Mardi 20 septembre 2016

8h - 13h

Il sera tenu compte de façon importante de la qualité de la rédaction et de l'argumentation. En particulier, répondre juste à une question est valorisé, répondre faux est pénalisé et ne pas répondre n'est ni valorisé ni pénalisé.

Sources :

Capes de mathématiques 2016, épreuve 1

Concours communs Polytechniques 2016, épreuve spécifique filière TSI.

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants

Le sujet comporte 7 page en plus de celle-ci

Rappels des notations

On rappelle que, pour X une variable aléatoire, $E(X)$ désigne l'espérance de X et $V(X)$ désigne la variance de X.

Étant donnés deux événements A et B, la notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Contexte

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3, ...
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de rester allumée et $\dfrac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

III.1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.
Déterminer la variance de X_0.

III.2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

III.3. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1),\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2),\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1),\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

III.4. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

III.5. Calcul de l'espérance

- **a)** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.
- **b)** Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
  En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.
- **c)** Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.

III.6. Calcul du moment d'ordre 2.
On rappelle la *formule de transfert :* pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \mathbf{P}(X = k).$$

- **a)** En appliquant cette formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.
- **b)** Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :
$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$
- **c)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \dfrac{1}{4} E(X_n^2) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
  On pourra utiliser les résultats de la question **III.5**.
- **d)** On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfait la relation de récurence
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$
- **e)** Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = E(X_n^2) - u_n$.
  Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- **f)** En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n.

III.7. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n.

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$*.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \ldots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \ldots, a_n$.

Partie B : erreur d'interpolation

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

I. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.
2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

II. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de $a_1, \ldots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.
2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$.

   En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

III.

1. Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

2. Montrer que le résultat établi dans la question III.1. reste vrai si c est égal à l'un des a_k.
3. En déduire que $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Partie C : un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array} \right.$$

I. Première méthode. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

1. Calculer P.
2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \max_{x \in [0,\pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geqslant 1$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) \text{ si } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{n}, \\ P_1(x) \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \quad \vdots \\ P_k(x) \text{ si } \dfrac{k\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} \quad (k \in [\![0, n-2]\!]), \\ \quad \vdots \\ P_{n-1}(x) \text{ si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

2. Justifier que Q_n est continue sur $[0, \pi]$.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.
On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A.II. dans des bases bien choisies.

2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.

3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

4. Conclure.

III. Seconde méthode. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)\dots(X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha &= b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

b. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\alpha = 0$.

ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.

iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D.

II. **1.** On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.

2. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.