Département de mathématiques et informatique
Licence 1 – 11MM22
Lundi 2 juin 2014, 9h

Examen final – 1re session – Corrigé

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
Durée : 2 heures. Ce texte comporte 6 pages.

La qualité de la rédaction, la clarté des justifications sont des éléments pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a)=f(b)$. Alors, il existe un réel c dans $[a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

2) a) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions

$$x \mapsto 4x, \quad x \mapsto 7x \quad \text{et} \quad x \mapsto 8x$$

aussi. Par composition de fonctions dérivables, les fonctions

$$x \mapsto \sin(4x), \quad x \mapsto \cos(7x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin(8x)$$

sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Enfin, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire de telles fonctions. On en déduit que F est dérivable sur $]0,2\pi[$. On en déduit aussi que F est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,2\pi]$.

b) On a

$$F(0) = \frac{1}{4}\sin(0) - \frac{2}{7}\cos(0) + \frac{1}{4}\sin(0) = -\frac{2}{7}$$

et

$$F(2\pi) = \frac{1}{4}\sin(8\pi) - \frac{2}{7}\cos(14\pi) + \frac{1}{4}\sin(16\pi) = -\frac{2}{7}.$$

Ainsi $F(0)=F(2\pi)$. Grâce au théorème de Rolle, on en déduit l'existence de $c \in]0,2\pi[$ tel que $F'(c)=0$. Or,

$$F'(c) = \frac{1}{4}\cdot 4\cos(4c) - \frac{2}{7}\cdot 7\,(-\sin(7c)) + \frac{1}{4}\cdot 8\cos(8c) = f(c).$$

On a donc $f(c)=0$.

3) a) Les fonctions f et $x \mapsto x - a$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $[]a, b[$. Par combinaison linéaire, il en est donc de même pour g.

b) On calcule $g(a) = f(a)$ et

$$g(b) = f(b) - (b-a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f(b) - f(b) + f(a) = f(a) = g(a).$$

Le théorème de Rolle permet donc d'affirmer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

c) Par ailleurs, en dérivant g, on trouve

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

donc

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

puis $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$.

Exercice 2 1) a) La fonction f, quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, est définie en tout réel où son dénominateur ne s'annule pas. Le discriminant du trinôme de second degré $x^2 + x + 1$ est $-3 < 0$. Cette quantité ne s'annule donc pas. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction f, quotient de deux polynômes, est dérivable en tout réel qui n'annule pas son dénominateur. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) En utilisant la règle de dérivation des quotients :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+x+1) - (x+2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x-4x-2}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

d) Les points critiques de f sont les réels x tels que $f'(x) = 0$, c'est-à-dire tels que $x^2 + 4x + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme de degré 2 est $\Delta = 12 = 2^2 \cdot 3$ donc les points critiques sont

$$x_0 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

et

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3}.$$

e) Les variations de f sont données par le signe de f'. Pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x^2+4x+1)$.

x	$-\infty$		x_0		x_1		$+\infty$
x^2+4x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f) Puisque f est décroissante sur $]-\infty, x_0[$ puis croissante sur $[x_0, x_1]$, la fonction admet un minimum local en x_0 et ce minimum local est

$$\frac{x_0+2}{x_0^2+x_0+1} = \frac{x_0+2}{(-4x_0-1)+x_0+1} = -\frac{x_0+2}{3x_0} = -\frac{\sqrt{3}}{3(2+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2\sqrt{3}+3}.$$

Puisque f est croissante sur $[x_0, x_1]$ puis décroissante sur $[x_1, +\infty[$, la fonction admet un maximum local en x_1 et ce maximum local est

$$\frac{x_1+2}{x_1^2+x_1+1} = \frac{x_1+2}{(-4x_1-1)+x_1+1} = -\frac{x_1+2}{3x_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3(-2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}-3}.$$

g) Puisque f est un quotient de polynômes, elle a même limite en $-\infty$ et en $-\infty$ que le quotient des termes de plus haut degré de ces polynômes, donc que $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. On a donc

$$\lim_{-\infty} f = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty} f = 0$$

h)

x	$-\infty$		x_0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}+3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{3}-3}$	$\searrow$	0

2) a) L'intersection du graphe de f avec l'axe des ordonnées est le point de f d'abscisse 0, c'est donc le point de coordonnées $(0, f(0))$, c'est-à-dire $(0, 2)$. Les points d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x, 0)$ où x vérifie $f(x) = 0$. On a $f(x) = 0$ si et seulement si $x + 2 = 0$ donc, il n'y a qu'un point d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses. Ce point a pour coordonnées $(-2, 0)$.

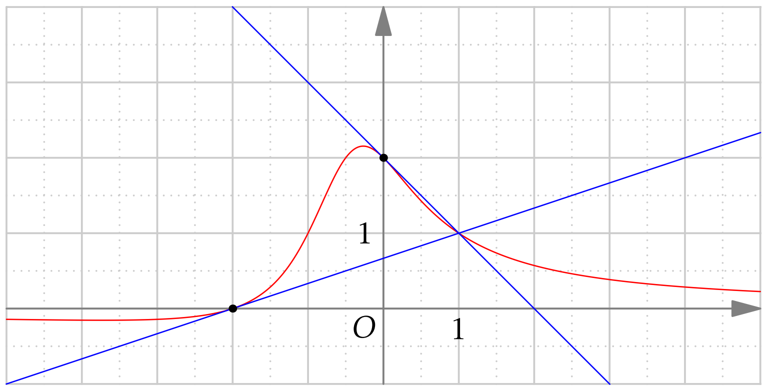

Figure 1 –

b) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse t est

$$y = f(t) + f'(t)(x - t).$$

Comme $f'(0) = -1$ et $f(0) = 2$, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x + 2$. Comme $f'(-2) = \frac{1}{3}$ et $f(-2) = 0$, la tangente au graphe de f au point d'abscisse -2 a pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

c) Le graphe est donné figure 1.

3) On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{e^x + 2}{e^{2x} + e^x + 1}.$$

a) Pour tout réel x, on a $g(x) = f(\exp(x))$. La fonction g est donc la composée de f est exp. Ces deux fonctions étant dérivables sur R, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = e^x f'(e^x).$$

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x > 0$ et donc $f'(e^x) < 0$ d'après le tableau de variations de f. On en déduit que $g'(x) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante.

b) Si $x \to +\infty$, alors $e^x \to +\infty$. Or f tend vers 0 en $+\infty$ donc g tend vers 0 en $+\infty$. Si $x \to -\infty$, alors $e^x \to 0$. Or f tend vers 2 en 0 donc g tend vers 2 en $-\infty$.

c) La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{+\infty} g, \lim_{-\infty} g[$, donc de $\mathbb{R}$ dans $]0, 2[$. Elle admet donc une fonction réciproque k de $]0, 2[$ dans $\mathbb{R}$.

d) La fonction g est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas (voir la question 3a). On en déduit que sa fonction réciproque k est dérivable et que

$$k'(x) = \frac{1}{g'(k(x))}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

e) La fonction k étant la fonction réciproque de g, elle a mêmes variations. La fonction k est donc strictement décroissante sur $]0,2[$.

4) a) On a $y = g(x)$ si et seulement si

$$y = \frac{e^x + 2}{e^{2x} + e^x + 1}.$$

Comme $e^{2x} + e^x + 1 \neq 0$, cette égalité équivaut à

$$y(e^{2x} + e^x + 1) = e^x + 2$$

qui se réécrit

$$ye^{2x} + (y-1)e^x + y - 2 = 0.$$

b) Les racines du trinôme de second degré $-3y^2 + 6y + 1$ sont $y_0 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $y_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. On a donc $-3y^2 + 6y + 1 > 0$ pour tout $y \in]y_0, y_1[$. Comme $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ alors $y_0 < 0$ et $y_1 > 2$ donc, pour tout $y \in]0,2[$, on a $-3y^2 + 6y + 1 > 0$.

c) Soit $y \in]0,2[$, résolvons l'équation d'inconnue X :

$$yX^2 + (y-1)X + y - 2 = 0.$$

Son discriminant est

$$\Delta = (y-1)^2 - 4y(y-2) = -3y^2 + 6y + 1.$$

Comme $y \in]0,2[$, la question 4b implique que $\Delta > 0$. Les racines du trinôme sont donc

$$\frac{1 - y - \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2y} \qquad \text{et} \qquad \frac{1 - y + \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2y}.$$

Le produit des racines est $\frac{y-2}{y} < 0$. Les deux racines sont donc de signe opposé. La plus petite est négative et la plus grande positive :

$$\frac{1 - y - \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2y} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1 - y + \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2y} > 0.$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,2[$. On a $y = g(x)$ si et seulement si

$$ye^{2x} + (y-1)e^x + y - 2 = 0.$$

Or, cette égalité est équivalente à

$$\begin{cases} X = e^x \\ yX^2 + (y-1)X + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Mais $e^x > 0$ et l'unique solution positive de $yX^2+(y-1)X+y-2=0$ est $\frac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}$. L'égalité $y = g(x)$ équivaut donc à

$$\begin{cases} X = e^x \\ X = \dfrac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}. \end{cases}$$

c'est-à-dire à

$$x = \ln\left(\frac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}\right).$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,2[$. On a $y = g(x)$ si et seulement si $x = k(y)$ d'une part et $y = g(x)$ si et seulement si $x = \ln\left(\frac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}\right)$ d'autre part. On en déduit

$$k(y) = \ln\left(\frac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}\right).$$