Département de mathématiques et informatique
Licence 1 – 11MM22
Vendredi 27 mars 2015, 8h

Examen intermédiaire

Aucun document n'est autorisé – Calculatrice interdite.
Durée : 1h30.
Ce devoir comporte 2 pages.
La qualité de la rédaction, la clarté des justifications sont des éléments pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 On définit une fonction f de la variable x en posant

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}.$$

1) a) Pour quels réels x a-t-on $x^2-x-2=0$.
   b) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ?
   c) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
2) a) Trouver des réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$x^2+2x-8 = (x-a)(x-b).$$

   b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a

$$f(x) = \frac{x+4}{x+1}.$$

   c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 2.
   d) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?
3) Quelle est la limite de f en $+\infty$? en $-\infty$?

Exercice 2 Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On définit une fonction de la variable réelle x par

$$f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

1) Pour quelles valeurs réelles x a-t-on $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$?
2) En déduire le domaine de définition de f.

3) Soit t un nombre réel non entier. On note $n = \lfloor t \rfloor$.

   a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]n, n+1[$.

   b) Montrer que pour tout $x \in]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$, on a $f(x) = x + \sqrt{x-n}$.

   c) En déduire que f est continue en t.

4) Soit n un entier relatif.

   a) Si $x \in [n, n+1/2[$, que vaut $f(x)$?

   b) Que vaut la limite à droite de f en n ?

   c) Si $x \in]n-1/2, n[$, que vaut $f(x)$?

   d) Que vaut la limite à gauche de f en n ?

   e) La fonction f est-elle continue en n ?

Exercice 3 Donner les domaines de définition et dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur fonction dérivée :

1) $f(x) = x\cos(x)$;
2) $g(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
3) $h(x) = \ln\sqrt{x}$;
4) $i(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;
5) $j(x) = \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.