}](e_1, \dots, e_n) \{e_i, e_j\}$$

car  $J_{ij}[X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}} \dots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell-1}} \dots X_n^{j_n}]$  vaut

$$X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}} J_{ij}[X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}, X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}]$$

si  $n-\ell \leq i < j \leq n$  et

$$\begin{aligned} &i_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n}}{X_j} \\ &\quad - j_{n-\ell-1} X_{n-\ell-1}^{i_{n-\ell-1}+j_{n-\ell-1}-1} X_{n-\ell}^{j_{n-\ell}} \dots X_n^{j_n} \frac{\partial X_{n-\ell}^{i_{n-\ell}} \dots X_n^{i_n}}{X_j} \end{aligned}$$

si  $n-\ell-1 = i < j \leq n$ . On termine alors par répétition de  $\ell \in \{0, \dots, n-2\}$ .  $\square$

Le lemme suivant sera utile pour étudier l'identité de Jacobi.

**Lemme 272**– Soit  $A$  est une algèbre de type fini engendrée par  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Si  $D$  est une dérivation sur  $A$  telle que  $D(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  alors  $D = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $i_1, \dots, i_n$  des entiers naturels. On a

$$D\left(\prod_{j=1}^n e_j^{i_j}\right) = \sum_{j=1}^n i_j e_j^{i_j-1} D(e_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n e_k^{i_k} = 0.$$

Par linéarité, on a enfin  $D(a) = 0$  puis tout  $a \in A$ .  $\square$

**Proposition 273**– Soit  $A$  une algèbre de type fini engendrée par  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Soit  $\{ , \}$  une application bilinéaire antisymétrique de  $A^2$  dans  $A$  vérifiant la loi de Leibniz. On suppose que l'identité de Jacobi est vérifiée pour les éléments de  $\mathcal{E}$ . Alors  $A$  munie de  $\{ , \}$  est une algèbre de Poisson.

*Démonstration.* Pour tout  $(u, v) \in A^2$ , on définit l'endomorphisme linéaire

$$\begin{aligned} R[u, v] : A &\rightarrow A \\ w &\mapsto \{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\}. \end{aligned}$$

Grâce à la loi de Leibniz, on a

$$\{u, \{v, ww'\}\} = \{u, \{v, w\}\} w' + \{u, w'\} \{v, w\} + \{u, \{v, w'\}\} w + \{u, w\} \{v, w'\}$$

puis

$$\{v, \{ww', u\}\} = \{v, \{w', u\}\} w + \{v, w\} \{w', u\} + \{v, \{w, u\}\} w' + \{v, w'\} \{w, u\}$$

et enfin

$$\{ww', \{u, v\}\} = \{w, \{u, v\}\} w' + \{w', \{u, v\}\} w.$$

On a donc

$$\begin{aligned} R[u, v](ww') &= (\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\}) w' \\ &\quad + (\{u, \{v, w'\}\} + \{v, \{w', u\}\} + \{w', \{u, v\}\}) w \\ &\quad + (\{u, w'\} + \{w', u\}) \{v, w\} + (\{u, w\} + \{w, u\}) \{v, w'\} \\ &= R[u, v](w)w' + R[u, v](w')w. \end{aligned}$$

L'endomorphisme linéaire  $R[u, v]$  est donc une dérivation. Par hypothèse, pour tout  $(u, v) \in \mathcal{E}^2$ , cette dérivation s'annule sur  $\mathcal{E}$ . Grâce au lemme 272, elle s'annule donc sur  $A$ . Puisque  $R[u, v](w) = R[w, u](v)$ , on a donc

$$\forall w \in A, \forall v \in \mathcal{E}, \forall u \in \mathcal{E}, R[w, u](v) = 0.$$

L'endomorphisme linéaire  $R[w, u]$  est alors une dérivation qui s'annule sur  $\mathcal{E}$  et donc sur  $A$ . Puisque  $R[w, u](v) = R[v, w](u)$ , on en déduit

$$\forall v \in A, \forall w \in A, \forall u \in \mathcal{E}, R[v, w](u) = 0.$$

L'endomorphisme linéaire  $R[v, w]$  est alors une dérivation qui s'annule sur  $\mathcal{E}$  et donc sur  $A$ . On a donc  $R[v, w](u) = 0$  pour tous  $u, v$  et  $w$  dans  $A$  ce qui est l'identité de Jacobi.  $\square$

*Remarque 274*- Soit  $A$  est une algèbre de type fini à deux générateurs  $x$  et  $y$ . On suppose que  $A$  est munie d'une application bilinéaire antisymétrique  $\{ , \}$  de  $A \times A$  dans  $A$  vérifiant la loi de Leibniz. Alors, cette application vérifie l'identité de Jacobi et  $A$  est une algèbre de Poisson. En effet, grâce à la proposition 273, il suffit de vérifier

$$\{x, \{y, y\}\} + \{y, \{x, y\}\} + \{y, \{y, x\}\} = 0$$

et

$$\{x, \{x, y\}\} + \{y, \{x, x\}\} + \{x, \{y, x\}\} = 0$$

ce qui est conséquence immédiate de l'antisymétrie.

*Exemple 275*- Soit  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ . On définit une structure de Poisson sur l'algèbre  $\mathbb{C}[X, Y]$ , en posant  $\{X, Y\} = P$ . Ceci détermine en effet une application bilinéaire antisymétrique satisfaisant la loi de Leibniz :

$$\{F, G\} = J[F, G]P.$$

Cette application vérifie l'identité de Jacobi d'après la remarque 274.

*Exemple 276*- Soit  $\{ , \}$  une application bilinéaire antisymétrique de  $\mathbb{K}[X, Y, Z]$  satisfaisant à la loi de Leibniz. Le lemme 270 implique

$$\{F, G\} = J_{13}[F, G]\{X, Z\} + J_{23}[F, G]\{Y, Z\} + J_{12}[F, G]\{X, Y\}.$$

pour tous polynômes  $F$  et  $G$  de  $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ . On note  $P, Q$  et  $R$  les polynômes définis par

$$\{X, Y\} = R, \quad \{Y, Z\} = P \quad \text{et} \quad \{Z, X\} = Q. \quad (\text{A.16})$$

Par ce qui précède, l'application bilinéaire

$$\{F, G\} = -J_{13}[F, G]Q + J_{23}[F, G]P + J_{12}[F, G]R$$

détermine un crochet de Poisson si et seulement si elle vérifie l'identité de Jacobi. Grâce à la loi de Leibniz et à la bilinéarité, l'identité de Jacobi est vérifiée si et seulement si

$$\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0.$$

Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si

$$-(J_{13}[X, P] + J_{13}[Y, Q] + J_{13}[Z, R])Q + (J_{12}[X, P] + J_{12}[Y, Q] + J_{12}[Z, R])R \\ + (J_{23}[X, P] + J_{23}[Y, Q] + J_{23}[Z, R])P = 0.$$

On définit le rotationnel de  $(P, Q, R)$  par

$$\text{Rot}(P, Q, R) = \left( \frac{\partial R}{\partial Y} - \frac{\partial Q}{\partial Z}, \frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial X}, \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y} \right).$$

Les données (A.16) définissent donc un crochet de Poisson si et seulement si

$$\text{Rot}(P, Q, R).(P, Q, R) = 0.$$

Un isomorphisme entre deux algèbres qui portent une structure de Poisson peut transporter les structures de Poisson. Plus précisément, on fait la définition suivante.

**Définition 277**– Soit  $A$  et  $B$  deux algèbres. On suppose  $A$  munie d'un crochet de Poisson  $\{ , \}_A$  et  $B$  munie d'un crochet de Poisson  $\{ , \}_B$ . Un isomorphisme d'algèbres  $\varphi: A \rightarrow B$  est appelé isomorphisme de Poisson si, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $A$  on a

$$\varphi(\{x, y\}_A) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}_B.$$

## Annexe B

# Compléments d'analyse

### **B.1** Applications conformes

**Définition 278**– Une application entre deux ouverts de  $\mathbb{C}$  est conforme si elle est holomorphe et bijective.

L'intérêt essentiel des applications conformes est le résultat suivant.

**Théorème 279**– Une application conforme admet une fonction réciproque holomorphe.

La preuve repose sur le théorème de l'application ouverte, le théorème des fonctions implicites et le critère d'effacement des singularités de Riemann. Les détails sont disponibles dans [12, IV.4], [15, VIII.1.3 et VIII.2.5, théorème 7] ou [42, Chapter 8, Proposition 1].

### **B.2** Développement de Fourier complexe

L'application  $e: z \mapsto \exp(2i\pi z)$  envoie le demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H}$  sur le disque unité épointé  $\mathring{D}(0,1) := \{q \in \mathbb{C}: 0 < |q| < 1\}$ . Cette application n'est évidemment pas bijective puisqu'elle est périodique de période 1 mais c'est la seule obstruction : sa restriction à la bande verticale  $B := \{z \in \mathcal{H}: 0 \leq \operatorname{Re} z < 1\}$  est bijective<sup>(a)</sup>. On note  $\varphi$  la réciproque de  $e|_B$ . Naturellement on aurait pu choisir n'importe quelle bande verticale de largeur 1 à la place de  $B$ . On particulier, si  $B' := \{z \in \mathcal{H}: -1/2 \leq \operatorname{Re} z < 1/2\}$ , on note  $\psi$  la réciproque de  $e|_{B'}$ .

Soit  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe périodique de période 1. On pose  $\tilde{f} = f \circ \varphi$  et  $\check{f} = f \circ \psi$ . Si  $z \in \mathcal{H}$  alors

$$f(z) = f(z - \lfloor \operatorname{Re}(z) \rfloor) = \tilde{f}(e(z - \lfloor \operatorname{Re}(z) \rfloor)) = \tilde{f}(e^{2i\pi z}).$$

---

a. Remarquer que  $B$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

De même, après avoir défini

$$\langle x \rangle := \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \in [\frac{1}{2}, 1[ \end{cases}$$

pour tout réel  $x$  a-t-on

$$f(z) = f(z - \langle \operatorname{Re}(z) \rangle) = \check{f}(e(z - \langle \operatorname{Re}(z) \rangle)) = \check{f}(e^{2i\pi z}).$$

La restriction de  $e$  à l'intérieur  $\mathring{B}$  de  $B$  est holomorphe et bijective donc conforme (voir l'annexe B.1). Puisque l'image de  $e|_{\mathring{B}}$  est  $\mathring{D}(0, 1) \setminus \mathbb{R}^+$  on en déduit que  $\varphi|_{\mathring{D}(0, 1) \setminus \mathbb{R}^+}$  est holomorphe et donc que  $\tilde{f}$  est holomorphe sur  $\mathring{D}(0, 1) \setminus \mathbb{R}^+$ . De la même façon,  $\check{f}$  est holomorphe sur  $\mathring{D}(0, 1) \setminus \mathbb{R}^-$ . Montrons maintenant que  $\tilde{f}$  est holomorphe en tout point de  $\mathring{D}(0, 1) \cap \mathbb{R}^+$ . Si  $q \in \mathring{D}(0, 1)$  alors  $\exp(2i\pi\varphi(q)) = q = \exp(2i\pi\psi(q))$  donc  $\varphi(q) - \psi(q) \in \mathbb{Z}$  puis  $f(\varphi(q)) = f(\psi(q))$ . Il en résulte que  $\tilde{f}$  et  $\check{f}$  coïncident au voisinage de tout point de  $\mathring{D}(0, 1) \cap \mathbb{R}^+$ . Puisque  $\check{f}$  est holomorphe au voisinage de tout point de  $\mathring{D}(0, 1) \cap \mathbb{R}^+$  on en déduit que  $\tilde{f}$  est holomorphe en ces points. On a donc démontré le résultat suivant.

**Lemme 280**– Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et périodique de période 1. Il existe une fonction  $\tilde{f} : \mathring{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $f(z) = \tilde{f}(e^{2i\pi z})$  pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

*Remarque 281*– C'est un cas particulier du théorème de factorisation par composition, voir [34, Chapter 9 § 4.5, Chapter 12 § 3.2].

Puisque la fonction  $\tilde{f}$  admet un développement de Laurent

$$\tilde{f}(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)q^n$$

normalement convergent sur tout compact de  $\mathring{D}(0, 1)$ , on obtient le résultat suivant.

**Théorème 282**– Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe périodique de période 1. Elle admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nz}$$

normalement convergent sur tout compact de  $\mathcal{H}$ .

En appliquant le théorème des résidus à  $\tilde{f}$ , on trouve

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, r)} \frac{\tilde{f}(q)}{q^{n+1}} dq = \int_0^1 \frac{\tilde{f}(re(x))}{r^n e(nx)} dx$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $r \in ]0, 1[$ . Écrivant  $r = e^{-2\pi y}$  et  $z = x + iy$  on tire

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(z) e^{-2i\pi n z} dx$$

ce qui justifie la notation ( $\widehat{f}(n)$  est la valeur en  $n$  de la transformée de Fourier de  $f$ ). En choisissant  $y = 1/2$ , on voit qu'il existe une  $C > 0$  tel que

$$\widehat{f}(n) \leq C e^{\pi n}$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Remarque 283*— On trouve dans [16, VII.4.17] une démonstration de ce résultat à partie de la théorie de Fourier des fonctions de la variable réelle.

## **B.3** Logarithmes complexes

### B.3.1) Détermination principale du logarithme

Soit

$$S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } w \leq \pi\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \exp|_S &: S \rightarrow \mathbb{C}^* \\ w &\mapsto \exp(w) \end{aligned}$$

est bijective. L'injectivité résulte de l'égalité :

$$\exp(w) = \exp(w') \implies w - w' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

et la surjectivité résulte de l'écriture polaire des nombres complexes non nuls :

$$r \exp(i\theta) = \exp(\log(r) + i\theta).$$

On note  $\log$  la réciproque de  $\exp|_S$ .

**Propriété-définition 284**— Il existe une unique fonction, appelée détermination principale du logarithme

$$\log: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifie les propriétés

i)  $\exp(\log z) = z;$

ii)  $-\pi < \text{Im } \log z \leq \pi.$

*Remarque 285*— Grâce à l'unicité, la restriction de  $\log$  à  $\mathbb{R}^{*+}$  est le logarithme Neperien habituel. Cela justifie la notation la notation.

On note  $\arg z$  la détermination principale de l'argument de  $z$  : c'est l'unique réel de  $] -\pi, \pi]$  tel que  $z = |z|\exp(i \arg z)$ . On déduit de la relation

$$\exp(\log|z| + i \arg z) = |z|\exp(i \arg(z)) = z$$

la

**Proposition 286**— Si  $z \in \mathbb{C}^*$  on a

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

autrement dit,

$$\operatorname{Re} \log z = \log|z|, \quad \operatorname{Im} \log z = \arg z.$$

*Remarque 287*— Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , on note  $k_z$  l'unique entier tel que  $-\pi < \operatorname{Im}(z) + 2k_z\pi \leq \pi$ . On a alors  $\log \exp(z) = z + 2ik_z\pi$ .

*Remarque 288*— La propriété

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{**})^2, \log(ab) = \log a + \log b$$

ne s'étend pas à  $\mathbb{C}^*$ . Ainsi

$$\log[i(i-1)] = \frac{1}{2} \log 2 - i \frac{3\pi}{4}$$

et

$$\log i + \log(i-1) = \frac{1}{2} \log 2 + i \frac{5\pi}{4}.$$

Le lemme suivant donne le « défaut d'angle ». Le lecteur le démontrera aisément en « ramenant » la somme des angles dans l'intervalles  $] -\pi, \pi]$ .

**Lemme 289**— Si  $a$  et  $b$  sont deux complexes non nuls,

$$\log(ab) = \log a + \log b + 2i\pi k(a, b)$$

avec

$$k(a, b) = \begin{cases} -1 & \text{si } \pi < \arg a + \arg b \leq 2\pi; \\ 0 & \text{si } -\pi < \arg a + \arg b \leq \pi; \\ 1 & \text{si } -2\pi < \arg a + \arg b \leq -\pi. \end{cases}$$

La fonction  $\log$  est discontinue en tout point de  $\mathbb{R}^{*-}$ . Si  $a \in \mathbb{R}^{*-}$ , on voit la discontinuité en  $a$  en considérant les suites

$$z_n = |a|\exp\left[\left(\pi - \frac{1}{n}\right)i\right] \text{ et } w_n = |a|\exp\left[-\left(\pi - \frac{1}{n}\right)i\right].$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -|a| = a$  mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log z_n = \log|a| + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\pi - \frac{1}{n}\right)i = \log|a| + i\pi = \log(a)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log w_n = \log|a| + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\pi + \frac{1}{n} \right) i = \log|a| - i\pi = \log(a) - 2i\pi.$$

Cependant, cette source de discontinuité est la seule comme on le montre dans la proposition suivante.

**Proposition 290**– La détermination principale du logarithme est continue sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

*Démonstration.* En partant de

$$\frac{z}{|z|} = \cos \arg(z) + i \sin \arg(z)$$

on obtient

$$\begin{cases} \arg(z) = -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{si } -\pi < \arg z < 0 \\ \arg(z) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{si } 0 \leq \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

De plus,  $\arg(z)$  est du signe de  $\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ . Ainsi,

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{Signe}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{si } z \notin \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R}^{++} \\ \pi & \text{si } z \in \mathbb{R}^{-*}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la continuité de  $\arg$  sur

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{et} \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Soit  $z \in \mathbb{R}^{++}$  et  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  de limite  $z$ . Alors, si  $z_n \notin \mathbb{R}$ , on a

$$|\arg(z_n)| = \left| \operatorname{Signe}\left(\frac{\operatorname{Im} z_n}{|z_n|}\right) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|}\right) \right| \leq \left| \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|}\right) \right|$$

alors que  $\arg(z_n) = 0$  si  $z_n \in \mathbb{R}^{++}$ . Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} w_n}{|w_n|}\right) = \arccos(1) = 0$$

si  $w_n$  tend vers un réel strictement positif en ne prenant pas de valeur réelles, on obtient que la limite de  $\arg z_n$  est  $0 = \arg z$ .  $\square$

Pour étudier l'holomorphie du logarithme, on utilise le lemme suivant.

**Lemme 291**– Soit  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions continues,  $\Omega$  et  $\Omega'$  étant des ouverts de  $\mathbb{C}$  tels que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ . On suppose que  $g(f(z)) = z$  pour tout  $z \in \Omega$ , que  $g$  est holomorphe en  $f(a)$  et que  $g'(f(a)) \neq 0$ . Alors  $f$  est holomorphe en  $a$  et que  $f'(a) = 1/g'(f(a))$ .

*Démonstration.* De

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)} \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a}$$

on tire

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{1}{\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)}}.$$

Par continuité de  $f$ , si  $z$  tend vers  $a$  alors  $f(z)$  tend vers  $f(a)$  et, par holomorphicité de  $g$  en  $f(a)$  le quotient  $\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)}$  tend vers  $g'(f(a))$ . On en déduit le résultat.  $\square$

En choisissant pour  $f$  la restriction de la détermination principale du logarithme à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et pour  $g$  la fonction exponentielle, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 292**– La détermination principale du logarithme est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ , on a

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Cette proposition implique que

$$\log(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} \quad (\text{B.1})$$

pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . En considérant le contour obtenu en recollant le segment  $[1, z]$ , un arc de cercle de centre 0 et de rayon  $|z|$  puis le segment  $[|z|, 1]$  (voir la figure B.1) on retrouve l'égalité

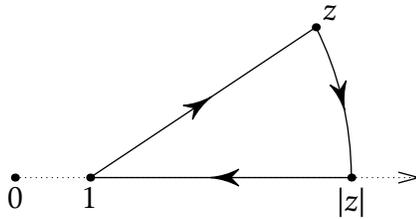


FIGURE B.1 –

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \log|z| + i \arg(z).$$

On peut alors donner un développement en série de  $\log(1 - q)$  qui confirme celui déjà connu pour le logarithme népérien sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Proposition 293**– Pour tout  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ , la détermination principale du logarithme vérifie

$$\log(1 - q) = - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^j}{j}.$$

*Démonstration.* La série converge normalement sur tout compact de  $D(0,1) = \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ . Elle y définit donc une fonction holomorphe  $S : q \mapsto S(q)$ . Par ailleurs, la proposition 292 implique que la fonction  $L : q \mapsto \log(1 - q)$  est elle aussi holomorphe sur  $D(0,1)$ . Enfin, les fonctions  $S$  et  $L$  coïncident sur l'intervalle réel  $[0,1[$ , qui contient un point d'accumulation. Par le théorème d'unicité du prolongement analytique, les fonctions  $L$  et  $S$  sont donc égales de  $D(0,1)$ .  $\square$

*Remarque 294-* On peut aussi démontrer la proposition 293 en dérivant les deux termes de l'égalités.

### B.3.2) Racine carrée

**Définition 295-** On définit la fonction racine carrée par

$$\begin{aligned} \sqrt{\phantom{z}} &: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right). \end{aligned}$$

On a

$$(\sqrt{z})^2 = z$$

et

$$\sqrt{-|z|} = i|z|.$$

On déduit la proposition suivante de multiplicativité de la racine carrée de la définition et du lemme 289.

**Proposition 296-** Pour tous complexes non nuls  $a$  et  $b$  on a

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < \arg(a) + \arg(b) \leq \pi \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### B.3.3) Détermination holomorphe du logarithme d'une fonction

**Proposition 297-** Soit  $\Omega$  un domaine élémentaire<sup>(b)</sup> Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  qui ne s'annule pas. Soit  $z_0 \in \Omega$ . Il existe une fonction holomorphe  $\text{Log } f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\exp(\text{Log } f(z)) = f(z)$$

pour tout  $z \in \Omega$  et

$$\text{Log } f(z_0) = \log f(z_0).$$

La fonction  $\text{Log } f$  s'appelle une détermination holomorphe du logarithme de  $f$ .

---

b. Par exemple un ouvert étoilé.

*Démonstration.* Puisque  $f$  ne s'annule pas, la fonction  $f'/f$  est holomorphe sur  $\Omega$ . L'ensemble  $\Omega$  est un domaine élémentaire donc  $f'/f$  admet une primitive. Soit  $h$  définie par

$$h(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'}{f}(\xi) d\xi$$

pour tout  $z \in \Omega$ . La valeur de  $h(z)$  ne dépend pas du chemin de  $\Omega$  choisi pour relier  $z_0$  à  $z$  et  $h(z_0) = 0$ . Soit

$$g(z) = \frac{\exp(h(z))}{f(z)}.$$

On a  $g'(z) = 0$  donc  $g$  est constante sur  $\Omega$ . Soit  $C$  tel que  $\exp(h(z)) = Cf(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ . En évaluant en  $z_0$ , on a  $C = 1/f(z_0)$  et donc

$$\exp(h(z) + \log f(z_0)) = f(z)$$

pour tout  $z \in \Omega$ . On pose  $\text{Log } f = h(z) + \log f(z_0)$ . □

*Exemple 298* - On suppose qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  contenu dans  $\Omega$  tel que  $f(z) \in \mathbb{R}^{+*}$  pour tout  $z \in I$ . Soit  $z_0 \in I$ , on a alors  $\log f(z_0) = \ln f(z_0)$  et on choisit  $\text{Log } f$  une détermination holomorphe du logarithme de  $f$  sur  $\Omega$  telle que  $\text{Log } f(z_0) = \ln(f(z_0))$ . Si  $z \in I$ , alors  $f(z) \in \mathbb{R}^{+*}$  et donc  $\exp(\ln f(z)) = f(z)$ . Il existe donc  $k: I \rightarrow \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Log } f(z) = \ln f(z) + 2i\pi k(z)$  pour tout  $z \in I$ . Par continuité,  $k$  est constante et par évaluation en  $z = z_0$ , la fonction  $k$  est nulle. La fonction  $\text{Log } f$  coïncide donc avec  $\ln f$  sur  $I$ . C'est donc l'unique prolongement holomorphe de  $\ln f$  à  $I$ .

## **B.4** Nombres de Bernoulli

On définit les nombres de Bernoulli  $\{B_n\}$  par le développement en série entière<sup>(c)</sup>

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

En partant de

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}$$

et en utilisant alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = 1$$

c. La fonction  $z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}$  est holomorphe et non nulle au voisinage de 0. Son inverse  $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$  est donc holomorphe au voisinage de 0 et donc développable en série entière au voisinage de 0. On se place sur ce voisinage dans les calculs suivants.

on obtient

$$\sum_{n=0}^k \binom{k+1}{n} B_n = 0$$

pour tout entier  $k \geq 1$ . Ainsi, par récurrence, les nombres de Bernoulli sont des rationnels. On a  $B_0 = 1$  et  $B_1 = -\frac{1}{2}$  et par parité de la fonction  $t \mapsto \frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{t}{2}$ , on voit que si  $n \geq 3$  est impair, alors  $B_n = 0$ .

$k$	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$B_k$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

On va montrer que les nombres de Bernoulli permettent de calculer les valeurs de la fonction  $\zeta$  aux entiers pairs. La formule d'Euler est

$$\pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right)$$

la convergence étant normale sur tout compact du disque unité ouvert ne contenant pas 0 (voir l'annexe B.11). Pour tout  $z$  de norme strictement inférieure à 1, elle implique

$$\begin{aligned} \pi z \cotan(\pi z) &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2z^2}{z^2 - m^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^2}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - (z/m)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{z^2}{m^2} \right)^n \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2n) z^{2n}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

En écrivant

$$\pi z \cotan(\pi z) = \frac{2i\pi z}{\exp(2i\pi z) - 1} + i\pi z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n} \tag{B.3}$$

on a alors

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \tag{B.4}$$

valable pour tout entier  $n \geq 1$ .

$k$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$\zeta(k)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	$\frac{691\pi^{12}}{638512875}$	$\frac{2\pi^{14}}{18243225}$	$\frac{3617\pi^{16}}{325641566250}$	$\frac{43867\pi^{18}}{38979295480125}$

Il résulte notamment de l'égalité (B.4) que  $B_{2n} > 0$  si  $n$  est impair et  $B_{2n} < 0$  si  $n$  est pair. Puisque  $\zeta(2n)$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a aussi

$$B_{2n} \sim (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

En particulier, l'égalité

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

est vraie dès que  $|t| < 2\pi$ .

Les nombres de Bernoulli permettent le calcul des sommes de puissances d'entiers.

**Proposition 299** (Formule de Faulhaber)– Soit  $m \geq 0$  et  $n \geq 1$  deux entiers. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} B_{m+1-\ell} n^\ell.$$

*Démonstration de la proposition 299.* On veut évaluer

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m.$$

Pour cela, on introduit la série génératrice exponentielle de cette quantité :

$$S[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(n) \frac{t^m}{m!}.$$

Puisque  $|S_m(n)| \leq n^{m+1}$ , cette série a un rayon de convergence non nul. On a

$$S[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(kt)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} = \frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1}.$$

Ainsi,

$$tS[n](t) = (e^{nt} - 1) \sum_{\ell=0}^{+\infty} B_\ell \frac{t^\ell}{\ell!}. \quad (\text{B.5})$$

D'une part,

$$tS[n](t) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) S_m(n) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (\text{B.6})$$

$m \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
3	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$							
4	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$						
5	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$					
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$				
7	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$			
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$		
9	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
10	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$

TABLE B.1 – Tableau des coefficients  $\frac{1}{m+1} \binom{m+1}{\ell} B_{m+1-\ell}$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(e^{nt} - 1) \sum_{\ell=0}^{+\infty} B_{\ell} \frac{t^{\ell}}{\ell!} &= \sum_{a \geq 1} \frac{(nt)^a}{a!} \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{c \geq 1} t^c \sum_{k=0}^{c-1} \frac{n^{c-k}}{(c-k)!k!} B_k \\
&= \sum_{c \geq 1} \frac{t^c}{c!} \sum_{k=0}^{c-1} \binom{c}{k} B_k n^{c-k} \\
&= \sum_{m \geq 0} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} \\
&= \sum_{m \geq 0} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} B_{m+1-\ell} n^{\ell}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

On obtient le résultat par report de (B.6) et (B.7) dans (B.5). □

*Remarque 300* - La preuve donnée n'utilise que des méthodes usuelles de la combinatoire. Le lecteur voulant en savoir plus peut consulter [1] ou [50].

## **B.5** Fonctions de Bernoulli

À l'annexe B.4, on a défini les nombres de Bernoulli par le développement en série

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} B_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!}.$$

En multipliant ce développement par

$$e^{xy} = \sum_{\beta=0}^{+\infty} \frac{x^\beta y^\beta}{\beta!}$$

on obtient

$$\frac{ye^{xy}}{e^y - 1} = \sum_{r=0}^{+\infty} \left( \sum_{\alpha+\beta=r} \binom{r}{\beta} B_\alpha x^\beta \right) \frac{y^r}{r!}.$$

On pose

$$b_r(x) = \sum_{\beta=0}^r \binom{r}{\beta} B_{r-\beta} x^\beta.$$

Puisque  $B_{2k+1} = 0$  si  $k \geq 1$ , le polynôme  $b_r(x) + rx^{r-1}/2$  est pair si  $r$  est pair et impair si  $r$  est impair. De l'égalité

$$\sum_{r=0}^{+\infty} b_r(x) \frac{y^r}{r!} = \frac{ye^{xy}}{e^y - 1} \tag{B.8}$$

on déduit

$$\sum_{r=0}^{+\infty} b_r(1-x) \frac{y^r}{r!} = \frac{ye^{(1-x)y}}{e^y - 1} = \frac{-ye^{-xy}}{e^{-y} - 1} = \sum_{r=0}^{+\infty} b_r(x) \frac{(-y)^r}{r!}$$

d'où

$$b_r(1-x) = (-1)^r b_r(x). \tag{B.9}$$

La fonction de Bernoulli d'ordre  $r$  est la fonction  $B_r$ , périodique de période 1 qui coïncide avec  $b_r$  sur  $[0, 1[$ . Si  $\{x\}$  est la partie fractionnaire de  $x$ , c'est-à-dire le réel de  $[0, 1[$  défini par

$$x = [x] + \{x\}$$

$n$	$B_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$
8	$x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$
9	$x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x$
10	$x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}$

TABLE B.2 – Premiers polynômes de Bernoulli.

alors

$$B_r(x) = b_r(\{x\}).$$

La fonction  $B_0$  est la fonction constante égale à 1 et le nombre de Bernoulli  $B_r$  est la valeur  $B_r(0)$ .

La fonction  $B_1$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  mais en aucun point entier. En dérivant par rapport à  $x$  l'égalité (B.8) on montre que

$$B'_r(x) = rB_{r-1}(x) \tag{B.10}$$

sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . On en déduit que si  $r \geq 2$ , la fonction  $B_r$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $C^{r-2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in ]0, 1[$ , en utilisant (B.9) on obtient

$$B_r(-x) = B_r(1-x) = b_r(1-x) = (-1)^r b_r(x) = (-1)^r B_r(x).$$

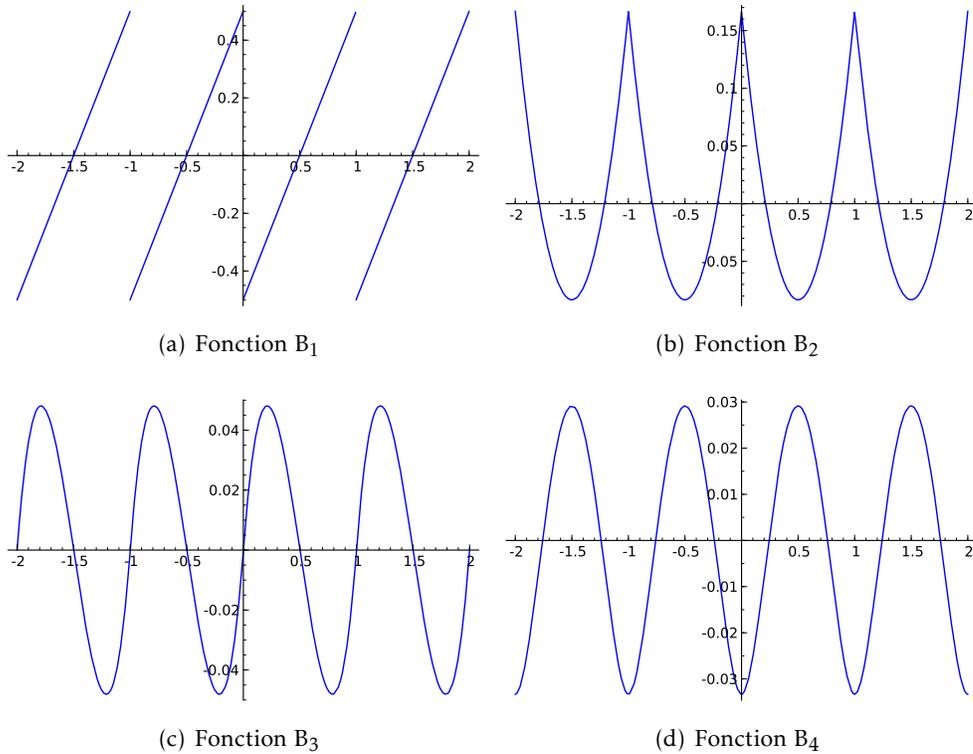


FIGURE B.2 – Fonctions de Bernoulli

Si  $r$  est pair, cette relation reste évidemment vraie pour  $x = 0$ . Si  $r \geq 3$  est impair, cette relation reste vraie si  $x = 0$  car  $B_r(0) = B_r = 0$ . On en déduit que la fonction  $B_r$  est paire si  $r$  est pair, impaire si  $r \geq 3$  est impair et que la restriction de  $B_1$  à  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  est impaire.

Enfin, en intégrant (B.8) sur  $[0, 1]$ , on montre que

$$\int_0^1 B_r(x) dx = 0.$$

Les fonctions  $B_r$  étant périodiques et  $C^\infty$  au voisinage de tout point de continuité elles sont égales à leur développement de Fourier en tout point de continuité et ces développements sont uniformément convergent sur tout intervalle fermé constitué de points de continuité. On peut alors démontrer la proposition suivante.

**Proposition 301**– *Les développements de Fourier*

$$B_{2r}(x) = (-1)^{r-1} \frac{2(2r)!}{(2\pi)^{2r}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2r}}$$

et

$$B_{2r+1}(x) = (-1)^{r-1} \frac{2(2r+1)!}{(2\pi)^{2r+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2r+1}}$$

sont valides pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  si  $2r+1 = 1$  et  $x \in \mathbb{R}$  sinon. Ils sont uniformément convergent sur tout compact de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  si  $2r+1 = 1$  et normalement convergent sur  $\mathbb{R}$  sinon.

*Démonstration.* La fonction  $B_1$  étant impair sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , son développement de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,1} \sin(2\pi nx)$$

sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  avec

$$c_{n,1} = 2 \int_0^1 B_1(t) \sin(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi nt) dt = -\frac{1}{\pi n}.$$

On en déduit le résultat pour  $B_1$ . La fonction  $B_2$  est pair sur  $\mathbb{R}$  et elle s'annule en 0, on a donc

$$B_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2} \cos(2\pi nx)$$

sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  avec

$$c_{n,2} = 2 \int_0^1 B_2(t) \cos(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \cos(2\pi nt) dt = \frac{1}{\pi^2 n^2}.$$

On en déduit le résultat pour  $B_2$ . Enfin, pour tout  $r \geq 1$ , on a

$$B_{2r+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2r+1} \sin(2\pi nx)$$

et

$$B_{2r+2}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,2r+2} \cos(2\pi nx).$$

En dérivant (B.10), on déduit

$$-(2\pi n)^2 c_{n,r+2} = (r+2)(r+1)c_{n,r}.$$

On en tire par récurrence

$$c_{n,2r} = (-1)^{r-1} \frac{(2r)!}{2(2\pi n)^{2r-2}} c_{n,2} \quad \text{et} \quad c_{n,2r+1} = (-1)^r \frac{(2r+1)!}{(2\pi n)^{2r}} c_{n,1}.$$

Le résultat découle alors des calculs précédent de  $c_{n,1}$  et  $c_{n,2}$ . □

*Remarque 302-* La proposition 301 peut aussi se démontrer en utilisant le théorème des résidus pour calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,(2k+1)\pi)} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \cdot \frac{dz}{z^r}$$

et en faisant  $k \rightarrow +\infty$ . Cette méthode évite l'utilisation de tout résultat général sur la convergence des séries de Fourier. (Voir [45, Exercice I.0.1]).

En choisissant  $x = 0$  dans le développement de Fourier de  $B_{2r}$  (avec  $r \geq 1$ , on retrouve

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \quad (\text{B.11})$$

qu'on a établie autrement en (B.4). En majorant  $|\cos(2\pi nx)|$  par 1, on trouve aussi que

$$|B_{2r}(x)| \leq |B_{2r}|$$

pour tout réel  $x$ .

*Remarque 303*– On peut aisément montrer que la famille de polynômes  $(b_r)_{r \geq 0}$  est la seule à vérifier simultanément

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0(x) = 1 \\ b_r'(x) = r b_{r-1}(x) \\ \int_0^1 b_r(x) dx = 0 \quad (r \geq 1). \end{array} \right.$$

## B.6 La formule de Poisson

Nous énonçons la formule sommatoire de Poisson sous des hypothèses qui ne sont pas les plus faibles. On trouve dans [45, Tome I, Théorème 6.1] un énoncé avec des hypothèses plus faibles.

**Théorème 304**– Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que la série de fonctions  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  converge normalement sur tout compact et que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$  converge absolument. Alors,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx} \quad \text{où } \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi nx} dx$$

pour tout réel  $x$ . En particulier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n).$$

*Démonstration.* La fonction  $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$  est continue et périodique de période 1. La convergence normale justifie l'interversion de la somme et de l'intégrale

$$\widehat{F}(m) = \int_0^1 \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \right) e^{-2i\pi mx} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi mx} dx.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\widehat{F}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2i\pi mx} e^{2i\pi mn} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi mx} dx = \widehat{f}(m).\end{aligned}$$

Enfin l'hypothèse de convergence absolue de la série des coefficients de Fourier assure que  $F$  est la somme de sa série de Fourier :

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(m)e^{2i\pi mx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(m)e^{2i\pi mx}.$$

□

## **B.7** La formule sommatoire d'Abel

**Théorème 305**— Soit  $(a_n)$  une suite complexe et  $\varphi$  une fonction  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ . On pose

$$A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n.$$

Alors

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u) du.$$

*Démonstration.* On écrit

$$\begin{aligned}\int_1^x A(u)\varphi'(u) du &= \int_1^x \sum_{1 \leq n \leq u} a_n \varphi'(u) du \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \int_n^x \varphi'(u) du \\ &= A(x)\varphi(x) - \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n).\end{aligned}$$

□

**Corollaire 306**— On reprend les notations du théorème 305. On suppose que  $A(x)\varphi(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini et que les sommes et intégrales écrites convergent.

Alors

$$\sum_{n \geq x} a(n)\varphi(n) = - \int_x^{+\infty} A(u)\varphi'(u) du - A(x)\varphi(x).$$

## B.8 La formule sommatoire d'Euler Maclaurin

La formule d'Euler Mac Laurin permet le calcul d'asymptotique de sommes. Cette formule s'exprime à l'aide des nombres et polynômes de Bernoulli définis en annexes B.4 et B.5.

**Théorème 307**— Soit  $a, b$  deux entiers et  $f$  une fonction  $C^{k+1}$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!} (f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)) \\ + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

*Démonstration.* Grâce à la formule sommatoire d'Abel (voir le théorème 305) on a

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \sum_{1 \leq n \leq b} f(n) - \sum_{1 \leq n \leq a} f(n) = f(b)b - f(a)a - \int_a^b f'(t)[t] dt.$$

On remplace  $[t]$  par  $t - \{t\}$  et on utilise

$$\int_a^b t f'(t) dt = f(b)b - f(a)a - \int_a^b f(t) dt$$

pour obtenir

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b \{t\} f'(t) dt.$$

Enfin  $\{t\} = B_1(t) - B_1$  donc

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt - B_1 (f(b) - f(a)) + \int_a^b B_1(t) f'(t) dt.$$

C'est la formule d'Euler Maclaurin pour  $k = 0$ . Pour  $k \geq 0$ , on suppose

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!} (f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)) \\ + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt. \quad (\text{B.12})$$

Par intégration par parties on a

$$\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt = \frac{1}{k+2} \int_a^b B'_{k+2}(t) f^{(k+1)}(t) dt \\ = \frac{1}{k+2} (B_{k+2}(b) f^{(k+1)}(b) - B_{k+2}(a) f^{(k+1)}(a)) - \frac{1}{k+2} \int_a^b B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt.$$

Puisque  $a$  et  $b$  sont entiers,

$$B_{k+2}(b) = B_{k+2}(a) = B_{k+2}(0) = B_{k+2}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t) dt = \\ \frac{(-1)^{k+2} B_{k+2}}{(k+2)!} (f^{(k+1)}(b) - f^{(k+1)}(a)) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!} \int_a^b B_{k+2}(t) f^{(k+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

L'égalité (B.12) est donc vraie en remplaçant  $k$  par  $k+1$  et, par récurrence, elle est vraie pour tout  $k \geq 0$ .  $\square$

Posons

$$\gamma(k) = 1 + \sum_{r=0}^k \frac{B_{r+1}}{r+1} - \int_1^{+\infty} B_{k+1}(t) \frac{dt}{t^{k+2}}.$$

Il résulte de l'égalité

$$\int_1^{+\infty} B_{k+1}(t) \frac{dt}{t^{k+2}} = \left[ -\frac{1}{k+1} \cdot \frac{B_{k+1}(t)}{t^{k+1}} \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{k+1} \int_1^{+\infty} B'_{k+1}(t) \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{B_{k+1}}{k+1} + \int_1^{+\infty} B_k(t) \frac{dt}{t^{k+1}}$$

que la quantité  $\gamma(k)$  est indépendante de  $k$ . On la note  $\gamma$  et on l'appelle *constante d'Euler*. Le corollaire 308 ci-dessous montre que

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log(N) \right).$$

**Corollaire 308**— Pour tous entiers  $N \geq 1$  et  $k \geq 2$  on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{2j}}{2j} \cdot \frac{1}{N^{2j}} + \frac{c(k)}{N^{2k}}$$

avec

$$|c(k)| \in \left[ 0, \frac{B_{2k}}{k} \right].$$

*Démonstration.* La formule d'Euler-Maclaurin donne

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = \int_1^N \frac{dt}{t} + \sum_{r=0}^{2k-1} \frac{B_{r+1}}{r+1} \left( 1 - \frac{1}{N^{r+1}} \right) - \int_1^N B_{2k}(t) \frac{dt}{t^{2k+1}}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{j=1}^k \frac{B_{2j}}{2j} \cdot \frac{1}{N^{2j}} + \int_N^{+\infty} B_{2k}(t) \frac{dt}{t^{2k+1}}. \quad (\text{B.13})$$

On termine avec la majoration  $|B_{2k}(t)| \leq |B_{2k}|$ .

$\square$

On a par exemple

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} - \frac{1}{252N^6} + \frac{1}{240N^8} - \frac{1}{132N^{10}} + \frac{691}{32760N^{12}} + \frac{c(14)}{N^{14}}$$

avec

$$|c(14)| \leq \frac{1}{6}.$$

*Remarque 309* - Dans l'équation (B.13), la constante  $\gamma$  est  $\gamma(2k-1)$  et (B.13) montre que

$$\gamma(2k-1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log(N) \right).$$

On en déduit de nouveau l'indépendance en  $k$  de  $\gamma(2k-1)$ . En appliquant l'une ou l'autre des preuves de cette indépendance, on peut montrer que

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx + \gamma(f) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{j=1}^k \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) + R_k(f)$$

où

$$\gamma(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^N f(n) - \int_1^N f(x) dx \right)$$

ne dépend pas de  $k$  et

$$R_k(f) = \frac{1}{(2r)!} \int_N^{+\infty} B_{2k}(t) f^{(2k)}(t) dt$$

dès lors que  $f$  et ses dérivées tendent vers 0 en l'infini ou que les dérivées de  $f$  sont  $L^1$  sur  $\mathbb{R}$  (voir [45, Exercice I.0.4] ou [16, VI, §.18]).

## **B.9** Majorations d'intégrales trigonométriques

L'objet de cette annexe est de donner un résultat permettant la majoration d'intégrales trigonométriques, c'est-à-dire de la forme

$$\int_a^b e(f(t)) dt.$$

Le premier résultat est un lemme nécessaire à la suite.

**Lemme 310**– Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $]a, b[$ . On suppose que  $f'$  et  $f''$  sont de signe constant sur  $]a, b[$  et que

$$m = \inf_{]a, b[} |f'| \neq 0.$$

Alors,

$$\left| \int_a^b e(f(t)) dt \right| \leq \frac{1}{\pi m}.$$

*Remarque 311*– Le théorème reste valable si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$  et si  $f'$  est monotone et de signe constant sur  $]a, b[$ . Nous n'aurons pas besoin de cette relaxation de l'hypothèse. Le lecteur intéressé lira la preuve dans [45, §I.6.2].

*Démonstration.* Par intégration par parties on a

$$\int_a^b e(f(t)) dt = \frac{1}{2i\pi} \left[ \frac{e(f(t))}{f'(t)} \right]_a^b + \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f''(t)e(f(t))}{f'(t)^2} dt$$

de sorte que

$$2\pi \left| \int_a^b e(f(t)) dt \right| \leq \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(b)|} + \int_a^b \frac{|f''(t)|}{f'(t)^2} dt.$$

Notons  $s(f'')$  le signe (constant) de  $f''$ . Alors

$$\int_a^b \frac{|f''(t)|}{f'(t)^2} dt = s(f'') \int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2} dt = s(f'') \left( \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)} \right).$$

Notons  $s(f')$  le signe (constant) de  $f'$ , on a alors

$$2\pi \left| \int_a^b e(f(t)) dt \right| \leq s(f') \left( \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} \right) + s(f'') \left( \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)} \right).$$

On pose  $c = a$  si  $f'$  et  $f''$  sont de même signe et  $c = b$  sinon. On a alors

$$2\pi \left| \int_a^b e(f(t)) dt \right| \leq \frac{2}{|f'(c)|} \leq \frac{2}{m}$$

d'où le résultat. □

**Théorème 312**– Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $]a, b[$ . On suppose que  $f''$  est de signe constant sur  $]a, b[$  et que

$$r = \inf_{]a, b[} |f''| \neq 0.$$

Alors,

$$\left| \int_a^b e(f(t)) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{\pi r}}.$$

*Démonstration.* La fonction  $f''$  est de signe constant et est non nul car  $r > 0$ . La fonction  $f'$  est donc strictement monotone et s'annule au plus une fois sur  $]a, b[$ .

I) On suppose que  $f'$  ne s'annule pas.

1) On suppose que  $f'' > 0$ .

a) On suppose  $f' > 0$ . Pour tout  $\delta \in ]0, b - a[$ , on a

$$\int_a^b e(f(x)) dx = \int_a^{a+\delta} e(f(x)) dx + \int_{a+\delta}^b e(f(x)) dx$$

puis

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \left| \int_{a+\delta}^b e(f(x)) dx \right|.$$

De plus, pour tout  $x \in [a + \delta, b[$ , on a

$$|f'(x)| = f'(x) = \int_{x-\delta}^x f''(t) dt + f'(x-\delta) \geq \int_{x-\delta}^x f'' \geq r\delta > 0.$$

En appliquant le lemme 310 on trouve

$$\left| \int_{a+\delta}^b e(f(x)) dx \right| \leq \frac{1}{\pi r \delta}$$

puis

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \frac{1}{\pi r \delta}.$$

b) On suppose  $f' < 0$ . Pour tout  $\delta \in ]0, b - a[$ , on a

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \left| \int_a^{b-\delta} e(f(x)) dx \right| + \delta.$$

De plus, pour tout  $x \in ]a, b - \delta[$ , on a

$$|f'(x)| = -f'(x) = \int_x^{x+\delta} f''(t) dt - f'(x+\delta) \geq \int_x^{x+\delta} f'' \geq r\delta > 0.$$

En appliquant le lemme 310 on trouve

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \frac{1}{\pi r \delta}.$$

2) On suppose que  $f'' < 0$ .

a) On suppose  $f' > 0$ . Pour tout  $\delta \in ]0, b - a[$ , on a

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \left| \int_a^{b-\delta} e(f(x)) dx \right| + \delta.$$

De plus, pour tout  $x \in ]a, b - \delta[$ , on a

$$|f'(x)| = f'(x) = \int_x^{x+\delta} -f''(t) dt + f'(x+\delta) \geq \int_x^{x+\delta} |f''| \geq r\delta > 0.$$

En appliquant le lemme 310 on trouve

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \frac{1}{\pi r \delta}.$$

b) On suppose  $f' < 0$ . Pour tout  $\delta \in ]0, b - a[$ , on a

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \left| \int_{a+\delta}^b e(f(x)) dx \right|.$$

De plus, pour tout  $x \in ]a + \delta, b[$ , on a

$$|f'(x)| = -f'(x) = \int_{x-\delta}^x -f''(t) dt - f'(x-\delta) \geq \int_{x-\delta}^x |f''| \geq r\delta > 0.$$

En appliquant le lemme 310 on trouve

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta + \frac{1}{\pi r \delta}.$$

II) On suppose que  $f'$  s'annule en  $c \in ]a, b[$ . Soit  $\delta_1 \leq c - a$  et  $\delta_2 \leq b - c$ , alors

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta_1 + \delta_2 + \left| \int_a^{c-\delta_1} e(f(x)) dx \right| + \left| \int_{c+\delta_2}^b e(f(x)) dx \right|.$$

Pour tout  $t \in ]a, c - \delta_1] \cup ]c + \delta_2, b[$ , on a

$$|f'(t)| = \left| \int_c^t f''(x) dx \right| \geq r|t - c| \geq \begin{cases} r\delta_1 & \text{si } t \in ]a, c - \delta_1]; \\ r\delta_2 & \text{si } t \in ]c + \delta_2, b[. \end{cases}$$

Puisque  $f'$  est de signe constant sur  $]a, c - \delta_1[$  et sur  $]c + \delta_2, b[$ , le lemme 310 donne

$$\left| \int_a^{c-\delta_1} e(f(x)) dx \right| \leq \frac{1}{\pi r \delta_1} \quad \text{et} \quad \left| \int_{c+\delta_2}^b e(f(x)) dx \right| \leq \frac{1}{\pi r \delta_2}.$$

Finalement

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{\pi r \delta_1} + \frac{1}{\pi r \delta_2}.$$

On note  $\mathcal{L}$  l'intégrale à évaluer. Dans le cas I), si  $\frac{1}{\sqrt{\pi r}} < b - a$ , on choisit  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$  et on trouve  $\mathcal{L} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi r}}$ . Si  $\frac{1}{\sqrt{\pi r}} \geq b - a$ , alors

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq b - a \leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}}.$$

Dans le cas II), si  $\frac{1}{\sqrt{\pi r}} < \min(c - a, b - c)$ , on choisit  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$  et on trouve  $\mathcal{L} \leq \frac{4}{\sqrt{\pi r}}$ . Supposons  $\frac{1}{\sqrt{\pi r}} \geq \max(c - a, b - c)$ . Alors

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq (b - c) + (c - a) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi r}}.$$

Supposons  $c - a \leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \leq b - c$ . On choisit alors  $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$  et on trouve

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| &\leq \left| \int_a^c e(f(x)) dx \right| + \left| \int_c^{c+\delta_2} e(f(x)) dx \right| + \left| \int_{c+\delta_2}^b e(f(x)) dx \right| \\ &\leq c - a + \delta_2 + \frac{1}{\pi r \delta_2} \\ &\leq \frac{3}{\sqrt{\pi r}}. \end{aligned}$$

Supposons  $b - c \leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \leq c - a$ . On choisit alors  $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$  et on trouve

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| &\leq \left| \int_a^{c-\delta_1} e(f(x)) dx \right| + \left| \int_{c-\delta_1}^c e(f(x)) dx \right| + \left| \int_c^b e(f(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r \delta_1} + \delta_1 + b - c \\ &\leq \frac{3}{\sqrt{\pi r}}. \end{aligned}$$

□

## B.10 Produits infinis

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Si la suite  $\left( \prod_{n=0}^N u_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite, on note

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N u_n$$

et on dit que le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge (Voir [14, IV.3]). La définition implique que si les produits  $\prod_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\prod_{n \in \mathbb{N}} v_n$  convergent alors, le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$  converge et

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \prod_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \prod_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

**Proposition 313**— Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs complexes. On suppose que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge. Alors

- 1) le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + u_n)$  converge;
- 2) ce produit est nul si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que  $1 + u_n = 0$ ;
- 3) pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + u_{\sigma(n)})$  converge et vaut  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$

*Démonstration.* 1) Pour montrer le premier point, on montre que la suite

$$(P_N)_{N \in \mathbb{N}} = \left( \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

satisfait au critère de Cauchy. Pour tout  $N$ , l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  implique

$$\left| \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right| \leq \exp \left( \sum_{n=0}^N |u_n| \right) \leq \exp \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right) = C.$$

Soit  $\varepsilon \in ]0, C[$  et  $N_0$  un entier tel que

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Si  $M \geq N \geq N_0$ , on a

$$|P_M - P_N| = \left| \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right| \left| \prod_{n=N+1}^M (1 + u_n) - 1 \right| \leq C \left| \prod_{n=N+1}^M (1 + u_n) - 1 \right|.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=N+1}^M (1 + u_n) - 1 \right| &= \left| \sum_{\substack{I \subset \{N+1, \dots, M\} \\ I \neq \emptyset}} \prod_{i \in I} u_i \right| \\ &\leq \sum_{\substack{I \subset \{N+1, \dots, M\} \\ I \neq \emptyset}} \prod_{i \in I} |u_i| = \prod_{n=N+1}^M (1 + |u_n|) - 1 \end{aligned}$$

donc

$$\left| \prod_{n=N+1}^M (1 + u_n) - 1 \right| \leq \exp \left( \sum_{n=N+1}^M |u_n| \right) - 1 \leq e^{\varepsilon/(2C)} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{C}.$$

On a donc  $|P_M - P_N| \leq \varepsilon$  et la suite  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge.

2) Au point précédent, on a montré  $|P_M - P_{N_0}| \leq K P_{N_0}$  (avec  $K = \varepsilon/C < 1$ ). On en déduit

$$|P_M| \geq |P_{N_0}| - |P_M - P_{N_0}| \geq |P_{N_0}| - K |P_{N_0}| \geq (1 - K) |P_{N_0}|.$$

En passant à la limite en  $M$  il vient

$$\left| \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \right| \geq (1 - K) \left| \prod_{n=0}^{N_0} (1 + u_n) \right|$$

de sorte que si le produit infini s'annule, alors le produit fini de droite aussi et l'un de ses termes est nul.

3) Le premier point appliqué à la suite  $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  implique la convergence du produit permuté. Il reste à montrer qu'il est égal au produit non permuté. Si  $M \geq N \geq N_0$  sont tels que  $\{0, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(M)\}$  (il suffit de prendre  $M$  assez grand) on a comme précédemment

$$\left| \prod_{n=0}^M (1 + u_{\sigma(n)}) - \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right| \leq \left| \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right| \left( \exp \left( \sum_{n \in E(M, N)} |u_n| \right) - 1 \right)$$

avec

$$E(M, N) = \{\sigma(0), \dots, \sigma(M)\} \setminus \{0, \dots, N\} \subset \{n \in \mathbb{N} : n \geq N + 1\}.$$

Puisque

$$\sum_{n \in E(M, N)} |u_n| \leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

on a comme précédemment

$$\exp \left( \sum_{n \in E(M, N)} |u_n| \right) - 1 \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

puis

$$\left| \prod_{n=0}^M (1 + u_{\sigma(n)}) - \prod_{n=0}^N (1 + u_n) \right| \leq \varepsilon.$$

On termine en prenant la limite en  $M$  puis en  $N$ :

$$\left| \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_{\sigma(n)}) - \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \right| \leq \varepsilon$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  de sorte que les deux produits sont égaux.

□

On trouve dans [16, VII.4.20] une preuve du théorème suivant.

**Théorème 314**— Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  différentes de la fonction constante égale à  $-1$ . Si la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge normalement sur tout compact de  $\Omega$  alors le produit

$$f = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$$

converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$ . Il définit alors une fonction holomorphe sur  $\Omega$  qui n'est pas la fonction constante nulle et, pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$v_z(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_z(1 + u_n).$$

Enfin, si  $f(z) \neq 0$  alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)}.$$

*Remarque 315*— La dernière formule de cette énoncé s'appelle la dérivée logarithmique du produit définissant  $f$ .

*Exemple 316*— Montrons que le produit

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}$$

définit une fonction entière. Pour cela, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} - 1 \right]$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . Soit donc  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $z \in K$ , on a  $|z| \leq C$ . En écrivant

$$(1 + u)e^{-u} - 1 = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j (1 - j) \frac{u^j}{j!},$$

on trouve

$$|(1 + u)e^{-u} - 1| \leq |u|^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j+1}{(j+2)!} |u|^j \leq |u|^2 e^{|u|}$$

et donc

$$\left| \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j} - 1 \right| \leq \frac{C^2}{n^2} e^C.$$

Cela implique la convergence normale de la somme.

## B.11 Formule d'Euler

Le but de cette partie est de démontrer la formule

$$\pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad (\text{B.14})$$

valable pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  et normalement convergente sur tout compact de  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

On fixe  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  et on considère la fonction méromorphe

$$f_z(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cotan(\pi w).$$

Les pôles sont les entiers et  $z$ . Tous les pôles sont simples, sauf 0 qui est double. Si  $n \in \mathbb{Z}^*$ , on a

$$f_z(n + \varepsilon) \sim \frac{z}{n(z-w)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

de sorte que

$$\operatorname{Res}_{w=n} f_z(w) = \frac{z}{n(z-n)}.$$

Par ailleurs,

$$f_z(w) = \frac{1}{w^2} + \frac{1}{zw} + o(1) \quad (w \rightarrow 0)$$

et donc

$$\operatorname{Res}_{w=z} f_z(w) = -\pi \cotan \pi z.$$

Pour tout  $N > |z|$  entier, on considère le chemin  $\alpha(N)$  décrit par la figure B.3. La formule des résidus conduit à

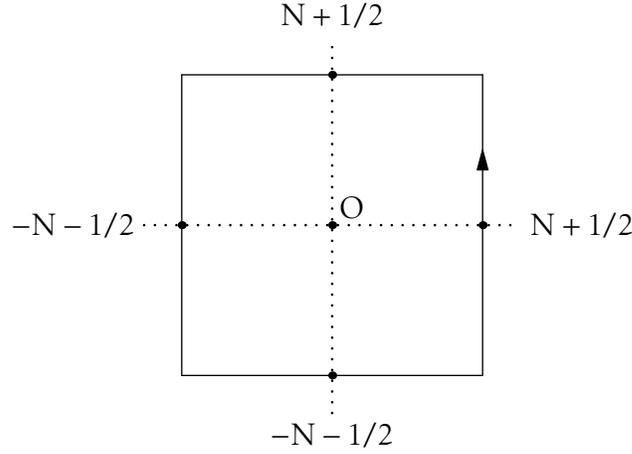
$$\pi \cotan \pi z + \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha(N)} f_z(w) dw = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{z}{n(z-n)}.$$

Puisque

$$\sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{z}{n(z-n)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{z}{n(z-n)} - \frac{z}{n(z+n)} \right) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$$

le résultat annoncé résulte de

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\alpha(N)} f_z(w) dw = 0$$

FIGURE B.3 – Chemin  $\alpha(N)$ 

ce qu'on démontre maintenant. La contribution verticale droite est

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{z}{(N+1/2+it)(z-N-1/2-it)} \cotan \pi(N+1/2+it) dt \\ &= \frac{i}{2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{z}{(N+1/2+it)(N+1/2-z+it)} \tanh(\pi t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|I| \leq \frac{|z|(2N+1)}{2(N+1/2)(N+1/2-\operatorname{Re} z)}$$

et  $I \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . De même, la contribution verticale gauche tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  car cette contribution est

$$-\frac{i}{2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{z}{(N+1/2-it)(N+1/2+z-it)} \tanh(\pi t) dt.$$

La contribution horizontale haute est

$$II = -\frac{1}{2i} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{z}{(u+i(N+1/2))(z-u-i(N+1/2))} \cotan(\pi u + i\pi(N+1/2)) du.$$

Or, pour  $b \geq 1$ , on a

$$|\cotan(a+ib)| = \frac{|1-e^{-2b+2ia}|}{|1+e^{-2b+2ia}|} \leq \frac{1+e^{-2b}}{|1-e^{-2b}|} < 2$$

donc

$$|II| \leq \frac{(2N+1)|z|}{(N+1/2)(N+1/2-\operatorname{Im} z)}$$

puis  $|\text{II}| \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . De même la contribution horizontale basse tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow +\infty$  car celle-ci vaut

$$\frac{1}{2i} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{z}{(u - i(N + 1/2))(z - u + i(N + 1/2))} \cotan(\pi u - i\pi(N + 1/2)) du.$$

## **B.12** Fonctions B et $\Gamma$ d'Euler

La fonction  $\Gamma$  est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \frac{dt}{t}.$$

Elle définit une fonction holomorphe pour tout  $z$  tel que  $\text{Re } z > 0$ . On calcule aisément  $\Gamma(1) = 1$ . Par intégration par parties, on a

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{B.15}$$

de sorte que si  $n \geq 1$  est entier, on a  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .

**Proposition 317**— La fonction  $\Gamma$  admet un prolongement analytique sur  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ . Les entiers négatifs ou nuls sont des pôles simples. Si  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

*Démonstration.* La relation (B.15) implique pour tout entier  $n \geq 1$  la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{z(z + 1) \cdots (z + n)}. \tag{B.16}$$

Le membre de droite est holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) : \text{Re } z > -n - 1\}$$

où cette relation permet donc de définir un prolongement analytique de  $\Gamma$ . Par unicité du prolongement analytique, les prolongements analytiques obtenus pour chaque valeur de  $n$  coïncident sur leur domaines d'holomorphie. On obtient le prolongement à  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  en prenant  $n$  de plus en plus grand. Enfin, l'équation (B.15) donne

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{(-n + \varepsilon)(-n + 1 + \varepsilon) \cdots (\varepsilon - 1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

et on obtient le résidu de  $\Gamma$  en  $-n$  en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. □

La fonction B d'Euler est définie pour tous  $z$  et  $w$  complexes de partie réelle strictement positive par

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (\text{B.17})$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2z-1} (\cos \theta)^{2w-1} d\theta \quad (\text{B.18})$$

la dernière expression étant conséquence du changement de variable  $t = \sin^2 \theta$ . Cette intégrale apparaît naturellement lors de l'étude du produit de fonctions  $\Gamma$ . En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} x^z y^w \frac{dx dy}{xy} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2z} v^{2w} \frac{du dv}{uv} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(z+w)} \frac{dr}{r} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2z-1} (\cos \theta)^{2w-1} d\theta \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (\text{B.19})$$

On peut aisément calculer la valeur de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

**Proposition 318**– On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

*Démonstration.* En prenant  $z = w = \frac{1}{2}$  dans (B.19) on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Puisque la fonction réelle continue  $x \mapsto \Gamma(x)$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $[1/4, 1]$  et est positive en 1, on en déduit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}.$$

Enfin, l'expression (B.18) implique  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ . □

On montre ensuite que la fonction  $\Gamma$  ne s'annule pas. Pour cela, on utilise une représentation de  $\Gamma$  sous forme de produit infini. On commence par remarquer que

$$\frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^n (z+j) = z \exp\left(z \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n\right)\right) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}. \quad (\text{B.20})$$

D'après le corollaire 308, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( z \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n \right) \right) = e^{\gamma z}.$$

L'exemple 316 montre quant-à-lui que le produit

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{z}{j} \right) e^{-z/j}$$

définit une fonction entière. On définit donc une fonction entière par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^n (z + j).$$

**Proposition 319** (Représentation de Gauss)– *Pour tout nombre complexe  $z$ , on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^n (z + j).$$

On donne une preuve tirée de [12, Chapter 4]. Elle repose sur le lemme de caractérisation suivant. Une autre preuve peut être lue dans [16, Chapitre V, §23]. Elle est basée sur la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^{+*}$  de la suite de fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} & \text{si } 0 < x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

vers la fonction  $x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ .

**Lemme 320** (Théorème de Wieland)– *Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant la bande verticale  $V = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$ . Soit  $f$  une fonction analytique sur  $D$*

a) *bornée sur  $V$*

b) *vérifiant  $f(z+1) = zf(z)$  pour tout  $z \in D$  tel que  $z+1 \in D$ .*

*Alors  $f$  admet un prolongement analytique à  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  et*

$$f(z) = f(1)\Gamma(z)$$

*pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ .*

*Démonstration.* La proposition 317 n'utilise que l'équation fonctionnelle (B.15). Comme pour  $\Gamma$ , la fonction  $f$  admet donc un prolongement analytique sur  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  et les entiers négatifs ou nuls sont des pôles simples de  $f$ , avec

$$\operatorname{Res}_{z=-n} f(z) = \frac{(-1)^n}{n} f(1)$$

Considérons alors la fonction  $h$  analytique sur  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  définie par  $h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z)$ . On veut montrer que  $h$  est nulle. Puisque  $f$  et  $f(1)\Gamma$  ont les mêmes pôles, aux mêmes ordres et mêmes résidus en ces pôles, la fonction  $h$  est entière. Considérons alors la fonction entière  $H$  définie par  $H(z) = h(z)h(1-z)$ . On a

$$H(z+1) = zh(z)h(-z) = -h(z)h(1-z) = -H(z).$$

Puisque  $H$  est bornée sur  $V$  (ainsi que le sont  $f$  et  $\Gamma$ ), on en déduit qu'elle est bornée sur  $\mathbb{C}$ . La fonction  $H$  étant entière et bornée, elle est constante (théorème de Liouville). On a donc  $H(z) = h(0)h(1) = 0$  car  $h(1) = 0$ . On en tire <sup>(d)</sup> que  $h(z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  ou  $h(1-z) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Ainsi  $h$  est la fonction nulle ce qui termine la preuve.  $\square$

On peut remplacer l'hypothèse de bornes par une hypothèse de croissance exponentielle [13]. Le lecteur consultera aussi avec profit le texte de Remmert sur le théorème de Wieland [33].

*Démonstration de la proposition 319.* On pose

$$F_n(z) = \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{j=0}^n (z+j)$$

et

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(z).$$

On a vu que  $F$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  donc sur  $\operatorname{Re} z > 0$ . De

$$F_n(z+1) = \frac{nz}{z+n+1} F_n(z)$$

on déduit  $F(z+1) = zF(z)$ . Enfin, si  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , on a

$$|F_n(z)| \leq n! n^{\operatorname{Re}(z)} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\operatorname{Re}(z)+j} = F_n(\operatorname{Re} z).$$

On en déduit que  $|F(z)| \leq F(\operatorname{Re} z)$  et donc, si  $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$ , alors

$$|F(z)| \leq \max_{x \in [1,2]} F(x).$$

Puisque  $F(1) = 1$ , le théorème de Wieland implique  $F = \Gamma$ .  $\square$

Puisqu'on sait déjà que  $\Gamma$  est holomorphe avec des pôles simples en les entiers négatifs ou nuls, on déduit de la représentation de Gauss le corollaire suivant.

*d.* Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions entières telles que  $fg = 0$  alors  $f = 0$  ou  $g = 0$ . En effet, si  $f$  n'est pas la fonction nulle, on considère  $a$  tel que  $f(a) \neq 0$ . Par continuité, il existe une boule ouverte  $B$  de centre  $a$  telle que  $f$  ne s'annule pas sur  $B$ . La fonction  $g$  est donc nulle sur la boule  $B$ . l'ensemble des zéros de  $g$  n'est pas discret ce qui implique que  $g$  est la fonction nulle.

**Corollaire 321**– La fonction  $\frac{1}{\Gamma}$  est entière et s'annule à l'ordre 1 en les entiers négatifs ou nul.

*Remarque 322*– En utilisant (B.20) et le corollaire 308, on trouve la représentation en produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

*Remarque 323*– La représentation de Gauss implique aussi que

$$\Gamma(\bar{z})^{-1} = \overline{\Gamma(z)^{-1}}.$$

**Proposition 324** (Formule de Duplication de Legendre)–

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z).$$

*Démonstration.* En choisissant  $z = w$  dans (B.19), on trouve

$$\frac{\Gamma(w)^2}{\Gamma(2w)} = B(w, w).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} B(w, w) &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta)^{2w-1} d\theta = \frac{1}{2^{2w-2}} \int_0^{\pi/2} (\sin(2\theta))^{2w-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2w-1}} \int_0^{\pi} (\sin(\varphi))^{2w-1} d\theta = \frac{1}{2^{2w-2}} \int_0^{\pi/2} (\sin(\varphi))^{2w-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2w-1}} B\left(w, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma(w)^2}{\Gamma(2w)} = \frac{1}{2^{2w-1}} \frac{\Gamma(w)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(w + \frac{1}{2}\right)}.$$

La formule de duplication de Legendre est obtenue en prenant  $w = z/2$  puisque la fonction  $\Gamma$  ne s'annule pas.  $\square$

On déduit alors le calcul suivant des valeurs de  $\Gamma$  aux demi-entiers en choisissant  $z = 2n$  dans la formule de duplication de Legendre.

**Corollaire 325**– Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

### B.13 Fonction confluyente hypergéométrique

On donne dans cette partie les informations dont on a besoin sur la fonction hypergéométrique confluyente. Il y aurait beaucoup plus de choses à dire sur les fonctions hypergéométriques que le peu que nous disons ici. Le lecteur intéressé est invité à consulter par exemple les ouvrages [40, 41, 31].

Si  $a \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le  $n^{\text{e}}$  symbole de Pochhammer de  $a$  par

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Grâce à l'équation (B.16), on a

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

même si  $a+n$  est un entier négatif grâce à la proposition 317.

Si  $a \in \mathbb{C}$  et  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  (ou bien si  $a$  et  $c$  sont entiers et vérifient  $c < a \leq 0$ ), on définit la fonction confluyente hypergéométrique associée à  $a$  et  $c$  par

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

Si  $u_n$  est le terme général de cette série, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z}{n+1} \frac{a+n}{c+n}$$

d'où l'on déduit qu'elle définit une fonction entière de  $z$  et de  $a$  et une fonction holomorphe en  $c$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ .

Si  $a$  est un entier négatif ou nul, alors  $(a)_n = 0$  pour tout  $n \geq 1 - a$ . Il en résulte qu'alors  ${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $-a$ .

On a la représentation intégrale suivante.

**Proposition 326**– Si  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ , alors

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \frac{1}{\operatorname{B}(a, c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt.$$

*Démonstration.* Puisque  $\operatorname{Re}(c-a) > 0$  et  $\operatorname{Re} a > 0$ , on a

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+a) z^n}{\Gamma(n+c) n!}.$$

Grâce à (B.19), on a donc

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \frac{1}{\operatorname{B}(a, c-a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{B}(n+a, c-a) \frac{z^n}{n!}.$$

En utilisant la définition de la fonction B d'Euler (B.17), on trouve

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+a-1} \frac{z^n}{n!} dt$$

et donc

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{zt} dt.$$

□

On en déduit la formule de transformation de Kummer.

**Corollaire 327** (Formule de transformation de Kummer)– Si  $c$  n'est pas un entier négatif alors

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = e^z {}_1F_1 \left[ \begin{matrix} c-a \\ a \end{matrix} \right] (-z).$$

*Démonstration.* Si  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ , le changement de variable  $t = 1 - u$  dans l'intégrale de la proposition 326 conduit à

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] (z) = e^z {}_1F_1 \left[ \begin{matrix} c-a \\ a \end{matrix} \right] (-z).$$

Comme fonction de  $a$ , les deux membres de cette égalité sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ . Par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout  $a \in \mathbb{C}$ . Comme fonction de  $c$ , les deux membres de cette égalité sont holomorphes sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ . Par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  □

## **B.14** Fonctions J de Bessel

On définit pour  $\nu \in \mathbb{N}$ , la fonction J de Bessel d'ordre  $\nu$  par

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\nu+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

La série est normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{C}$  et elle définit donc une fonction entière.

**Lemme 328**– Soit  $\nu \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . La fonction de Bessel  $J_\nu$  est donnée par

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta.$$

*Démonstration.* Le corollaire 325 conduit à

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} B\left(\nu + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (\text{B.21})$$

avec

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2p-1} (\cos \varphi)^{2q-1} d\varphi$$

(voir § B.12). On conclut en reportant cette expression intégrale dans (B.21).  $\square$

En utilisant

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \theta = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{\nu} \left(\frac{2j-1}{2j}\right)$$

on obtient une majoration de  $J_\nu$ .

**Corollaire 329**– Pour tout entier  $\nu \geq 0$  et tout réel  $x$  la fonction  $J_\nu$  de Bessel vérifie

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{1}{\nu!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^\nu.$$

Nous obtenons une autre majoration *via* une autre expression intégrale.

**Lemme 330**– Soit  $\nu \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . La fonction de Bessel  $J_\nu$  est donnée par

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

*Démonstration.* Le théorème des résidus implique que

$$\frac{1}{(\nu+n)!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,\rho)} \frac{e^\xi}{\xi^{\nu+n}} \frac{d\xi}{\xi}$$

pour tout  $\rho > 0$ . La série définissant  $J_\nu(z)$  peut donc être réécrite

$$2i\pi J_\nu(z) = \int_{C(0,\rho)} \left(\frac{z}{2\xi}\right)^\nu \exp\left(\frac{z}{2}\left(\frac{2\xi}{z} - \frac{z}{2\xi}\right)\right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

On suppose  $z$  réel strictement positif. En choisissant  $\rho = z/2$  et en faisant le changement de variable  $s = 2\xi/z$ , on obtient

$$2i\pi J_\nu(z) = \int_{C(0,1)} s^{-\nu-1} \exp\left(\frac{z}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right) ds$$

puis

$$2\pi J_\nu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta + iz \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

Les deux membres extrêmes de la dernière égalité définissent des fonctions entières de  $z$ , par prolongement holomorphe, l'égalité est donc vraie pour tout complexe  $z$ .  $\square$

**Corollaire 331**– Pour tout entier  $\nu \geq 0$  et tout réel  $x$  la fonction de Bessel vérifie  $|J_\nu(x)| \leq 1$ .

Les majorations des corollaires 329 et 331 montrent que

$$\forall (\nu, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad |J_\nu(x)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\nu!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^\nu\right).$$

Les techniques de l'annexe B.9 permettent d'améliorer ce résultat.

**Proposition 332**– Pour tout entier  $\nu \geq 0$  et tout réel  $x$  la fonction de Bessel vérifie

$$|J_\nu(x)| \leq \min\left(C|x|^{-1/3}, \frac{1}{\nu!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^\nu\right)$$

avec  $C = 4(16/\pi)^{1/3}$ .

*Démonstration.* On a

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(f(\theta)) d\theta \quad \text{avec} \quad f(\theta) = \frac{1}{2\pi} (x \sin \theta - \nu \theta).$$

Pour tout  $\Delta \in ]0, \pi/2[$ , on a

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Delta^{\pi-\Delta} e(f(\theta)) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+\Delta}^{2\pi-\Delta} e(f(\theta)) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\Delta e(f(\theta)) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\Delta}^{\pi+\Delta} e(f(\theta)) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\Delta}^{2\pi} e(f(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

D'une part, on remarque que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\Delta e(f(\theta)) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\Delta}^{\pi+\Delta} e(f(\theta)) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\Delta}^{2\pi} e(f(\theta)) d\theta \right| \leq \frac{2\Delta}{\pi}.$$

D'autre part, la fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]\Delta, \pi - \Delta[$  et sur  $]\pi + \Delta, 2\pi - \Delta[$  et elle est constante sur chacun de ces intervalles. De plus,

$$\inf_{\Delta < \theta < \pi - \Delta} |f''(\theta)| = \inf_{\pi + \Delta < \theta < 2\pi - \Delta} |f''(\theta)| = \frac{|x|}{2\pi} \sin \Delta.$$

On a donc

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_\Delta^{\pi-\Delta} e(f(\theta)) d\theta \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \Delta}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+\Delta}^{2\pi-\Delta} e(f(\theta)) d\theta \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \Delta}}.$$

On a alors

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \Delta}} + \frac{2}{\pi} \Delta \leq \frac{8}{\sqrt{|x|\Delta}} + \frac{2}{\pi} \Delta.$$

Si  $|x| \geq 128/\pi$ , on choisit  $\Delta = (16\pi^2/|x|)^{1/3}$ . On a alors  $0 < \Delta < \pi/2$  et on obtient

$$|J_\nu(x)| \leq C|x|^{-1/3}.$$

Si  $|x| \leq 128/\pi$ , le corollaire 331 conduit à

$$|J_\nu(x)| = \frac{|x|^{1/3}}{|x|^{1/3}} |J_\nu(x)| \leq \frac{2}{\pi} (4\pi)^{2/3} |x|^{-1/3} \leq C|x|^{-1/3}.$$

□

**Lemme 333**– Soit  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ,  $z \in \mathbb{C}$  et  $c > 0$ . Alors

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

*Démonstration.* La démonstration est tout à fait similaire au lemme 330. En remplaçant le contour  $C(0, \rho)$  par le contour  $R(X)$  comme à la figure B.4, on obtient

$$2i\pi J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{R(X)} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi. \quad (\text{B.22})$$

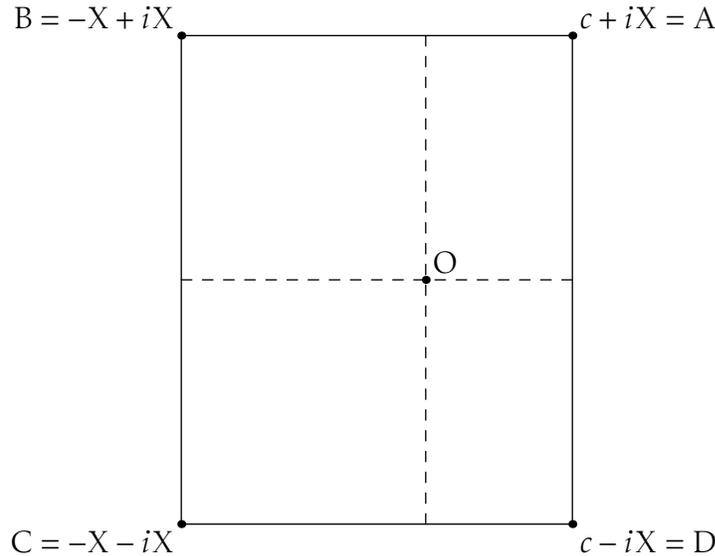


FIGURE B.4 – Le contour  $R(X)$

Si le résultat est démontré pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , il l'est pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par prolongement analytique. On suppose donc  $z \in \mathbb{R}$ . La contribution du segment  $[A, B]$  vérifie

$$\begin{aligned} \left| \int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi \right| &\leq \frac{1}{X^{\nu+1}} \int_{-X}^c \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2 + X^2)}\right) dx \\ &\leq \frac{1}{X^{\nu+1}} \int_{-\infty}^c \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2 + X^2)}\right) dx. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c \exp\left(x - \frac{z^2 x}{4(x^2 + X^2)}\right) dx &\leq \int_{-\infty}^0 \exp\left(x\left(1 - \frac{z^2}{X^2}\right)\right) dx + \int_0^c e^x dx \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \exp(x(1 - z^2)) dx + \int_0^c e^x dx \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant vraie si  $X \geq 1$ . On en déduit

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = 0.$$

Puisque

$$\int_{[C,D]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = - \overline{\int_{[A,B]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi}$$

on a aussi

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{[C,D]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = 0.$$

La contribution du segment  $[B, C]$  vérifie

$$\begin{aligned} \left| \int_{[B,C]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi \right| &\leq \int_{-X}^X \frac{1}{(-X + it)^{\nu+1}} \exp\left(-X + \frac{z^2 X}{4(X^2 + t^2)}\right) dt \\ &\leq \frac{2e^{-X}}{X^{\nu+1}} \int_0^X \exp\left(\frac{z^2 X}{4(X^2 + t^2)}\right) dt \\ &= \frac{2e^{-X}}{X^{\nu+1}} \int_0^1 \exp\left(\frac{z^2}{X(4 + u^2)}\right) du \\ &\leq \frac{2e^{-X}}{X^\nu} \int_0^1 \exp\left(\frac{z^2}{(4 + u^2)}\right) du \end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie si  $X \geq 1$ . On en déduit que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{[B,C]} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = 0.$$

Enfin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(c + it)^{\nu+1}} \exp\left(c + it - \frac{z^2}{4(c + it)}\right) dt$$

converge absolument. On a donc

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{R(X)} \xi^{-\nu-1} \exp\left(\xi - \frac{z^2}{4\xi}\right) d\xi = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

On en déduit le résultat grâce à (B.22). □

*Remarque 334*– La définition des fonctions de Bessel s'étend au fonction d'ordre  $\nu$  complexe. On pourra consulter [49] pour plus d'informations sur ces fonctions. Le lemme 333 par exemple demeure vrai mais, pour éviter le problème de la non continuité du logarithme il faut pour sa preuve remplacer le contour d'intégration de la figure B.4 par un contour d'intégration de type Hankel (voir le graphe B.5).

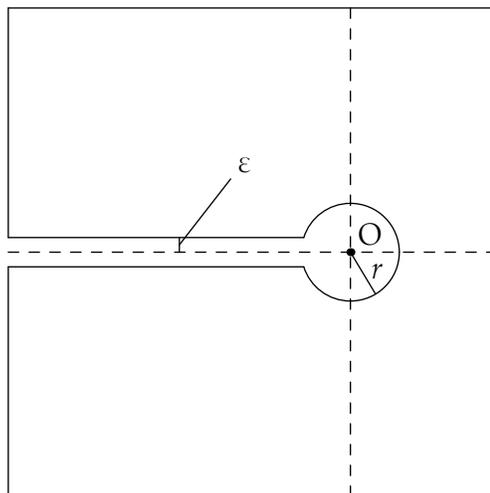


FIGURE B.5 – Un contour de type Hankel

## **B.15** Une autre présentation de $E_2$

On a vu que pour tout  $k \geq 4$  les séries d'Eisenstein admettent le développement de Fourier

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz).$$

On remarque que le membre de droite reste défini et normalement convergent sur tout compact de  $\mathcal{H}$  pour  $k = 2$ . On prend donc ce développement comme définition pour  $E_2$  et on montre que la fonction ainsi définie est bien  $D\Delta/\Delta$ . Il suffit pour cela de montrer que c'est une forme quasimodulaire de poids 2 et profondeur 1.

**Théorème 335**– Si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  alors

$$(cz + d)^{-2} E_2\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = E_2(z) + \frac{6}{i\pi} \cdot \frac{c}{cz + d}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

*Démonstration.* On définit

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n=0 \Rightarrow m \neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2} \quad \text{et} \quad T_1(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m=0 \Rightarrow n \neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2}.$$

Ces séries ne sont *a priori* pas absolument convergentes. On commence par démontrer qu'elles convergent simplement. On introduit

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \{0,1\} \Rightarrow m \neq 0}} \left( \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right)$$

et

$$H_1(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m=0 \Rightarrow n \notin \{0,1\}}} \left( \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right)$$

et on calcule ces séries. Si  $m \neq 0$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right) = 0$$

(c'est une série télescopique) et si  $m = 0$ , alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2.$$

Ainsi  $H_1(z) = 2$ . La série  $H(z)$  vérifie

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S(n) \quad \text{avec} \quad S(n) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \{0,1\} \Rightarrow m \neq 0}} \left( \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \right).$$

Si  $n \notin \{0,1\}$  alors

$$S(n) = \frac{1}{z} u_m \quad \text{avec} \quad u_m = \frac{1}{m + (n-1)/z} - \frac{1}{m + n/z}$$

La série définissant  $S(n)$  est donc absolument convergente et

$$S(n) = \frac{1}{z} \left( u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (u_m + u_{-m}) \right).$$

La somme en  $m$  se réécrit

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left( \left[ \frac{1}{m + (n-1)/z} + \frac{1}{-m + (n-1)/z} \right] - \left[ \frac{1}{m + n/z} + \frac{1}{-m + n/z} \right] \right).$$

Les deux termes entre crochets définissent des sommes absolument convergentes. Ainsi,

$$S(n) = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{(n-1)/z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{m+(n-1)/z} + \frac{1}{-m+(n-1)/z} \right) \right] \\ - \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{n/z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{m+n/z} + \frac{1}{-m+n/z} \right) \right]$$

et donc

$$S(n) = \frac{\pi}{z} \left[ \cotan \frac{\pi(n-1)}{z} - \cotan \frac{\pi n}{z} \right]$$

pour  $n \geq 2$ . Ensuite,

$$S(0) + S(1) = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{mz-1} - \frac{1}{mz} + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{mz} - \frac{1}{mz+1} = \frac{2}{z} \sum_{m \geq 1} \left( \frac{1}{m-1/z} + \frac{1}{-m-1/z} \right) \\ = -\frac{2\pi}{z} \cotan \frac{\pi}{z} + 2.$$

On a alors

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} S(n) + S(0) + S(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} S(n) = 2 - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{z} \cotan \frac{\pi n}{z} \\ = 2 - \frac{2i\pi}{z}.$$

On déduit ensuite des calculs de  $H(z)$  et  $H_1(z)$  la convergence et la valeur de  $T(z)$  et  $T_1(z)$ . On a

$$H_1(z) - T_1(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m=0 \Rightarrow n \notin \{0,1\}}} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} - 1 \\ = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m^2+n^2(n-1)^2 \neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} - 1.$$

On compare la somme de droite à la série de terme général  $|mz+n|^{-3}$ . Si  $z$  est dans un compact, la preuve de la proposition 41 nous indique qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour tous entiers  $m$  et  $n$  tels que  $(m, n) \neq (0, 0)$  et  $(m, n) \neq (0, 1)$ , on a

$$\left| \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} \right| \leq \frac{C}{(m^2+n^2)\sqrt{m^2+(n-1)^2}}.$$

La série de terme général le membre de droite converge puisque pour  $n \notin \{0, 1\}$  il est majoré par  $2C(m^2+n^2)^{-3/2}$  qui est le terme d'une série convergente d'après la

preuve de la proposition 41. On en déduit la convergence absolue de  $H_1 - T_1$  (et donc la convergence de  $T_1$ ). De la même façon,

$$H(z) - T(z) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m^2 + n^2(n-1)^2 \neq 0}} \frac{1}{(mz + n)^2(mz + n - 1)} + 1$$

converge absolument de sorte que  $T(z)$  converge et  $H_1 - T_1 = T - H$ . On en tire

$$T(z) = T_1(z) - \frac{2i\pi}{z}.$$

Comme dans la preuve de la proposition 42 on a

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) e(nz) = \frac{3}{\pi^2} T_1(z).$$

Or,

$$\begin{aligned} T_1\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m=0 \Rightarrow n \neq 0}} \frac{1}{(-m/z + n)^2} = z^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m=0 \Rightarrow n \neq 0}} \frac{1}{(-m + nz)^2} = z^2 T(z) \\ &= z^2 T_1(z) - \frac{2i\pi}{z}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$E_2|_2 S = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(S)$$

et on a évidemment

$$E_2|_2 T = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(T).$$

Grâce au lemme 119, on a pour toute matrice A et B de  $SL_2(\mathbb{Z})$  l'implication

$$E_2|_2 A = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(A) \text{ et } E_2|_2 B = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(B) \Rightarrow E_2|_2 (AB) = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(AB)$$

de sorte que S et T engendrant  $SL_2(\mathbb{Z})$  on a

$$E_2|_2 A = E_2 + \frac{6}{i\pi} X(A)$$

pour toute matrice A de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . □

## **B.16** Transformation de Mellin

Notons  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur  $]0, +\infty[$ , dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide en l'infini et admettant un développement de Laurent au voisinage de  $0^+$ . Autrement dit, une fonction  $f$  est dans  $\mathcal{S}_0$  si et seulement si

1) pour tous  $n \geq 0$  et  $m \geq 0$ , pour tout  $M > 0$ , il existe  $C$  tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leq Cx^{-m}$$

si  $x \geq M$ ;

2) il existe  $N \geq 0$ ,  $\rho > 0$  et une suite  $(a_f(n))_{n \geq -N}$  tels que  $f(x) = S_f(x) + R_f(x)$  si  $0 < x < \rho$  avec

$$S_f(x) = \sum_{n=-N}^{-1} a_f(n)x^n$$

et

$$R_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_f(n)x^n$$

cette série étant absolument convergente. Si  $N = 0$ , on convient que  $S_f = 0$ . On note  $v_f$  le plus petit entier  $n$  tel que  $a_f(n) \neq 0$  et  $N_f = -\min(v_f, 0)$ .

L'algèbre  $\mathcal{S}_0$  est stable par dérivation, et  $N_{f'} = \max(0, N_f + 1)$ .

L'intégrale

$$\int_{\rho/2}^{+\infty} f(x)x^{s-1} dx$$

est normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{C}$  grâce à la décroissance rapide de  $f$ . Elle définit donc une fonction entière. Sur  $[0, \rho/2]$ , la fonction  $R_f$  est continue donc bornée. l'intégrale

$$\int_0^{\rho/2} R_f(x)x^{s-1} dx$$

est donc normalement convergente sur tout compact de  $Re s > 0$ . Enfin, l'intégrale

$$\int_0^{\rho/2} S_f(x) dx = \sum_{n=-N}^{-1} a_f(n) \int_0^{\rho/2} x^{n+s-1} dx$$

est normalement convergente sur tout compact de  $Re s > N$ . Elle définit donc une fonction holomorphe sur  $Re s > N$ .

**Définition 336**— Soit  $f \in \mathcal{S}_0$ . On appelle transformée de Mellin de  $f$ , et on note  $\Gamma[f]$  la fonction de la variable complexe définie par :

$$\Gamma[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^s \frac{dx}{x}$$

sur  $Re s > N_f$ .

Par définition, la fonction  $\Gamma$  d'Euler est donc la transformée de Mellin de la fonction  $x \mapsto e^{-x}$ . On sait (voir l'annexe B.12) que le fonction  $\Gamma$  est holomorphe sur  $Re s > 0$  et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec comme pôles des pôles simples aux entiers négatifs. Cette propriétés se généralise.

**Théorème 337**— Soit  $f \in \mathcal{S}_0$ . Sa transformée de Mellin admet un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Ses éventuels pôles sont les entiers inférieurs à  $N_f$ . Ils sont simples et de résidus

$$\operatorname{Res}_k \Gamma[f] = a_f(k)$$

si  $k \leq N_f$ .

*Remarque 338*— En particulier, si  $f$  est  $C^\infty$  en 0 (c'est-à-dire, si  $N_f = 0$ ) alors  $\Gamma[f]$  a ses éventuels pôles en les entiers négatifs et si  $-n \leq 0$ , alors

$$\operatorname{Res}_{-n} \Gamma[f] = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Démonstration du théorème 337.* On a déjà vu que

$$s \mapsto \int_{\rho/2}^{+\infty} f(x)x^{s-1} dx$$

est entière. On a

$$\int_0^{\rho/2} f(x)x^{s-1} dx = \sum_{k=-N}^{+\infty} \frac{a_k}{k+s} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+s}$$

si  $\operatorname{Re} s > N$ . Le membre de droite fournit un prolongement méromorphe du membre de gauche dont les pôles, situés en les entiers inférieurs à  $N$  sont de résidu  $a_k$ .  $\square$

**Proposition 339**— Si  $f \in \mathcal{S}_0$  et  $n \geq 1$  alors

$$\Gamma[f](s) = \frac{(-1)^n}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \Gamma[f^{(n)}](s+n). \quad (\text{B.23})$$

*Démonstration.* Si  $f \in \mathcal{S}_0$  alors  $f^{(n)} \in \mathcal{S}_0$  avec

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=-N-n}^{+\infty} \binom{k+n}{n} x^k$$

au voisinage de  $0^+$ . Par intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1} dx = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f'(x)x^s ds$$

pour tout  $s$  tel que  $\operatorname{Re} s > N+1$  puisqu'alors  $f(x)x^s$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\Gamma[f](s) = -\frac{1}{s} \Gamma[f'](s+1).$$

Par prolongement holomorphe, l'égalité est vraie dès que  $s$  n'est pas un pôle. Le résultat s'obtient par réitération.  $\square$

Le comportement à l'infini d'une transformée de Mellin est contrôlé grâce au résultat suivant.

**Proposition 340**— Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous réels  $\sigma_0 < \sigma_1$  et  $t_0 > 0$ , la fonction

$$s \mapsto s^n \Gamma[f](s)$$

est bornée sur

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_1, |\operatorname{Im} s| \geq t_0\}.$$

*Démonstration.* Posons  $B = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_1, |\operatorname{Im} s| \geq t_0\}$ . On choisit  $m > n$  de sorte que  $\sigma_0 + m \geq 1$ . En utilisant (B.23), on a

$$s^n \Gamma[f](s) = \frac{(-1)^m s^n}{s(s+1)\cdots(s+m-1)} \Gamma[f^{(m)}](s+m).$$

Or,  $f^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$  donc, si  $s \in B$ , on a

$$|\Gamma[f^{(m)}](s+m)| \leq \|f^{(m)}\|_\infty \int_0^1 x^{\sigma_1+m-1} dx + \int_1^{+\infty} x^{-\ell} x^{\sigma_1+m-1} dx$$

avec  $\ell = \lfloor \sigma_1 + n \rfloor + 1$ . D'autre part,

$$\left| \frac{(-1)^m s^n}{s(s+1)\cdots(s+m-1)} \right| \rightarrow 0 \quad (s \in B, |\operatorname{Im} s| \rightarrow +\infty).$$

On en déduit que

$$s \mapsto \frac{(-1)^m s^n}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}$$

est bornée sur  $B$  puis que  $s \mapsto s^n \Gamma[f](s)$  l'est.  $\square$

*Remarque 341*— Si  $\sigma_0 < \sigma_1$  sont tels que  $[\sigma_0, \sigma_1]$  ne contient pas d'entier négatif, la fonction

$$s \mapsto \frac{(-1)^m s^n}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}$$

est continue sur  $\sigma_0 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_1$ . La preuve de la proposition 340 montre alors que

$$s \mapsto s^n \Gamma[f](s)$$

est bornée sur  $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_0 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_1\}$ .

On tire profit de la formule d'inversion de Fourier pour obtenir une formule d'inversion de la transformée de Mellin [16, Chapter VII, théorème 25], [43, Chapter 5, Theorem 1.9].

**Théorème 342** (Inversion de Mellin)– Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ . Pour tout  $\sigma > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}s=\sigma} \Gamma[f](s)x^{-s} ds.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $\sigma \in ]-k-1, -k[$  et tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}s=\sigma} \Gamma[f](s)x^{-s} ds.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\Gamma[f](\sigma - it) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{\sigma-it} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^u)e^{\sigma u} e^{-itu} du.$$

On pose  $f_\sigma(u) = f(e^u)e^{\sigma u}$ . Puisque  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$  et  $\sigma > 0$ , on a  $f_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . On a donc

$$\Gamma[f](\sigma - 2i\pi t) = \mathcal{F}[f_\sigma](t)$$

où  $\mathcal{F}[f_\sigma]$  désigne la transformée de Fourier de  $f_\sigma$ . Grâce à la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$f_\sigma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma[f](\sigma - 2i\pi t) e^{2i\pi t u} dt$$

et donc

$$f(e^u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma[f](\sigma + it) e^{-(\sigma+it)u} dt.$$

Posant  $x = e^u$ , on a donc

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}s=\sigma} \Gamma[f](s)x^{-s} ds.$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose maintenant  $\sigma \in ]-k-1, -k[$ . L'intégrale

$$\int_{\operatorname{Re}s=\sigma} \Gamma[f](s)x^{-s} ds$$

converge absolument grâce à la remarque 341. On utilise le théorème des résidus sur le rectangle délimité par ses sommets  $1 \pm iT$  et  $\sigma \pm iT$ . Puisque

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}s=1} \Gamma[f](s)x^{-s} ds,$$

la formule

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}s=\sigma} \Gamma[f](s)x^{-s} ds$$

est conséquence de

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\operatorname{Im}s=\pm T} \Gamma[f](s)x^{-s} ds = 0.$$

Cette limite est une conséquence directe de la proposition 340 puisque

$$\left| \int_{\text{Im } s = \pm T} \Gamma[f](s)x^{-s} ds \right| \leq \frac{C}{x^\sigma} \int_\sigma^1 |u + iT|^{-2} du \leq \frac{C(1-\sigma)x^\sigma}{T^2}.$$

□

*Exemple 343* - Puisque la fonction  $\Gamma$  d'Euler est la transformée de Mellin de  $x \mapsto e^{-x}$ , la formule d'inversion de Mellin conduit à l'égalité

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } s = \sigma} \Gamma(s)x^{-s} ds$$

valide pour tout  $x > 0$  et tout  $\sigma > 0$ .

## Annexe C

# Compléments d'arithmétique

### C.1 Compléments sur les fonctions arithmétiques

#### C.1.1) Compléments sur la fonction somme de diviseurs

La taille de  $\sigma_0(n)$  est majorée dans le lemme suivant.

**Lemme 344**– Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\sigma_0(n) \leq C(\varepsilon)n^\varepsilon$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* On fixe  $\varepsilon > 0$ . Supposons d'abord que  $n = p^v$  avec  $v \geq 1$ . On a alors

$$\sigma_0(p^v) = v + 1 \leq 2v = \frac{2}{\log p} \log p^v \leq \frac{2}{\log 2} \log p^v.$$

Or,  $\log(n)/n^\varepsilon$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  donc il existe  $N_0(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $n \geq N_0(\varepsilon)$  on a

$$\frac{2}{\log 2} \log n \leq n^\varepsilon.$$

En particulier, pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $v \geq 1$  tels que  $p^v \geq N_0(\varepsilon)$  on a  $\sigma_0(p^v) \leq p^{\varepsilon v}$ . Considérons maintenant un entier quelconque  $n$ . On écrit sa décomposition en facteurs premiers

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$$

puis  $n = n_1 n_2$  où  $n_2$  contient les « grands facteurs premiers » de  $n_2$  :

$$n_2 = \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} \geq N_0(\varepsilon)}} p^{v_p(n)}.$$

On a  $(n_1, n_2) = 1$  donc  $\sigma_0(n) = \sigma_0(n_1)\sigma_0(n_2)$ . Or,

$$\sigma_0(n_2) = \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} \geq N_0(\varepsilon)}} \sigma_0(p^{v_p(n)}) \leq \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} \geq N_0(\varepsilon)}} p^{\varepsilon v_p(n)} = n_2^\varepsilon.$$

On a donc

$$\sigma_0(n) \leq \sigma_0(n_1)\sigma_0(n_2) \leq \sigma_0(n_1)n^\varepsilon. \quad (\text{C.1})$$

Ensuite

$$\sigma_0(n_1) = \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} < N_0(\varepsilon)}} \sigma_0(p^{v_p(n)}).$$

On a

$$\sigma_0(p^{v_p(n)}) = \sum_{d|p^{v_p(n)}} 1 \leq \sum_{d=1}^{p^{v_p(n)}} 1 \leq p^{v_p(n)}$$

donc

$$\sigma_0(n_1) \leq \prod_{\substack{p|n \\ p^{v_p(n)} < N_0(\varepsilon)}} p^{v_p(n)} \leq N_0(\varepsilon)^{\#\{p|n: p^{v_p(n)} \leq N_0(\varepsilon)\}}. \quad (\text{C.2})$$

Ensuite,

$$\#\{p | n: p^{v_p(n)} \leq N_0(\varepsilon)\} \leq \#\{\ell \in \mathbb{N}^*: \ell \leq N_0(\varepsilon)\}$$

donc  $\sigma_0(n_1) \leq N_0(\varepsilon)^{N_0(\varepsilon)}$ . On termine en posant  $C(\varepsilon) = N_0(\varepsilon)^{N_0(\varepsilon)}$  et en utilisant l'inégalité (C.1).  $\square$

*Remarque 345* - Dans la majoration (C.2), on aurait pu remplacer  $N_0(\varepsilon)$  par

$$M_0(\varepsilon) = \max\{\sigma_0(\ell): \ell \leq N_0(\varepsilon)\}.$$

Fort de cette remarque le lecteur pourra démontrer le résultat suivant. Soit  $f$  une fonction multiplicative telle que

$$|f(p^v)| \leq p^{Av} Q(v)$$

pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $v \geq 1$ , où  $A \geq 0$  et  $Q$  est un polynôme ne dépendant pas de  $p$ . Alors, il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \geq 0$  et tout  $n \geq 1$  on a  $|f(n)| \leq Cn^{A+\varepsilon}$ . Le lecteur fatigué pourra lire la preuve du lemme 2.1.8 de [22]

### C.1.2) Fonction nombre de diviseurs premiers

La fonction *nombre de diviseurs premiers* est la fonction notée  $\omega$  qui à tout entier  $n \geq 2$  associe le cardinal de l'ensemble des diviseurs premiers de  $n$  et à 1 associe 0 :

$$\omega(n) = \#\{p \in \mathcal{P}: p | n\}.$$

Ce n'est pas une fonction multiplicative. En revanche,

$$\begin{aligned}\omega(rd) &= \{p \in \mathcal{P} : p \mid rd\} = \{p \in \mathcal{P} : p \mid r\} \cup \{p \in \mathcal{P} : p \mid d\} \\ &\leq \{p \in \mathcal{P} : p \mid r\} + \{p \in \mathcal{P} : p \mid d\} = \omega(r) + \omega(d).\end{aligned}$$

En se souvenant que  $2^\omega$  est le nombre de parties d'un ensemble à  $\omega$  éléments, on voit que  $2^{\omega(n)}$  est le nombre d'entiers divisant  $n$  et sans facteur carré. On a donc

$$2^{\omega(n)} \leq \sigma_0(n) \quad (\text{C.3})$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Proposition 346**— La fonction  $n \mapsto 2^{\omega(n)}$  est multiplicative.

*Démonstration.* Si  $n$  est un entier, il est sans facteur carré si et seulement si  $\mu(n) \neq 0$  donc si et seulement si  $\mu(n)^2 = 1$ . On a donc

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d \mid n} \mu(d)^2 = \mathbb{1} * \mu^2$$

et cette égalité implique la multiplicativité de la fonction  $2^\omega$ .  $\square$

## C.2 Séries de Dirichlet

Si  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction arithmétique, on définit sa série de Dirichlet par

$$D(a, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)n^{-s}.$$

Le résultat suivant nous permettra de déterminer la région de convergence des séries de Dirichlet.

**Proposition 347**— Soit  $a$  une fonction arithmétique. On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $\varepsilon > 0$  une constante  $C(\varepsilon)$  telle que, pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$|a(n)| \leq C(\varepsilon)n^{\alpha+\varepsilon}.$$

- i) La série de Dirichlet  $D(a, s)$  converge absolument sur le demi-plan  $\operatorname{Re} s > 1 + \alpha$ .
- ii) Soit  $\varepsilon > 0$ , la série  $D(a, s)$  converge normalement sur le demi-plan fermé  $\operatorname{Re} s \geq 1 + \alpha + \varepsilon$ . Elle y définit donc une fonction holomorphe.

*Démonstration.* Remarquons que pour tout  $n \geq 1$  entier, on a  $|n^s| = n^{\operatorname{Re} s}$ .

1. Soit  $s$  de partie réelle strictement supérieure à  $1 + \alpha$ , alors il existe  $\eta > 0$  tel que  $\operatorname{Re} s \geq 1 + \alpha + \eta$ . On a donc

$$|a(n)n^{-s}| \leq C\left(\frac{\eta}{2}\right)n^{-1-\eta/2}$$

d'où l'on déduit la convergence absolue de  $D(a, s)$ .

2. On a

$$\max_{s: \operatorname{Re} s \geq 1 + \alpha + \varepsilon} |a(n)n^{-s}| \leq C \left( \frac{\eta}{2} \right) n^{-1-\eta/2}$$

d'où l'on tire la convergence normale de  $D(a, s)$  sur  $\operatorname{Re} s \geq 1 + \alpha + \varepsilon$ . Enfin, l'holomorphie résulte de ce qu'une suite normalement convergente de fonctions holomorphes définit une fonction holomorphe.  $\square$

La proposition d'unicité suivante permet d'utiliser les manipulations de séries de Dirichlet pour obtenir des égalités arithmétiques.

**Proposition 348**— Soit  $a$  une fonction arithmétique. On suppose que sa série de Dirichlet converge uniformément sur un demi-plan  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_a$  où elle est nulle. Alors  $a$  est la fonction nulle.

*Démonstration.* Si  $a$  n'est pas la fonction nulle alors on peut définir

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : a(n) \neq 0\}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\sigma > \sigma_a + \varepsilon$ . Alors

$$0 = D(a, \sigma)n_0^\sigma = a(n_0) + n_0^\sigma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a(n)n^{-\sigma}.$$

Puisque  $D(a, s)$  converge uniformément sur  $\operatorname{Re} s \geq \sigma_a + \varepsilon$ , la suite  $a(n)n^{-\sigma_a - \varepsilon}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. On en déduit l'existence de  $C(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $n \geq 1$  entier,

$$|a(n)| \leq C(\varepsilon)n^{\sigma_a + \varepsilon}.$$

Pour  $\sigma > \sigma_a + 1 + 2\varepsilon$ , on a donc

$$n_0^\sigma \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a(n)n^{-\sigma} \right| \leq C(\varepsilon)n_0^\sigma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-\sigma + \sigma_a + \varepsilon}.$$

Ces sommes tendent vers 0 lorsque  $\sigma$  tend vers  $+\infty$  car

$$\begin{aligned} n_0^\sigma \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-\sigma + \sigma_a + \varepsilon} &\leq n_0^\sigma \left[ (n_0 + 1)^{-\sigma + \sigma_a + \varepsilon} + \int_{n_0+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\sigma - \sigma_a + \varepsilon}} \right] \\ &\leq n_0^\sigma \left[ (n_0 + 1)^{-\sigma + \sigma_a + \varepsilon} + \frac{1}{\sigma - 1 - \sigma_a - \varepsilon} (n_0 + 1)^{1 - \sigma + \sigma_a + \varepsilon} \right] \\ &\leq \left( \frac{1}{\sigma - 1 - \sigma_a - \varepsilon} + \frac{1}{n_0 + 1} \right) (n_0 + 1)^{1 + \sigma_a + \varepsilon} \left( \frac{n_0}{n_0 + 1} \right)^\sigma. \end{aligned}$$

On en déduit que  $a(n_0) = 0$  ce qui contredit sa définition.  $\square$

Le résultat suivant justifie la définition, donnée dans la définition 6, du produit de Dirichlet.

**Proposition 349**— Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions arithmétiques. On suppose que la série de Dirichlet associée à  $a$  est absolument convergente sur le demi-plan  $\operatorname{Re} s > \sigma_a$  et que la série de Dirichlet associée à  $b$  est absolument convergente sur le demi-plan  $\operatorname{Re} s > \sigma_b$ . Alors, le produit des séries de Dirichlet est la série du produit de Dirichlet de  $a$  et  $b$  : pour  $s$  tel que  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_a, \sigma_b)$ , on a

$$D(a, s)D(b, s) = D(a * b, s)$$

et la série  $D(a * b, s)$  est absolument convergente sur  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_a, \sigma_b)$ .

*Démonstration.* La convergence absolue des deux séries implique qu'on peut les multiplier et permuter les termes en obtenant une somme toujours absolument convergente :

$$D(a, s)D(b, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a(n)n^{-s} \sum_{m=1}^{+\infty} b(m)m^{-s} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \\ nm=q}} a(n)b(m) \right) q^{-s}.$$

Le dernier terme entre parenthèses est bien  $a * b(q)$ . □

Enfin, les applications multiplicatives admettent des séries de Dirichlet qui peuvent être vues comme des produits infinis (voir § B.10) sur les nombres premiers (appelés *produits eulériens*).

**Proposition 350**— Soit  $a$  une fonction arithmétique multiplicative. On suppose que sa série de Dirichlet converge absolument sur  $\operatorname{Re} s > \sigma_a$ . Alors, pour tout  $s$  tel que  $\operatorname{Re} s > \sigma_a$  on a

$$D(a, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{a(p^v)}{p^{vs}}.$$

*Démonstration.* Le produit converge normalement sur tout compact de  $\operatorname{Re} s > \sigma_a$  car

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=1}^{+\infty} \left| \frac{a(p^v)}{p^{vs}} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|a(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}}$$

converge normalement sur tout compact de  $\operatorname{Re} s > \sigma_a$  (voir la proposition 313). Par ailleurs, en notant

$$\mathcal{E}(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} : (p \mid n \text{ et } p \in \mathcal{P}) \Rightarrow p \leq \mathbb{N}\}$$

l'ensemble des entiers<sup>(a)</sup> dont les diviseurs premiers valent au plus  $\mathbb{N}$  on a

$$\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq \mathbb{N}}} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{a(p^v)}{p^{vs}} = \sum_{n \in \mathcal{E}(\mathbb{N})} \frac{a(n)}{n^s}.$$

a. Noter que cet ensemble contient 1

Puisque  $\mathcal{E}(N)$  contient  $\{1, 2, \dots, N\}$  on a

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s} - \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} \frac{a(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathcal{E}(N)} \frac{|a(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|a(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

On obtient le résultat énoncé en faisant tendre  $N$  vers l'infini.  $\square$

*Exemple 351* - Rappelons que  $\zeta$  est la fonction définie pour  $\operatorname{Re} s > 1$  par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

C'est donc la série de Dirichlet associée à la fonction multiplicative  $\mathbb{1}$ . On a alors

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{vs}}$$

ce qui, par sommation des séries géométriques, se simplifie en

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

*Exemple 352* - La fonction de Möbius  $\mu$  vérifie  $|\mu(n)| \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$ . Sa fonction de Dirichlet  $D(\mu, s)$  est donc absolument convergente pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . La fonction  $\mu$  est multiplicative et si  $v \geq 2$ , on a  $\mu(p^v) = 0$  alors que  $\mu(p) = -1$ . On a donc

$$D(\mu, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

pour  $\operatorname{Re} s > 1$ . On en déduit  $D(\mu, s)\zeta(s) = 1$  dès que  $\operatorname{Re} s > 1$ . On en déduit immédiatement que  $\mu * \mathbb{1} = \delta$  obtenant ainsi une autre preuve du lemme 12 d'inversion de Möbius.

*Exemple 353* - Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . La fonction  $I^\alpha: n \mapsto n^\alpha$  admet une série de Dirichlet absolument convergente pour  $\operatorname{Re} s > 1 + \operatorname{Re} \alpha$ . Cette série de Dirichlet est

$$D(I^\alpha, s) = \zeta(s - \alpha).$$

La fonction  $\sigma_\alpha$  étant le produit de convolution de  $\mathbb{1}$  et  $I^\alpha$ , on en déduit que la série de Dirichlet  $D(\sigma_\alpha, s)$  converge absolument pour  $\operatorname{Re} s > \max(1, 1 + \operatorname{Re} \alpha)$  et qu'elle vaut

$$D(\sigma_\alpha, s) = \zeta(s)\zeta(s - \alpha).$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la proposition 350, le corollaire 15 et l'équation (A.7).

### C.3 Quelques fonctions sommatoires arithmétiques

**Lemme 354**– Pour tout  $x \geq 1$  on a

$$\sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = x(\log(x) + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

La preuve est une conséquence directe du théorème général suivant, connu sous le nom de principe de l'hyperbole de de Dirichlet. Le terme d'erreur peut-être amélioré en  $x^{1/3} \log(x)$  (voir [45, Théorème I.6.11]).

**Théorème 355**– Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit pour tout  $x \geq 1$  les fonctions sommatoires

$$F: \mapsto \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) \quad \text{et} \quad G: \mapsto \sum_{1 \leq n \leq x} g(n).$$

Pour tout  $x \geq 1$  et  $y \in [1, x]$  on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f * g(n) = \sum_{1 \leq n \leq y} g(n)F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{1 \leq n \leq x/y} f(n)G\left(\frac{x}{n}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right)G(y).$$

*Démonstration.* On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} f * g(n) &= \sum_{ab \leq x} f(a)g(b) \\ &= \sum_{\substack{ab \leq x \\ b \leq y}} f(a)g(b) + \sum_{\substack{ab \leq x \\ b > y}} f(a)g(b) \\ &= \sum_{b \leq y} g(b) \sum_{a \leq x/b} f(a) + \sum_{a \leq x/y} f(a) \sum_{y < b \leq x/a} g(b) \end{aligned}$$

puis

$$\sum_{y < b \leq x/a} g(b) = G\left(\frac{x}{a}\right) - G(y).$$

□

Le lemme 354 est obtenu en appliquant le principe de l'hyperbole de Dirichlet avec  $y = \sqrt{x}$  à  $f = g = 1$  et en utilisant le corollaire 308. Les corollaires suivants sont alors conséquence immédiate de la formule de sommation d'Abel (voir § B.7).

**Corollaire 356**– Pour tout  $x \geq 1$  on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{\sigma_0(n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{x} \log(x) + O(\sqrt{x}).$$

**Corollaire 357**– Pour tout  $\theta > 1$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \geq 1$  on a

$$\sum_{n \geq x} \frac{\sigma_0(n)}{n^\theta} \leq C \frac{\log(2x)}{x^{\theta-1}}.$$

## C.4 Sommes de Kloosterman

Si  $m, n, c$  sont des entiers, on définit la somme de Kloosterman

$$\text{Kl}(m, n; c) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \exp\left(2i\pi \frac{mx + n\{x, c\}}{c}\right)$$

où  $\{x, c\}$  désigne l'inverse de  $x$  modulo  $c$ . L'objet de cette annexe est d'étudier quelques propriétés de ces sommes en particulier la loi de multiplicativité croisée (lemme 361) et la relation de Selberg (proposition 363).

Nous commençons par établir quelques cas dégénérés.

**Lemme 358**— Soit  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier divisible par  $p$ . Alors  $\text{Kl}(n, 1; p) = -1$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \text{Kl}(n, 1; p) &= \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\{x, p\}}{p}\right) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{1}{p}\right)^x \\ &= e\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1 - e\left(\frac{p-1}{p}\right)}{1 - e\left(\frac{1}{p}\right)} = -1. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 359**— Si  $m$  et  $n$  sont des entiers alors  $\text{Kl}(m, n; 1) = 1$ .

**Lemme 360**— Soit  $p$  un nombre premier et  $n$  un multiple de  $p$ . Si  $\alpha \geq 2$  alors  $\text{Kl}(n, 1; p^\alpha) = 0$ .

*Démonstration.* On a

$$\text{Kl}(n, 1; p^\alpha) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x, p)=1}}^{p^\alpha-1} e\left(\frac{nx + \{x, p^\alpha\}}{p^\alpha}\right).$$

On note  $q$  et  $r$  les quotient et reste de la division euclidienne de  $x$  par  $p^{\alpha-1}$ . L'inverse de  $r$  modulo  $p^\alpha$  est aussi inverse de  $r$  modulo  $p^{\alpha-1}$  et on vérifie aisément que

$$\{x, p^\alpha\} = \{r, p^\alpha\} - \{r, p^\alpha\}^2 q p^{\alpha-1}.$$

On écrit  $n = p^v k$  avec  $v \geq 1$  et  $(k, p) = 1$  et on a alors

$$\text{Kl}(n, 1; p^\alpha) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}\mathbb{Z} \\ (r, p)=1}} e\left(\frac{kp^v r - \{r, p^\alpha\}}{p^\alpha}\right) \sum_{q \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e\left(-\frac{\{r, p^\alpha\}^2}{p} q\right).$$

La somme en  $q$  est nulle.

□

Le résultat suivant est un résultat de multiplicativité.

**Lemme 361** (Lemme de multiplicativité croisée)– Soit  $c$  et  $c'$  deux entiers premiers entre eux. Pour tous entiers  $m$  et  $n$  on a

$$\text{Kl}(m, n; cc') = \text{Kl}(m\{c', c\}, n\{c', c\}; c) \text{Kl}(m\{c, c'\}, n\{c, c'\}; c').$$

*Démonstration.* Puisque  $c$  et  $c'$  sont premiers entre eux, l'identité de Bezout donne des entiers  $u$  et  $v$  tels que  $uc + vc' = 1$ . On a alors

$$\frac{1}{cc'} = \frac{u}{c'} + \frac{v}{c} \in \frac{\{c, c'\}}{c'} + \frac{\{c', c\}}{c} + \mathbb{Z}$$

puis

$$\text{Kl}(m, n; cc') = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/cc'\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\{c, c'\}(mx + n\{x, cc'\})}{c'}\right) e\left(\frac{\{c', c\}(mx + n\{x, cc'\})}{c}\right).$$

Notons  $\alpha = \{x, cc'\}$ . Il existe  $\beta \in \mathbb{Z}$  tel que  $x\alpha + cc'\beta = 1$  et donc  $\alpha$  est aussi un inverse de  $x$  modulo  $c'$ . Comme

$$e\left(\frac{\{c, c'\}(mx + n\{x, c'\})}{c'}\right)$$

ne dépend pas du choix de l'inverse de  $x$  modulo  $c'$ , on en déduit

$$e\left(\frac{\{c, c'\}(mx + n\{x, cc'\})}{c'}\right) = e\left(\frac{\{c, c'\}(mx + n\{x, c'\})}{c'}\right)$$

puis

$$\text{Kl}(m, n; cc') = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/cc'\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\{c, c'\}(mx + n\{x, c'\})}{c'}\right) e\left(\frac{\{c', c\}(mx + n\{x, c\})}{c}\right).$$

Noter que la première exponentielle ne dépend que de la classe de  $x$  modulo  $c'$  alors que la seconde ne dépend que de la classe de  $x$  modulo  $c$ . Le théorème chinois fournit un isomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/cc'\mathbb{Z})^\times &\rightarrow (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z})^\times \\ x \pmod{cc'} &\mapsto (x \pmod{c}, x \pmod{c'}). \end{aligned}$$

En particulier l'image de  $\{x, cc'\}$  est  $(\{x, c\}, \{x, c'\})$ . On a alors

$$\begin{aligned} \text{Kl}(m, n; c) &= \sum_{x_1 \in (\mathbb{Z}/c'\mathbb{Z})^\times} \sum_{x_2 \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\{c, c'\}(mx_1 + n\{x_1, c'\})}{c'}\right) e\left(\frac{\{c', c\}(mx_2 + n\{x_2, c\})}{c}\right) \\ &= \text{Kl}(m\{c, c'\}, n\{c, c'\}; c') \text{Kl}(m\{c', c\}, n\{c', c\}; c). \end{aligned}$$

□

*Remarque 362*– Si  $c$  et  $c'$  sont premiers entre eux, le changement de variables  $y = \{c', c\}x$  montre que

$$\text{Kl}(mc', nc'; c) = \text{Kl}(mc'^2, n; c). \quad (\text{C.4})$$

**Proposition 363** (Relation de Selberg)– Si  $m, n, c$  sont des entiers alors

$$\text{Kl}(m, n; c) = \sum_{d|(m, n, c)} d \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{c}{d}\right).$$

*Démonstration.* Si  $n$  est premier à  $c$ , la relation de Selberg se réduit à  $\text{Kl}(m, n; c) = \text{Kl}(mn, 1; c)$  qui résulte du changement de variable  $y = \{n, c\}x$  dans la définition. Montrons ensuite qu'on peut se ramener au cas où  $c$  est une puissance d'un nombre premier. Soit  $c$  et  $c'$  deux entiers premiers entre eux, nous allons montrer que si la relation est vraie pour  $\text{Kl}(m, n; c)$  et  $\text{Kl}(m, n; c')$  pour tous entiers  $m$  et  $n$  alors elle est vraie pour  $\text{Kl}(m, n; cc')$  pour tous  $m$  et  $n$ . On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{d|(cc', m, n)} d \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{\substack{d|(c, m, n) \\ d'|(c', m, n)}} dd' \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2 d'^2}, 1; \frac{c}{d} \cdot \frac{c'}{d'}\right) \\ &= \sum_{\substack{d|(c, m, n) \\ d'|(c', m, n)}} dd' \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2 d'^2} \left\{\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\right\}^2, 1; \frac{c'}{d'}\right) \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2 d'^2} \left\{\frac{c'}{d'}, \frac{c}{d}\right\}^2, 1; \frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

d'après le lemme 361 et l'équation (C.4). On a

$$\left\{\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\right\} = \left\{c, \frac{c'}{d'}\right\} d \pmod{\frac{c'}{d'}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{d|(cc', m, n)} d \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{\substack{d|(c, m, n) \\ d'|(c', m, n)}} dd' \text{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2} \left\{c, \frac{c'}{d'}\right\}^2, 1; \frac{c'}{d'}\right) \\ &\quad \times \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2} \left\{c', \frac{c}{d}\right\}^2, 1; \frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{d|(cc', m, n)} d \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{cc'}{d}\right) &= \sum_{d|(m\{c', c\}, n\{c', c\}, c)} d \text{Kl}\left(\frac{mn}{d^2} \left\{c', \frac{c}{d}\right\}^2, 1; \frac{c}{d}\right) \\ &\quad \times \sum_{d'|(m\{c, c'\}, n\{c, c'\}, c')} d' \text{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2} \left\{c, \frac{c'}{d'}\right\}^2, 1; \frac{c'}{d'}\right). \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{d|(m\{c',c\},n\{c',c\},c)} d \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}\left\{c', \frac{c}{d}\right\}^2, 1; \frac{c}{d}\right) = \operatorname{Kl}(m\{c',c\}, n\{c',c\}; c)$$

$$\sum_{d'|(m\{c,c'\},n\{c,c'\},c')} d' \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{d'^2}\left\{c, \frac{c'}{d'}\right\}^2, 1; \frac{c'}{d'}\right) = \operatorname{Kl}(m\{c,c'\}, n\{c,c'\}; c')$$

on a

$$\sum_{d|(m,n,cc')} d \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{cc'}{d}\right) = \operatorname{Kl}(m\{c',c\}, n\{c',c\}; c) \operatorname{Kl}(m\{c,c'\}, n\{c,c'\}; c')$$

$$= \operatorname{Kl}(m, n; cc')$$

et on est réduit à démontrer la formule de Selberg lorsque  $c = p^\alpha$ , ce qu'on va faire par récurrence. Supposons  $\alpha = 1$  : si  $p$  ne divise pas  $n$  ou si  $p$  ne divise pas  $m$  on a déjà montré le résultat. Si  $p \mid n$  et  $p \mid m$  alors

$$\operatorname{Kl}(m, n; p) = \varphi(p) = p - 1$$

et

$$\sum_{d|(m,n,p)} d \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{d^2}, 1; \frac{p}{d}\right) = \operatorname{Kl}(mn, 1; p) + p \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{p^2}, 1; 1\right)$$

d'après les lemmes 358 et 359. Supposons donc vraie la formule pour  $c = p^\alpha$ . Être premier à  $p^{\alpha+1}$  étant équivalent à être premier à  $p$ , le seul cas non traité est celui où  $p \mid m$  et  $p \mid n$ . On a alors

$$\operatorname{Kl}(m, n; p^{\alpha+1}) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^{\alpha+1}\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}\{x, p^{\alpha+1}\}}{p^\alpha}\right)$$

$$= p \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times} e\left(\frac{\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}\{x, p^\alpha\}}{p^\alpha}\right)$$

puisque  $x \mapsto e\left(\frac{\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}\{x, p^\alpha\}}{p^\alpha}\right)$  ne dépend que de la classe de  $x \pmod{p^\alpha}$ . Ainsi

$$\operatorname{Kl}(m, n; p^{\alpha+1}) = p \operatorname{Kl}\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}; p^\alpha\right) = \sum_{d|\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}, p^\alpha\right)} p d \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{(pd)^2}, 1; \frac{p^{\alpha+1}}{pd}\right)$$

$$= \sum_{\delta|(m,n,p^\alpha)} \delta \operatorname{Kl}\left(\frac{mn}{\delta^2}, 1; \frac{p^{\alpha+1}}{\delta}\right) - \operatorname{Kl}(mn, 1; p^{\alpha+1}).$$

Enfin,  $\operatorname{Kl}(mn, 1; p^{\alpha+1}) = 0$  par le lemme 360. □

Nous montrons que les sommes de Kloosterman sont les transformées de Fourier inverses des sommes de Gauss. Nous utilisons pour cela la théorie de Fourier des groupes finis telle que développées dans la partie A.2.

Sur le groupe multiplicatif  $G_c = (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$ , considérons la fonction à valeurs complexes

$$e_c : (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \exp\left(\frac{2i\pi}{c}x\right).$$

On a alors

$$e_c * e_c(a) = \frac{1}{\varphi(c)} \text{Kl}(1, a; c)$$

pour tout  $a \in G_c$ .

La transformée de Fourier de  $\text{Kl}_a : a \mapsto \text{Kl}(1, a; c)$  est alors

$$\widehat{\text{Kl}}_a = \varphi(c) \widehat{e}_c^2.$$

Or, pour tout  $\chi \in \widehat{G}_c$ , c'est-à-dire pour tout caractère de Dirichlet modulo  $c$ , on a

$$\widehat{e}_c(\chi) = \frac{1}{\varphi(c)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} e_c(x) \overline{\chi}(x) = \frac{1}{\varphi(c)} G_\chi.$$

Ainsi,

$$\widehat{\text{Kl}}_a(\chi) = \frac{1}{\varphi(c)} G_\chi^2.$$

Grâce à la formule d'inversion de Fourier, on en déduit

$$\text{Kl}(1, a; c) = \frac{1}{\varphi(c)} \sum_{\chi \in (\widehat{\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}})^\times} \chi(a) G_\chi^2.$$

## Annexe D

# Problèmes

### **D.1** Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction $\zeta$ de Riemann

I) Polynômes de Bernoulli.

1) Montrer que les relations

$$\begin{cases} b_0(t) = 1, & \forall t \in \mathbb{R} \\ b'_k(t) = kb_{k-1}(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \int_0^1 b_k = 0, & \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

définissent une unique suite de fonctions  $C^1$  et que ces fonctions sont des polynômes.

2) On pose  $B_k = b_k(0)$ . Montrer que

$$b_k(1-t) = (-1)^k b_k(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{cases} b_{2k}(1) = B_{2k}, & \forall k \in \mathbb{N} \\ b_{2k+1}(1) = B_{2k+1} = 0, & \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

II) Une intégrale.

1) On pose

$$I(k, m) = \int_0^1 b_{2k}(t) \cos(\pi mt) dt$$

pour tout entier  $k \geq 0$  et tout entier  $m \geq 1$ . Montrer que  $I(0, m) = 0$  et que, pour tout  $k \geq 1$  entier,

$$I(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{(\pi m)^{2k}} & \text{si } m \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

2) On pose  $b_k^* = b_k - B_k$  et

$$I_k^*(m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t) \cos(\pi mt) dt$$

pour tous  $k \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} I_k^*(m).$$

III) Calcul de  $\zeta(2k)$ .

1) Montrer que

$$\cos(mx) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

pour tous  $m \in \mathbb{Z}$  et  $x \in [0, \pi]$ .

2) Montrer que

$$\frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 b_{2k}^*(t) \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\pi t\right)}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 b_{2k}^*.$$

3) Soit  $k \geq 1$ . On pose

$$f(t) = \frac{b_{2k}^*(t)}{2 \sin \frac{\pi t}{2}}$$

pour tout  $t \in ]0, 1]$ . Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(Rt) dt = 0.$$

4) En déduire une valeur de  $\zeta(2k)$ .

IV) Une méthode d'analyse complexe.

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout réel  $x \in [0, 1]$  et tout  $z \in \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$  on pose

$$f_{2r}(x, z) = \frac{e^{xz}}{(e^z - 1)z^{2r}}.$$

1) Montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} z^m = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

2) Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, (2k+1)\pi)} f_{2r}(x, z) dz = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq |m| \leq k}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}}.$$

3) Si  $z = Re^{i\theta}$  avec  $R = (2k+1)\pi$ , montrer que si  $|\cos \theta| \geq \frac{1}{R}$  alors

$$|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}. \quad (\text{D.1})$$

Si  $|\cos \theta| \leq \frac{1}{R}$ , montrer que  $\cos(R \sin \theta) \leq -\frac{1}{2}$  et montrer que la majoration (D.1) reste valide.

4) Si  $z = Re^{i\theta}$  avec  $R = (2k+1)\pi$ , montrer la minoration

$$|f_{2r}(x, z)| \leq \frac{3}{((2k+1)\pi)^{2r}}$$

et en déduire

$$b_{2r}(x) = (-1)^{r-1} 2(2r)! (2\pi)^{-2r} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}.$$

5) En déduire la valeur de  $\zeta(2r)$ .

**Sources** – [5], [44, Ex. I.0.1].

## D.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux.

I) Pour tout  $(z, w) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$ , on définit

$$\vartheta(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

1) Montrer que pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , la série de fonctions

$$w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

2) Montrer que pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , la série de fonctions

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathcal{H}$ .

3) Reprendre les questions I1) et I2) pour

$$(z, w) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

4) Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

est normalement convergente sur tout compact de  $\mathcal{H}$ .

II) Le but de cette question est de démontrer la formule de transformation theta de Jacobi :

$$\sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+w)^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z) + 2i\pi n w} \quad (\text{D.2})$$

pour tout  $(z, w) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$ .

On fixe  $z \in \mathcal{H}$  et on considère la fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

1) Montrer que

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{2i\pi m w}$$

avec

$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(zw^2 - 2mw)} du \quad (w = u + iv)$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  et tout  $v \in \mathbb{R}$ .

2) Montrer que

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z t^2} dt$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .

3) On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

Montrer la formule de transformation theta de Jacobi (D.2).

III) On définit sur  $\mathcal{H}$  les fonctions  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  par

$$\vartheta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z},$$

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_0(z + 1)$$

$$\vartheta_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}.$$

1) Montrer que

$$\vartheta_1(z) = \vartheta\left(z, \frac{1}{2}\right)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

2) Montrer les égalités

$$\vartheta_1(z + 1) = \vartheta_0(z)$$

$$\vartheta_2(z + 1) = e^{i\pi/4} \vartheta_2(z)$$

$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \vartheta_2(z)$$

$$\sqrt{\frac{i}{z}} \vartheta_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta_1(z)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

3) Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{C}$  tel que

$$\Delta(z) = C(\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

4) Calculer  $C$ .

IV) Soit  $g$  définie sur  $\mathcal{H}$  par

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

1) Montrer que

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta\left(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right)$$

et en déduire

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\pi/(12z)} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\pi(u^2/12)z} \cos\left(\frac{\pi u}{6}\right)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

2) Montrer que

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\pi(z+1/z)/12} g(z).$$

3) Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , montrer que

$$\Delta(z) = e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24}.$$

4) Pour tout complexe  $q$  de module strictement inférieur à 1, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n).$$

5) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Une partition de  $n$  est un ensemble  $\{x_1, \dots, x_k\}$  d'entiers naturels non nuls tels que  $n = x_1 + \dots + x_k$  et  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ . L'entier  $k$  s'appelle le nombre de parts de la partition. On note  $A_n$  le nombre de partitions de  $n$  en un nombre de parts pair et  $B_n$  le nombre de partitions de  $n$  en un nombre de parts impair. On étend en posant  $A_0 = 1$  et  $B_0 = 0$ .

a) Pour tout complexe  $q$  de module strictement inférieur à 1, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - B_n) q^n = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n).$$

b) Montrer le théorème des nombres pentagonaux d'Euler : pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{cases} A_n = B_n & \text{si } n \neq \frac{3m^2 + m}{2} \text{ tout } m \in \mathbb{Z} \\ A_n = B_n + 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ pair tel que } n = \frac{3m^2 + m}{2} \\ A_n = B_n - 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ impair tel que } n = \frac{3m^2 + m}{2}. \end{cases}$$

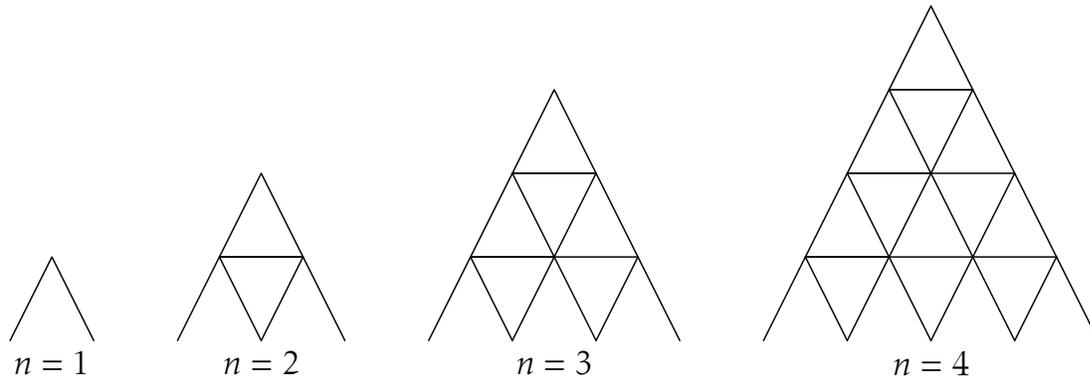


FIGURE D.1 – Exemples de châteaux de cartes

- c) On construit des châteaux de cartes comme sur la figure IV(5)c. Aucune carte n'est utilisée pour le socle du château. Montrer que le nombre de cartes nécessaires à la réalisation d'un château à  $n$  étages est  $\frac{3n^2 + n}{2}$ . Ce nombre s'appelle le  $n^{\text{e}}$  nombre pentagonal de deuxième type.

**Sources** – [12, VI.4, VII.1].

### D.3 Le théorème des quatre carrés

I) Le groupe  $\Gamma_{\mathfrak{g}}$ .

On note  $\Gamma_{\mathfrak{g}}$  l'ensemble des matrices  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  telles que

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \quad \text{ou} \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

On note  $\Gamma_0$  le sous-groupe de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  engendré par les matrices  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $\Gamma_{\mathfrak{g}}$  est un sous-groupe de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  et que  $\Gamma_0$  est un sous-groupe de  $\Gamma_{\mathfrak{g}}$ .

2) Soit  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g}} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1 \text{ et } |\text{Re}(z)| \leq 1\}$ . Montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , il existe  $M \in \Gamma_0$  tel que  $Mz \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g}}$ . En déduire

$$\mathcal{H} = \bigcup_{M \in \Gamma_{\mathfrak{g}}} M\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathfrak{g}}.$$

3) On note  $\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1 \text{ et } |\text{Re}(z)| \leq 1/2\}$  et

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{F} \cup T\mathcal{F} \cup (TS)\mathcal{F}.$$

Déduire de la question précédente que

$$\mathcal{H} = \bigcup_{M \in \Gamma_{\mathfrak{g}}} M\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}.$$

4) a) Soit  $M \in \Gamma_{\mathfrak{g}}$  et  $z \in \mathcal{F}^{\circ} = \{z \in \mathcal{H} : |z| > 1 \text{ et } |\text{Re}(z)| < 1/2\}$ . Montrer qu'il existe  $N \in \Gamma_0$  tel que  $N(Mz) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}$ .

b) En déduire que  $\Gamma_{\mathfrak{g}} = \Gamma_0$ .

II) Le groupe  $\Gamma_0(N)$ .

Soit  $N \geq 1$  un entier. On note  $\Gamma_0(N)$  le sous-groupe de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  défini par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

et  $\Gamma(N)$  le sous-groupe de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  défini par

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \text{ et } a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

- 1) Soit  $c, d$  et  $N$  trois entiers tels que  $(c, d, N) = 1$ . Le but de cette question est de montrer qu'il existe  $t \in \mathbb{Z}$  tel que  $(c + td, N) = 1$ . On note  $K(N)$  le noyau de  $N$ , c'est-à-dire l'entier défini par

$$K(N) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} p.$$

C'est donc un entier qui n'est divisible par aucun carré d'entier (on dit que  $K(N)$  est un entier sans facteur carré).

- a) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(c + td, N) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad (c + td, K(N)) = 1.$$

On peut donc supposer  $N$  sans facteur carré, ce qu'on fait dans la suite de cette question.

- b) Montrer l'existence de  $t$  lorsque  $(d, N) = N$ . On suppose dans la suite que  $(d, N) \neq N$ .  
c) On note  $\chi$  la fonction caractéristique des entiers premiers à  $N$ . On a donc

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n, N) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On note

$$S_N = \sum_{t \pmod{N}} \chi(c + td)$$

la somme portant sur un système de représentants des entiers modulo  $N$ . Montrer que  $S_N$  ne dépend pas du système de représentants choisis.

- d) Montrer que

$$S_N = (d, N) \sum_{t \pmod{N/(d, N)}} \chi(c + td)$$

puis

$$S_N = (d, N) \sum_{u \pmod{N/(d, N)}} \chi(u).$$

- e) Montrer que  $S_N > 0$  et conclure.  
2) On note  $\pi_N$  la surjection canonique de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  et  $\lambda_N$  l'application :

$$\lambda_N : \begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \pi_N(a) & \pi_N(b) \\ \pi_N(c) & \pi_N(d) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- a) Montrer que le groupe  $\Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  est isomorphe à l'image de  $\lambda_N$ .

- b) Montrer qu'il existe  $c$  et  $d$  entiers tels que  $(c, d) = 1$ ,  $\pi_N(\gamma) = \pi_N(c)$  et  $\pi_N(\delta) = \pi_N(d)$ .
- c) Montrer qu'il existe  $a$  et  $b$  entiers tels que  $ad - bc = 1$ ,  $\pi_N(\alpha) = \pi_N(a)$  et  $\pi_N(\beta) = \pi_N(b)$ .
- d) Quelle est l'image de  $\lambda_N$ ?
- 3) Soit  $d$  et  $c$  deux entiers tels que  $(d, c, N) = 1$ . On note

$$\mathcal{N}(N) = \#\left\{(\pi_N(a), \pi_N(b)) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : ad - bc \equiv 1 \pmod{N}\right\}.$$

- a) Montrer que l'application  $\mathcal{N}$  est multiplicative.
- b) Si  $p$  est premier et  $v \geq 0$ , calculer  $\mathcal{N}(p^v)$ .
- c) Montrer que le nombre de couples  $(\pi_N(c), \pi_N(d))$  d'éléments de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  tels que  $(c, d, N) = 1$  est

$$\left\{(\pi_N(c), \pi_N(d)) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} : (c, d, N) = 1\right\} = \sum_{r|N} \mu(r) \left(\frac{N}{r}\right)^2.$$

(On rappelle que  $\mu * \mathbb{1} = \delta$ .)

- d) Quel est la cardinal de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ?
- e) Quel est le cardinal de  $\Gamma(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ?
- 4) a) Quelle est l'image de  $\Gamma_0(N)$  par  $\lambda_N$ ?
- b) Quel est la cardinal de cette image?
- c) Quel est le cardinal de  $\Gamma_0(N) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ?

### III) Formes modulaires de niveau 4.

Une forme modulaire de poids 4 et de niveau 4 est une fonction holomorphe  $f$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

- i) pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\Gamma_0(4)$ , pour tout  $z \in \mathcal{H}$ ,

$$(cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = f(z) \quad (\text{D.3})$$

- ii) pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , l'application

$$z \mapsto (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad (\text{D.4})$$

est bornée sur le demi plan  $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \geq 1\}$ .

- 1) Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe. On suppose que  $f$  vérifie la condition (D.3) et admet un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n z}.$$

L'objectif de cette question est de donner une condition simple sur la suite de coefficients  $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  impliquant que  $f$  est modulaire de poids  $k$  et niveau 4. On suppose, dans la suite de cette question, que la suite  $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est à croissance au plus polynômiale : il existe  $A \in \mathbb{R}$  et  $B \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $|\widehat{f}(n)| \leq An^B$ .

a) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à croissance au plus polynômiale. Soit  $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z}.$$

Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{N}$  tels que

$$|h(z)| \leq \frac{c}{|e^{-2\pi \operatorname{Im} z} - 1|^b}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$  tel que  $\operatorname{Im} z < 1$ . En déduire l'existence de réels  $A$  et  $B > 0$  tels que

$$|h(z)| \leq A (\operatorname{Im} z)^{-B}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$  tel que  $\operatorname{Im} z < 1$ .

b) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ . On pose  $g = \left( f \Big|_k M \right)$ , ainsi

$$g(z) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \quad (z \in \mathcal{H}).$$

i) Montrer que

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{2i\pi n z} \quad \text{avec} \quad \widehat{g}(-n) = \int_0^1 g(x + iy) e^{2\pi n(x+iy)} dx$$

pour tout  $n > 0$  et tout  $y > 0$ . [Indication : en posant  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on

pourra considérer  $\left( f \Big|_k MT \right)$  et montrer que  $MT \in \Gamma_0(4)$ .]

ii) Montrer que si  $M$  n'est pas une puissance de  $T$ , on a  $\operatorname{Im} Mz \rightarrow 0$  lorsque  $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ .

c) Montrer que  $f$  est une forme modulaire de poids  $k$  et de niveau 4.

2) On note  $\mathcal{M}_k(4)$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des formes modulaires de poids  $k$  et de niveau 4. Le but de cette question est de majorer la dimension de cet espace. On choisit un système de représentants  $(M_i)_{1 \leq i \leq 6}$  de  $\Gamma_0(4) \backslash \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  tel que  $M_1 = I$ .

a) Soit  $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , il existe un unique  $j \in \{1, \dots, 6\}$  tel que  $M_i M \in \Gamma_0(4) M_j$ .

- b) Pour toute forme modulaire  $f$  de poids  $k$  et niveau 4, montrer que la fonction

$$F = \prod_{i=1}^6 \left( f \Big|_{\mathcal{M}_i} \right)$$

est modulaire de poids  $6k$  sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

- c) On note  $\mathcal{F}$  un domaine fondamental de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $\mathring{\mathcal{F}}$  son intérieur. Soit  $a \in \mathring{\mathcal{F}}$ . On suppose que  $a$  est un zéro d'ordre  $v$  de  $f$ . Montrer que  $a$  est un zéro d'ordre au moins  $v$  de  $F$ .
- d) On suppose que  $\dim \mathcal{M}_k(4) \geq 2 + \frac{k}{2}$ . Montrer qu'il existe  $f \in \mathcal{M}_k(4)$  s'annulant en  $a$  à l'ordre au moins  $1 + \frac{k}{2}$ .
- e) Montrer que  $\dim \mathcal{M}_k(4) \leq 1 + \frac{k}{2}$ .

IV) La fonction  $\vartheta$ .

On définit les fonctions  $\theta$  et  $\vartheta$  par

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z} \quad \text{et} \quad \vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}.$$

- 1) L'objectif de cette question est de démontrer la formule de Poisson. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que la série de fonctions  $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  converge normalement sur tout compact et définit donc une fonction notée  $F$ .

- a) Pour tout  $m$ , montrer que  $\widehat{F}(m) = \widehat{f}(m)$ .
- b) En déduire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

- 2) L'objectif de cette question est d'établir une équation fonctionnelle pour  $\vartheta$ .

- a) Soit  $t > 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi n x} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi n^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du.$$

- b) Soit  $t > 0$ , montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t}.$$

- c) En déduire que

$$\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \vartheta(z)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

3) Le but de cette question est de montrer que  $\theta^4$  est modulaire de poids 2 et niveau 4.

a) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\mathfrak{S}}$ . Montrer que si  $a$  et  $d$  sont impairs et  $b$  et  $c$  sont pairs alors

$$\mathfrak{S}(Mz)^4 = (cz + d)^2 \mathfrak{S}(z)^4.$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . [Indication : on pourra écrire  $M = \pm T^{2a_0} S T^{2a_1} \dots S T^{2a_n}$  et montrer que  $n$  est pair.]

b) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ . Montrer qu'il existe une matrice  $M' \in \Gamma_{\mathfrak{S}}$  telle que

i)  $\lambda_2(M') = I$

ii)  $2(Mz) = M'(2z)$  pour tout  $z \in \mathcal{H}$ .

c) Montrer que  $\theta^4 \in \mathcal{M}_2(4)$ .

V) Le théorème des quatre carrés.

1) On définit sur  $\mathcal{H}$  une fonction  $\Phi$  en posant

$$\Phi(z) = \frac{4}{3} E_2(4z) - \frac{1}{3} E_2(z)$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . Montrer que  $\Phi \in \mathcal{M}_2(4)$ .

2) Montrer que  $\mathcal{M}_2(4)$  est de dimension 2.

3) En déduire que

$$\#\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\} = 8 \sum_{\substack{d|n \\ d \not\equiv 0 \pmod{4}}} d.$$

### D.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique

Soit  $\partial$  une dérivation sur  $\mathcal{M}_*$ , homogène de degré 2. C'est donc un endomorphisme linéaire de  $\mathcal{M}_*$  vérifiant  $\partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g)$  pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{M}_*$  et

$$\partial\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+2}$$

pour tout entier  $k \geq 0$ .

On fixe  $\phi_2 \in \mathcal{M}_2^{\leq 1}$  non nulle et  $\Phi_4 \in \mathcal{M}_4$  et, pour tout  $f \in \mathcal{M}_k$  on pose

$$\begin{aligned} df &= \partial f + k\phi_2 f \\ d\phi_2 &= \Phi_4 + \phi_2^2. \end{aligned}$$

1) a) Montrer que  $d$  définit une dérivation homogène de degré 2 sur  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$ .

Pour toutes  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq s}$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell^{\leq t}$ , on pose

$$[f, g]_{d,n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r} \binom{\ell+n-1}{r} d^r f d^{n-r} g.$$

On suppose  $k > 0$  et  $\ell > 0$ .

b) Montrer que dans l'anneau des séries formelles  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{[f, g]_{d,n}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!} X^n = \tilde{f}(-X) \tilde{g}(X)$$

avec  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  deux séries formelles que l'on déterminera.

On définit deux suites  $(f_r)_{r \geq 0}$  et  $(g_r)_{r \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$  en posant

$$e^{-\phi_2 X} \tilde{f}(X) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{f_r}{r!(r+k-1)!} X^r \quad \text{et} \quad e^{-\phi_2 X} \tilde{g}(X) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{g_r}{r!(r+\ell-1)!} X^r.$$

c) Pour tout  $r \geq 0$ , donner une expression de  $f_r$  en fonction de  $(d^j f)_{0 \leq j \leq r}$  et en déduire que  $f_r \in \mathcal{M}_{k+2r}^{\leq \infty}$ .

d) Par récurrence, montrer que pour tout  $r \geq 0$ , on a

$$\begin{cases} f_r \in \mathcal{M}_{k+2r} \\ \partial f_r = f_{r+1} - r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \end{cases}$$

(en posant  $r f_{r-1} = 0$  si  $r = 0$ ).

e) Que vaut  $[f, g]_{d,n}$  en fonction de  $(f_r)_{r \geq 0}$  et  $(g_r)_{r \geq 0}$ ?

2) Si  $f \in \mathcal{M}_k$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell$  avec  $k, \ell > 0$ , on pose

$$[f, g]_{d, \Phi_4, n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}$$

où  $(f_r)_{r \geq 0}$  et  $(g_r)_{r \geq 0}$  sont définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \end{cases} \quad (r \geq 0) \quad \begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \partial g_r + r(r+\ell-1)\Phi_4 g_{r-1} \end{cases} \quad (r \geq 0)$$

(en posant  $r f_{r-1} = 0$  et  $r g_{r-1} = 0$  si  $r = 0$ ). Montrer que  $[f, g]_{\partial, \Phi_4, n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$  et relier  $[f, g]_{\partial, \Phi_4, n}$  à  $[f, g]_{\partial, n}$ .

- 3) Si  $f \in \mathcal{M}_k$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell$ , on rappelle que le  $n^e$  crochet de Rankin-Cohen de  $f$  et  $g$  est défini par

$$[f, g]_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} D^r f D^{n-r} g.$$

Déduire de ce qui précède une expression de  $[f, g]_n$  puis

$$[\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_\ell]_n \subset \mathcal{M}_{k+\ell+2n}.$$

**Sources** – [51], [47].

## Annexe E

# Corrigés des problèmes

### **E.1** Valeurs en les entiers positifs pairs de la fonction $\zeta$ de Riemann

I) Polynômes de Bernoulli.

- 1) Appelons  $b_0$  le polynôme défini par  $b_0(t) = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $H(k)$  l'hypothèse : il existe une unique suite de fonctions  $C^1$  notées  $b_1, \dots, b_k$  vérifiant  $b'_n = nb_{n-1}$  et  $\int_0^1 b_n = 0$  pour tout  $n$  tel que  $1 \leq n \leq k$ ; de plus, ces fonctions sont des polynômes. On a  $b'_1 = b_0$  si et seulement si  $b_1(t) = t + b_1(0)$  et l'hypothèse supplémentaire  $\int_0^1 b_1 = 0$  est satisfaite si et seulement si  $b_1(0) = -\int_0^1 t dt = -\frac{1}{2}$ . L'hypothèse  $H(1)$  est donc satisfaite. Soit  $k \geq 1$  tel que l'hypothèse  $H(k)$  est satisfaite. On a  $b'_{k+1} = (k+1)b_k$  si et seulement si

$$b_{k+1}(t) = b_{k+1}(0) + (k+1) \int_0^t b_k \quad (\text{E.1})$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . L'hypothèse supplémentaire  $\int_0^1 b_{k+1} = 0$  est alors satisfaite si et seulement si

$$0 = b_{k+1}(0) + (k+1) \int_{t=0}^1 \int_{x=0}^t b_k(x) dx dt = b_{k+1}(0) + (k+1) \int_0^1 (1-x)b_k(x) dx.$$

La fonction  $b_{k+1}$  est donc définie de façon unique par

$$\begin{aligned} b_{k+1}(t) &= (k+1) \int_0^t b_k - (k+1) \int_0^1 (1-x)b_k(x) dx \\ &= (k+1) \int_0^t b_k + (k+1) \int_0^1 x b_k(x) dx \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et c'est un polynôme. L'hypothèse  $H(0)$  est vraie et pour tout  $k \geq 1$ , si l'hypothèse  $H(k)$  est vraie alors l'hypothèse  $H(k+1)$  est vraie. Par récurrence, on en déduit qu'il existe une unique suite de fonctions  $C^1$  notée  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $b'_n = nb_{n-1}$  et  $\int_0^1 b_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Enfin, ces fonctions sont toutes des polynômes.

- 2) On définit une suite de polynômes  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $\beta_n(t) = (-1)^n b_n(1-t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a alors  $\beta_0 = 1$ . De plus,  $\beta'_n(t) = (-1)^{n+1} b'_n(1-t)$  et donc  $\beta'_n(t) = (-1)^{n+1} n b_{n-1}(1-t) = n \beta_{n-1}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Enfin,

$$\int_0^1 \beta_n = (-1)^n \int_0^1 b_n(1-t) dt = (-1)^n \int_0^1 b_n(u) du = 0.$$

Par unicité de la suite de polynôme  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a donc  $\beta_n = b_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

Grâce à (E.1) avec  $t = 1$ , on a

$$b_{k+1}(1) = b_{k+1}(0) + (k+1) \int_0^1 b_k = b_{k+1}(0)$$

dès que  $k \geq 1$ . De plus,  $b_0(1) = 1 = b_0(0)$ . Ainsi a-t-on  $b_k(1) = B_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N} - \{1\}$ . D'autre part, si  $k \geq 0$ ,  $b_{2k+1}(1-t) = -b_{2k+1}(t)$  donc  $b_{2k+1}(1) = -b_{2k+1}(0)$ . Si  $k \geq 1$ , il résulte que  $B_{2k+1} = b_{2k+1}(0) = 0$ .

## II) Une intégrale.

- 1) On a

$$I(0, m) = \int_0^1 \cos(\pi mt) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{m} (\sin(\pi m) - \sin 0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $m \geq 1$  et  $k \geq 1$ , une intégration par parties conduit à

$$I(k, m) = -\frac{1}{\pi m} \int_0^1 b'_{2k}(t) \sin(\pi mt) dt = -\frac{2k}{\pi m} \int_0^1 b_{2k-1}(t) \sin(\pi mt) dt.$$

Une nouvelle intégration par partie donne

$$I(k, m) = \frac{2k}{(\pi m)^2} [(-1)^m b_{2k-1}(1) - b_{2k-1}(0)] - \frac{2k}{(\pi m)^2} \int_0^1 b'_{2k-1}(t) \cos(\pi mt) dt.$$

et donc

$$I(k, m) = \frac{2k}{(\pi m)^2} [(-1)^m b_{2k-1}(1) - b_{2k-1}(0)] - \frac{2k(2k-1)}{(\pi m)^2} \int_0^1 b_{2k-2}(t) \cos(\pi mt) dt. \quad (\text{E.3})$$

Si  $k = 1$ , on a donc

$$I(1, m) = \frac{1}{(\pi m)^2} [(-1)^m + 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ \frac{2}{(\pi m)^2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Si  $k \geq 2$ , alors  $b_{2k-1}(1) = b_{2k-1}(0) = 0$  et l'équation (E.3) se réécrit

$$I(k, m) = -\frac{2k(2k-1)}{(\pi m)^2} I(k-1, m).$$

Par récurrence, on en tire

$$I(k, m) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2(\pi m)^{2k-2}} I(1, m).$$

On en déduit

$$I(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{(\pi m)^{2k}} & \text{si } m \geq 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

grâce à (E.4).

2) On calcule

$$I_k^*(m) = I(k, m) - B_k \int_0^1 \cos(\pi m t) dt$$

et donc  $I_k^*(m) = I(k, m)$  si  $m \geq 1$ . Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\sum_{m=1}^{+\infty} I_k^*(m) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{\pi^{2k}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k).$$

III) Calcul de  $\zeta(2k)$ .

1) La relation  $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$  implique

$$\cos(mx) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (\text{E.5})$$

pour tous  $m \in \mathbb{Z}$  et  $x \in ]0, \pi]$ . Un développement limité du membre de droite en 0 montre que ce membre de droite est  $1 + o(x)$ . On peut donc prolonger le membre de droite par continuité en 0 en le définissant comme valant 1 en 0. Comme  $1 = \cos(m \cdot 0)$ , l'égalité (E.5) reste valable pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  et  $x = 0$ .

2) On sait que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^N I_k^*(m)$$

et

$$I_k^*(m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi t\right) - \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi t\right)}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} dt.$$

Comme pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}^*$  on a

$$\frac{\sin\left(\ell \frac{\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \sim \ell$$

au voisinage de 0, on peut scinder l'intégrale précédente en deux intégrales convergentes

$$I_k^*(m) = I_*(k, m) - I_*(k, m-1)$$

avec

$$I_*(k, m) = \int_0^1 b_{2k}^*(t) \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi t\right)}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} dt.$$

On en tire

$$\sum_{m=1}^N I_k^*(m) = I_*(k, N) - I_*(k, 0) = I_*(k, N) - \frac{1}{2} \int_0^1 b_{2k}^*.$$

Puisque qu'on a montré que la somme de terme général  $(I_k^*(m))_{m \geq 1}$  converge, le membre de droite converge et

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} I_k^*(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 b_{2k}^*(t) \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\pi t\right)}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 b_{2k}^*.$$

3) La fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $]0, 1]$  de dérivée

$$f'(t) = \frac{4kb_{2k-1}(t) \sin \frac{\pi t}{2} - \pi b_{2k}^*(t) \cos \frac{\pi t}{2}}{4 \sin^2 \frac{\pi t}{2}}.$$

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} & 4kb_{2k-1}(t) \sin \frac{\pi t}{2} - \pi b_{2k}^*(t) \cos \frac{\pi t}{2} \\ &= [2k\pi B_{2k-1} - \pi b_{2k}'(0)]t + \left[2k\pi b_{2k-1}'(0) - \frac{\pi}{2} b_{2k}''(0)\right]t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Or  $b'_{2k}(0) = 2kb_{2k-1}(0) = 2k\mathbf{B}_{2k-1}$  et  $b''_{2k}(0) = 2kb'_{2k-1}(0) = 2k(2k-1)\mathbf{B}_{2k-2}$  donc

$$4kb_{2k-1}(t) \sin \frac{\pi t}{2} - \pi b_{2k}^*(t) \cos \frac{\pi t}{2} = \pi k(2k-1)\mathbf{B}_{2k-2}\mathbf{B}_{2k-2}t^2 + o(t^2).$$

On a donc

$$f'(t) = \frac{2k(2k-1)}{\pi}\mathbf{B}_{2k-2} + o(1). \quad (\text{E.6})$$

Montrons que  $f$  est prolongeable par continuité en une fonction  $\mathbf{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} b_{2k}^*(t) &= b_{2k}(t) - b_{2k}(0) = b'_{2k}(0)t + \frac{b''_{2k}(0)}{2}t^2 + o(t^2) \\ &= 2kb_{2k-1}(0)t + 2k(2k-1)b_{2k-2}(0)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

On en déduit, toujours au voisinage de 0 le développement limité

$$f(t) = \frac{2k}{\pi}\mathbf{B}_{2k-1} + \frac{2k(2k-1)}{\pi}\mathbf{B}_{2k-2}t + o(t)$$

Ainsi,  $f$  est prolongeable en une fonction dérivable (toujours notée  $f$ ) vérifiant  $f(0) = \mathbf{B}_{2k-1}$  (quantité nulle dès que  $k \geq 2$ ) et  $f'(0) = \frac{2k(2k-1)}{\pi}\mathbf{B}_{2k-2}$ . Grâce à (E.6), la fonction  $f'$  a pour limite  $f'(0)$  en 0 et donc  $f$  est  $\mathbf{C}^1$ .

Si  $\mathbf{R} \neq 0$ , on peut donc intégrer par partie l'intégrale

$$\int_0^1 f(t) \sin(\mathbf{R}t) dt = -\frac{1}{\mathbf{R}} \cos(\mathbf{R})f(1) + \frac{1}{\mathbf{R}}f(0) + \frac{1}{\mathbf{R}} \int_0^1 f'(t) \cos(\mathbf{R}t) dt$$

ce qui conduit à

$$\left| \int_0^1 f(t) \sin(\mathbf{R}t) dt \right| \leq \frac{1}{\mathbf{R}} (2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

où  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme infinie sur  $[0, 1]$ . On en déduit

$$\lim_{\mathbf{R} \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(\mathbf{R}t) dt = 0.$$

4) On a montré que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \lim_{\mathbf{N} \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{2\mathbf{N}+1}{2}\pi t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 b_{2k}^*.$$

Grâce à la question précédente, on a donc

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = -\frac{1}{2} \int_0^1 b_{2k}^* = \frac{\mathbf{B}_{2k}}{2}.$$

On en tire

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \mathbf{B}_{2k}.$$

IV) Une méthode d'analyse complexe.

- 1) On note  $\| \cdot \|_\infty$  la norme infinie sur  $[0, 1]$ . Grâce à (E.2), on a  $\|b_m\|_\infty \leq 2m\|b_{m-1}\|_\infty$  dès que  $m \geq 2$  et donc  $\|b_m\|_\infty \leq 2^{m-3}m!\|b_2\|_\infty \leq 2^m m!$ . On en déduit que pour tout  $x \in [0, 1]$ , la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} z^m$$

de fonctions de  $z$  est normalement convergente sur tout compact du disque ouvert  $D$  de centre 0 et de rayon  $1/2$  et que, pour tout  $z$  dans  $D$ , cette série de fonctions de  $x$  est normalement convergente sur  $[0, 1]$ .

*Première méthode* – La fonction  $z \mapsto \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}$  étant holomorphe sur la couronne  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\pi\}$ , elle admet un développement de Laurent autour de 0 donné par

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

où, quelque soit  $R \in ]0, \pi[$ , le réel  $f_n(x)$  est défini par

$$f_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=R} \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{R^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} d\theta \quad (\text{E.7})$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . La singularité en 0 est effaçable (la fonction est prolongeable par continuité en 0) de sorte que  $f_n = 0$  si  $n > 0$ . Pour tout réel  $K > 0$  et pour tout  $x \in [-K, K]$ , on a

$$\left| \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} \right| \leq \frac{e^{KR|\cos \theta|}}{|e^{Re^{i\theta}} - 1|} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{KR|\cos \theta|}}{|e^{Re^{i\theta}} - 1|} < \infty.$$

On en déduit que  $f_n$  est dérivable (sur  $[-K, K]$  et donc sur  $\mathbb{R}$ ) de dérivée

$$f'_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=R} \frac{z^2 e^{zx}}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{R^{2-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}} - 1} e^{i(2-n)\theta} d\theta \quad (\text{E.8})$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Enfin, pour tout réel  $K > 0$  et pour tout  $x \in [-K, K]$ , on a

$$\left| \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}} - 1} e^{i(2-n)\theta} \right| \leq \frac{e^{KR|\cos \theta|}}{|e^{Re^{i\theta}} - 1|} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{KR|\cos \theta|}}{|e^{Re^{i\theta}} - 1|} < \infty$$

donc  $f'_n$  est continue sur  $[-K, K]$  et donc sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $f_n$  sont donc  $C^1$ . De plus, grâce à (E.7), on a  $f_0 = 1$  et grâce à (E.8) on a  $f'_n = n f_{n-1}$  si  $n \geq 1$ . Enfin, en écrivant  $xR \cos \theta < R$  pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^1 \left| \frac{e^{xRe^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}} - 1} e^{i(1-n)\theta} \right| dx d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^R}{e^{Re^{i\theta}} - 1} \right| d\theta < \infty$$

de sorte que

$$\int_0^1 f_n = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=R} \frac{z}{e^z - 1} \left( \int_{x=0}^1 e^{zx} dx \right) \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z^{n+1}} = 0$$

si  $n \neq 0$ . On déduit alors de la première question du problème que  $f_n = b_n$  pour tout  $n \geq 0$  de sorte que

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

*Deuxième méthode* – Fixons  $z \in D$  et posons

$$A(x) = (e^z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(x)}{n!} z^n.$$

On a

$$A(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{\ell-1} \frac{b_n(x)}{(\ell-n)!n!} \right) z^\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{n} b_n(x) \right) \frac{z^\ell}{\ell!} = z \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{\ell} \frac{1}{\ell+1} \binom{\ell+1}{n} b_n(x) \right) \frac{z^\ell}{\ell!}.$$

Étudions les polynômes

$$S_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{1}{\ell+1} \binom{\ell+1}{n} b_n(x).$$

Si  $\ell \geq 1$ , on a

$$S'_\ell(x) = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{\ell+1} \binom{\ell+1}{n} n b_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{\ell-1} \frac{n+1}{\ell+1} \binom{\ell+1}{n+1} b_n(x) = \sum_{n=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{n} b_n(x)$$

et donc  $S'_\ell(x) = \ell S_{\ell-1}(x)$ . Par ailleurs,  $S_0 = 1$  et  $\int_0^1 S_\ell = 1$ . Si on définit  $T_\ell(x) = x^\ell$ ,

on a aussi  $T'_\ell(x) = \ell T_{\ell-1}(x)$  puis  $T_0 = 1$  et  $\int_0^1 T_\ell = 1$ . On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 - T_0 = 0, \\ (S_k - T_k)' = k(S_{k-1} - T_{k-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \int_0^1 (S_k - T_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

En raisonnant comme dans la première question du problème, on a donc  $S_k - T_k = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Finalement

$$A(x) = z \sum_{\ell=0}^{+\infty} x^\ell \frac{z^\ell}{\ell!} = ze^{xz}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}$$

pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $z \in D$ . L'expression de droite fournit un prolongement holomorphe de la fonction de  $z$  de gauche sur  $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$ .

- 2) Fixons  $x \in [0, 1]$ . La fonction  $z \mapsto \frac{e^{zx}}{(e^z - 1)z^{2r}}$  définit une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$  qui ne s'annule pas sur le cercle  $C_k$  de centre 0 et rayon  $(2k + 1)\pi$ . Le théorème des résidus permet donc d'écrire

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} f_{2r}(x, z) dz = \sum_{\substack{\rho \in 2i\pi\mathbb{Z} \\ |\rho| < (2k+1)\pi}} \operatorname{Res}_{z=\rho} f_{2r}(x, z).$$

En  $\rho \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$ , la fonction  $z \mapsto f_{2r}(x, z)$  a un pôle simple de résidu  $\frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}}$ .

Évaluons le résidu en 0. C'est le coefficient de  $\frac{1}{z}$  dans le développement de Laurent de  $f_{2r}(x, z)$  autour de  $z = 0$ , c'est donc le coefficient de  $z^{2r-1}$  dans le développement en série entière de  $\frac{e^{zx}}{e^z - 1}$  autour de  $z = 0$ . C'est donc encore le coefficient de  $z^{2r}$  dans le développement en série entière de  $\frac{ze^{zx}}{e^z - 1}$  autour de  $z = 0$ . Grâce à la question précédente, le résidu de  $z \mapsto f_{2r}(x, z)$  en 0 est donc  $\frac{b_{2r}(x)}{(2r)!}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} f_{2r}(x, z) dz &= \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ |2i\pi m| < (2k+1)\pi}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}} \\ &= \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^* \\ |m| < k}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}} \end{aligned}$$

- 3) Si  $z = Re^{i\theta}$ , alors

$$\begin{aligned} |e^z - 1|^2 &= e^{2R\cos\theta} - 2e^{R\cos\theta} \cos(R\sin\theta) + 1 \\ &= (e^{R\cos\theta} - 1)^2 + 2e^{R\cos\theta} (1 - \cos(R\sin\theta)) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

donc

$$|e^z - 1| \geq |e^{R\cos\theta} - 1|.$$

Si  $x \geq 0$  alors  $|e^x - 1| \geq x$ . Si  $x \leq -\ln(2)$  alors  $|e^x - 1| \geq \frac{1}{2}$ . On a donc  $|e^x - 1| \geq \frac{1}{2}$  pour tout réel  $x$  tel que  $|x| \geq 1$ . En particulier,  $|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}$  si  $R|\cos\theta| \geq 1$ . Si

$R|\cos \theta| \leq 1$  alors

$$R\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} \leq R|\sin \theta| \leq R.$$

Or,  $R = (2k+1)\pi$  donc  $0 < \frac{1}{R} \leq \frac{1}{\pi}$ . Si  $x \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right]$  alors  $\sqrt{1-x^2} \geq 1 - \frac{\pi}{3}x$  d'où

$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \leq R|\sin \theta| \leq (2k+1)\pi.$$

On en déduit que  $\cos(R \sin \theta) \leq -\frac{1}{2}$ . Par (E.9), on a donc

$$|e^z - 1|^2 \geq 2e^{R \cos \theta} (1 - \cos(R \sin \theta)) \geq 3e^{R \cos \theta} \geq \frac{3}{e} \geq 1$$

et donc  $|e^z - 1| \geq 1$ . Finalement, on a

$$|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

4) Si  $R \cos \theta \leq 0$  alors

$$\left| \frac{e^{xz}}{(e^z - 1)z^{2r}} \right| = \frac{e^{xR \cos \theta}}{|e^z - 1|R^{2r}} \leq \frac{2}{R^{2r}}.$$

Si  $R \cos \theta \geq 0$ , on a  $x \in [0, 1]$  et on écrit

$$\frac{e^{xz}}{e^z - 1} = e^{(x-1)z} \left( 1 + \frac{1}{e^z - 1} \right)$$

pour obtenir

$$\left| \frac{e^{xz}}{e^z - 1} \right| \leq e^{(x-1)R \cos \theta} \left( 1 + \frac{1}{|e^z - 1|} \right) \leq 3$$

puis

$$\left| \frac{e^{xz}}{(e^z - 1)z^{2r}} \right| \leq \frac{3}{R^{2r}}.$$

On a donc

$$|f_{2r}(x, z)| \leq \frac{3}{R^{2r}}$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

5) On réécrit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, (2k+1)\pi)} f_{2r}(x, z) dz = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq |m| \leq k}} \frac{e^{2i\pi mx}}{(2i\pi m)^{2r}}$$

en

$$J_k = \frac{(2k+1)}{2} \int_0^{2\pi} f_{2r}(x, (2k+1)\pi e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \frac{b_{2r}(x)}{(2r)!} + 2 \frac{(-1)^r}{(2\pi)^{2r}} \sum_{m=1}^k \frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}.$$

On a

$$|J_k| \leq \frac{3\pi(2k+1)}{((2k+1)\pi)^{2r}}$$

et donc  $J_k$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . On a déduit

$$b_{2r}(x) = 2(2r)! \frac{(-1)^{r-1}}{(2\pi)^{2r}} \sum_{m=1}^k \frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}}. \quad (\text{E.10})$$

pour tout  $x \in [0, 1]$ . C'est le développement en série de Fourier de la fonction 1-périodique qui coïncide avec  $b_{2r}$  sur  $[0, 1]$ .

6) En choisissant  $x = 0$  dans (E.10), on trouve

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m^{2r}} = (-1)^{r-1} \frac{(2\pi)^{2r}}{2(2r)!} B_{2r}.$$

## E.2 La fonction theta, les nombres pentagonaux.

I) 1) Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , tout  $w \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z - 2\pi n \operatorname{Im} w} \leq e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z + 2\pi |n| |\operatorname{Im} w|}. \quad (\text{E.11})$$

On fixe  $z \in \mathcal{H}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ . La fonction  $w \mapsto |\operatorname{Im} w|$  est continue donc bornée sur  $K$ . Il existe donc  $M \geq 0$  tel que

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z + \pi |n| M}.$$

Pour  $|n| \geq (M+1)/\operatorname{Im} z$ , on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi |n|}.$$

On en déduit que les séries

$$w \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \quad \text{et} \quad w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

convergent normalement sur  $K$  puis que la série

$$w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$  et définit donc une fonction entière.

2) On fixe  $w \in \mathbb{C}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathcal{H}$ . La fonction  $z \mapsto \operatorname{Im} z$  est continue sur  $K$ . Il existe donc  $M > 0$  tel que  $\operatorname{Im} z \geq M$  pour tout  $z \in K$ . Par (E.11) on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi M n^2 + 2\pi |n| |\operatorname{Im} w|}.$$

Pour  $|n| \geq (1 + 2|\operatorname{Im} w|)/M$ , on a donc

$$\left| e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \right| \leq e^{-\pi |n|}.$$

On en déduit que les séries

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w} \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

convergent normalement sur  $K$  puis que la série

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n w}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathcal{H}$  et définit donc une fonction entière.

3) La démarche est semblable pour

$$(z, w) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}.$$

Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , tout  $w \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\left| e^{i\pi z(n+w)^2} \right| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} e^{-\pi(2n \operatorname{Im}(zw) + \operatorname{Im}(zw^2))} \leq e^{-\pi n^2 y} e^{\pi|n|(2|\operatorname{Im}(zw)| + |\operatorname{Im}(zw^2)|)}.$$

On fixe  $z = x + iy \in \mathcal{H}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ . La fonction

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto 2|\operatorname{Im}(zw)| + |\operatorname{Im}(zw^2)| \end{aligned}$$

est continue donc bornée. Il existe donc  $M \geq 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $w \in K$ , on a

$$\left| e^{i\pi z(n+w)^2} \right| \leq e^{-\pi n^2 y + \pi|n|M}.$$

Pour  $|n| \geq (1 + M)/y$ , on a donc  $\left| e^{i\pi z(n+w)^2} \right| \leq e^{-\pi|n|}$ . On en déduit que les séries

$$w \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} \quad \text{et} \quad w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

convergent normalement sur  $K$  puis que la série

$$w \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$  et définit donc une fonction entière.

On fixe  $w \in \mathbb{C}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathcal{H}$ . Les fonctions

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto 2|\operatorname{Im}(zw)| + |\operatorname{Im}(zw^2)| \end{aligned}$$

et la fonction  $\operatorname{Im}$  restreinte à  $K$  sont continues donc bornées, et en particulier  $\operatorname{Im}$  est minorée par une constante non nulle. Il existe donc  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $z \in K$ , on a

$$\left| e^{i\pi z(n+w)^2} \right| \leq e^{-\pi M n^2 + \pi|n|M}.$$

Pour  $|n| \geq (1 + M)/M$ , on a donc  $\left| e^{i\pi z(n+w)^2} \right| \leq e^{-\pi|n|}$ . On en déduit que les séries

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} \quad \text{et} \quad z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

convergent normalement sur  $K$  puis que la série

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2}$$

converge normalement sur tout compact de  $\mathcal{H}$  et définit donc une fonction entière.

4) Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $3n^2 + n \geq |n|$ . On en déduit

$$\left| (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right| \leq e^{-\pi|n|\operatorname{Im}z}.$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathcal{H}$ . Il existe  $M > 0$  tel que  $\operatorname{Im}z \geq M$  pour tout  $z \in K$  et donc

$$\left| (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right| \leq e^{-\pi M|n|}.$$

On en déduit la convergence normale de

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}$$

sur  $K$ . Cette série définit donc une fonction holomorphe sur  $\mathcal{H}$ .

II) 1) La fonction  $f$  est entière et 1-périodique. Elle admet donc un développement de Fourier

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{2i\pi m w}$$

avec

$$a_m = \int_0^1 f(w) e^{-2i\pi m w} \, du \quad (w = u + iv)$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . Ainsi,

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{i\pi z(n+w)^2 - 2i\pi m w} \, du \quad (\text{E.12})$$

l'interversion sera justifiée en (E.13). Par changement de variable  $w \leftarrow w + n$ , on trouve

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{i\pi(zw-2m)w} \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(zw-2m)w} \, du.$$

2) On écrit

$$e^{i\pi(zw-2m)w} = e^{i\pi z[(w-m/z)^2 - m^2/z^2]}$$

pour obtenir

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(w-m/z)^2} \, du.$$

On choisit  $v = Im \frac{m}{z}$  et on obtient

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(u-m \operatorname{Re}(1/z))^2} du = e^{i\pi m^2(-1/z)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2} dx. \quad (\text{E.13})$$

Cette intégrale est finie, cela justifie l'interversion faite en (E.12).

3) Si  $z \in i\mathbb{R}^{+*}$ , on écrit  $z = iy$  et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}.$$

Fixons un compact de  $\mathcal{H}$ . Si  $z$  est dans ce compact, alors  $Im z$  est minorée par une constante non nulle. La fonction

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2} dx \quad (\text{E.14})$$

est donc holomorphe sur  $\mathcal{H}$ . La fonction  $z \mapsto (z/i)^{-1/2}$  étant aussi holomorphe sur  $\mathcal{H}$ , on obtient par prolongement analytique de (E.14) l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z x^2} dx = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}$$

pour tout  $z \in \mathcal{H}$ . On a alors

$$a_m = e^{i\pi m^2(-1/z)} \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}.$$

Ainsi,

$$f(w) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi m^2(-1/z)} e^{2i\pi m w}$$

puis

$$\sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi z(n+w)^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi m^2(-1/z) + 2i\pi m w}$$

qui est la formule de transformation theta de Jacobi.

III) 1) On a

$$\vartheta_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n^2} e^{i\pi n^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi n^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z + 2i\pi n/2} = \vartheta\left(z, \frac{1}{2}\right).$$

2) On a

$$\vartheta_0(z+2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} e^{2i\pi n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} = \vartheta_0(z)$$

et donc

$$\vartheta_1(z+1) = \vartheta_0(z).$$

Ensuite

$$\vartheta_2(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n^2+n+1/4)} e^{i\pi(n+1/2)^2 z} = e^{i\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}$$

et puisque  $n^2 + n$  est pair,

$$\vartheta_2(z+1) = e^{i\pi/4} \vartheta_2(z).$$

Enfin,

$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z)+2i\pi n/2} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(n+1/2)^2 z}$$

par la relation de transformation theta de Jacobi, et donc

$$\vartheta_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \vartheta_2(z).$$

En changeant  $z$  en  $-1/z$  dans cette égalité, on trouve

$$\sqrt{\frac{i}{z}} \vartheta_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta_1(z).$$

3) Soit  $D(z) = (\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8$ . On a

$$D(z+1) = (\vartheta_1(z)\vartheta_0(z)\vartheta_2(z))^8 (e^{i\pi/4})^8 = D(z)$$

et

$$D\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\vartheta_0\left(-\frac{1}{z}\right)\sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta_2(z)\left(\frac{i}{z}\right)^{-1/2}\vartheta_1(z)\right)^8.$$

En utilisant la relation de transformation theta avec  $w = 0$  on a

$$\vartheta_0\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(-1/z)} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} = \sqrt{\frac{z}{i}} \vartheta_0(z)$$

donc

$$D\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^4 \left(\frac{z}{i}\right)^4 \left(\frac{z}{i}\right)^4 (\vartheta_0(z)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z))^8$$

d'où

$$z^{-12} D\left(-\frac{1}{z}\right) = D(z).$$

La fonction  $D$  vérifie donc la relation de modularité de poids 12. Sur  $\text{Im } z \geq 1$ , les fonctions  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  sont bornées donc  $D$  est bornée. On en déduit que  $D$  est modulaire de poids 12. Elle admet donc un développement de Fourier

$$D(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e^{2i\pi n z}.$$

Enfin,

$$|\vartheta_2(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(n+1/2)^2 \text{Im } z}$$

donc  $\vartheta_2$  puis  $D$  tendent vers 0 quand  $\text{Im } z$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que  $D$  est parabolique ( $d_0 = 0$ ). C'est donc un multiple de  $\Delta$ .

4) On a  $\Delta = C(\vartheta_0 \vartheta_1 \vartheta_2)^8$ . On écrit

$$\vartheta_0(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z}$$

pour obtenir

$$\vartheta_0(z) = 1 + O(e^{i\pi z}),$$

et

$$\vartheta_1(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2} e^{i\pi n^2 z}$$

pour obtenir

$$\vartheta_1(z) = 1 + O(e^{i\pi z}).$$

Enfin,

$$\vartheta_2(z) = e^{i\pi z/4} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{i\pi n(n-1)z} + e^{i\pi n(n+1)z}) \right)$$

donne

$$\vartheta_2(z) = 2e^{i\pi z/4} + O(e^{9i\pi z/4}).$$

On a donc

$$(\vartheta_0(z) \vartheta_1(z) \vartheta_2(z))^8 = 256 e^{2i\pi z} + O(e^{2i\pi z}).$$

Ainsi,  $C = 1/256$  et

$$\Delta = \frac{1}{256} (\vartheta_0 \vartheta_1 \vartheta_2)^8.$$

IV) 1) On a

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2(3z) + 2i\pi n(z+1)/2} = \vartheta\left(3z + \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)$$

donc

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \vartheta\left(-\frac{3}{z}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right).$$

Par la formule de Jacobi, on trouve

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2z}\right)^2 \frac{z}{3}} = \sqrt{\frac{z}{3i}} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{4}\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{z}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z - i\frac{\pi}{6}u}. \end{aligned}$$

Le changement de variable  $u \leftarrow -u$  implique

$$\sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z - i\frac{\pi}{6}u} = \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z + i\frac{\pi}{6}u}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z - i\frac{\pi}{6}u} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z - i\frac{\pi}{6}u} + \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z + i\frac{\pi}{6}u} \right) \\ &= \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z} \cos\left(\frac{\pi}{6}u\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{u \in 2\mathbb{Z}+1} e^{i\frac{\pi}{12}u^2z} \cos\left(\frac{\pi}{6}u\right).$$

2) Puisque

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \equiv 3 \pmod{6} \\ (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } u = \pm 1 + 6k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

on trouve

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{3i}} \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{12z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi\frac{z}{12}(\pm 1 + 6k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2 \pm k)z}.$$

Le changement de variable  $k \leftarrow -k$  conduit à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2 - k)z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2 + k)z}$$

et donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2 \pm k)z} = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i\pi(3k^2 + k)z}$$

puis

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)} g(z).$$

3) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'entier  $3n^2 + n = n(1 + 3n)$  est pari et donc  $e^{i\pi(3n^2+n)} = 1$ . Il en résulte que  $g(z+1) = g(z)$  puis

$$e^{2i\pi(z+1)} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)(z+1)} \right)^{24} = e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24}.$$

De

$$g\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{i\frac{\pi}{12}(z+1/z)} g(z)$$

on tire

$$z^{-12} e^{2i\pi(-1/z)} g\left(-\frac{1}{z}\right)^{24} = e^{2i\pi z} g(z)^{24}.$$

La fonction  $z \mapsto e^{2i\pi z} g(z)^{24}$  satisfait donc la relation de modularité de poids 12. Enfin, puisque  $3n^2 + n$  est toujours pair, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r(m) e^{2i\pi m z}$$

avec

$$r(m) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 3n^2+n=2m}} (-1)^n.$$

Comme  $3n^2 + n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $r(m) = 0$  si  $m < 0$  et donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} = \sum_{m=0}^{+\infty} r(m) e^{2i\pi m z}$$

puis

$$e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24} = \sum_{m=1}^{+\infty} t(m) e^{2i\pi m z}$$

pour une fonction  $t: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ . On en déduit que  $z \mapsto e^{2i\pi z} g(z)^{24}$  est une forme parabolique de poids 12 et donc qu'il existe  $D > 0$  tel que

$$e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24} = D\Delta(z).$$

On a  $r(0) = 0$  (puisque 0 est racine simple de  $3X^2 + X$ ) et donc

$$e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24} = 1 + O(e^{2i\pi z})$$

d'où  $D = 1$ . Finalement,

$$e^{2i\pi z} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24} = \Delta(z).$$

4) Il résulte de la question précédente et du développement en produit de  $\Delta$  que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z})^{24} = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} \right)^{24}.$$

Il existe donc une racine vingt-quatrième de l'unité  $\xi(z)$  telle que

$$\xi(z) \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z}.$$

Le produit de gauche ne s'annulant pas sur  $\mathcal{H}$ , la fonction  $\xi$  y est continue donc constante. En comparant le premier terme de chaque développement de Fourier, on trouve  $\xi = 1$  puis

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi(3n^2+n)z} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n z}).$$

5) a) Pour tout entier  $N \geq 1$ , on a

$$\prod_{n=1}^N (1 - q^n) = \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \dots < n_k \leq N \\ n_1 + \dots + n_k = d}} (-1)^k q^{n_1 + \dots + n_k} = \sum_d q^d \sum_{\substack{k=0 \\ n_1 + \dots + n_k = d}}^N \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \dots < n_k \leq N \\ n_1 + \dots + n_k = d}} (-1)^k.$$

Ensuite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \dots < n_k \\ n_1 + \dots + n_k = d}} (-1)^k = \sum_k \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \dots < n_k \\ n_1 + \dots + n_k = d}} (-1)^k = A_d - B_d$$

d'où

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n) = \sum_{d=0}^{+\infty} (A_d - B_d) q^d.$$

b) On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - B_n) q^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(3n^2+n)}$$

Pour tous entiers  $a$  et  $b$ , l'équation  $a(3a+1) = b(3b+1)$  équivaut à  $3(a^2 - b^2) = b - a$  et n'a donc comme seule solution que  $a = b$ . On a donc  $A_n = B_n = 0$  sauf s'il existe  $m \in \mathbb{Z}$ , nécessairement unique, tel que  $n = \frac{m(3m+1)}{2}$  auquel cas  $A_n - B_n = (-1)^m$ .

c) Pour construire un château à  $n+1$  cartes, on construit un château à  $n$  cartes, on lui ajoute une base horizontale en utilisant  $n$  cartes puis on ajoute le

nouvel étage à l'aide de  $n + 1$  pieds, soit  $2(n + 1)$  cartes. Si  $u_n$  est le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de  $n$  cartes, on a donc

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n + 2 \quad n \geq 0. \end{cases}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{d=1}^n (u_d - u_{d-1}) = \sum_{d=1}^n (3d - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

**E.3** Le théorème des quatre carrés

### E.4 Crochets de Rankin-Cohen : un point de vue algébrique

1) a) On a  $\phi_2 \in \mathbb{C}^*E_2$  donc  $\mathcal{M}_{*\leq\infty} = \mathbb{C}[\phi_2, E_4, E_6]$ . De plus, si  $f \in \mathcal{M}_{k\leq s}$ , alors

$$f = \sum_{j=0}^s F_j \phi_2^j \quad \text{avec} \quad F_j \in \mathcal{M}_{k-2j}.$$

On définit une application linéaire  $\tilde{d}$  de  $\mathcal{M}_k^{\leq\infty}$  dans  $\mathcal{M}_{k+2}^{\leq\infty}$  en posant

$$\tilde{d}f = \sum_{j=0}^s d(f)\phi_2^j + \sum_{j=1}^s jF_j\phi_2^{j-1} d\phi_2 \quad (\text{E.15})$$

pour toute  $f \in \mathcal{M}_k^{\leq\infty}$ , et on étend par linéarité cette application en un endomorphisme linéaire de  $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ . Montrons que c'est une dérivation de  $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ . Soit

$$f = \sum_{j=0}^s F_j \phi_2^j \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=0}^t G_j \phi_2^j.$$

Si  $j > s$  on pose  $F_j = 0$  et si  $j > t$  on pose  $G_j = 0$ . On a alors

$$fg = \sum_j \left( \sum_{a+b=j} F_a G_b \right) \phi_2^j \quad \text{et} \quad \sum_{a+b=j} F_a G_b \in \mathcal{M}_{k+\ell-2j}.$$

Ainsi,

$$\tilde{d}(fg) = \sum_j d \left( \sum_{a+b=j} F_a G_b \right) \phi_2^j + \sum_j j \left( \sum_{a+b=j} F_a G_b \right) \phi_2^{j-1} d\phi_2.$$

L'application  $d$  induit par linéarité une dérivation sur  $\mathcal{M}_*$ . On a donc

$$\tilde{d}(fg) = \sum_j \left( \sum_{a+b=j} d(F_a)G_b + F_a d(G_b) \right) \phi_2^j + \sum_j j \left( \sum_{a+b=j} F_a G_b \right) \phi_2^{j-1} d\phi_2$$

ce qu'on réécrit

$$\begin{aligned} \tilde{d}(fg) &= \sum_j \left( \sum_{a+b=j} F_a d(G_b) \right) \phi_2^j + \sum_j \left( \sum_{a+b=j} F_a b G_b \right) \phi_2^{j-1} d\phi_2 \\ &\quad + \sum_j \left( \sum_{a+b=j} d(F_a)G_b \right) \phi_2^j + \sum_j \left( \sum_{a+b=j} a F_a G_b \right) \phi_2^{j-1} d\phi_2 \\ &= f\tilde{d}(g) + \tilde{d}(f)g. \end{aligned}$$

Il en résulte bien que  $\tilde{d}$  est une dérivation sur  $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$ . Puisque  $\tilde{d}f = df$  si  $f \in \mathcal{M}_*$  et  $\tilde{d}\phi_2 = d\phi_2$ , on étend bien l'application  $d$  en une dérivation homogène de degré 2 sur  $\mathcal{M}_*^{\leq\infty}$  en posant  $d = \tilde{d}$ .

b) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{[f, g]_{d, n}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!} X^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{r+s=n} (-1)^r \frac{\binom{k+n-1}{s} \binom{\ell+n-1}{r}}{(n+k-1)!(n+\ell-1)!} d^r f d^s g \right) X^n \\ &= \sum_{r \in \mathbb{N}} (-1)^r \frac{d^r f}{r!(k+r-1)!} X^r \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{d^s g}{s!(\ell+s-1)!} X^s \\ &= \tilde{f}(-X) \tilde{g}(X) \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{f}(X) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{d^r f}{r!(k+r-1)!} X^r \quad \text{et} \quad \tilde{g}(X) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{d^s g}{s!(\ell+s-1)!} X^s.$$

c) De

$$\begin{aligned} e^{-\phi_2 X} \tilde{f}(X) &= \sum_{a \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^a \phi_2^a}{a!} X^a \sum_{b \in \mathbb{N}} \frac{d^b f}{b!(k+b-1)!} X^b \\ &= \sum_r \left( \sum_{b=0}^r \frac{(-1)^{r-b} \phi_2^{r-b} d^b f}{(r-b)! b!(k+b-1)!} \right) X^r \end{aligned}$$

on tire

$$f_r = \sum_{b=0}^r (-1)^{r-b} \frac{r!(r+k-1)!}{(r-b)! b!(k+b-1)!} \phi_2^{r-b} d^b f$$

d) On a  $f_0 = f \in \mathcal{M}_k$  et  $f_1 = -k\phi_2 f + df = \partial f_0$  donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang initial. Soit  $r \geq 0$  tel que  $f_j \in \mathcal{M}_{k+2j}$  et  $\partial f_j = f_{j+1} - j(j+k-1)\Phi_4 f_{j-1}$  pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$ . On a  $f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1}$  donc  $f_{r+1} \in \mathcal{M}_{k+2(r+1)}$ . Par définition de  $d$ , on a

$$\partial f_{r+1} = d f_{r+1} - (k+2r+2)\phi_2 f_{r+1}.$$

Or,

$$\begin{aligned} d f_{r+1} &= \sum_{b=0}^{r+1} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+1)! b!(k+b-1)!} \left( (r+1-b)\phi_2^{r-b} d\phi_2 d^b f + \phi_2^{r-b+1} d^{b+1} f \right) \\ &= S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{b=0}^r (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)! b!(k+b-1)!} \phi_2^{r-b+2} d^b f, \\ S_2 &= \sum_{b=0}^{r+1} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+1)! b!(k+b-1)!} \phi_2^{r-b+1} d^{b+1} f, \end{aligned}$$

et

$$S_3 = \sum_{b=0}^r (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!} \Phi_4 \phi_2^{r-b} d^b f.$$

On calcule

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{b=1}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!(b-1)!(k+b-2)!} \phi_2^{r-b+2} d^b f \\ &= \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-2)!} b \phi_2^{r-b+2} d^b f \end{aligned}$$

et

$$S_1 = \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} (r-b+1)(r-b+2) \phi_2^{r-b+2} d^b f.$$

Ainsi,

$$S_1 + S_2 = \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} [b(b+k-1) - (r-b+1)(r-b+2)] \phi_2^{r-b+2} d^b f.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \partial f_{r+1} &= \sum_{b=0}^{r+2} (-1)^{r-b} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b+2)!b!(k+b-1)!} [b(b+k-1) - (r-b+1)(r-b+2) \\ &+ (k+2r+2)(r+2-b)] \phi_2^{r-b+2} d^b f + \Phi_4 \sum_{b=0}^r (-1)^{r-b+1} \frac{(r+1)!(r+k)!}{(r-b)!b!(k+b-1)!} \phi_2^{r-b} d^b f. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets vaut  $(r+2)(k+r+1)$  donc

$$\partial f_{r+1} = f_{r+2} - (r+1)(r+k) \Phi_4 f_r$$

puis

$$f_{r+2} = \partial f_{r+1} + (r+1)(r+k) \Phi_4 f_r$$

qui est la formule attendue.

e) On a

$$\tilde{f}(-X) \tilde{g}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{r+s=n} \frac{(-1)^r}{r!(r+k-1)!s!(s+\ell-1)!} f_r g_s \right) X^n$$

d'où

$$[f, g]_{d,n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}.$$

- 2) On a  $f_r \in \mathcal{M}_{k+2r}$  et  $g_r \in \mathcal{M}_{\ell+2n-2r}$  pour tous  $r$  donc  $[f, g]_{\partial, \Phi_4, n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$ . Par unicité de la suite  $(f_r)_{r \geq 0}$  définie par la récurrence

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

on déduit de la question précédente que

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{f_r}{r!(r+k-1)!} X^r = e^{-\Phi_2 X} \tilde{f}(X).$$

De même

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{g_r}{r!(r+\ell-1)!} X^r = e^{-\Phi_2 X} \tilde{g}(X).$$

On a donc

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r} = [f, g]_{\partial, n}$$

puis  $[f, g]_{\partial, \Phi_4, n} = [f, g]_{\partial, n}$ .

- 3) On résume ce qui précède. Soit  $\partial$  est une dérivation homogène de degré 2 sur  $\mathcal{M}_*$ . Soit  $\phi_2 \in \mathcal{M}_2^{\leq 1}$  non nulle et  $\Phi_4 \in \mathcal{M}_4$ . On définit sur  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$  une dérivation  $d$  en posant

$$\begin{aligned} df &= \partial f + k\phi_2 f \\ d\phi_2 &= \Phi_4 + \phi_2^2. \end{aligned}$$

Si  $f \in \mathcal{M}_k$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell$ , on pose

$$[f, g]_{\partial, n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} d^r f d^{n-r} g.$$

On a alors  $[f, g]_{\partial, n} \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$  et

$$[f, g]_{\partial, n} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+k-1}{n-r} \binom{n+\ell-1}{r} f_r g_{n-r}$$

où  $(f_r)_{r \geq 0}$  et  $(g_r)_{r \geq 0}$  sont définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \partial f_r + r(r+k-1)\Phi_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases} \quad \begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \partial g_r + r(r+\ell-1)\Phi_4 g_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

(en posant  $r f_{r-1} = 0$  et  $r g_{r-1} = 0$  si  $r = 0$ ).

Pour  $\partial$ , on choisit la dérivation de Serre définie pour tout  $k \geq 0$  par

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{M}_k &\rightarrow \mathcal{M}_{k+2} \\ f &\mapsto Df - \frac{k}{12} E_2 f. \end{aligned}$$

et prolongée par linéarité à  $\mathcal{M}_*$ . On choisit  $\phi_2 = \frac{1}{12}E_2$ . Si  $f \in \mathcal{M}_k$ , on a alors  $df = Df$ . On choisit ensuite  $\Phi_4 = -\frac{1}{144}E_4$  de sorte que  $d\phi_2 = \phi_2^2 + \Phi_4$  implique  $dE_2 = \frac{1}{12}E_2^2 - \frac{1}{144}E_4 = DE_2$ . Ainsi a-t-on  $d = D$  sur toute l'algèbre  $\mathcal{M}_*^{\leq \infty}$ . On a donc, quelques soient  $f \in \mathcal{M}_k$  et  $g \in \mathcal{M}_\ell$ , l'égalité  $[f, g]_{d,n} = [f, g]_n$  puis

$$[f, g]_n = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r} \binom{\ell+n-1}{r} f_r g_{n-r}$$

avec  $(f_r)_{r \geq 0}$  et  $(g_r)_{r \geq 0}$  définies par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{r+1} = \left( D - \frac{k+2r}{12}E_2 \right) f_r - \frac{1}{144}r(r+k-1)E_4 f_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_0 = g \\ g_{r+1} = \left( D - \frac{k+2r}{12}E_2 \right) g_r - \frac{1}{144}r(r+\ell-1)E_4 g_{r-1} \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

En particulier,  $[f, g]_n \in \mathcal{M}_{k+\ell+2n}$ .

# Bibliographie

- [1] Martin Aigner, *A course in enumeration*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 238, Springer, Berlin, 2007. MR 2339282 (2008f:05001)
- [2] Andrew Baker, *Matrix groups*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 2002, An introduction to Lie group theory. MR MR1869885 (2002k:20001)
- [3] Marcel Berger and Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*, second ed., Mathématiques. [Mathematics], Presses Universitaires de France, Paris, 1992. MR MR1207362 (93j:53001)
- [4] Daniel Bertrand,  $\Theta(\tau, z)$  and transcendence, Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Math., vol. 1752, Springer, Berlin, 2001, pp. 1–11. MR 1837823
- [5] Óscar Ciaurri, Luis M. Navas, Francisco J. Ruiz, and Juan L. Varona, *A simple computation of  $\zeta(2k)$* , Am. Math. Mon. 122 (2015), no. 5, 444–451 (English).
- [6] David Cox, John Little, and Donal O’Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, third ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. MR 2290010 (2007h:13036)
- [7] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea, *Using algebraic geometry*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 185, Springer, New York, 2005. MR 2122859 (2005i:13037)
- [8] J. Dieudonné, *Éléments d’analyse. Tome III: Chapitres XVI et XVII*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970. MR MR0270377 (42 #5266)
- [9] François Dumas, *Rational equivalence for poisson polynomial algebras*, Available at <http://math.univ-bpclermont.fr/~fdumas/fichiers/montevideo.pdf>, 2011, Notes for a series of lectures given in december 2011 during a visit at the Universidad de la República (Montevideo) on the occasion of the XXI Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría Algebraica, supported by the IFUM (Instituto Franco-Uruguayo de Matemática) of CNRS.
- [10] William John Ellison, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris, 1975, En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l’Institut de Mathématique

- de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366. MR MR0417077 (54 #5138)
- [11] Eberhard Freitag, *Funktionentheorie 2*, Springer Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [12] Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Complex analysis*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR MR2513384
- [13] Bent Fuglede, *A sharpening of Wielandt's characterization of the gamma function*, Amer. Math. Monthly **115** (2008), no. 9, 845–850. MR 2463296 (2009m:33005)
- [14] Roger Godement, *Analyse mathématique. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Convergence, fonctions élémentaires. [Convergence, elementary functions]. MR MR1671443 (2000k:00004)
- [15] ———, *Analyse mathématique. III*, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann. [Analytic functions, differentials and manifolds, Riemann surfaces]. MR MR2164651 (2006i:30001)
- [16] ———, *Analyse mathématique. II*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2003, Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes. [Differential and integral calculus, Fourier series, holomorphic functions]. MR MR1998211 (2004f:00002)
- [17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, sixth ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000, Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. MR MR1773820 (2001c:00002)
- [18] Henryk Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. MR 98e:11051
- [19] Jürgen Jost, *Compact Riemann surfaces*, third ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006, An introduction to contemporary mathematics. MR MR2247485 (2007b:32024)
- [20] Anthony W. Knap, *Elliptic curves*, Mathematical Notes, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. MR MR1193029 (93j:11032)
- [21] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groups and symmetries*, Universitext, Springer, New York, 2010, Texte original français disponible aux éditions de l'École polytechnique. <http://www.editions.polytechnique.fr/>. MR MR2553682
- [22] Emmanuel Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 13, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR MR2122960 (2005k:11003)
- [23] François Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2005, <http://www.editions.polytechnique.fr/>.
- [24] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003. MR MR1930091 (2003k:58001)

- 
- [25] Rudolf Lidl and Harald Niederreiter, *Finite fields*, second ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 20, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With a foreword by P. M. Cohn. MR 1429394
- [26] Hans Maass, *Lectures on modular functions of one complex variable*, Notes by Sunder Lal. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 29, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964. MR 0218305
- [27] Dominique Manchon, *Introduction aux variétés de Poisson et à la formalité*, Cours de Mastère 2ème année, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Novembre-Décembre 2004. Non publié.
- [28] François Martin and Emmanuel Royer, *Formes modulaires et périodes*, Formes modulaires et transcendance, Sémin. Congr., vol. 12, Soc. Math. France, Paris, 2005, pp. 1–117. MR MR2186573 (2007a:11065)
- [29] James S. Milne, *Fields and galois theory (v4.22)*, 2011, Disponible à l'adresse [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [30] Carlos Julio Moreno, *Advanced analytic number theory: L-functions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 115, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. MR 2135107 (2006f:11096)
- [31] Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf, and Doron Zeilberger, *A = B*, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1996, With a foreword by Donald E. Knuth, With a separately available computer disk. MR 1379802 (97j:05001)
- [32] Frédéric Pham, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, InterEditions, Paris, 1992, Cours, études et exercices pour la maîtrise de mathématiques. [Course, studies and exercises for the Masters in mathematics]. MR MR1195791 (93k:58001)
- [33] Reinhold Remmert, *Wielandt's theorem about the  $\Gamma$ -function*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), no. 3, 214–220. MR 1376175 (97b:33001)
- [34] ———, *Theory of complex functions.*, Grad. Texts Math., vol. 122, New York etc. : Springer-Verlag, 1998 (English), 4th corrected edition. Transl. from the German *Funktionentheorie I* by Robert B. Burckel.
- [35] H. L. Resnikoff, *On differential operators and automorphic forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 334–346. MR 0204651 (34 #4490)
- [36] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2. MR 58 #16473
- [37] ———, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke  $T_p$* , J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102. MR MR1396897 (97h:11048)
- [38] Carl Ludwig Siegel, *A simple proof of  $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$* , Mathematika **1** (1954), 4. MR 0062774
- [39] Nils-Peter Skoruppa, *A quick combinatorial proof of Eisenstein series identities*, J. Number Theory **43** (1993), no. 1, 68–73. MR MR1200809 (94f:11029)
- [40] L. J. Slater, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, New York, 1960. MR 0107026 (21 #5753)

- 
- [41] Lucy Joan Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966. MR 0201688 (34 #1570)
- [42] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, II, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. MR 1976398 (2004d:30002)
- [43] ———, *Fourier analysis*, Princeton Lectures in Analysis, vol. 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003, An introduction. MR 1970295 (2004a:42001)
- [44] Gérald Tenenbaum, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996, With the collaboration of Jie Wu. MR 1397501 (97h:11001)
- [45] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième ed., Échelles, Belin, Paris, 2008.
- [46] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy. MR MR1435975 (97m:57016)
- [47] Fernando Rodriguez Villegas and Don Zagier, *Square roots of central values of Hecke L-series*, Advances in number theory (Kingston, ON, 1991), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993, pp. 81–99. MR 1368412 (96j:11069)
- [48] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983, Corrected reprint of the 1971 edition. MR MR722297 (84k:58001)
- [49] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Reprint of the second (1944) edition. MR 1349110 (96i:33010)
- [50] Herbert S. Wilf, *generatingfunctionology*, third ed., A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 2006. MR 2172781 (2006i:05014)
- [51] Don Zagier, *Modular forms and differential operators*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), no. 1, 57–75, K. G. Ramanathan memorial issue. MR 1280058 (95d:11048)