Département de mathématiques et informatique
Licence 1 – 11MM22
Lundi 2 juin 2014, 9h

Examen final – 1re session

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
Durée : 2 heures. Ce devoir comporte 2 pages.

La qualité de la rédaction, la clarté des justifications sont des éléments pris en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle.
2) On note F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{2}{7}\cos(7x) + \frac{1}{4}\sin(8x).$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(4x) + 2\sin(7x) + 2\cos(8x).$$

   a) Montrer que F est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
   b) Montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(c) = 0$.

3) Cette question est une question de cours : elle a pour objectif de déduire le théorème des valeurs intermédiaires du théorème de Rolle. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ (où $a < b$) et dérivable sur $]a, b[$. On définit une fonction g par

$$\forall x \in [a, b], \qquad g(x) = f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   a) Montrer que g est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
   b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
   c) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Exercice 2 On définit une fonction f de la variable réelle en posant

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

1) a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
   b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

d) Déterminer les points critiques de f.

e) Déterminer les variations de f.

f) Déterminer les extremums locaux de f.

g) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

h) Tracer le tableau de variations de f.

2) a) Calculer les intersections du graphe de f avec les axes de coordonnées.

b) Donner les équations des tangentes au graphe de f en les points d'abscisse 0 et -2.

c) Donner sommairement l'allure du graphe de f.

3) On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{e^x+2}{e^{2x}+e^x+1}.$$

a) Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Montrer que g admet une fonction réciproque que l'on note k et dont on précisera l'ensemble de définition.

d) Justifier que k est dérivable et exprimer sa dérivée k' en fonction de g' et k.

e) Donner les variations de k.

4) Les fonctions g et k, réciproques l'une de l'autre ont été définies à la question précédente.

a) Si x est réel et si $y \in]0,2[$, montrer que $y = g(x)$ si et seulement si

$$ye^{2x} + (y-1)e^x + y - 2 = 0.$$

b) Si $y \in]0,2[$, montrer que $-3y^2+6y+1 > 0$. (On pourra utiliser $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$).

c) Soit $y \in]0,2[$. Résoudre l'équation

$$yX^2 + (y-1)X + y - 2 = 0$$

d'inconnue X. Montrer que l'une des racines est positive et l'autre négative.

d) Montrer que pour tout $y \in]0,2[$, on a

$$k(y) = \ln\left(\frac{1-y+\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2y}\right).$$