CAPES de mathématiques 2014, épreuve 2 – Corrigé

Problème 1 : étude de points fixes

Partie A : quelques études d'unicité

1.

1.1. La fonction f définie sur I par

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \neq \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a+b}{2} & \text{si } x = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

n'est pas continue. Elle admet pourtant $\frac{a+b}{2}$ comme point fixe.

> Il n'est pas nécessaire que la fonction f soit continue pour admettre un point fixe.

1.2. La fonction définie sur I par $f(x) = 1 + x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ est continue sur I. Elle n'admet pourtant aucun point fixe.

> Il n'est pas suffisant que la fonction f soit continue pour admettre un point fixe.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} - x = 0$.

On définit la fonction $g$sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -(\mathrm{e}^{-x} + 1) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$ (car $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^0 = 1$ puisque exp croît strictement). Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ce point d'annulation de g est unique puisque g est strictement monotone donc injective.

> La fonction f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$. Ce point fixe appartient à $[0,1]$.

3.

3.1. Soit g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Comme f, la fonction g est continue sur I. On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in [a,b]$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $g(\alpha) = 0$. On a alors $f(\alpha) = \alpha$.

`Remarque : la preuve du résultat demeure vraie si` $f([a,b]) \subset [a,b]$.

La fonction f admet un point fixe sur I.

3.2. Supposons que f est strictement décroissante. Soit $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $f(\beta) = \beta$. Si $\beta \geq \alpha$ alors $f(\beta) \leq f(\alpha)$, c'est-à-dire $\beta \leq \alpha$; on a alors $\beta = \alpha$. Si $\beta \leq \alpha$ alors $f(\beta) \geq f(\alpha)$, c'est-à-dire $\beta \geq \alpha$; on a alors $\beta = \alpha$.

Si f est strictement décroissante, son point fixe est unique.

3.3.
La fonction f définie sur I par $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x) = x$ est continue, stabilise I et admet une infinité de points fixes.

Sa stricte croissance n'est pas une condition suffisante pour qu'une fonction continue sur I stabilisant I admette un unique point fixe.

Partie B : étude d'une suite convergeant vers un point fixe

1.
1.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. On a la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} x_0 \neq 0 \text{ et } g(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\alpha}{x_0}\right) = x_0 \text{ et } x_0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 + \frac{\alpha}{x_0} = 2x_0 \text{ et } x_0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{x_0} = x_0 \text{ et } x_0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 - \alpha = 0 \text{ et } x_0 \neq 0. \end{aligned}$$

De plus, $f(0) = -\alpha \neq 0$. On a déduit

Tout réel positif est un point fixe de g si et seulement si c'est un zéro de f.

1.2. La fonction f est dérivable en t. L'équation de T_t est donc

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = 2tx - (t^2 + \alpha).$$

Le point d'intersection de T_t avec l'axe des abscisses est le point $(x_t, 0)$ où

$$0 = 2tx_t - (t^2 + \alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_t = \frac{1}{2t}(t^2 + \alpha) = g(t) \text{ car } t \neq 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse t avec l'axe des abscisses a pour abscisse $g(t)$.

1.3. Cette question trouverait mieux sa place après la question 2.4 de cette partie B. Supposons donc avoir résolu la question 2.4. Fixer $\alpha > 0$ (par exemple entier). Choisir $u_0 > \sqrt{\alpha}$. Pour plusieurs valeurs successives de n, calculer $u_{n+1} = g(u_n)$. Tracer la droite d'équation $y = 2u_n x - (u_n^2 + \alpha)$. Marquer son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

2.

2.1. Supposons $u_0 = \sqrt{\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{S}(n)$ l'hypothèse : « $u_n = \sqrt{\alpha}$ ». L'hypothèse $\mathcal{S}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}(n)$ est vraie. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\right) = \sqrt{\alpha}$$

car $\alpha > 0$. Ainsi, $\mathcal{S}(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{S}(n)$ est vraie alors $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. On en déduit que, pour tout $n \in \S(n)$, l'hypothèse $\mathcal{S}(n)$ est vraie.

$$\boxed{\text{Si } u_0 = \sqrt{\alpha} \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à } \sqrt{\alpha}.}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g(t) = \frac{1}{2t}\left(t^2 + \alpha\right) = \frac{1}{2t}\left(\left(t - \sqrt{\alpha}\right)^2 + 2t\sqrt{\alpha}\right) = \frac{\left(t - \sqrt{\alpha}\right)^2}{2t} + \sqrt{\alpha}.$$

On en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*+} - \{\sqrt{t}\} \qquad g(t) > \sqrt{\alpha}.$$

Comme $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $u_1 = g(u_0)$ existe. Supposons de plus, $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$, alors $u_1 = g(u_0) > \sqrt{\alpha}$. L'hypothèse $\mathcal{E}(1)$ est alors vraie où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{E}(n)$ l'hypothèse « u_n existe et $u_n > \sqrt{\alpha}$ ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{E}(n)$ est vraie. Comme $u_n > \sqrt{\alpha}$ alors $u_{n+1} = g(u_n)$ est définie. De plus $u_n \neq \sqrt{\alpha}$ donc $u_{n+1} = g(u_n) > \sqrt{\alpha}$. L'hypothèse $\mathcal{E}(n+1)$ est donc vraie. Par récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\text{Si } u_0 > \sqrt{\alpha} \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \text{ est défini et } u_n > \sqrt{\alpha}.}$$

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.2, la tangente à la courbe représentative de f en le point d'abscisse u_n coupe l'axe des abscisses au point $(g(u_n), 0) = (u_{n+1}, 0)$. Mais, la tangente de C_f en le point d'abscisse u_n est la tangente à C_f en le point de coordonnées $(u_n, f(u_n))$ puisque ce point appartient à C_f. Autrement dit,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \text{ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la} \\ \text{courbe } C_f \text{ en le point de coordonnées } (u_n, f(u_n)) \text{ avec l'axe des abscisses.}\end{array}}$$

2.3.

D'après la question 2.1, on $u_n > \sqrt{\alpha} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + \alpha\right) < \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + u_n^2\right) = u_n.$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

2.4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante (question 2.3) et minorée (par $\sqrt{\alpha}$, question 2.1. Elle est donc convergente vers un réel $\ell \geq \sqrt{\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge donc vers ℓ. La fonction g est continue, la suite $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $g(\ell)$. On a donc $g(\ell) = \ell$. Ainsi ℓ est un zéro de f. Or, les zéros de f sont $-\sqrt{\ell}$ et $\sqrt{\ell}$. On a donc $\ell = \sqrt{\ell}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\alpha}$.

2.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n\right)\right| = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2.$$

Or $u_n > \sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{2u_n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. On en tire

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2.$$

Partie C : un théorème du point fixe

1. Soit $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est contractante de coefficient γ. Soit $\eta = \varepsilon/\gamma$. Pour tout $x \in [a, b]$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \gamma|x - x_0| \leq \gamma\eta = \varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en x_0. On a montré

La fonction f est continue sur I.

2.

2.1. De $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in \mathrm{I} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}.$$

Puisque $u_0 \in \mathrm{I}$, une récurrence implique u_n est défini et $u_n \in \mathrm{I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les hypothèses $u_0 \in \mathrm{I}$ et $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ assurent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie.

2.2.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{I}(m)$ l'inégalité $|u_{m+1} - u_m| \leq \gamma^m |u_1 - u_0|$. Elle est vraie pour $m = 0$ puisque $\gamma^0 = 1$. Soit $m \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{I}(m)$ est vraie. Alors,

$$|u_{m+2} - u_{m+1}| = |f(u_{m+1}) - f(u_m)| \leq \gamma |u_{m+1} - u_m|$$

puisque f est contractante de rapport γ. L'hypothèse $\mathcal{I}(m)$ donne $|u_{m+1} - u_m| \leq \gamma^m |u_1 - u_0|$ d'où l'on tire

$$|u_{m+2} - u_{m+1}| \leq \gamma^{m+1} |u_1 - u_0|.$$

Par récurrence, l'inégalité $\mathcal{I}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit n et p des entiers naturels. On a

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \sum_{\ell=1}^{p} (u_{n+\ell} - u_{n+\ell-1}) \right| \leq \sum_{\ell=1}^{p} \gamma^{n+\ell-1} |u_1 - u_0|$$

grâce à $\mathcal{I}(n + \ell - 1)$. Par changement de variable $j = \ell + n - 1$, on trouve alors

$$\boxed{|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{j=n}^{p+n-1} \gamma^j |u_1 - u_0|}$$

On calcule la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de premier terme γ^n et de raison γ :

$$\sum_{j=n}^{p+n-1} \gamma^j = \gamma^n \frac{1 - \gamma^p}{1 - \gamma}$$

puis, comme $1 - \gamma > 0$ et $0 < \gamma^p < 1$,

$$\boxed{|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0|.}$$

2.3. Puisque $\gamma \in [0, 1[$, les suites $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(\gamma^n/(1 - \gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0. On en déduit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \left| \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \right| \leq \varepsilon$$

puis, en utilisant le résultat de 2.2,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \left| u_{n+p} - u_n \right| \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy de l'espace complet $\mathbb{R}$. On en déduit qu'elle converge. La suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble fermé I, sa limite est donc un élément de I.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans I.}}$$

3. On a montré en 2.1 que la fonction f est continue. Soit x la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. D'autre part la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge donc vers x. Ainsi $x = f(x)$ et x est un point fixe de f.

Soit $y \in \mathrm{I}$ un point fixe de I. Alors $x = f(x)$ et $y = f(y)$ puis

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \gamma |x-y| \quad \text{d'où} \quad |x-y| \leq \gamma|x-y|.$$

Si $|x-y| \neq 0$, on trouve la contradiction $1 \leq \gamma$. On a donc $y = x$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point fixe dans I.}}$$

4. Le résultat démontré est le théorème de point fixe de Banach ou, de façon plus parlante, le théorème des approximations successives dont voici l'énoncé.

> Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{I}$ une application contractante de coefficient $\gamma \in [0,1[$, définie sur l'intervalle réel fermé I. Alors f admet un unique point fixe $x \in \mathrm{I}$. De plus, pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x.

5. On note x le point fixe de f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - x| = |f(u_n) - f(x)| \leq \gamma|u_n - x|.$$

Si $\gamma = 0$, la suite est constante et

$$\boxed{\text{Si } \gamma > 0, \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge à vitesse géométrique.}}$$

Problème 2 : intégrale de Gauss et loi normale

Partie A : intégrales de Wallis

1. La fonction sin est positive sur $[0,\pi/2]$ donc $W_n \geq 0$. De plus, sin est continue et non constante nulle. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad W_n > 0.$$

Pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $\sin t \in [0,1]$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,\pi/2]$, $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, \mathrm{d}t$$

et $W_{n+1} \leq W_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et strictement positive.}}$$

2. La fonction sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour $\sin^n$ et un peut répéter les intégrations par parties sur $[0,\pi/2]$. Si $n \geq 1$, en réitérant les intégrations par parties, on trouve

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \sin t \, \mathrm{d}t = [-\sin^n t \cos t]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \left(1 - \sin^2 t\right) \mathrm{d}t = nW_{n-1} - nW_{n+1} \end{aligned}$$

donc $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$. On en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$$

3. De la stricte positivité et de la décroissance de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on tire

$$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}}.$$

De plus,

$$(n+2)W_{n+1} \geq (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

donc, cette égalité étant entre réels strictement positifs

$$\frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}.}$$

4. D'après la question précédente, la suite $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites de limite 1. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$$

5. On calcule

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

d'où l'on déduit $u_0 = \frac{\pi}{2}$. L'hypothèse $\mathcal{C}(0)$ est donc vraie où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}(n)$ l'hypothèse : $u_n = \frac{\pi}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}(n)$ est vraie. Alors,

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = u_n = \frac{\pi}{2}$$

grâce à la question 2. On en déduit que $\mathcal{C}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$nW_n^2 = nW_nW_{n-1}\frac{W_n}{W_{n-1}} = u_{n-1}\left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)^{-1}.$$

D'après la question 5, la suite $(u_{n-1})_{n\geq 1}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; d'après 4, la suite $\left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 1. On en déduit que la suite $\left(nW_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}.}$$

Par continuité de la fonction $\sqrt{}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{nW_n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, W_n et positif donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Partie B : calcul de l'intégrale de Gauss

1. Pour tout $x \in -1,+\infty[$, $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ (où on convient de permuter les bornes si $x<0$). On applique donc le théorème des accroissements finis pour trouver $c \in]0,x[$ tel que

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

Si $x \geq 0$, alors $c > 0$ et

$$0 < \frac{1}{1+c} < 1 \quad \text{puis} \quad 0 < \frac{x}{1+c} < x.$$

On en déduit $\ln(1+x) \leq x$. L'inégalité demeure si $x=0$ car $\ln(1+0)=0$.

Si $x<0$ alors $-1 < c < x$ puis $0 < 1+c < 1+x$ et

$$1 < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c}.$$

Comme $x<0$, on en déduit

$$x > \frac{x}{1+x} > \frac{x}{1+c}$$

d'où $\ln(1+x) \leq x$.

$$\boxed{\forall x > -1 \qquad (\ln(1+x) \leq x.}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,\sqrt{n}[$ on a

$$0 < 1 - \frac{t^2}{n} \leq 1 + \frac{t^2}{n}.$$

On peut donc définir

$$\left(1 \pm \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 \pm \frac{t^2}{n}\right)\right).$$

Puisque $-t^2/n > -1$, on déduit de la question précédente que

$$\ln\left(1 \pm \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$$

puis

$$\exp\left(\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq \mathrm{e}^{-t^2}$$

car $n \geq 0$ et exp croît.

De même, $t^2/n > -1$ donc

$$\exp\left(\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq \mathrm{e}^{t^2}.$$

En prenant l'inverse de cette inégalité entre réels strictement positifs, on obtient

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leq \exp\left(-\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

En vérifiant que c'est le toujours le cas si $t = \sqrt{n}$, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right] \qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.}$$

3. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \left[0, \sqrt{n}\right] \\ & & u & \mapsto & \sqrt{n}\cos u \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme car cos est C^1 et la dérivée de φ est

$$\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi'(u) = -\sqrt{n}\sin u$$

ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos u)^n \left(-\sqrt{n}\right)\sin u \,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u \,\mathrm{d}u.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u.}$$

4. L'application

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \left]0, \sqrt{n}\right[\\ & & u & \mapsto & \sqrt{n}\operatorname{cotan} u \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme car cotan est C^1 et la dérivée de ψ est

$$\forall u \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \psi'(u) = -\sqrt{n}(1+\operatorname{cotan}^2 u)$$

ne s'annule pas. Ainsi,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1+\operatorname{cotan}^2 u\right)^{-n} \sqrt{n}\left(1+\operatorname{cotan}^2 u\right)\mathrm{d}u.$$

Or $1+\operatorname{cotan}^2 u = (\sin^2 u + \cos^2 u)/\sin^2 u = 1/\sin^2 u$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u.}$$

5. On utilise la question B2 pour écrire

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \le \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Les questions B3 et B4 conduisent alors à

$$\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \le \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le membre de gauche est $\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1}$. De plus, $\sin^{2n-2}$ étant une fonction à valeurs positives, on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{W}_{2n-2}.$$

On trouve

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} \le \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2}.}$$

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}\mathrm{W}_{2n+1}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, en utilisant A6,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}\mathrm{W}_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même,

$$\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}}\sqrt{2n-2}\mathrm{W}_{2n-2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Grâce à l'inégalité démontrée en B5, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur tout intervalle fermé de $[0,+\infty[$. D'autre part, elle est à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0 \quad \text{et donc} \quad \mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \to +\infty).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann, on en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Partie C : loi normale ou loi de Laplace-Gauss

1.

1.1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si

- elle est à valeurs positives ou nulles ;
- intégrable sur $\mathbb{R}$;
- sa somme sur $\mathbb{R}$ vaut 1, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

1.2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction φ_k est intégrable car continue sur $\mathbb{R}$. Elle est à valeurs positives si et seulement si $k \geq 0$. la fonction φ_k est donc une densité de probabilité si et seulement si le réel positif k vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x}.$$

Par changement de variable linéaire $u = x/\sqrt{2}$, puis par parité de l'intégrande, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On utilise le résultat de la question B6 et on trouve

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } \varphi_k \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

2.

2.1. La question C1 montre que φ est une densité de probabilité. La fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$. D'autre part, cette fonction est à valeurs positivess sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0 \quad \text{et donc} \quad x\mathrm{e}^{-x^2/2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty).$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Par changement de variable linéaire $u = -x$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{0} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et donc

$$\boxed{\text{La variable aléatoire X a une espérance.}}$$

Enfin, la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est impaire donc

$$\boxed{\text{L'espérance de X est } \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0.}$$

2.2. La fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$. D'autre part, cette fonction est à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x^4\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2\mathrm{e}^{-x^2/2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty).$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Par changement de variable linéaire $u = -x$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{0} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. La variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 et donc

$$\boxed{\text{La variable aléatoire X a une variance.}}$$

En utilisant le fait que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$ d'après la question précédente, on calcule

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On définit f et g sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \quad f(u) = u, \quad g(u) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u^2}.$$

Ces deux fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et, lorsque u tend vers $+\infty$, le produit $f(u)g(u)$ tend vers 0. On en déduit que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} f(u)g'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f'(u)g(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

ont même nature. Comme la première converge, on trouve

$$\int_0^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{u}{2}\mathrm{e}^{-u^2/2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

d'après B.6. On en déduit

$$\boxed{\text{La variance de X est } \mathbb{V}(\mathrm{X}) = 1.}$$

3.

3.1. De la définition de Z, on déduit $Z = \sigma X + \mu$. Par linéarité de l'espérance, on obtient l'existence de $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}(Z) = \sigma\,\mathbb{E}(X) + \mu$. En utilisant la question C.2.1, on trouve

$$\boxed{\text{L'espérance de Z est } \mathbb{E}(Z) = \mu.}$$

De même, puisque X a un moment d'ordre 2, il en est de même pour Z et

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))^2\right) = \mathbb{E}\left((\sigma X)^2\right) = \sigma^2\,\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2\,\mathbb{V}(X)$$

car $\mathbb{E}(X) = 0$. On tire alors de C.2.2

$$\boxed{\text{La variance de Z est } \mathbb{V}(Z) = \sigma^2.}$$

3.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement $(Z \leq x)$ équivaut à l'événement $\left(X \leq \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Ainsi,

$$P(Z \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

La variable aléatoire X ayant φ pour densité, on trouve alors

$$P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{x} \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}t$$

par le changement de variable $u = \sigma t + \mu$. On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La variable Z est une variable à densité. Sa densité est}\\ f(u) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}.\end{array}}$$

4.

4.1. L'espérance de Y est $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) = 1$. La variance de Y existe car Y^2 admet un moment d'ordre 2 car X admet un moment d'ordre 4. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} x^6\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0 \quad \text{et donc} \quad x^4\mathrm{e}^{-x^2/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty).$$

Cette variance de Y est

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(\left(X^2 - \mathbb{E}(X^2)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4 - 2X^2 + 1\right) &= \mathbb{E}(X^4) - 2\,\mathbb{E}(X^2) + 1\\ &= \mathbb{E}(X^4) - 1.\end{aligned}$$

On calcule

$$\mathbb{E}(X^4) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^4\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^4\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On définit F et F sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \quad F(u) = u^3, \quad G(u) = -\frac{1}{2}e^{-u^2}.$$

Ces deux fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et, lorsque u tend vers $+\infty$, le produit $F(u)G(u)$ tend vers 0. On en déduit que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} F(u)G'(u)\,du = \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2/2}\,du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} F'(u)G(u)\,du = -\frac{3}{2}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\,du$$

ont même nature. Comme la première converge, on trouve

$$\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2/2}\,du = \left[-\frac{u^3}{2}e^{-u^2/2}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\,du = 0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

d'après C.2.2. On a alors $\mathbb{E}(X^4) = 3$ puis $\mathbb{V}(Y) = 2$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = 2.}$$

4.2. La variable aléatoire Y est à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'événement $(Y \leq x)$ est équivalent à $(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$. On a alors

$$P(Y \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Sur $[0, \sqrt{x}]$, l'application $t \mapsto t^2$ est C^1 et sa dérivée $t \mapsto 2t$ ne s'annule pas sur $]0, \sqrt{x}[$. On peut donc faire le changement de variable $u = t^2$ pour obtenir

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{u}}e^{-u/2}\,du$$

la convergence du membre de droite étant conséquence de celle du membre de gauche (ou d'un équivalent en 0). On a donc

$$P(Y \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}e^{-u/2}\,du.$$

La variable Z est une variable à densité donnée par

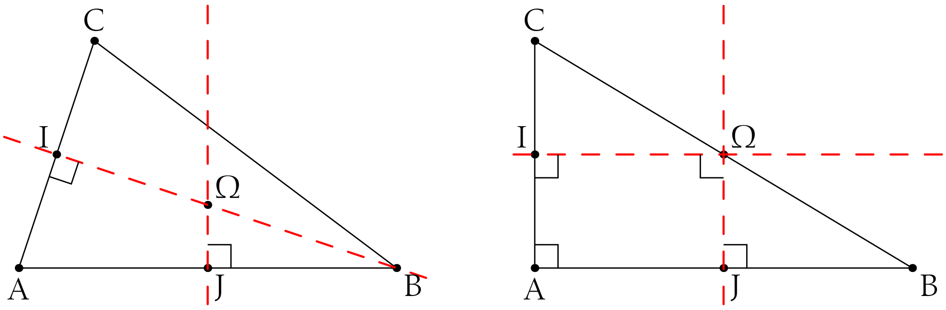
$$\forall u \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}e^{-u/2}.$$

La variable Z étant à valeur dans $\mathbb{R}^+$, on en déduit que

La variable Z ne suit pas une loi normale.

Problème 3 : géométrie

1.



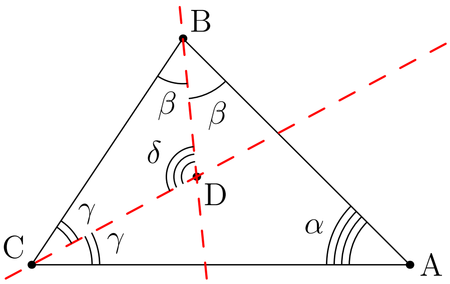
On note I le point d'intersection de la médiatrice de [AC] avec (AC) et J le point d'intersection de la médiatrice de [AB] avec (AB). Soit Ω le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [AB].

On suppose $(I\Omega) \perp (J\Omega)$. Comme $(I\Omega) \perp (AC)$, on a $(AC) \parallel (J\Omega)$. Ensuite $(AB) \perp (J\Omega)$ donc $(AB) \perp (AC)$. Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Réciproquement, supposons le triangle ABC rectangle en A. Comme $(AC) \perp (I\Omega)$ et $(AC) \perp (AB)$ alors $(I\Omega) \parallel (AB)$. Or $(J\Omega) \perp (AB)$ donc $(J\Omega) \perp (I\Omega)$.

> Les médiatrices de [AB] et [AC] sont perpendiculaires si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A.

2.

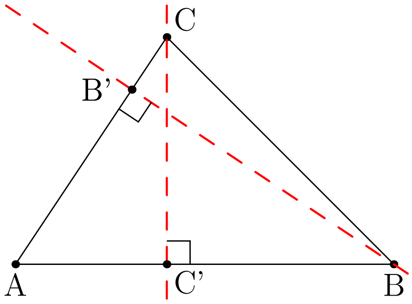


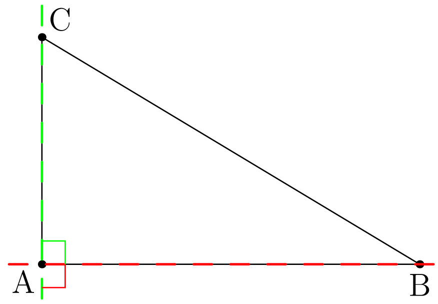
Notons D le point d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Notons $\alpha \in]0,\pi[$ une mesure de l'angle $\widehat{A}$, puis $\beta \in]0,\pi[$ une mesure de l'angle $\widehat{B}$, et $\gamma \in]0,\pi[$ une mesure de l'angle $\widehat{C}$ et enfin $\delta \in]0,\pi[$ une mesure de l'angle déterminé par les demi droites [DB) et [DC).

Dans le triangle BDC, on a $\beta + \gamma + \delta = \pi$. Dans le triangle ABC, on a $\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$. On a donc $\alpha + 2(\pi - \delta) = \pi$ et donc $\delta = (\alpha + \pi)/2$. Le triangle ABC est non plat donc $\alpha > 0$ puis $\delta > \pi/2$. Les droites BD et CD ne sont donc pas perpendiculaires.

Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ne peuvent pas être perpendiculaires.

3.





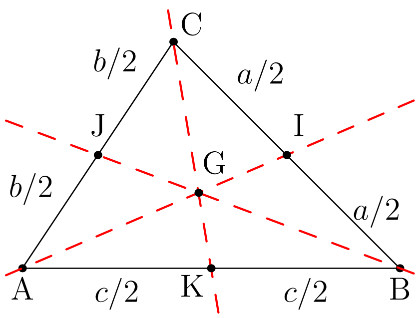
On note B′ le point d'intersection de (AC) avec la hauteur issue de B et C′ le point d'intersection de (AB) avec la hauteur issue de C.

Si les hauteurs issues de B et C sont perpendiculaires alors (AC) ⊥ (BB′) et (BB′) ⊥ (CC′) donc (CC′) // (CA) puis (CC′) = (CA). Or (CC′) ⊥ (AB) donc (CA) ⊥ (AB) : le triangle ABC est rectangle en A.

Réciproquement, supposons le triangle ABC rectangle en A. De (CA) ⊥ (AB), on déduit que la hauteur issue de C est (AB). De (BA) ⊥ (AC), on déduit que la hauteur issue de B est (CA). Or (AB) ⊥ (CA) donc, les hauteurs issues de B et C sont perpendiculaires.

Les hauteurs issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A.

4.



4.1.

On note G le point d'intersection de (AI) et (BJ).

On applique la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ACB. On a

$$\frac{CJ}{CA} = \frac{CI}{CB} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que (IJ) // (AB). On déduit alors du théorème de Thalès dans le triangle ACB que

$$\frac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{AB}}$$

et donc $\mathrm{AB} = 2\mathrm{IJ}$.

On peut alors appliquer le théorème de Thalès à la situation papillon déterminée par I, J, B et A. On obtient

$$\frac{\mathrm{GI}}{\mathrm{GA}} = \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{GB}} = \frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\mathrm{GA} = 2\mathrm{GI}$ puis, comme $\mathrm{AI} = \mathrm{AG} + \mathrm{GI}$, on trouve $\mathrm{AG} = \frac{2}{3}\mathrm{AI}$. De même $\mathrm{GB} = 2\mathrm{GJ}$ et donc $\mathrm{BG} = \frac{2}{3}\mathrm{BJ}$.

De même, notons G′ le point d'intersection de (AI) et (CK). On a $\mathrm{AG}' = \frac{2}{3}\mathrm{AI}$ et $\mathrm{CG}' = \frac{2}{3}\mathrm{CK}$. Comme $\mathrm{AG} = \mathrm{AG}'$ avec G et G′ sur [AI], on trouve $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$. Ainsi, les trois médianes se coupent en G.

> Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.

4.2.

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= \|\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}\|^2 \\ &= \mathrm{AI}^2 + \mathrm{IB}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \mathrm{AI}^2 + \mathrm{IC}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}} \\ &= 2\mathrm{AI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}})\end{aligned}$$

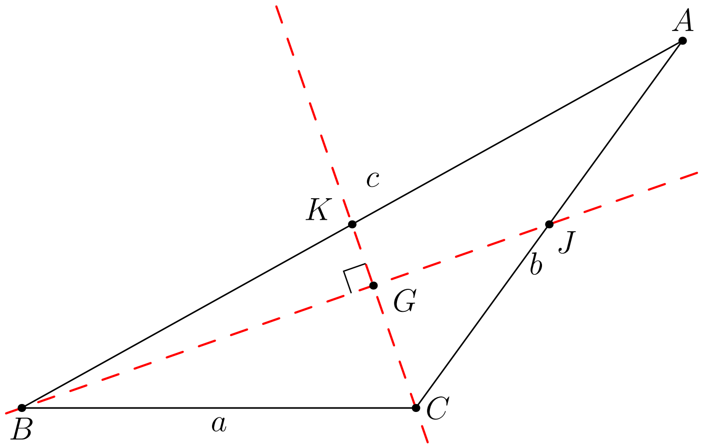
puisque $\mathrm{IB} = \mathrm{IC} = \mathrm{BC}/2$

$$= 2\mathrm{AI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2.$$

On a donc

$$\boxed{b^2 + c^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{1}{2}a^2.}$$

4.3.



On suppose que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires. Le triangle JGK est rectangle en G. Par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\mathrm{GK}^2 + \mathrm{GJ}^2 = \mathrm{KJ}^2. \tag{1}$$

Or, grâce au théorème de Thalès dans le triangle BAC, on a KJ $= a/2$. De plus, d'après la question 4.1, on a GK = CK/3 et GJ = BJ/3. L'égalité 1 devient donc

$$4\mathrm{CK}^2 + 4\mathrm{BJ}^2 = 9a^2. \tag{2}$$

On applique le théorème de la médiane à la médiane (CK) : on trouve

$$a^2 + b^2 = 2\mathrm{CK}^2 + \frac{1}{2}c^2 \quad \text{donc} \quad 4\mathrm{CK}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

On applique ensuite le théorème de la médiane à la médiane (BJ) : on trouve

$$a^2 + c^2 = 2\mathrm{BJ}^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \text{donc} \quad 4\mathrm{BJ}^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Ces deux utilisations du théorème de la médiane transforment (2) en

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9a^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Réciproquement, supposons $b^2 + c^2 = 5a^2$. Par application du théorème de la médiane à la médiane (BJ), on trouve

$$a^2 + c^2 = 2\mathrm{BJ}^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \text{donc} \quad a^2 + 5a^2 - b^2 = 2\mathrm{BJ}^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{BJ}^2 = 3a^2 - \frac{3}{4}b^2.$$

Comme GJ = BJ/3, on trouve

$$\mathrm{GJ}^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{12}b^2. \tag{3}$$

Par application du théorème de la médiane à la médiane (CK), on trouve

$$a^2 + b^2 = 2\mathrm{CK}^2 + \frac{1}{2}c^2 \quad \text{donc} \quad a^2 + b^2 = 2\mathrm{CK}^2 + \frac{1}{2}(5a^2 - b^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{BJ}^2 = \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{4}a^2.$$

Comme $\mathrm{CG} = 2\mathrm{CK}/3$, on trouve

$$\mathrm{CG}^2 = \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}a^2. \tag{4}$$

Les égalités (3) et (4) conduisent à

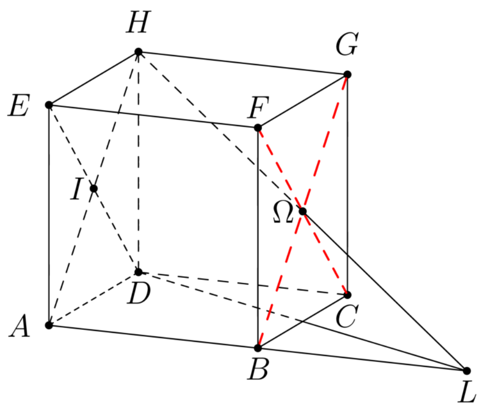
$$\mathrm{CG}^2 + \mathrm{GJ}^2 = \frac{1}{4}b^2 = \mathrm{CJ}^2.$$

Par la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit $(\mathrm{CG}) \perp (\mathrm{GJ})$ c'est-à-dire $(\mathrm{CK}) \perp (\mathrm{BJ})$.

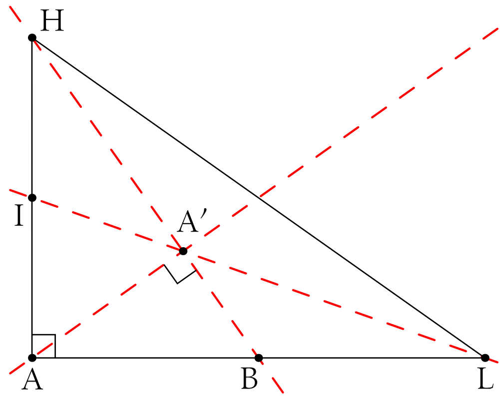
Les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

4.5.



Notons L le symétrique de A par rapport à B. La droite AL est dans le plan contenant la face ABCD du cube, la droite AH est dans le plan contenant la face ADHE. Ces deux faces, donc les deux plans les contenant, sont perpendiculaires. Les droites AL et AH sont donc perpendiculaires : le triangle HAL est rectangle en A. Grâce au théorème de Pythagore, on a donc $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AL}^2 = \mathrm{HL}^2$. Or $\mathrm{AH} = \sqrt{2}a$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHD) et $\mathrm{AL} = 2a$ donc, $\mathrm{HL} = \sqrt{6}a$. Ainsi $\mathrm{AL}^2 + \mathrm{HL}^2 = 5\mathrm{AH}^2$. D'après la question précédente, on déduit que les médianes issues de A et H sont perpendiculaires.



Notons I le milieu de [AH]. C'est l'intersection des diagonales [AH] et [ED] du carré ADHE. Notons A′ le projeté orthogonal de de A sur HB. Comme les médianes de HAL issues de A et de H sont orthogonales, le point A′ est l'intersection de ces deux médianes. C'est donc aussi l'intersection des droites (HB) et (LI). On sait donc le tracer à la règle dès lors que l'on sait tracer L.

Notons Ω le point d'intersection de (GB) et (FC). Montrons que L est le point d'intersection de (HΩ) et (AB). Il suffit de démontrer $\Omega \in (\mathrm{HL})$. Dans le triangle HGΩ rectangle en G, on a $\mathrm{HG} = a$, $\mathrm{G}\Omega = \sqrt{2}a/2$ donc $\mathrm{H}\Omega = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Dans le triangle ΩBL rectangle en B, on a $\mathrm{BL} = a$, $\Omega\mathrm{B} = \sqrt{2}a/2$ donc $\Omega\mathrm{L} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. On a alors $\mathrm{H}\Omega + \Omega\mathrm{L} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}a = \sqrt{6}a = \mathrm{HL}$. On en déduit $\Omega \in (\mathrm{HL})$.

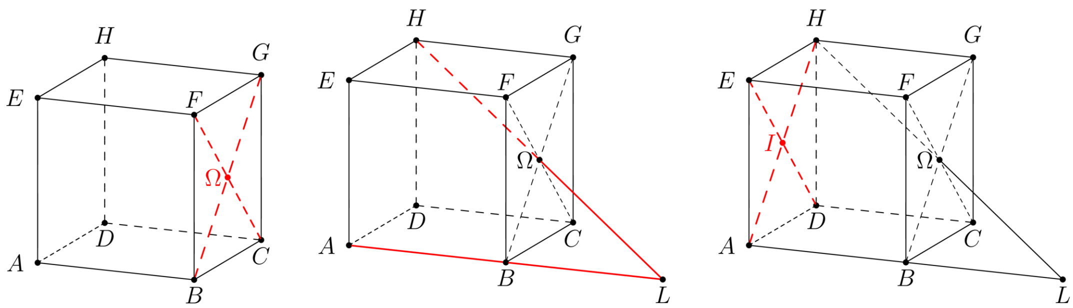
Pour tracer à la règle le projeté orthogonal A′ de A sur (HB), on procède de la façon suivante :

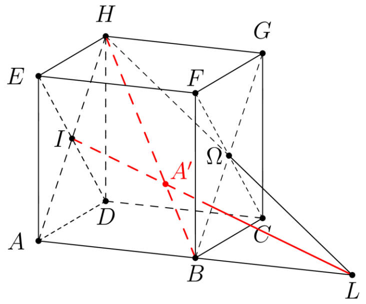
— tracer le point Ω, intersection de (GB) et (FC) ;

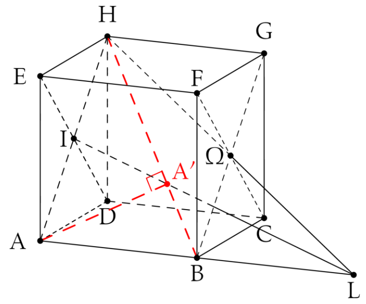
— tracer le point L, intersection de (HΩ) et (AB) ;

— tracer le point I, intersection de (HA) et (ED) ;

— le point A′ est l'intersection de (HB) et (IL).




H
G
E
F
I
Ω
A′
D
A
C
B
L


H
G
E
F
I
Ω
A′
D
A
C
B
L