

Table des matières

I	Les fonctions	3
1	La distance sur \mathbb{R}	3
1.1	Relation d'ordre, valeur absolue	3
1.2	Représentation graphique, distance	4
2	Quelques rappels sur les fonctions	5
2.1	Définitions et premières propriétés	5
3	Limites et continuité	11
3.1	Introduction	11
3.2	Limite finie	11
3.3	Propriétés et règles de calcul	12
3.4	Limite infinie	12
3.5	Le théorème des gendarmes	13
3.6	Limite à l'infini	14
3.7	Limites élémentaires et formes indéterminées	15
3.8	Continuité	16
4	Rappels sur les fonctions usuelles	19
4.1	Les fonctions puissances, premier épisode	19
4.2	La fonction logarithme	20
4.3	La fonction exponentielle	22
4.4	Retour sur les fonctions puissances	24
5	Comparaison de fonctions en un point ou en l'infini	26
5.1	Fonction négligeable, $f = o(g)$ en a	26
5.2	Fonctions équivalentes, $f \sim g$ en a	27
5.3	Exemple : comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme	27
II	Etude et approximation de fonctions	29
1	Dérivées	29
1.1	Introduction	29
1.2	Définition et propriétés	31
1.3	Approximation affine d'une fonction	33
2	Etudes de fonctions	34
2.1	Sens de variation et recherche d'extrema	34
2.2	Etude d'une fonction à l'infini	36
3	Développements limités	38
3.1	Définition et premières propriétés	38
3.2	Quelques DL classiques	40
3.3	Règles de calcul	41
3.4	Développements limités au voisinage de $x_0 \neq 0$ et en $+\infty$	42

3.5	Applications des DL	43
III Les fonctions de plusieurs variables		45
1	Géométrie dans \mathbb{R}^3	45
1.1	Triplets de \mathbb{R}^3 , points et vecteurs	45
1.2	Produit scalaire	47
1.3	Une spécificité de \mathbb{R}^3 : le produit vectoriel	48
1.4	Equation d'un plan dans \mathbb{R}^3	49
2	Fonctions de plusieurs variables	50
2.1	Dérivées partielles	50
2.2	Gradient	52
2.3	Surface représentative et courbes de niveau	52
IV Primitives et Équations Différentielles		57
1	Primitives	57
1.1	Généralités	57
1.2	Primitives de quelques fonctions usuelles	58
1.3	Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée	58
1.4	Primitivation par parties	59
2	Équations Différentielles Linéaires du Premier Ordre	61
2.1	Principe de résolution	61
2.2	Étape 1 : Résolution de l'équation homogène	61
2.3	Étape 2 : recherche d'une solution de l'équation complète	62
2.4	Étape 3 : Écriture de la forme générale des solutions	63
2.5	Conditions initiales	63
2.6	En résumé	64
2.7	Approfondissement	64
3	Équations Différentielles Linéaires Homogènes du Second Ordre	64
3.1	Résolution	65
V Intégrales		67
1	Définition de l'intégrale	67
2	Le théorème fondamental du calcul intégral	68
3	Les principales propriétés de l'intégrale	69
4	Deux autres techniques de calcul	70
4.1	Intégration par parties	70
4.2	Changements de variables	70
5	Quelques applications de l'intégration	71
5.1	Longueur d'une courbe	71
5.2	Calculs de surface	72
5.3	Calculs de volumes	72

Chapitre I

Les fonctions

1 La distance sur \mathbb{R}

Rappelons que dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , on trouve en particulier

- le sous-ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, formé à partir de 0 et 1 et l'addition ;
- le sous-ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, contenant les nombres entiers naturels et leurs opposés : \mathbb{Z} est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de 0, 1 et des deux opérations addition et soustraction ;
- le sous-ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels, contenant les nombres réels pouvant s'écrire sous la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ où q est non nul : \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir de 0, 1 et des quatre opérations addition, soustraction, multiplication et division.

L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} contient \mathbb{Q} (donc aussi \mathbb{Z} et \mathbb{N}), mais attention ! \mathbb{R} ne se réduit pas à \mathbb{Q} : il y a beaucoup (vraiment beaucoup) de nombres réels qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}, \pi, e$ par exemple).

1.1 Relation d'ordre, valeur absolue

Il existe sur \mathbb{R} une relation d'ordre : étant donnés deux réels x et y on sait que $x \leq y$ ou $y \leq x$. En particulier on notera \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 0 et \mathbb{R}^- l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 0. Rappelons les propriétés suivantes :

1.1.1 Propriétés. Soit a, b et c trois réels.

$$\begin{array}{lll} a \leq b & \text{si et seulement si} & a + c \leq b + c. \\ a \leq b & \text{si et seulement si} & -b \leq -a. \\ a \leq b \text{ et } 0 \leq c & \text{implique} & a.c \leq b.c. \end{array}$$

1.1.2 Définition. La *valeur absolue* du réel x vaut $|x| = x$ si x est positif, c'est-à-dire si x est dans \mathbb{R}^+ , et $|x| = -x$ si x est négatif donc dans \mathbb{R}^- .

À titre d'exercice on pourra démontrer les propriétés suivantes

1.1.3 Propriétés. Soit x et y deux nombres réels on a :

$$\begin{array}{l} |x| = |-x| \geq 0 ; \\ |x| = 0 \iff x = 0 ; \\ ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|. \end{array}$$

1.2 Représentation graphique, distance

On représente graphiquement \mathbb{R} à l'aide d'une droite horizontale sur laquelle on dessine une flèche pointant vers la droite, dont l'origine est notée 0 et l'extrémité 1. La longueur de cette flèche est l'échelle de la représentation. Un réel x peut alors être représenté de deux façons :

- (i) sous la forme d'un point de la droite : x est le point situé à une longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée) du point 0, à droite si $x > 0$, et à gauche si $x < 0$;
- (ii) sous la forme d'une flèche horizontale (appelée aussi un vecteur) de longueur $|x|$ (pour l'échelle fixée), pointant vers la droite si $x > 0$, et vers la gauche si $x < 0$.

Les deux représentations sont bien sûr liées : le "point" x (1ère représentation) est l'extrémité de la "flèche" x (2ème représentation) dont l'origine est positionnée en 0. Inversement, la "flèche" x est celle allant du point 0 vers le "point" x .

La deuxième représentation, moins standard, est fort utile, car la flèche représentant un réel x peut glisser le long de la droite réelle : le réel 1 est tout aussi bien représenté par la flèche d'origine le point 0 et d'extrémité le point 1 que par la flèche d'origine le point 7 et d'extrémité le point 8.

Pour représenter l'addition ou la soustraction dans \mathbb{R} , la représentation par les flèches est la plus adaptée : le réel $x + y$ est donné comme la composée de la flèche x et de la flèche y , c'est-à-dire la flèche obtenue en plaçant l'origine de la flèche y sur l'extrémité de la flèche x .

Pour représenter graphiquement la multiplication par un réel λ , c'est plus simple : par rapport à la flèche représentant x , celle représentant λx a même direction si $\lambda > 0$, direction opposée sinon, et sa longueur est multipliée par $|\lambda|$.

On peut alors définir une distance sur \mathbb{R} : la *distance entre x et y dans \mathbb{R}* est donnée par la longueur de la flèche d'origine le point x et d'extrémité le point y , ou, ce qui revient au même, comme la longueur de la flèche représentant $x - y$: cette distance vaut $|x - y|$, on la note parfois $d(x, y)$. Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

- $d(y, x) = d(x, y)$;
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

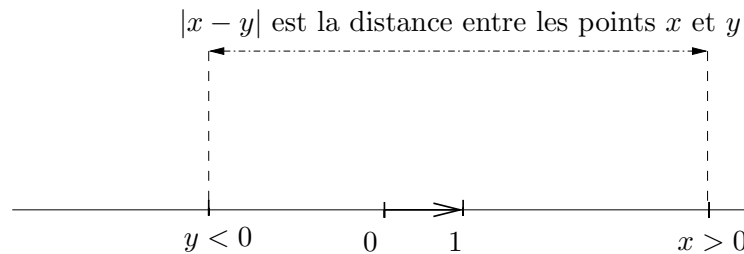


Figure 1.

Un réel $x > 0$ et un réel $y < 0$ dans la représentation graphique usuelle de l'ensemble des réels.

”Propriété vraie localement”, ”Propriété vraie au voisinage de ”

L'idée de distance que l'on vient d'introduire joue un rôle crucial dans l'étude des applications de \mathbb{R} dans lui-même. Elle conduit à introduire un vocabulaire et des notions très pratiques, notamment pour parler de limites (ce que nous allons faire dans les chapitres suivants).

1.2.1 Définition. Soit \mathcal{P} une propriété concernant les réels. On dira que \mathcal{P} est vraie localement en x , ou encore au voisinage de x , si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment proches de x .

Autrement dit, s'il est possible de trouver un réel $r > 0$ telle que \mathcal{P} soit vérifiée pour tous les éléments de l'intervalle $]x - r, x + r[$.

1.2.2 Exemple. Soit f la fonction définie par $x \mapsto x^2 - 100x^4$, et \mathcal{P} la propriété : “ $f(x)$ est positif”. Le calcul montre que si $|x| < 1/10$, alors \mathcal{P} est vraie. Si on est juste intéressé par le fait que \mathcal{P} est vraie pour 0 et pour les valeurs de x suffisamment proches de 0, on peut dire : \mathcal{P} est vraie au voisinage de 0.

De la même manière on introduit une expression pour parler des propriétés vraies pour les réels “près de l’infini”. Voici par exemple le cas de $+\infty$: on ne s’intéresse alors qu’aux réels suffisamment grands. Le cas de $-\infty$ est similaire.

1.2.3 Définition. Soit \mathcal{P} une propriété concernant les réels. On dira d’une propriété \mathcal{P} qu’elle est vraie *au voisinage* de $+\infty$, si elle est vérifiée par tous les réels suffisamment grands.

Autrement dit s’il est possible de trouver $M > 0$ tel que \mathcal{P} soit vérifiée sur l’intervalle $]M, +\infty[$.

Ce vocabulaire sera très pratique par la suite car en simplifiant les phrases, il permet d’énoncer les résultats avec un maximum de clarté.

2 Quelques rappels sur les fonctions

2.1 Définitions et premières propriétés

On donne dans ce paragraphe un bref aperçu des notions (supposées connues et en tout cas) à connaître sur les fonctions d’une variable réelle.

2.1.1 Définition. Une **fonction** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une relation qui à tout réel $x \in \mathbb{R}$ associe *au plus* un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. L’ensemble \mathcal{D}_f des éléments $x \in \mathbb{R}$ tels qu’il existe $f(x) \in \mathbb{R}$ est appelé l’**ensemble de définition** de f .

Le **graphe** de f est l’ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ (x sur l’axe horizontal des abscisses, $f(x)$ sur l’axe vertical des ordonnées).

2.1.2 Remarque. (i) Si f est un polynôme, c’est-à-dire si $f(x)$ s’écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

pour un certain entier $n \geq 0$, alors l’ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(ii) Si $f(x)$ s’écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m},$$

c’est-à-dire si f est le quotient de deux polynômes (on dit dans ce cas que f est une *fraction rationnelle*), alors le domaine de définition \mathcal{D}_f de f est $\{x \in \mathbb{R} ; Q(x) \neq 0\}$, c’est-à-dire tous les réels sauf ceux pour lesquels le dénominateur s’annule.

2.1.3 Exemple. Soit f la fonction $x \longmapsto \frac{x-1}{x(x+2)}$. Son ensemble de définition \mathcal{D}_f est $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, et son graphe a l’allure suivante :

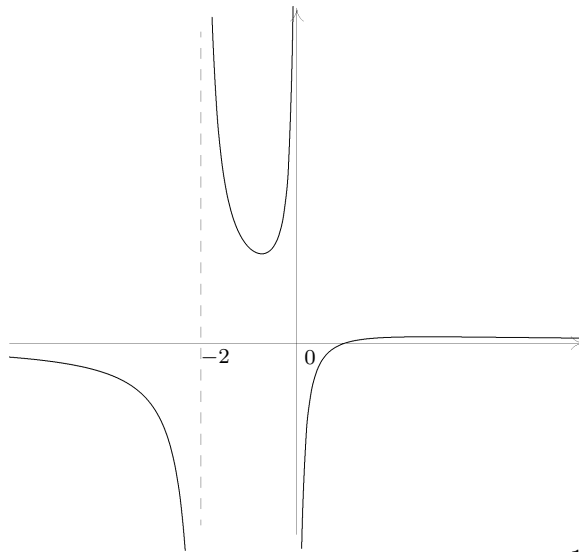


Figure 2. Graphe de la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x(x+2)}$

2.1.4 Définition. On définit la somme $f + g$ et le produit fg de deux fonctions f et g par les formules naturelles $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2.1.5 Définition. (i) On dit que f est **paire** si pour tout x appartenant à \mathcal{D}_f , $-x$ appartient aussi à \mathcal{D}_f et si de plus on a l'égalité $f(-x) = f(x)$.

Traduction sur le graphe : une fonction f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) On dit que f est **impaire** si pour tout x appartenant à \mathcal{D}_f , $-x$ appartient aussi à \mathcal{D}_f et si de plus on a l'égalité $f(-x) = -f(x)$.

Traduction sur le graphe : une fonction f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

(iii) Une fonction f est **périodique** de période T si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et si de plus on a l'égalité $f(x + T) = f(x)$.

Traduction sur le graphe : une fonction f est périodique de période T si et seulement si deux bandes verticales de largeur T consécutives sont identiques.

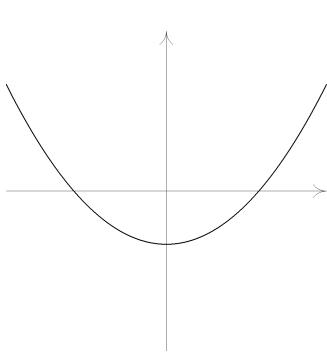


Figure 3. Fonction paire

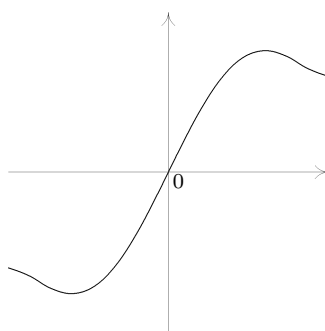


Figure 4. Fonction impaire

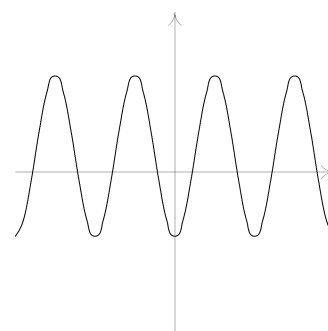


Figure 5. Fonction paire et périodique

2.1.6 Remarque. Si une fonction f définie sur \mathbb{R} est périodique de période T , il suffit de connaître son graphe sur $[0, T]$, ou sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On l'étend à \mathbb{R} par périodicité. Si de plus f est paire (ou impaire), il suffit de connaître son graphe sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$: par parité (ou imparité) on l'obtient sur $[-\frac{T}{2}, 0]$, et par périodicité on l'a sur \mathbb{R} tout entier.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et soit I un sous-ensemble non vide inclus dans \mathcal{D}_f (en général, I sera un intervalle).

- 2.1.7 Définition.** (i) On dit que f est **croissante** sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \geq f(y)$.
- (ii) On dit que f est **décroissante** sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \leq f(y)$.
- (iii) On dit que f est **strictement croissante** sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) > f(y)$.
- (iv) On dit que f est **strictement décroissante** sur I si pour tous x, y appartenant à I tels que $x > y$ on a $f(x) < f(y)$.

Ces propriétés se lisent facilement sur le graphe de f .

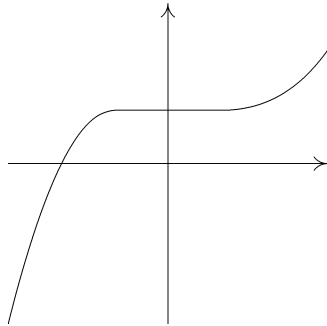


Figure 6. Fonction croissante

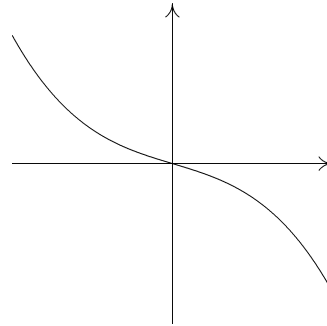


Figure 7. Fonction strictement décroissante

Enfin, on rappelle les définitions suivantes :

- 2.1.8 Définition.** (i) On dit que f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout x appartenant à I , on a $f(x) \leq M$. Dans ce cas, on dit que f est majorée par M sur I .

Traduction sur le graphe : f est majorée sur I si le graphe de f sur I se situe en dessous d'une droite horizontale (d'équation $y = M$).

- (ii) On dit que f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que pour tout x appartenant à I on a $f(x) \geq m$. Dans ce cas, on dit que f est minorée par m sur I .

Traduction sur le graphe : f est minorée sur I si le graphe de f sur I se situe au dessus d'une droite horizontale (d'équation $y = m$).

- (iii) On dit que f est **bornée** sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I .

Traduction sur le graphe : f est bornée sur I si le graphe de f sur I se situe entre deux droites horizontales.

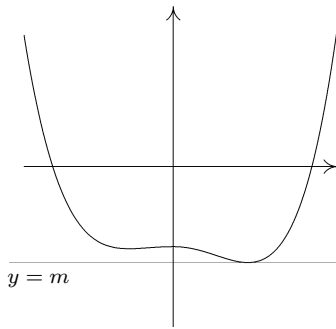


Figure 8. Fonction non majorée et minorée par m

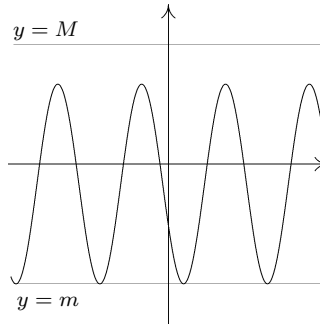


Figure 9. Fonction bornée (majorée par M , minorée par m)

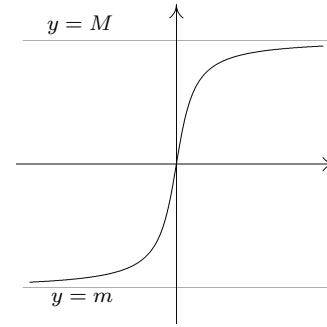


Figure 10. Fonction bornée (majorée par M , minorée par m)

Ces définitions nous permettent d'introduire les notions suivantes :

2.1.9 Définition. (i) On dit qu'un point x_0 est un **maximum local** de f si f est majorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0 .

Traduction sur le graphe : Concrètement, x_0 est un maximum local de f si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs inférieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0 . Donc cela signifie que sur une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe en dessous de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.

(ii) On dit qu'un point x_0 est un **minimum local** de f si f est minorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0 .

Traduction sur le graphe : Concrètement, x_0 est un minimum local de f si au voisinage de x_0 la fonction f prend des valeurs supérieures ou égales à celle qu'elle prend en x_0 . Donc cela signifie que sur une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$ le graphe de f se situe au dessus de la droite horizontale d'équation $y = f(x_0)$.

(iii) On dit qu'un point x_0 est un **extremum local** de f si x_0 est soit un maximum local de f , soit un minimum local de f .

Traduction sur le graphe : x_0 est un extremum local de f si dans une bande verticale contenant la droite verticale d'équation $x = x_0$, la droite d'équation $y = f(x_0)$ est soit au dessus, soit en dessous du graphe de f .

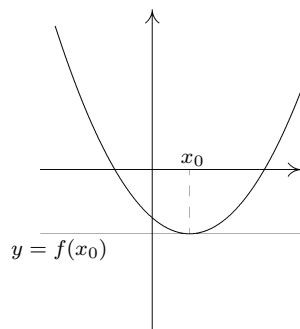


Figure 11. x_0 minimum local de f

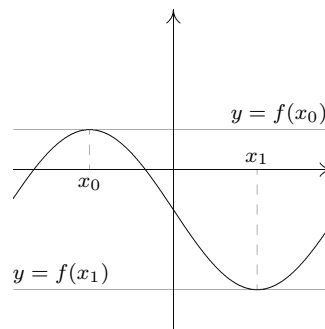


Figure 12. x_0 et x_1 sont des extrema locaux de f

2.1.10 Remarque. ATTENTION : x_0 est un maximum (ou un minimum) local de f si AU VOISINAGE de x_0 il prend la valeur la plus grande (ou la plus petite) prise par f . MAIS ce n'est pas forcément la plus grande valeur prise par f sur \mathbb{R} : par exemple, considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$, dont le graphe a l'allure suivante :

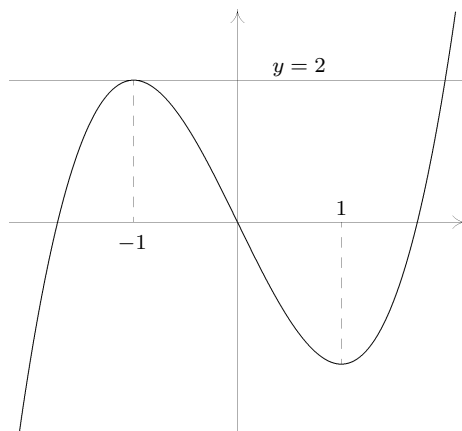


Figure 13. Graphe de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x$

Le point -1 est un maximum local, le point 1 est un minimum local, car dans un voisinage de -1 la fonction f est majorée par $f(-1) = 2$, mais ce n'est pas la plus grande valeur prise par f sur \mathbb{R} : par exemple, on a $f(3) = 18 > f(-1)$.

2.1.11 Exemples. (i) La fonction sin est impaire, périodique de période 2π , bornée sur \mathbb{R} (majorée par 1 et minorée par -1), croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Le point $\frac{\pi}{2}$ est un maximum local de sin, le point $-\frac{\pi}{2}$ est un minimum local de sin.

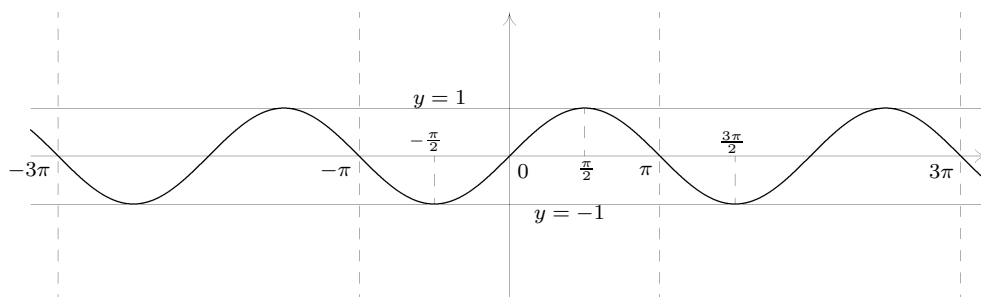


Figure 14. Graphe de la fonction $x \mapsto \sin x$

(ii) La fonction cos est paire, périodique de période 2π , bornée sur \mathbb{R} (majorée par 1 et minorée par -1), décroissante sur $[0, \pi]$, croissante sur $[\pi, 2\pi]$.

Le point 0 est un maximum local de cos, le point π est un minimum local de cos.

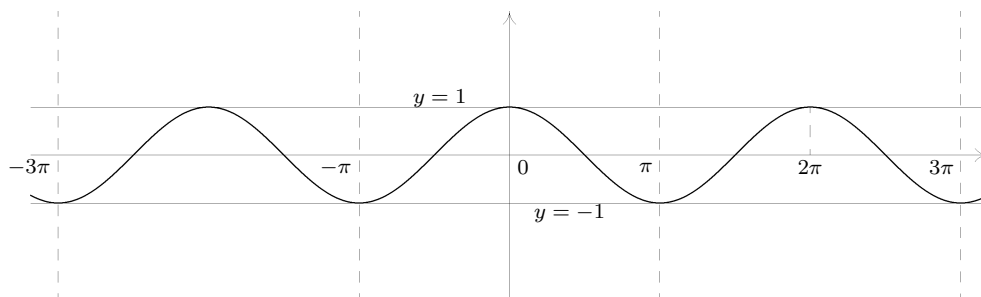


Figure 15. Graphe de la fonction $x \mapsto \cos x$

(iii) La fonction tan a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est périodique de période π , impaire, croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle n'est ni majorée ni minorée, et n'a pas d'extremum local.

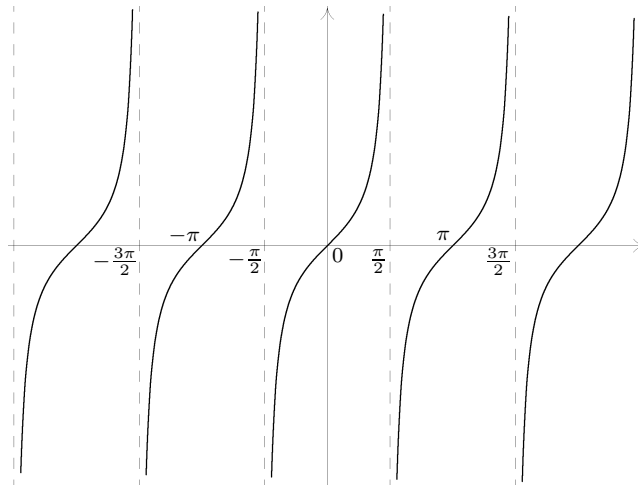


Figure 16. Graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$

On rappelle désormais la définition et quelques propriétés de la composition de fonctions.

2.1.12 Définition. Soit f et g deux fonctions. Soit I un sous-ensemble de \mathcal{D}_f . On suppose que pour tout élément x de I , $f(x)$ appartient à \mathcal{D}_g . On appelle **composée** de f et g , et on note $g \circ f$, la fonction définie sur I par $x \mapsto g(f(x))$.

2.1.13 Remarques. (i) La fonction $g \circ f$ est bien définie car on a supposé que si x appartient à I , $f(x)$ appartient à \mathcal{D}_g . Cette condition est bien entendu indispensable à vérifier.

(ii) ATTENTION : On n'a pas $g \circ f = f \circ g$. D'ailleurs, si l'une de ces deux fonctions est bien définie, l'autre ne l'est pas forcément... Par exemple, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = \cos x - 2$ et $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \sqrt{x}$, la fonction $g \circ f$ est définie sur $[0, +\infty[$ par $g \circ f(x) = \cos(\sqrt{x}) - 2$, alors que $f \circ g$ n'est définie nulle part !

(iii) ATTENTION ! Ne pas confondre les deux fonctions $fg (= f \times g)$ et $f \circ g$!!!

2.1.14 Exemples. (i) Ainsi, si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on note $\frac{1}{f}$ la composée de f avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est définie pour $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \neq 0$.

(ii) Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on note $|f|$ la composée de f avec la fonction $x \mapsto |x|$. Son domaine de définition est \mathcal{D}_f , et elle ne prend que des valeurs positives.

On rappelle les propriétés suivantes (qui se démontrent aisément en revenant aux définitions, c'est d'ailleurs un exercice conseillé) :

2.1.15 Proposition. Soit f et g deux fonctions, I un sous-ensemble de \mathcal{D}_f , et J un sous-ensemble de \mathcal{D}_g tels que pour tout élément $x \in I$, $f(x) \in J$.

(i) Si f est périodique de période T , alors $g \circ f$ est périodique de période T .

(ii) Si f est croissante sur I et si g est croissante sur J (ou bien si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur J) alors $g \circ f$ est croissante sur I .

(iii) Si f est croissante sur I et si g est décroissante sur J (ou bien si f est décroissante sur I et si g est croissante sur J) alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

3 Limites et continuité

3.1 Introduction

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Que se passe-t-il lorsque l'on s'approche de 0 ?

Dans le tableau ci-dessous sont données quelques valeurs approchées de $f(x)$ pour x proche de 0.

x	-1	-0,1	-0,01	0,01	0,1	1
$f(x)$	0,459698	0,499583	0,499996	0,499996	0,499583	0,459698

Plus x s'approche de 0 plus $f(x)$ semble s'approcher de $\frac{1}{2}$. Ceci peut aussi se voir sur le graphe de f .

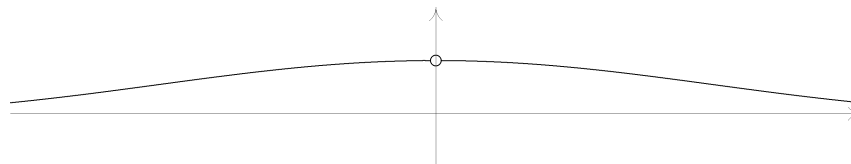


Figure 17. Graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$. La fonction n'est pas définie en 0 mais y possède une limite.

C'est ce phénomène que l'on souhaite étudier lorsque l'on parle de *limite*. Comment formaliser cette idée que $f(x)$ “s'approche de $\frac{1}{2}$ lorsque x s'approche de 0” ?

Notations :

Pour simplifier la discussion on rappelle la notation suivante (voir la définition 1.2.1) : on dit qu'une fonction est définie *au voisinage d'un point* x_0 si elle est définie sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 . Dans la suite, on parlera souvent de “fonction définie au voisinage de x_0 , *sauf peut-être* en x_0 ”. Cela désignera donc une fonction f définie sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$, mais qui peut ne pas être définie au point x_0 .

Cette notion simplifiera les énoncés. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est définie au voisinage de 0 sauf en 0.

3.2 Limite finie

3.2.1 Définition. Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel a , sauf peut-être en a , et une constante $L \in \mathbb{R}$. On dit que f *admet* L *comme limite en* a , s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de a .

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $r > 0$, tel que pour tout point $x \neq a$ tel que $|x - a| = \text{dist}(x, a) < r$ on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a - r, a + r[$ différent de a , on ait $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

3.2.2 Remarques. – Dans cette définition seules les valeurs très petites de ε ont un intérêt.

- On définit de manière similaire la notion de *limite à gauche* et de *limite à droite* d'une fonction f en a : par exemple, f admet L comme *limite à gauche* en a s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment proche de a tout en étant inférieur à a . Autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a - r, a[$ on ait $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Si f admet L comme limite en a , alors f admet L comme limite à gauche en a et comme limite à droite en a . Mais ATTENTION : une fonction peut admettre une limite à gauche L_1 en a et une limite à droite L_2 en a sans admettre de limite en a si $L_1 \neq L_2$: par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ admet -1 comme limite à gauche en 0 , admet 1 comme limite à droite en 0 mais n'a pas de limite en 0 . Autre exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 , mais elle a $-\infty$ comme limite à gauche et $+\infty$ comme limite à droite (voir plus loin pour la définition d'une limite infinie).

3.3 Propriétés et règles de calcul

Une première propriété, qui peut sembler évidente, mais qui est très importante est la suivante :

3.3.1 Propriété. *Si elle existe la limite d'une fonction en un point est unique.*

Utiliser la définition de la limite peut être très vite fastidieux. Dans la majorité des cas on s'en tirera heureusement à l'aide des règles de calcul ci-dessous et de quelques limites de référence.

3.3.2 Propriétés. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que f et g admettent en a une limite finie.*

$$(i) \text{ La fonction } f+g \text{ admet une limite finie en } a, \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(ii) \text{ La fonction } f.g \text{ admet une limite finie en } a, \lim_{x \rightarrow a} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x). \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(iii) *Si de plus g vérifie $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite finie en a et*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

La dernière règle de calcul que nous évoquons concerne la composition.

3.3.3 Propriété. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a sauf peut-être en a , et g une fonction définie au voisinage d'un réel b sauf peut-être en b . On suppose que $f(x)$ est différent de b au voisinage de a , sauf peut-être en a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en a , et $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.*

3.4 Limite infinie

On peut aussi considérer des fonctions telle que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et s'interroger sur leur comportement au voisinage de 0 . À l'aide d'une calculatrice on constate que cette fonction prend des valeurs de plus en plus grandes à mesure que x s'approche de 0 . Cet exemple rentre dans le cadre donné dans la définition suivante :

3.4.1 Définition. Soit une fonction f définie au voisinage de a , sauf peut-être en a . On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a , s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut pour tout choix de x suffisamment proche de a .

Autrement dit, si aussi grand que soit $M > 0$, il est possible de trouver $r > 0$, tel que pour tout point x tel que $|x - a| = \text{dist}(x, a) < r$ on ait $f(x) > M$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]a - r, a + r[$ on ait $f(x) \in]M, +\infty[$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On a une définition similaire pour évoquer le fait que la limite en a est $-\infty$.

Les règles de calcul sont différentes lorsque l'on traite de limites infinies.

3.4.2 Propriétés. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que f admet en a une limite finie et que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

$$(ii) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty & \text{si } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty & \text{si } L < 0. \end{cases}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3.5 Le théorème des gendarmes

Le théorème qui suit offre aussi un moyen efficace pour obtenir certaines limites. Son énoncé fait intervenir L qui désigne un nombre réel ou un des symboles $-\infty, +\infty$.

3.5.1 Théorème. Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a , et que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Alors g admet une limite en a et on a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Illustrons l'utilisation qui peut être faite de ce résultat en considérant la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour tout réel y on a $-1 \leq \cos(y) \leq 1$ et donc pour tout réel $x \neq 0$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

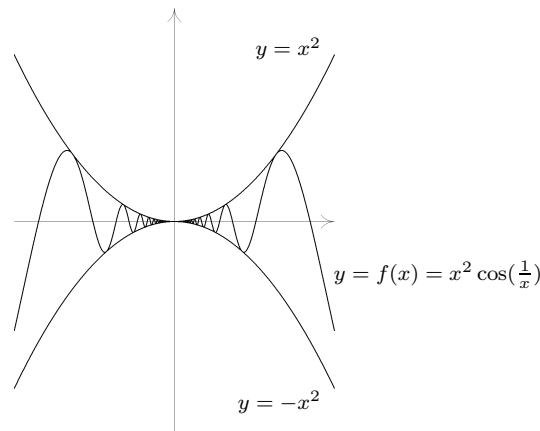


Figure 18. La fonction $f(x)$ a pour limite 0 en 0.

3.6 Limite à l'infini

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x-1}$. Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et on peut s'interroger sur son comportement lorsque x devient de plus en plus grand, lorsqu'il "s'approche de l'infini". Voici les valeurs obtenues pour $f(x)$, en se limitant à trois chiffres après la virgule, pour des valeurs croissantes de la variable x :

x	1	10	100	1000
$f(x)$	4	0,684	0,518	0,502

Les valeurs prises par la fonction s'approchent de $\frac{1}{2}$, ce que l'on peut aussi voir sur le graphe de la fonction. C'est ce phénomène que nous souhaitons formaliser.

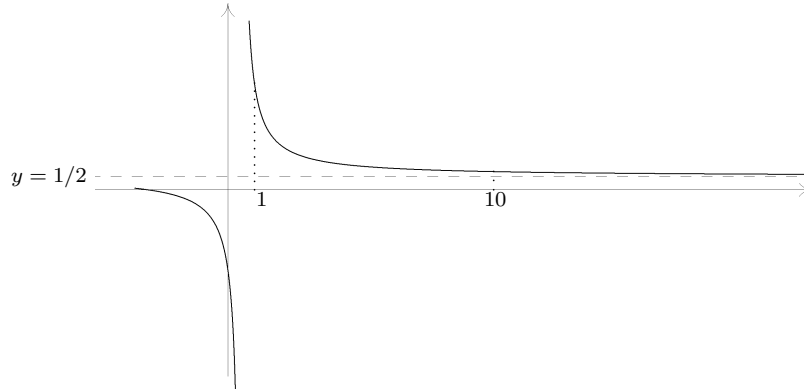


Figure 19. Graphe de la fonction $x \mapsto \frac{x+3}{2x-1}$.

Rappelons (voir définition 1.2.3) qu'une fonction est définie *au voisinage de $+\infty$* si elle est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$.

3.6.1 Définition. Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f *admet L comme limite en $+\infty$* , s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de L en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.

Autrement dit, si aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout point x tel que $x > M$ on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Il y a une définition analogue pour une limite infinie en $+\infty$:

3.6.2 Définition. Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f *admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$* , s'il est possible de rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut en imposant simplement à x d'être suffisamment grand.

Autrement dit, si aussi grand que soit $N > 0$, il est possible de trouver $M > 0$, tel que pour tout point x tel que $x > M$ on ait $f(x) > N$.

Ce qui de manière synthétique peut enfin s'écrire : pour tout $N > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]M, +\infty[$ on ait $f(x) \in]N, +\infty[$.

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.7 Limites élémentaires et formes indéterminées

On montre de façon élémentaire les limites bien connues suivantes :

- pour toute fonction polynômiale $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ on a pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$
- Si Q est une autre fonction polynômiale et si $a \in \mathbb{R}$ est tel que $Q(a) \neq 0$ alors :
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.

On termine ce paragraphe en rappelant ce qui est communément appelé les "formes indéterminées". Ce sont les cas de figures pour lesquels il n'existe pas de règles de calcul générales et qui nécessitent donc une étude au cas par cas.

Formes indéterminées

Dans le tableau ci-dessous f et g sont deux fonctions et a désigne ou bien un nombre réel ou encore les symboles $-\infty$ ou $+\infty$.

Hypothèse sur f	Hypothèse sur g	Forme indéterminée
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \text{?????}$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{?????}$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = \text{?????}$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{?????}$

Nous insistons sur le fait que ces formes sont indéterminées dans la mesure où **tous les cas de figure sont possibles** : il peut ne pas y avoir de limite, il se peut aussi qu'elle existe et soit finie, ou encore infinie.

On termine ce paragraphe en donnant la liste des limites possibles à l'infini d'une fraction rationnelle. Ainsi, soit $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $Q : x \mapsto b_0 + b_1x + \dots + b_px^p$

deux polynômes, on suppose $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. On a alors

	hypothèses sur P et Q
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$	si $n < p$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_p}$	si $n = p$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$	si $n > p$, le signe dépendant de celui de $\frac{a_n}{b_p}$ et de la parité de $(n - p)$.

En fait ces limites à l'infini s'obtiennent en ne considérant dans P et Q que les termes de plus haut degré, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \frac{a_n}{b_p} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-p}.$$

3.8 Continuité

Définition

La notion de continuité peut s'introduire de façon imagée en disant qu'une fonction f est continue sur l'intervalle I si son graphe sur cet intervalle n'a pas de coupure.

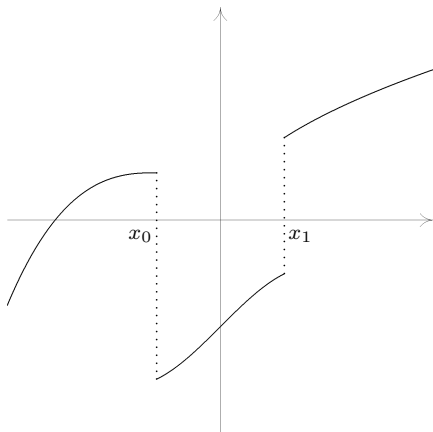


Figure 20. Graphe d'une fonction qui n'est continue ni en x_0 , ni en x_1 .

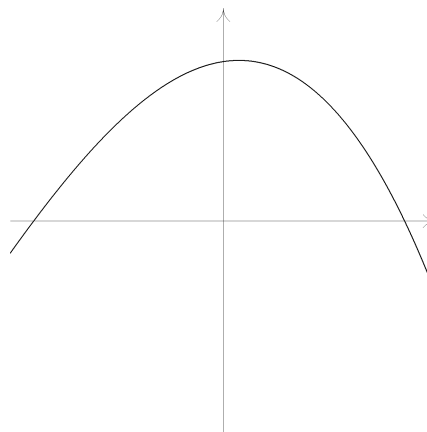


Figure 21. Graphe d'une fonction continue.

La formulation précise de cette idée naïve est la suivante.

3.8.1 Définition. Soit f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est continue en a si elle admet une limite en ce point égale à $f(a)$.

3.8.2 Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est continue sur I si elle est continue en chaque point de I .

La notion de continuité s'appuyant sur celle de limite, elle en hérite des propriétés. Ainsi

3.8.3 Propriétés. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Alors

- (i) La fonction $f + g$ est continue sur I ;
- (ii) la fonction fg est continue sur I ;
- (iii) si $f(a) \neq 0$ pour tout point a de I , la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Enfin la composée de deux fonctions continues est continue, c'est-à-dire que l'on a :

3.8.4 Propriété. Soit I_1 et I_2 deux intervalles de \mathbb{R} et soit $f : I_1 \rightarrow I_2$ et $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur I_1 et si g est continue sur I_2 alors $g \circ f$ est continue sur I_1 .

Théorème des valeurs intermédiaires

Les fonctions issues de l'observation de phénomènes naturels sont pour la plupart continues. En particulier toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Une propriété importante tirée de la continuité est le "théorème des valeurs intermédiaires" :

3.8.5 Théorème. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si λ est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et tel que $\lambda \neq f(a)$ et $\lambda \neq f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Pour illustrer l'utilisation qui peut être faite d'un tel résultat, considérons la fonction $f : x \mapsto x \cos(x) - 3$. On a $f(0) = -3$ et $f(-\pi) = \pi - 3 > 0$. Ainsi, comme la fonction f est continue sur $[-\pi, 0]$, il existe $x_0 \in]-\pi, 0[$ tel que $f(x_0) = 0$. C'est-à-dire qu'on peut assurer l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ solution de l'équation : $x \cos x = 3$.

On donne une propriété importante, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires :

3.8.6 Proposition. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

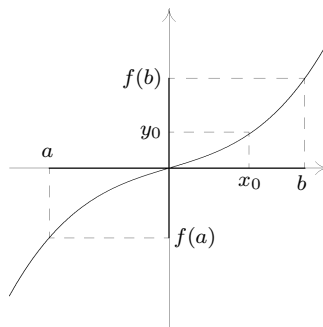


Figure 22. Fonction continue et strictement croissante de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$: pour tout $y_0 \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

3.8.7 Remarque. La propriété précédente s'applique aussi au cas des fonctions continues et strictement décroissantes : si f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, alors pour tout $y \in [f(b), f(a)]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

- 3.8.8 Exemple.** (i) La fonction \tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on a sur cet intervalle $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = y$.
- (ii) La fonction $x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $0^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Donc pour tout $y \in [0, +\infty[$, il existe un unique $x \in [0, +\infty[$ tel que $x^2 = y$. ATTENTION!!! Cela n'est vrai que pour $x \geq 0$, et pas pour $x \in \mathbb{R}$ (car par exemple 1 et -1 ont la même image par cette fonction).

Cette propriété nous montre que si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, le procédé $x \mapsto f(x)$ qui à $x \in [a, b]$ associe $f(x)$ est réversible : on peut construire un “procédé réciproque”, $y = f(x) \mapsto x$ qui à tout $y \in [f(a), f(b)]$ va associer l'unique élément x tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

3.8.9 Définition. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$. On appelle **fonction réciproque** de f la fonction $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ qui à y dans $[f(a), f(b)]$ associe l'unique élément x de $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Traduction sur le graphe : le graphe de la fonction g est obtenu en faisant la symétrie du graphe de f par rapport à la première diagonale (d'équation $y = x$).

3.8.10 Remarque. On définit de même la fonction réciproque de f si f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$: c'est la fonction $g : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$ qui à y dans $[f(b), f(a)]$ associe l'unique x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.

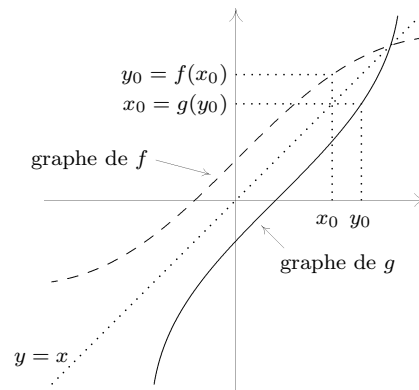


Figure 23. Graphe d'une fonction f continue et strictement croissante et de sa fonction réciproque g

3.8.11 Exemples. On reprend certains des exemples précédents :

La fonction réciproque de la fonction continue et strictement croissante $x \mapsto x^2$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

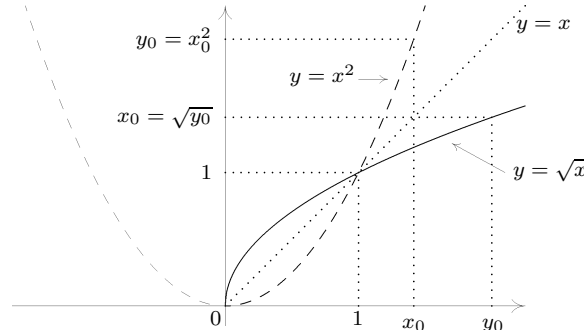


Figure 24. Graphe des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction réciproque de la fonction continue et strictement croissante \tan de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} est appelée la fonction $\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

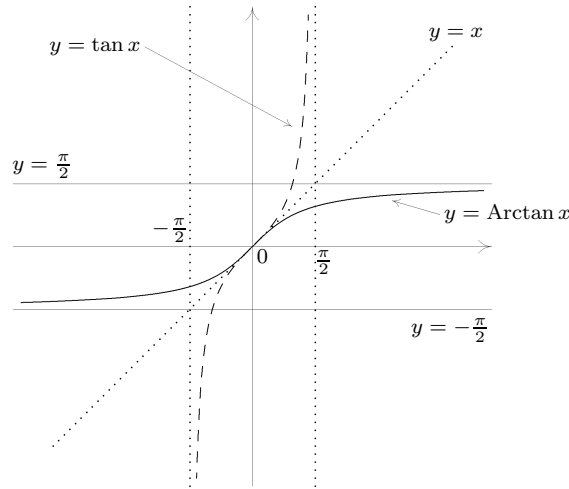


Figure 25. Graphe de \tan (sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) et de Arctan

3.8.12 Proposition. Si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors sa fonction réciproque g est strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$.

De même, si f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, alors sa fonction réciproque g est strictement décroissante sur $[f(b), f(a)]$.

3.8.13 Proposition. Si f est une fonction continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur $[a, b]$, et si g est sa fonction réciproque, alors la fonction $g \circ f$ définie sur $[a, b]$ est donnée par $g \circ f(x) = x$, et de même la fonction $f \circ g$ définie sur $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) est donnée par $f \circ g(x) = x$.

4 Rappels sur les fonctions usuelles

4.1 Les fonctions puissances, premier épisode

Si n est un entier strictement positif, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

4.1.1 Définition. (i) Si n est un entier strictement positif, on définit $x \mapsto x^{-n}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. C'est une fonction strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

(ii) Si $n = 0$, par définition la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.

(iii) Si n est un entier strictement positif, on définit $x \mapsto x^{1/n}$ de $]0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ comme la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ (qui est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$). C'est une fonction continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(iv) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, α s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q entier strictement positif et p un entier tel que p et q n'ont pas de diviseur commun. On définit la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par $x^\alpha = (x^{1/q})^p = (x^p)^{1/q}$, c'est-à-dire la composée des fonctions $x \mapsto x^{1/q}$ et $x \mapsto x^p$.

4.1.2 Remarques. (i) ATTENTION : Ne pas confondre les fonctions $x \mapsto x^{-n}$ et $x \mapsto x^{1/n}$. Par exemple, pour $n = 2$, on a $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* et $x^{1/2} = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

- (ii) On verra plus loin qu'il y a une définition naturelle, à l'aide de la fonction exponentielle, des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ pour α réel non nécessairement rationnel.

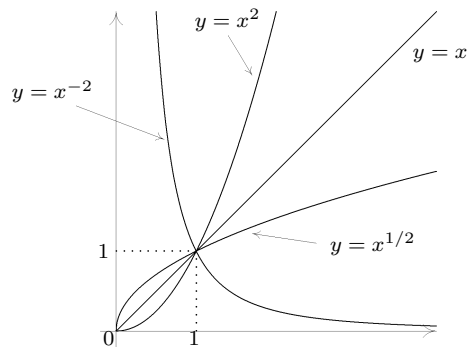


Figure 26. Graphe de quelques fonctions puissances

4.2 La fonction logarithme

On donne ici un simple aperçu de la fonction \ln et de ses premières propriétés.

Rappel :

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est définie sur $]0, +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante sur cet intervalle, s'annule en 1, et vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Son graphe a l'allure suivante :

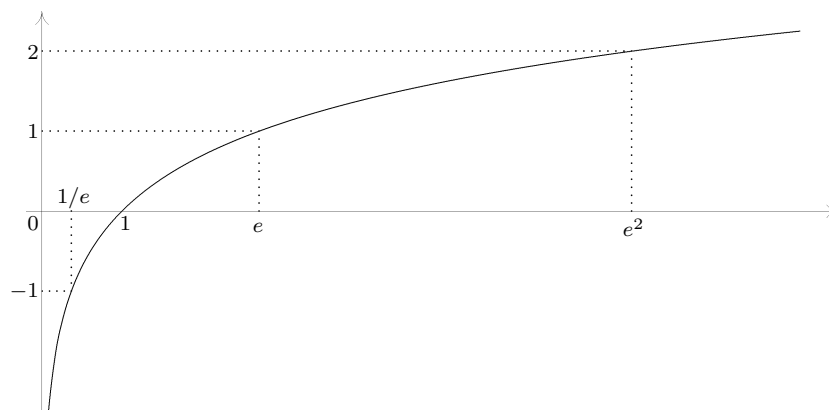


Figure 27. Graphe de la fonction \ln

4.2.1 Remarque. De la formule $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour x et y strictement positifs, on déduit les formules suivantes :

- (i) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ pour tout $x > 0$.
- (ii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, pour tous x, y strictement positifs.
- (iii) $\ln(x^n) = n \ln x$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante donne les limites usuelles A CONNAITRE satisfaites par la fonction \ln :

4.2.2 Proposition. La fonction \ln vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= 0. \end{aligned}$$

4.2.3 Remarque. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de 0 et de $+\infty$ est de se souvenir que “les puissances l'emportent sur les logarithmes en 0 et en $+\infty$ ” (voir la proposition 5.3.1 pour une explication plus précise de ce phénomène). Cela signifie que lorsqu'on cherche la limite d'une expression contenant des polynômes et des logarithmes, et qu'on est a priori en présence d'une forme indéterminée (du genre $0 \times +\infty$ etc...) alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les logarithmes par la constante 1. Remarquez que c'est le cas des deux dernières limites données.

ATTENTION : cette “règle” ne s'applique qu'au voisinage de 0 ou de $+\infty$, pas ailleurs comme le montre la troisième limite, puisque, quand x est au voisinage de 0, $1+x$ est au voisinage de 1.

On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln(e) = 1$. On a l'approximation numérique suivante : $e = 2,71828\dots$

Dans beaucoup d'applications (en chimie notamment pour les calculs de pH), on préfère utiliser la fonction **logarithme décimal**, notée \log . Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln(x).$$

En d'autres termes, c'est simplement la fonction \ln multipliée par la constante $\frac{1}{\ln(10)}$ (qui vaut environ 0,434). Elle vérifie donc la même propriété fondamentale que \ln :

$$\text{Pour tous } x, y \in]0, +\infty[, \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

et de plus par définition on a $\log(10) = 1$, et donc $\log(10^n) = n$, pour tout réel n .

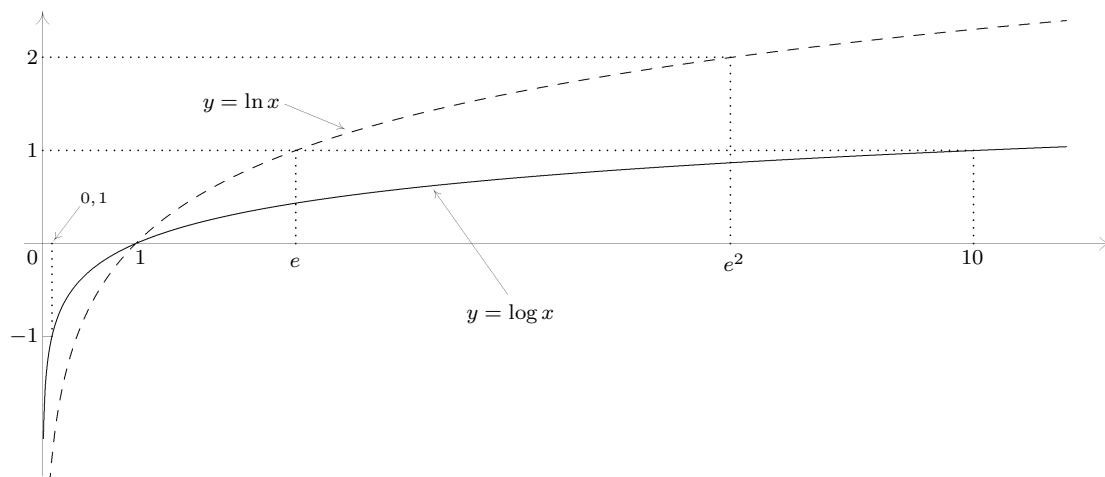


Figure 28. Graphe de la fonction \log

4.2.4 Remarque. Les fonctions logarithmes ont de multiples intérêts pratiques, dans des domaines très divers. Donnons en un.

L'échelle de Richter sert à quantifier la puissance d'un tremblement de terre : pour évaluer sa force, on cherche à mesurer le rapport $\frac{A}{A_0}$, où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence. L'échelle de Richter est une échelle logarithmique : la magnitude dite de Richter utilise le logarithme décimal et est définie par la formule : $M_L = \log A - \log A_0 = \log \left(\frac{A}{A_0} \right)$ (pour être précis, on prend pour A l'amplitude maximale des ondes sismiques à 100 kilomètres de la zone la plus violemment atteinte par le tremblement de terre, appelée l'épicentre).

Ainsi, par exemple, cela signifie que les ondes sismiques d'un séisme de magnitude 6 ont une amplitude dix fois plus grande que celles d'un séisme de magnitude 5.

L'intérêt d'utiliser une échelle logarithmique est clair : il permet de quantifier avec des "petits chiffres" l'écart d'amplitude des tremblements de terre : en pratique, l'échelle n'est que de 1 à 9 même si elle est théoriquement illimitée. Le plus fort séisme mesuré a eu lieu au Chili, en 1960, d'une magnitude de 9,5 sur l'échelle de Richter. A titre de comparaison, la chute d'une brique d'une hauteur de 1 mètre provoque un tremblement de terre d'une magnitude de -2 sur l'échelle de Richter. Faites le calcul : cela signifie que les ondes provoquées par le séisme au Chili ont eu une amplitude 316 milliards de fois plus importante que celle provoquées par la brique... Il est donc bien plus commode d'employer une échelle logarithmique.

De même, on utilise une échelle logarithmique pour mesurer le degré d'acidité ou de basicité d'une solution : on définit le pH d'une solution par $pH = -\log([H^+])$, où $[H^+]$ indique la concentration d'ions H_3O^+ en moles par litre de la solution...

4.3 La fonction exponentielle

Comme pour le logarithme, on présente la définition et les premières propriétés de la fonction \exp .

4.3.1 Définition. La fonction **exponentielle**, notée \exp , est définie sur \mathbb{R} comme la fonction réciproque de la fonction \ln (qui, rappelons-le, est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$).

Notation : On note souvent, et on utilisera cette notation dans la suite $\exp(x) = e^x$.

Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

4.3.2 Proposition. (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$.

(iii) Pour $x > 0$, on a $e^{\ln x} = x$.

(iv) $e^0 = 1$, $e^1 = e$.

Par définition, le graphe de \exp s'obtient à partir du graphe de \ln en en faisant la symétrie par rapport à la première diagonale d'équation $y = x$. Il a donc l'allure suivante :

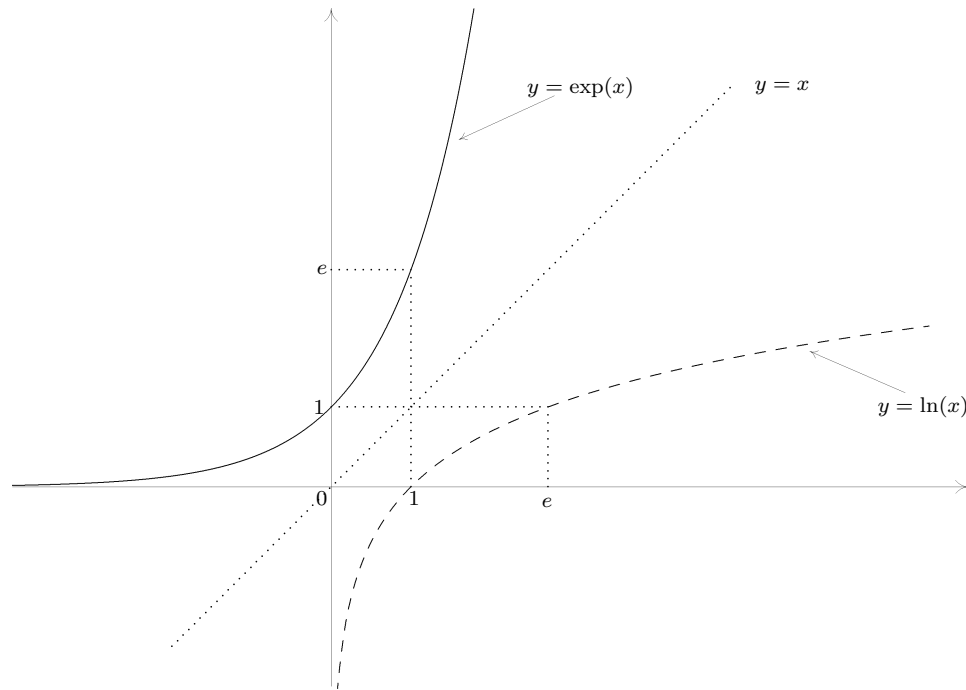


Figure 29. Graphe de la fonction exp

La fonction exponentielle vérifie la propriété fondamentale suivante :

4.3.3 Proposition. Pour tous x, y dans \mathbb{R} , on a

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

4.3.4 Remarque. De cette propriété, on déduit les formules suivantes :

- (i) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ pour x, y appartenant à \mathbb{R} .
- (iii) $e^{nx} = (e^x)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et n réel.

Les limites suivantes sont A CONNAITRE :

4.3.5 Proposition. La fonction exp vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 & & \end{aligned}$$

4.3.6 Remarque. Un moyen utile pour calculer certaines limites au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ est de se souvenir que “les exponentielles l’emportent sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$ ” (voir la proposition 5.3.3 pour une explication plus précise de ce phénomène). Cela signifie que lorsqu’on cherche la limite d’une expression contenant des polynômes et des exponentielles, et qu’on est a priori en présence d’une forme indéterminée (du genre $0 \times +\infty$ etc...) alors la limite sera donnée par la limite trouvée quand on remplace les polynômes par la constante 1. Remarquez que c’est le cas des deux dernières limites données.

ATTENTION : cette “règle” ne s’applique qu’au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$, pas ailleurs comme le montre la troisième limite, au voisinage de 0.

4.3.7 Remarque. La fonction réciproque de l'application \log est définie sur \mathbb{R} et est donnée par $x \mapsto e^{x \ln(10)}$. On note $10^x = e^{x \ln(10)}$.

De façon générale, pour $a > 0$, on note $a^x = e^{x \ln(a)}$. Cela explique la notation donnée auparavant $\exp(x) = e^x$, puisque $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.

4.3.8 Remarque. Tout comme les fonctions logarithmes, la fonction exponentielle est très utile dans des domaines variés. Ses propriétés différentielles (on verra qu'elle est égale à sa propre dérivée) expliquent que les lois vérifiées par certaines grandeurs qui croissent ou décroissent à une vitesse proportionnelle à leur "taille" s'expriment comme des multiples de fonctions exponentielles : c'est entre autres le cas de la croissance d'une population, des intérêts composés continus en économie, ou encore de la décroissance radioactive d'un matériau. Donnons deux exemples :

- Le phénomène de désintégration radioactive est aléatoire : si on considère un noyau donné, il est impossible de prédire à quel instant la désintégration va se produire. Le nombre de désintégrations qui se produisent à un instant donné est proportionnel au nombre d'atomes $N(t)$ encore radioactifs à cet instant. Ce nombre décroissant au cours du temps, le nombre de désintégrations par unité de temps décroît parallèlement à $N(t)$: l'équation vérifiée par $N(t)$ est dans ce cas

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2)t/T},$$

où T est le temps au bout duquel la moitié des éléments radioactifs se sont désintégrés. Selon les noyaux radioactifs concernés, cette période est très variable : quelques secondes, quelques heures, plusieurs jours, voire des centaines d'années et même des milliards d'années.

Ainsi, au bout de deux périodes, il reste un quart des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de trois périodes, il reste un huitième des noyaux radioactifs d'un radioélément. Au bout de dix périodes, il reste environ un millième des noyaux radioactifs d'un radioélément.

- La valeur d'un placement en banque à intérêts continus augmente à chaque instant de façon proportionnelle à la somme présente : si par exemple une somme augmente de 3% par an, alors la valeur à chaque instant de la somme placée est donnée par la formule

$$S(t) = S_0 e^{t \ln(1,03)}$$

où S_0 est la somme initiale, et t le temps compté en années. Prenons un exemple : si $S(0) = 1000 \text{ €}$, on aura $S(1) = 1030 \text{ €}$ au bout d'un an, puis $S(2) = 1060,9 \text{ €}$ au bout de deux ans... et $S(10) = 1343,91 \text{ €}$ au bout de 10 ans, $S(100) = 19218,63 \text{ €}$ si on laisse la somme 100 ans, et au bout de 1000 ans elle sera égale à environ 6874 milliards d'euros!!!

Constatez bien que ce n'est pas linéaire! Les intérêts sont moins grands si on place deux fois une somme S_0 pendant 6 mois que si on place cette somme S_0 pendant un an!

4.3.9 Remarque. Méfiez-vous : quand une banque vous propose un emprunt mensualisé à 6% par an, elle devrait vous faire rembourser une somme égale à $S_1(t) = S_0 e^{(\ln 1,06)t}$, où t est le temps compté en années et où S_0 est la somme initialement prêtée. En fait, dans beaucoup de cas, elle raisonne de façon linéaire, avec la formule $S_2(m) = S_0 e^{(\ln 1,005)m}$ où m est le temps compté en mois (en considérant que 6% par an correspond à 0,5% par mois). Faites le calcul : avec la première formule, vous devez rembourser au bout d'un an la somme $S_1(1) = 1,06S_0$, alors qu'avec la deuxième vous aurez à rembourser $S_2(12) = S_0 e^{12 \ln(1,005)}$ environ égal à $1,062S_0$. Certes la différence est faible, mais sur un emprunt de 20 ans, la somme à rembourser est dans un cas environ égal à $3,21S_0$, alors que dans l'autre elle est de $6,02S_0$!!!

4.4 Retour sur les fonctions puissances

On a défini dans un précédent paragraphe les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, pour α rationnel. En fait, on a une définition générale à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien :

4.4.1 Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Il est clair, grâce aux propriétés vérifiées par le logarithme et l'exponentielle, que si α est rationnel cette définition coïncide avec celle déjà donnée auparavant.

Les fonctions \exp et \ln étant continues, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

On en déduit le sens de variation de ces fonctions :

4.4.2 Proposition. (i) Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(ii) Si $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

(iii) Si $\alpha = 0$, la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.

Les graphes des fonctions puissances ont l'allure suivante, selon la valeur de α :

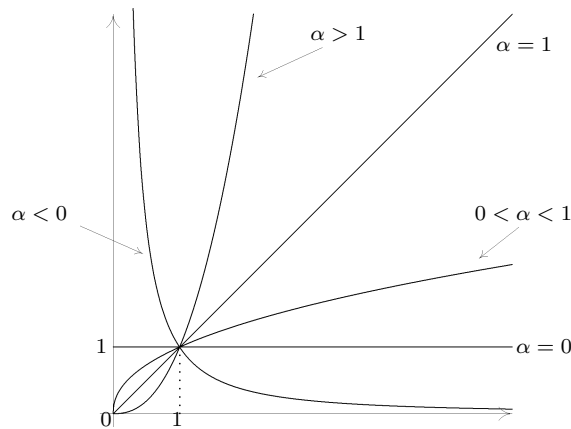


Figure 30. Graphe de $x \mapsto x^\alpha$ selon les valeurs de α

On a donc les propriétés suivantes :

4.4.3 Proposition. Les fonctions puissances ont les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Les fonctions puissances vérifient de plus les relations suivantes :

4.4.4 Proposition. Soit $x > 0$, α et β deux réels.

(i) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;

(ii) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$;

(iii) $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$;

(iv) $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$.

5 Comparaison de fonctions en un point ou en l'infini

Dans différentes applications, on a souvent besoin de comparer, soit au voisinage d'un point, soit au voisinage de l'infini, deux fonctions f et g . Pour cela, on introduit deux définitions, très utiles par la suite mais également sources fréquentes d'erreurs si on les utilise mal! Aussi il est conseillé de toujours revenir à ces définitions pour les utiliser!!!!

5.1 Fonction négligeable, $f = o(g)$ en a

5.1.1 Définition. Soit a un réel. On dit que f est **négligeable** devant g en a si on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. De même, on dit que f est **négligeable** devant g en $+\infty$ si on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notation : Dans ce cas on écrit $f = o(g)$ en a (ou $f = o(g)$ en $+\infty$), et on prononcera généralement “ f est négligeable devant g en a ”.

5.1.2 Remarques. – En fait, une définition plus rigoureuse et plus générale est la suivante : f est négligeable devant g en a s'il existe une fonction h telle que $f(x) = h(x)g(x)$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$. Les deux définitions sont équivalentes si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a .

– Cette définition traduit bien qu'en valeur absolue, la fonction g est *considérablement plus grande* que la fonction f au voisinage de a , donc que le terme $f(x)$ représente une quantité négligeable par rapport à $g(x)$ pour x au voisinage de a .

On donne ici quelques exemples d'utilisation de cette notation. Il est conseillé au lecteur de montrer les différents points suivants et de se convaincre de leur véracité!

5.1.3 Exemples. (i) On a $x = o(x^2)$ en $+\infty$, et $x^2 = o(x)$ en 0 . Autrement dit, la fonction x est négligeable devant la fonction x^2 au voisinage de $+\infty$, alors que la fonction x^2 est négligeable devant la fonction x au voisinage de 0 .

(ii) Dire que $f = o(1)$ en a est équivalent à dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

(iii) Si $f = o(g)$ en a , alors $(x - a)f(x) = o((x - a)g(x))$ en a .

(iv) Plus généralement, si $f = o(g)$ en a , alors pour toute fonction h on a $fh = o(gh)$ en a (donc on a l'égalité $h \times o(g) = o(hg)$ en a).

(v) Si par exemple $f(x) = o(x^2)$ en 0 , alors on a $\frac{f(x)}{x} = o(x)$ en 0 , et $\frac{f(x)}{x^2} = o(1)$ en 0 .

(vi) Si $f(x) = o(x^n)$ en 0 , alors la fonction $g(x)$ définie par $g(x) = f(x^2)$ est négligeable devant x^{2n} en 0 , autrement dit $g(x) = f(x^2) = o(x^{2n})$ en 0 . En effet, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^{2n}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X)}{X^n} = 0$.

ATTENTION à bien préciser le point au voisinage duquel on compare les fonctions!

On a la proposition suivante (qui généralise l'exemple précédent), utile dans la pratique :

5.1.4 Proposition. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Alors

(i) x^α est négligeable en $+\infty$ devant x^β . Autrement dit, on a $x^\alpha = o(x^\beta)$ en $+\infty$.

(ii) x^β est négligeable en 0 devant x^α . Autrement dit, on a $x^\beta = o(x^\alpha)$ en 0 .

5.2 Fonctions équivalentes, $f \sim g$ en a

5.2.1 Définition. Soit a un réel. On dit que f et g sont **équivalentes** en a si on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. De même, on dit que f et g sont **équivalentes** en $+\infty$ si on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation : Dans ce cas on écrit $f \sim g$ en a (ou $f \sim g$ en $+\infty$).

5.2.2 Remarques. – En fait, une définition plus rigoureuse et plus générale est la suivante : f et g sont équivalentes en a s'il existe une fonction h telle que $f(x) = (1 + h(x))g(x)$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$. Les deux définitions sont équivalentes si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a .

– Il est équivalent de dire que $f(x) \sim g(x)$ en a et que $f(x) = g(x) + o(g(x))$ en a .

5.2.3 Exemples. (i) On a $\sin(x) \sim x$ en 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

(ii) On a $x^2 + 2x \sim x^2$ en $+\infty$.

5.2.4 Remarque. ATTENTION!! Les erreurs sont fréquentes dans l'utilisation des équivalents ! Il est indispensable de bien retenir la définition de deux fonctions équivalentes en a , pour éviter des raisonnements faux.

Donnons quelques exemples des raisonnements à tenir avec les équivalents :

(i) la seule fonction f équivalente à 0 en a est la fonction nulle au voisinage de a ;

(ii) si $f_1 \sim g_1$ en a et $f_2 \sim g_2$ en a , alors on a $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ en a : en effet, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1 \times 1 = 1.$$

(iii) PAR CONTRE, on peut très bien avoir $f_1 \sim g_1$ en a et $f_2 \sim g_2$ en a MAIS PAS $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ en a : par exemple, on a $x + x^2 \sim x + x^3$ en 0 , $-x \sim -x$ en 0 et pourtant on n'a PAS $x^2 \sim x^3$ en 0 !!!

(iv) Il est correct d'écrire $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ en 0 . Toutefois, cela ne présente pas d'intérêt, car on a aussi $\cos x \sim 1 - x^{2005}$ en 0 ! En pratique, un équivalent ne doit comporter qu'un seul terme : les termes négligeables doivent disparaître.

Par contre, il est sensé d'écrire $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0 (car on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$), mais cette fois ci on n'a PAS $1 - \cos x \sim x^{2005}$ en 0 !

Moralité : Pour calculer un équivalent à partir de ceux des fonctions usuelles, on peut multiplier, mais PAS ajouter !

5.3 Exemple : comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme

On cherche ici à comparer les fonctions $\exp(x)$, x^α , $\ln x$ au voisinage de $+\infty$ et de 0 .

Pour les comparaisons puissances - logarithme, on a les limites suivantes :

5.3.1 Proposition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\beta > 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

En résumé, comme on l'a dit dans la remarque 4.2.3, les puissances l'emportent sur les logarithmes en $+\infty$ et en 0 : en effet, les deux limites précédentes sont a priori indéterminées, mais c'est le terme x^β qui impose sa limite au terme $|\ln x|^\alpha$.

5.3.2 Remarque. Avec les définitions du paragraphe précédent, la proposition s'énonce ainsi :

- (i) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $(\ln x)^\alpha$ est négligeable en $+\infty$ devant la fonction x^β , ce que l'on note $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ en $+\infty$.
- (ii) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $|\ln x|^\alpha$ est négligeable en 0 devant la fonction $\frac{1}{x^\beta}$, ce que l'on note $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ en 0 .

Pour les comparaisons puissances - exponentielle, on a les limites suivantes :

5.3.3 Proposition. Soit α et β deux réels. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{\beta x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

En résumé, comme on l'a dit dans la remarque 4.3.6, les exponentielles l'emportent sur les puissances en $+\infty$ et en $-\infty$: en effet, les deux limites précédentes sont a priori indéterminées, mais c'est le terme $e^{\beta x}$ qui impose sa limite au terme x^α , et ce quel que soit α .

5.3.4 Remarque. Avec les définitions précédentes, la proposition s'énonce ainsi :

- (i) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction x^α est négligeable en $+\infty$ devant la fonction $e^{\beta x}$ (puisque l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$), ce que l'on note $x^\alpha = o(e^{\beta x})$ en $+\infty$.
- (ii) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $|x|^\alpha$ est négligeable en $-\infty$ devant la fonction $e^{-\beta x}$, ce que l'on note $|x|^\alpha = o(e^{-\beta x})$ en $-\infty$.

Chapitre II

Etude et approximation de fonctions

1 Dérivées

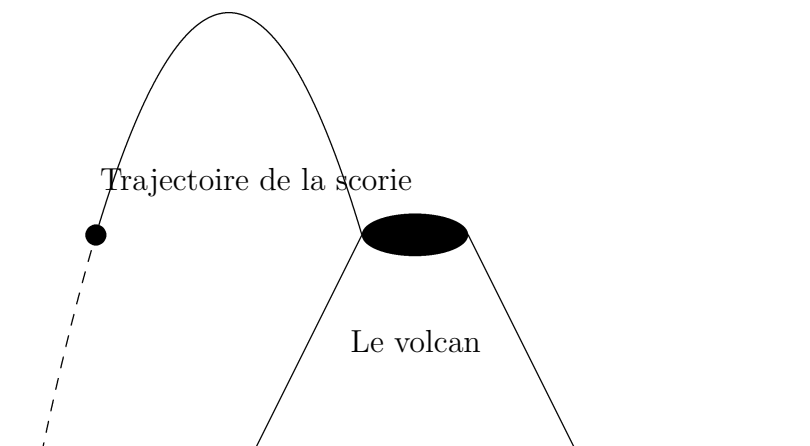
La dérivation sert dans la plupart des applications des mathématiques. C'est l'outil le plus pratique pour faire l'étude des variations d'une fonction et la recherche d'extrema. Comme nous allons le voir, l'idée est de remplacer, quand on le peut, la fonction par une approximation affine, c'est-à-dire une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ (dont la courbe représentative est une droite).

1.1 Introduction

Voici l'équation donnant l'altitude, en fonction du temps, d'une scorie expulsée par un volcan d'Auvergne lors de sa dernière éruption il y a 6.000 ans :

$$h = f(t), \text{ avec } f(t) = h_i - \frac{1}{2}gt^2 + v_it, \quad (1.1)$$

où $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ est l'accélération due à la pesanteur, $h_i = 1200 \text{ m}$ est l'altitude du cratère et $v_i = 30 \text{ ms}^{-1}$ est la vitesse verticale d'expulsion de la scorie à l'instant $t = 0 \text{ s}$. Cette équation est simplement celle obtenue des lois de Newton, en négligeant notamment la résistance exercée par l'air.



Imaginons qu'à l'époque un observateur ait été présent pour faire la mesure de cette altitude en fonction du temps. Voici le tableau de valeurs qu'il aurait pu remplir :

t en s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h en m	1200	1225,1	1240,4	1245,9	1241,6	1227,5	1203,6	1169,9	1126,4

D'après ces valeurs, on voit que l'altitude maximale de la trajectoire se situe aux environs de 1245 m , à $t = 3\text{ s}$. Comment déterminer de façon précise ce maximum ? Une approche serait de procéder à des mesures plus fines autour de l'instant $t = 3\text{ s}$. On obtiendrait :

t en s	2,900	2,990	2,999	3,000	3,001	3,010	3,100
h en m	1245,791	1245,894	1245,899	1245,900	1245,901	1245,906	1245,911

On voit donc que $t_0 = 3\text{ s}$ n'est pas le moment où l'altitude de la scorie est maximale et que cette méthode n'est pas près de nous fournir la bonne valeur. On peut cependant en déduire la vitesse d'élévation moyenne entre $t_0 = 3\text{ s}$ et un autre instant de mesure t en calculant le *taux de variation*, donné par le rapport : écart d'altitude sur durée.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t) - 1245,9}{t - 3}.$$

Bien sûr, ce rapport ne peut pas être calculé pour $t = 3\text{ s}$, mais il donne la vitesse d'élévation moyenne v_{moy} entre $t_0 = 3\text{ s}$ et tout autre instant de mesure $t \neq 3\text{ s}$:

t en s	2,900	2,990	2,999	3,000	3,001	3,010	3,100
v_{moy} en m	1,090	0,649	0,605	???	0,595	0,551	0,110

Pour compléter ce tableau, on définit la *vitesse instantanée* à l'instant $t_0 = 3\text{ s}$, $v_{inst}(t_0)$: c'est la limite (lorsqu'elle existe) de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t , quand t tend vers t_0 . On a donc :

$$v_{inst}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

En utilisant l'expression de f donnée dans (1.1) on calcule :

$$\begin{aligned} v_{inst}(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h_i - \frac{1}{2}gt^2 + v_i t - (h_i - \frac{1}{2}gt_0^2 + v_i t_0)}{t - t_0} \\ &= v_i - \frac{1}{2}g \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} \\ &= v_i - \frac{1}{2}g \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\ &= v_i - gt_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

On dispose cette fois d'un bon critère pour trouver le point d'altitude maximum : supposons qu'à t_0 la vitesse (d'élévation) instantanée de la scorie soit strictement positive. Alors le taux de variation d'altitude entre t_0 et tout instant suffisamment voisin est strictement positif. En particulier, on peut trouver $t > t_0$ tel que l'altitude $f(t)$ soit plus

grande que celle à t_0 . Le même raisonnement montre que si la vitesse instantanée à t_0 est strictement négative, l'altitude n'est pas maximale. Ainsi, pour que t_0 soit un instant où l'altitude est maximale, il faut que la vitesse instantanée y soit nulle. On trouve alors facilement que $t_0 = v_i/g = 3,061 \text{ s}$ et que l'altitude maximale est $1245,918 \text{ m}$.

Ainsi, une donnée importante pour étudier une fonction f au voisinage d'un point t_0 est

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Lorsqu'elle existe, on appelle cette limite *la dérivée de f au point t_0* , que l'on note $f'(t_0)$. Cette dérivée correspond à la vitesse instantanée en t_0 .

1.1.1 Remarque. Il est clair que l'équation (1.1) n'est pas valable à tout instant : au bout d'un moment, la scorie retombe sur le sol. Si t_0 est cet instant, on ne peut plus parler de vitesse instantanée en t_0 : la vitesse moyenne entre t_0 et un autre instant changeant brutalement au voisinage de t_0 , la limite $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ n'existe pas. La fonction donnant l'altitude de la scorie en fonction du temps n'est pas dérivable en ce point.

1.2 Définition et propriétés

Donnons à présent la définition et les règles permettant le calcul de la dérivée :

1.2.1 Définition. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x . On dit que f est *dérivable* en x si le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. On note alors $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Si f est dérivable en chaque point d'un intervalle $]a, b[$, on dit que f est dérivable sur $]a, b[$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si f' est continue sur $]a, b[$, on dit que f est *continûment dérivable*, ou encore que f est de *classe C^1* sur $]a, b[$.

Remarquons que le quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'est autre que le taux de variation $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ de f entre x et $x+h$.

1.2.2 Exemple. (i) Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$. Déjà, f est définie au voisinage de 1. Puis on a $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$, donc ce taux de variation a bien une limite quand h tend vers 0. On trouve $f'(1) = 2$. En fait on peut généraliser ce raisonnement à tout $x \in \mathbb{R}$: puisque $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x+h$, on trouve que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = 2x$.

(ii) La fonction $f(t) = h_i - \frac{1}{2}gt^2 + v_it$ introduite dans la formule (1.1) est dérivable sur \mathbb{R} : les calculs sont faits (voir formule (1.2)). On a $f'(t) = v_i - gt$.

Il peut être assez difficile de faire le calcul de cette limite du taux de variation dans la pratique. On préfère donc connaître la liste de *dérivées usuelles* suivante :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée	Notation
x^n	\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
$1/x^n = x^{-n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-n/x^{n+1} = -nx^{-n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
x^α	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$	
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$1/x$	
e^x	\mathbb{R}	e^x	

1.2.3 Notation. Une autre façon de noter la fonction dérivée de f est : $f' = \frac{df}{dx}$. Attention ! Cette notation ne signifie pas que f' est un quotient, mais rappelle plutôt la définition :

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

En poussant l'ambiguïté plus loin, on écrira même $df = f'(x)dx$ pour exprimer que $\Delta f = f'(x) \Delta x + o(\Delta x)$ en 0 (donc cela signifie que $\Delta f - f'(x)\Delta x$ est négligeable devant Δx quand Δx tend vers 0). Cette notation, appelée *notation différentielle*, rendra plus naturelle certaines formules.

Nous terminons cette section en donnant les règles permettant de faire le calcul de la dérivée d'une fonction à partir de la liste des dérivées usuelles.

1.2.4 Théorème. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$. On a :

- (i) la fonction $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est dérivable sur $]a, b[$ et $(f + g)' = f' + g'$;
- (ii) la fonction $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ est dérivable sur $]a, b[$ et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$;
- (iii) **si g ne s'annule pas sur $]a, b[$** , la fonction $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$ est dérivable sur $]a, b[$ et $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{(g)^2}$.

1.2.5 Corollaire. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$, et c un réel.

- (i) La fonction $cf : x \mapsto c \cdot f(x)$ est dérivable sur $]a, b[$ et $(cf)' = cf'$;
- (ii) si g ne s'annule pas sur $]a, b[$, la fonction $1/g$ est dérivable sur $]a, b[$ et $(1/g)' = \frac{-g'}{(g)^2}$.

Pour démontrer ce théorème, ainsi que le suivant (ce peut être un bon exercice!), il suffit d'utiliser les règles de calculs des limites.

1.2.6 Théorème. Soit $U :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ et $f :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction $f \circ U :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \circ U(x) = f(U(x))$ est dérivable et $(f \circ U)' = U' \cdot f' \circ U$.

1.2.7 Remarque. La notation différentielle permet de mémoriser facilement la formule précédente, sous la forme d'une dérivation par étapes : f est une fonction de U , donc $df = f'(U)dU$, et U est une fonction de x , donc $dU = U'(x)dx$; si on veut dériver f comme une fonction de x via U , on combine les deux expressions pour trouver : $d(f \circ U) = f'(U) \cdot U'dx$, ce qui signifie : $(f \circ U)' = \frac{d(f \circ U)}{dx} = U' \cdot f'(U)$.

1.2.8 Exemple. (i) Calculons la dérivée de $x \mapsto \tan x$. Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, puisque \sin et \cos sont des fonctions dérivables sur \mathbb{R} , on trouve que \tan est dérivable en tout point où \cos ne s'annule pas, c'est-à-dire : \tan est dérivable sur son domaine de définition. Pour mémoire, ce domaine de définition est \mathbb{R} privé des réels de la forme

$\pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$, on obtient que si x est dans le domaine de définition de \tan , alors

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

- (ii) Calculons la dérivée de $g : x \mapsto \cos(\ln x)$. On remarque que g est la composée de $U : x \mapsto \ln x$ et de $f : u \mapsto \cos u$. Puisque f est définie sur tout \mathbb{R} , le domaine de définition de g est celui de U , c'est-à-dire $]0, +\infty[$. Les fonctions f et U sont dérivables sur leur domaine de définition, donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Enfin, pour $x \in]0, +\infty[$, on a $U'(x) = 1/x$ et pour $u \in \mathbb{R}$ on a $f'(u) = -\sin u$. Puisque $g = f \circ U$ on trouve que pour $x \in]0, +\infty[$, on a $g'(x) = U'(x) \cdot f'(U(x)) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$.

1.3 Approximation affine d'une fonction

La propriété fondamentale liée à la dérivabilité d'une fonction est celle de pouvoir faire localement l'approximation de sa courbe représentative par une droite (la tangente) :

1.3.1 Proposition. *Supposons que f est une fonction dérivable en x_0 . Alors on peut écrire f sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ en } x_0, \quad (1.3)$$

Autrement dit, l'erreur commise en approximant la valeur de $f(x)$ au voisinage de x_0 par la formule $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est négligeable devant l'écart $x - x_0$.

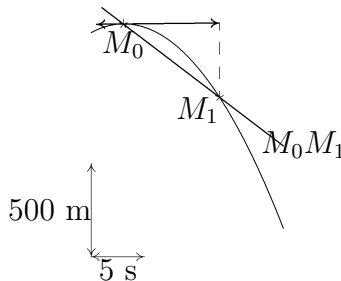
1.3.2 Remarque. La fonction $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est affine (c'est-à-dire est un polynôme de degré au plus 1) : sa courbe représentative est une droite.

La formule (1.3) permet donc de faire une estimation pratique de f au voisinage de x_0 avec une formule du genre $ax + b$ à partir de $x_0, f(x_0)$ et $f'(x_0)$: les coefficients a et b sont donnés par $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

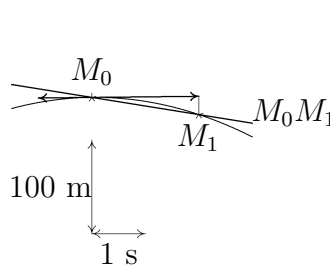
En d'autres termes, on peut faire l'approximation de la courbe représentative de f au voisinage de x_0 par une droite. Cette droite est appelée la *tangente à la courbe représentative de f en x_0* . Elle passe par le point $(x_0, f(x_0))$ et a pour pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

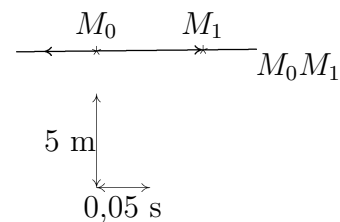
1.3.3 Exemple. Reprenons l'exemple étudié dans l'introduction. Quand on regarde l'écart entre la courbe et la tangente, on voit que plus on zoome sur l'instant t_0 , moins on arrive à faire la différence entre la courbe et la tangente :



$t_1 - t_0 = 9$: l'écart entre la tangente et la courbe est d'environ 400 m à l'instant t_1



$t_1 - t_0 = 2$: l'écart entre tangente et courbe est d'environ 20 m à l'instant t_1



$t_1 - t_0 = 0,1$: l'écart est maintenant de l'ordre de 5 mm à l'instant t_1 !

Nous allons comparer les valeurs de la fonction définie en (1.1) données dans les deux tableaux de valeurs avec l'*approximation affine* obtenue en utilisant la dérivée à l'instant $t = 3$ s : l'approximation de $f : t \mapsto h_i - \frac{1}{2}gt^2 + v_i t$ donnée par (1.3) pour $t_0 = 3$ est un polynôme du premier degré qui s'écrit :

$$P(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = h_i + \frac{1}{2}gt_0^2 + (v_i - gt_0)t = 1244,1 + 0,6t.$$

On obtient les valeurs approximatives :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	1200	1225,1	1240,4	1245,9	1241,6	1227,5	1203,6	1169,9	1126,4
$P(t)$	1244,1	1244,7	1245,3	1245,9	1246,5	1247,1	1247,7	1248,3	1248,9

où l'on réalise que l'approximation, relativement correcte pour $t = 2$ ou 4 , est vraiment grossière pour les valeurs trop éloignées de t_0 , alors qu'en faisant les calculs pour des valeurs proches de t_0 , on obtient :

t	2,900	2,990	2,999	3,000	3,001	3,010	3,100
$f(t)$	1245,791	1245,894	1245,899	1245,900	1245,901	1245,906	1245,911
$P(t)$	1245,840	1245,894	1245,899	1245,900	1245,901	1245,906	1245,960

ce qui montre la qualité de l'approximation au voisinage de t_0 .

En plus de fournir cette formule simple d'approximation, une autre conséquence de (1.3) s'obtient en l'utilisant pour calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

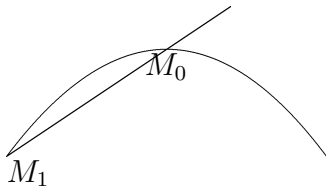
1.3.4 Corollaire. *Si f est dérivable en x_0 , alors elle est continue en x_0 .*

2 Etudes de fonctions

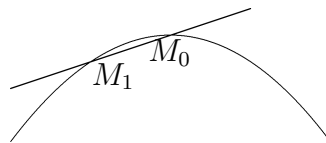
Dans ce paragraphe, on utilise les notions vues précédemment (limites, continuité, dérivabilité) pour étudier de façon de plus en plus précise les fonctions, de façon globale ou localement en certains points particuliers.

2.1 Sens de variation et recherche d'extrema

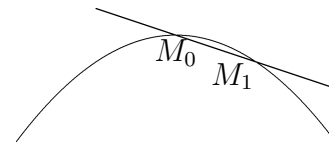
Les figures suivantes illustrent le fait que le signe du taux de variation d'une fonction (donc le signe de la dérivée, si elle existe, de la fonction) change au passage par un extremum local.



M_1 est à gauche du maximum M_0 : la pente de M_0M_1 est positive



M_1 se rapproche de M_0 : la pente est moins grande



M_1 a dépassé M_0 : la pente est devenue négative

La situation dessinée est celle au passage par un maximum, mais le cas d'un minimum s'obtient facilement par symétrie. On en déduit le critère suivant :

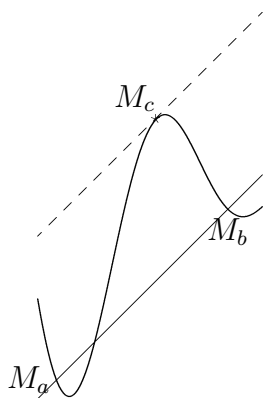
2.1.1 Théorème. *Soit f une fonction dérivable en a . Pour que a soit un extremum local de f , il faut que $f'(a) = 0$.*

ATTENTION!!! S'il faut que la dérivée s'annule pour avoir un extremum local, la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pas un extremum.

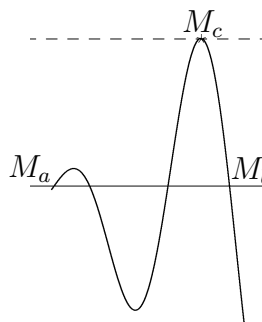
En utilisant la proposition précédente, on obtient le résultat suivant, qui permet notamment d'utiliser la dérivée pour étudier le sens de variation :

2.1.2 Théorème (Théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, qui est dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



La pente de la tangente en M_c vaut le taux d'accroissement entre a et b (la pente de la droite $M_a M_b$)



Le cas particulier $f(a) = f(b)$ est plus intuitif

2.1.3 Remarque. Il peut y avoir plusieurs possibilités pour choisir le point c : le théorème n'assure que l'existence de c , pas son unicité (comme la figure ci-dessus le suggère).

Ce théorème permet de déduire les règles suivantes, qui seront très utilisées pour faire l'étude des variations d'une fonction :

2.1.4 Corollaire. *Supposons que f soit une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

- (i) *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$;*
- (ii) *f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est positive ou nulle sur $]a, b[$.*
- (iii) *f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est négative ou nulle sur $]a, b[$.*
- (iv) *Si f' est strictement positive sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
- (v) *Si f' est strictement négative sur $]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*

2.1.5 Exemple. Montrons que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $\ln x \leq x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Posons $f(x) = \ln x - (x - 1)$. C'est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 1/x - 1$. On trouve donc que pour tout $x \in]0, 1[$, f' est positive sur $]x, 1[$. Or f est continue sur $[x, 1]$, donc f y est croissante et $f(x) \leq f(1) = 0$. De même, pour tout $x \in]1, +\infty[$ on trouve que f' est négative sur $]1, x[$. Puisque f est continue sur $[1, x]$ on déduit que f est décroissante sur cet intervalle donc que $0 = f(1) \geq f(x)$. L'inégalité est donc prouvée. Pour les cas d'égalité, on a déjà observé que $f(1) = 0$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a montré que f est monotone (croissante ou bien décroissante) sur l'intervalle de bornes $1, x$. Si x est tel que $f(x) = 0$, on trouve que f doit être constante sur cet intervalle. Si $x \neq 1$, cela implique que f' s'annule ailleurs qu'en 1, ce qui est impossible.

2.2 Etude d'une fonction à l'infini

Supposons f définie au voisinage de $+\infty$. On va chercher à comprendre au mieux le comportement de f au voisinage de $+\infty$ (on raisonnerait d'une façon identique au voisinage de $-\infty$).

Trois cas peuvent se produire :

- (i) soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire f a une limite finie en $+\infty$.

$$\text{Exemples : } x \mapsto \frac{3x^2}{x^2 + 1}, x \mapsto \frac{1}{x};$$

- (ii) soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$).

$$\text{Exemples : } x \mapsto x^2, x \mapsto -2x + x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \mapsto \log x;$$

- (iii) soit f n'a pas de limite en $+\infty$.

$$\text{Exemples : } x \mapsto \cos x, x \mapsto x \sin x.$$

Etudions plus précisément les deux premiers cas :

Dans le premier cas, le comportement de la fonction au voisinage de $+\infty$ est simple : son graphe est très proche de la droite horizontale d'équation $y = a$.

Dans le deuxième cas, par contre, les comportements peuvent être variés : ainsi, les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \log x$ ou $x \mapsto 2x$ vérifient toutes trois la propriété $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, mais leur comportement est très différent au voisinage de $+\infty$.

Une première question naturelle est de se demander si la fonction se rapproche d'une droite quand $x \rightarrow +\infty$. On introduit de ce fait la définition suivante :

2.2.1 Définition. On dit que la droite $y = ax + b$ est une **asymptote** en $+\infty$ à la fonction f si on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

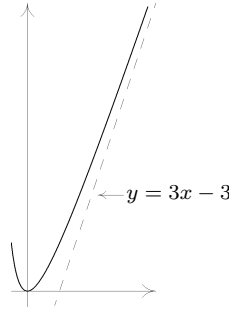
Dans ce cas, le comportement de f à l'infini est clair, la distance entre le graphe et la droite asymptote tend vers 0. On peut ensuite pousser l'étude en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - ax - b$ pour savoir si le graphe de la fonction se situe au dessus ou en dessous de sa droite asymptote.

2.2.2 Remarque. Dire que f admet une asymptote en l'infini d'équation $y = b$ (c'est-à-dire avec $a = 0$) est équivalent à dire que f a une limite réelle finie b en $+\infty$.

2.2.3 Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2}{x+1}$ admet la droite d'équation $y = 3x - 3$ comme asymptote en $+\infty$: en effet, on a

$$\frac{3x^2}{x+1} - (3x - 3) = \frac{3}{x+1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0.$$

Le calcul ci-dessus prouve de plus que le graphe de f se situe au dessus de son asymptote, puisqu'au voisinage de l'infini on a $f(x) - (3x - 3) \geq 0$.



Graphes de la fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{x+1}$

Cependant, il arrive que f n'ait pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$: c'est par exemple le cas des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$. On regarde alors si le graphe de f prend la direction d'une droite quand x tend vers $+\infty$.

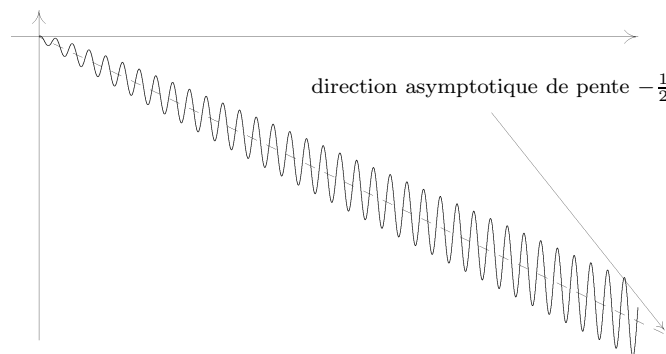
2.2.4 Définition. (i) On dit que f admet en $+\infty$ une **direction asymptotique** de pente a si on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$) on dit que f admet une **direction asymptotique verticale**.

2.2.5 Exemples. (i) La fonction $x \mapsto \log x$ admet une direction asymptotique de pente 0.

(ii) La fonction $x \mapsto x^2$ admet une direction asymptotique verticale.

(iii) La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x + \sqrt{x} \cos x$ admet une direction asymptotique de pente $-\frac{1}{2}$.



Graphes de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x + \sqrt{x} \cos x$

2.2.6 Remarque. Si f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = ax + b$, alors f a une direction asymptotique de pente a .

ATTENTION, la réciproque est fautive : la fonction $x \mapsto -0,5x + \sqrt{x} \cos x$ admet une direction asymptotique de pente $-0,5$ MAIS n'a aucune asymptote au voisinage de $+\infty$. En fait, dire que $y = ax + b$ est une asymptote de f en $+\infty$, c'est dire que f admet en $+\infty$ une direction asymptotique de pente a et QU'EN PLUS on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$.

En résumé, pour étudier une fonction en $+\infty$, on regarde si la fonction $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$. Si c'est le cas :

- (i) soit cette limite est $\pm\infty$, auquel cas f admet en $+\infty$ une direction asymptotique verticale ;
- (ii) soit cette limite est $a \in \mathbb{R}$. Alors f admet une direction asymptotique de pente a . Dans ce cas, on regarde si la fonction $g(x) = f(x) - ax$ admet une limite en $+\infty$:
 - (a) soit g n'a pas de limite, soit g a une limite $\pm\infty$ en $+\infty$. Alors f n'a pas d'asymptote en $+\infty$;
 - (b) soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Alors f a en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = ax + b$.

3 Développements limités

Dans cette section, on va chercher à étudier une fonction f de façon de plus en plus précise au voisinage de 0. Cette étude est souvent très utile, par exemple pour trouver des limites de fonctions quand on a affaire à une forme indéterminée, ou pour approximer des fonctions compliquées dans des calculs par des fonctions plus simples. Une application très utile, et sur laquelle nous axerons ce texte, est de pouvoir *trouver un équivalent* à une fonction f au voisinage de 0.

3.1 Définition et premières propriétés

Examinons les différentes informations que l'on possède sur la fonction f au voisinage de 0.

- (i) L'information la plus "grossière" est de connaître la valeur de $f(0)$ (ou, si f n'est pas définie en 0, de savoir si $f(x)$ a une limite L quand $x \rightarrow 0$). Cette valeur nous permet d'approximer la fonction f par L au voisinage de 0. Si cette limite L est différente de 0, on peut écrire $f(x) \sim L$ en 0.

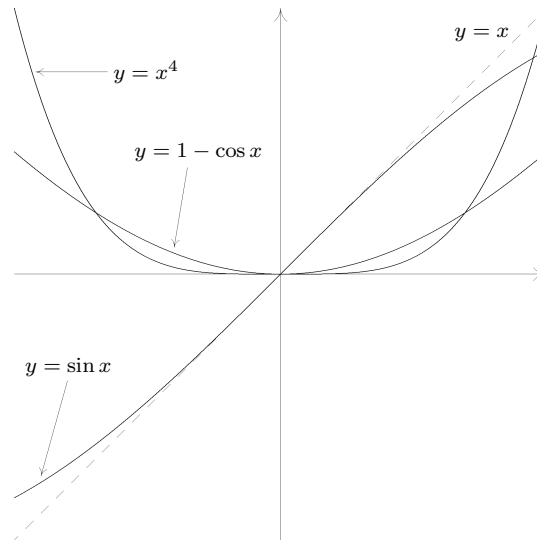
C'est évidemment une information essentielle, mais généralement non suffisante : la seule valeur limite en 0 ne permet pas de comparer vraiment les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto 1 - \cos x$, $x \mapsto x^4$, qui toutes ont la même limite nulle en 0.

- (ii) Si f est dérivable au voisinage de 0, on peut raffiner l'étude en étudiant la dérivée de f en 0. Comme on l'a vu auparavant, la valeur $f'(0)$ représente *la pente de la tangente* en 0 au graphe de f . Cette tangente a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x.$$

On voit bien sur le dessin (voir ci-dessous) que cette droite est celle **qui approxime le mieux la fonction f au voisinage de 0** : par exemple, la tangente à la fonction $x \mapsto \sin x$ est la droite d'équation $y = x$, alors que celle aux fonctions $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto x^4$ est la droite d'équation $y = 0$.

Ainsi, l'approximation par la tangente, dans notre étude, permet de trouver l'équivalent : $\sin x \sim x$ en 0.

Zoom au voisinage de 0 des fonctions $\sin x$, $1 - \cos x$, x^4

Ces deux études suivent la même démarche : dans le premier cas, elle permet d'approximer au voisinage de 0 la fonction par une constante, c'est-à-dire par *un polynôme de degré 0*. Dans le deuxième cas, elle permet d'approximer au voisinage de 0 la fonction par une droite, c'est-à-dire par *un polynôme de degré 1*. L'erreur commise par cette approximation est bien plus faible dans le deuxième cas que dans le premier !

3.1.1 Exemple. Si sur l'intervalle $] -0.1, 0.1[$ on approxime la fonction $x \mapsto \sin x$ par 0 on commet une erreur au maximum d'environ 0,1. Si on approxime cette fonction sur $] -0.1, 0.1[$ par la droite $y = x$, on commet au maximum une erreur de 0,00017! On a divisé le terme d'erreur par 600.

L'idée des développements limités est de généraliser cette démarche, en cherchant à **approximer la fonction f par un polynôme de degré de plus en plus grand**, pour avoir une information de plus en plus précise : en effet, au voisinage de 0, "plus n est grand, plus x^n est petit", ce qui en termes mathématiques s'exprime par la phrase "si $n > m$, alors x^n est négligeable devant x^m au voisinage de 0."

3.1.2 Définition. Soit f une fonction définie et continue au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. On dit que f possède un **développement limité (ou DL) à l'ordre n** en 0 s'il existe un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x)$ est égal à $P(x) +$ (une fonction négligeable en 0 devant x^n). Autrement dit tel que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0.$$

Notations :

- Le polynôme $P(x)$ s'appelle **la partie régulière du DL**.
- Le terme $f(x) - P(x)$ s'appelle **le reste du DL**.

Le reste du DL est une fonction négligeable devant x^n , c'est pourquoi, conformément aux notations introduites précédemment, et pour simplifier l'écriture, le DL de f à l'ordre n en 0 sera généralement noté

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \text{ en } 0.$$

Dans la suite, on notera seulement

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n),$$

le terme “ $o(x^n)$ ” signifie “une fonction négligeable en 0 devant x^n ” (car 0 est le seul point au voisinage duquel x^n est négligeable devant x^m quand $n > m$).

ATTENTION à ne pas oublier le reste dans l’écriture d’un DL ! Le terme $f(x)$ N’EST PAS EGAL à la partie régulière $P(x)$, mais la différence entre ces deux fonctions est négligeable devant x^n .

On peut démontrer les propriétés suivantes :

3.1.3 Proposition. *S’il existe, le DL à l’ordre n d’une fonction f en 0 est unique.*

3.1.4 Proposition. (i) *Si f est une fonction paire, alors la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme pair, c’est-à-dire un polynôme qui ne contient que des puissances paires ($1, x^2, x^4$ etc...).*

(ii) *Si f est une fonction impaire, alors la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme impair, c’est-à-dire un polynôme qui ne contient que des puissances impaires (x, x^3, x^5 etc...).*

En pratique, on utilisera très souvent le résultat suivant :

3.1.5 Proposition. *Si f admet un DL à l’ordre n en 0, et que la partie régulière $P(x)$ du DL n’est pas le polynôme nul, alors $f(x) \sim a_i x^i$ en 0, où a_i est le plus petit coefficient non nul de P , c’est-à-dire $a_i \neq 0$ et pour tout $0 \leq j < i$, $a_j = 0$.*

3.2 Quelques DL classiques

On peut décrire explicitement le DL d’une fonction si celle-ci possède des propriétés suffisantes de dérivabilité. On a déjà vu que si f est dérivable au voisinage de 0 alors son DL à l’ordre 1 est donné par l’équation de la tangente à f en 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

Si f' est elle-même dérivable, on dit que f est 2-fois dérivable. Et par récurrence on définit ainsi la notion de fonction n -fois dérivable, pour $n \in \mathbb{N}$.

Avec cette notion, on a la formule suivante, dite **formule de Taylor-Young** :

3.2.1 Théorème. *Soit f une fonction n -fois dérivable au voisinage de 0. Alors elle admet un DL à l’ordre n en 0, qui est donné par la formule :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

(ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f).

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Grâce à la formule de Taylor-Young, on obtient les DL suivants au voisinage de 0 (on remarque qu’il est logique de n’avoir que des puissances paires dans la partie régulière du

DL de la fonction cos puisqu'elle est paire. De même, il n'y a que des puissances impaires dans la partie régulière du DL de la fonction sin puisqu'elle est impaire) :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a au voisinage de 0 :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

A partir de ce DL, on obtient par exemple :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + o(u^n)$$

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots + (-1)^n u^{2n} + o(u^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + \cdots + u^{2n} + o(u^{2n+1})$$

Enfin, on a au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

3.3 Règles de calcul

L'intérêt fondamental d'utiliser les DL pour trouver des équivalents en 0 tient au fait qu'on ne peut pas additionner des équivalents, alors qu'on peut additionner des DL : pour trouver un équivalent à $f + g$ en 0, on additionnera leurs DL jusqu'à ce qu'on obtienne un terme non nul, qui fournira l'équivalent cherché.

On peut aussi multiplier et composer les DL, sous certaines conditions :

3.3.1 Proposition. *Si f et g admettent toutes les deux un DL à l'ordre n au voisinage de 0, alors*

- (i) *la fonction $f + g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est la somme des parties régulières des DL de f et g ;*
- (ii) *la fonction fg admet un DL à l'ordre n dont la partie régulière est la somme des termes de degré $\leq n$ dans le produit des parties régulières des DL de f et g .*
- (iii) *Si de plus $f(0) = 0$, alors la fonction $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en substituant la partie régulière du DL de f dans la partie régulière du DL de g , et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.*

3.3.2 Remarques. (i) L'hypothèse $f(0) = 0$ est indispensable pour composer les DL!

- (ii) ATTENTION, il faut aller jusqu'à l'ordre n dans chacun des DL pour être sûr de ne pas oublier de termes !

Illustrons par quelques exemples les règles données ci-dessus :

3.3.3 Exemples. (i) On cherche à trouver un équivalent en 0 à la fonction $1 - \cos(x)$.

On a, au voisinage de 0, $\cos(x) = 1 + o(1)$, donc on obtient $1 - \cos(x) = o(1)$. C'est insuffisant pour trouver un équivalent ! On regarde alors le DL de $\cos(x)$ à un plus grand ordre : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Le DL à l'ordre 2 de $1 - \cos(x)$ est donc $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Cela nous permet d'affirmer $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ en 0.

- (ii) On cherche à trouver un équivalent en 0 à la fonction $f(x) = e^{\sin x} - e^x$. Comme $\sin(0) = 0$, on peut utiliser la composée des DL.

- A l'ordre 1, on a $\sin x = x + o(x)$, $e^u = 1 + u + o(u)$, et donc $e^{\sin x} = 1 + x + o(x)$. Or $e^x = 1 + x + o(x)$, donc on obtient $f(x) = o(x)$. C'est insuffisant, on passe à l'ordre 2.

- A l'ordre 2, on a $\sin x = x + o(x^2)$, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et donc $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Or $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc on obtient $f(x) = o(x^2)$. C'est insuffisant, on passe à l'ordre 3.

- A l'ordre 3, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, et donc

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \frac{1}{36}x^6\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{6}x^5 + \dots\right) + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Comme $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on obtient $f(x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ainsi, on a montré $f(x) \sim -\frac{x^3}{6}$ en 0.

3.4 Développements limités au voisinage de $x_0 \neq 0$ et en $+\infty$

On peut vouloir approximer une fonction en un réel x_0 non nul, ou en $\pm\infty$. En fait, cette étude peut toujours se ramener à celle d'un DL au voisinage de 0.

Développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit x_0 un réel, et f une fonction définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 . On veut étudier le comportement de f au voisinage de x_0 . Pour ce faire

- (i) On introduit la fonction $h(t) = f(t + x_0)$ (ce qui se traduit par $f(x) = h(x - x_0)$). Etudier f au voisinage de x_0 , c'est exactement étudier h au voisinage de 0.
- (ii) On détermine (quand c'est possible) le DL à l'ordre n en 0 de la fonction h :

$$h(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + o(t^n).$$

- (iii) On se ramène ensuite à la fonction f au voisinage de x_0 en remplaçant la variable t par $x - x_0$. On a ainsi

$$f(x) = h(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

C'est cette formule qu'on appelle le DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0 .

On a toujours dans ce cas la formule de Taylor-Young :

3.4.1 Théorème. *Si f est n -fois dérivable au voisinage de x_0 , alors f admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0 , qui est donné par la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

3.4.2 Exemple. Cherchons à calculer le DL à l'ordre 4 de e^x au voisinage de 1.

- (i) Soit on utilise la formule de Taylor-Young (ici particulièrement simple d'utilisation).
- (ii) Soit on se ramène au voisinage de 0 selon la méthode précédente : on pose $h(t) = e^{t+1}$. On a $e^{t+1} = ee^t$, donc le DL à l'ordre 4 de h au voisinage de 0 est

$$h(t) = e + et + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^3 + \frac{e}{24}t^4 + o(t^4).$$

On en déduit ainsi le DL de e^x au voisinage de 1 :

$$e^x = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3 + \frac{e}{24}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4).$$

Développement limité en $+\infty$

On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$. Par définition, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ lorsque la fonction $x \mapsto g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 (plus précisément au voisinage de 0^+ , c'est-à-dire lorsqu'on se limite à étudier $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives).

3.4.3 Exemple. Considérons la fonction $f(x) = \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$. On a $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, l'inverse $y = \frac{1}{x}$ tend vers 0. Or on a vu que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1-y}$ admet pour DL à l'ordre n au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n + o(y^n)$.

On en déduit que :

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

est le DL de la fonction f à l'ordre n au voisinage de $+\infty$.

3.5 Applications des DL

Calcul de limites et d'équivalents

Un DL permet de donner une approximation d'une fonction par un polynôme, ce qui est précieux dans bien des situations : calcul de limites, recherche d'équivalents, étude d'une courbe, étude de branches infinies, position d'une courbe par rapport à ses asymptotes etc...

Donnons un exemple : calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

A priori, on ne peut pas conclure car on a une forme indéterminée : chacun des termes de la différence tend vers $+\infty$. Mais au voisinage de $+\infty$, on a

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

car $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$ pour $u = \frac{1}{x}$ au voisinage de 0. Donc on a

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où l'on tire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}$.

On remarque que ce DL nous prouve par la même occasion que la fonction $x \mapsto x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ a une asymptote au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.

Notons pour finir que plusieurs limites classiques (et à connaître) découlent immédiatement de calculs avec les DL. C'est le cas entre autres de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Estimation des termes d'erreur

Il est intéressant, et important en pratique, lorsqu'on approxime une fonction par la partie régulière de son DL à l'ordre n en 0, de calculer quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise. On a le théorème suivant (appelé l'**inégalité de Taylor-Lagrange**) :

3.5.1 Théorème. Soit f une fonction $n+1$ -fois dérivable sur un intervalle $] -a, a[$, et soit x un élément de $] -a, a[$. Si pour tout t entre 0 et x on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, alors

$$\left| f(x) - \left(f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right) \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3.5.2 Remarque. A l'ordre $n=0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange est une conséquence très simple du théorème des accroissements finis (théorème 2.1.2).

3.5.3 Exemple. Reprenons un exemple déjà abordé : on cherche à approximer sur l'intervalle $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ la fonction $x \mapsto \sin x$. Grâce aux inégalités de Taylor-Lagrange, on a les différentes inégalités suivantes :

- (i) Si on approxime grossièrement la fonction \sin par 0, on a, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ (puisque la dérivée de \sin est \cos , qui est majorée en valeur absolue par 1 sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$). Remarquons que cette inégalité est valable en fait pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'erreur commise est donc ici au maximum de $\frac{1}{2} = 0,5$.
- (ii) Si on utilise comme approximation de \sin la partie régulière de son DL à l'ordre 2, qui est $\sin x = x + o(x^2)$, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange donne $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$ (puisque la dérivée troisième de \sin est $-\cos$, qui est majorée en valeur absolue par 1 sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$). Sur cet intervalle, on a $|x^3| \leq \frac{1}{8}$, l'erreur commise en approxinant $\sin x$ par x est donc au maximum de $\frac{1}{48} = 0,021\dots$
- (iii) Si on utilise comme approximation de \sin la partie régulière de son DL à l'ordre 4, soit $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange donne $|\sin x - (x - \frac{x^3}{6})| \leq \frac{|x|^5}{120}$ (puisque la dérivée cinquième de \sin est \cos , qui est majorée en valeur absolue par 1 sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$). Sur cet intervalle, on a $|x^5| \leq \frac{1}{32}$, l'erreur commise en approxinant $\sin x$ par $x - \frac{1}{6}x^3$ est donc au maximum de $\frac{1}{3840} = 0,00026\dots$

Chapitre III

Les fonctions de plusieurs variables

On a vu dans le chapitre précédent tout l'intérêt de savoir faire l'approximation d'une fonction d'une variable par des fonctions plus simples à calculer. Dans la pratique, il est fréquent d'avoir à faire à des fonctions de plusieurs variables : la profondeur d'un océan peut être figurée sur une carte marine en fonction de deux variables (longitude, latitude), ou encore la température de l'atmosphère dans un relevé météo doit être accompagnée de l'altitude, la longitude et la latitude du point de mesure pour être utilisée. La technique du développement limité que nous avons appliquée aux fonctions d'une variable peut être généralisée à ce cadre. Nous allons voir dans ce chapitre comment obtenir le développement limité à l'ordre 1 des fonctions de plusieurs variables.

1 Géométrie dans \mathbb{R}^3

Le but de cette partie est de rappeler les règles de calculs dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Même si tout est formulé dans le cadre de \mathbb{R}^3 , toutes les propriétés énoncées dans les parties 1.1 et 1.2 sont aussi valides pour \mathbb{R}^2 (voir la remarque 1.2.5).

1.1 Triplets de \mathbb{R}^3 , points et vecteurs

Un triplet de nombres réels, (x, y, z) est la donnée dans un ordre précis de trois nombres réels x, y, z . Par exemple $(\sqrt{2}, 5, 1/2)$ est un triplet, qui est différent de $(1/2, \sqrt{2}, 5)$.

Un moyen de se représenter un triplet est d'y penser comme un point de l'espace ambiant : si on a fixé un repère orthonormé (c'est-à-dire : on a posé un cube d'arêtes de longueur 1, à un endroit fixé), à un point correspond un triplet (les coordonnées).

Sur les points, on ne sait pas faire de calcul. Pourtant, avec des triplets de nombres réels on sait faire des opérations. On parle alors de vecteurs plutôt que de triplets. On sait additionner deux vecteurs $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (x, y, z)$: $\vec{u} + \vec{v} = (a + x, b + y, c + z)$. Si λ est un réel (qu'on appelle plutôt "scalaire" pour bien montrer que ce n'est pas un vecteur), on sait aussi faire le produit d'un vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ par le scalaire λ : $\lambda \cdot \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. On note $\vec{0}$ le vecteur $(0, 0, 0)$.

1.1.1 Définition. La norme du vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ est le réel $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On dit d'un vecteur de norme 1 qu'il est *normé*.

On peut montrer par le calcul que la norme vérifie les mêmes propriétés que la valeur absolue dans \mathbb{R} , à savoir :

1.1.2 Proposition. Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et λ un nombre réel.

- (i) $\|\vec{u}\| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
- (ii) $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$.
- (iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Munissons l'espace ambiant d'un repère orthonormé. On sait représenter un triplet par un point de cet espace. Pour représenter un vecteur (c'est-à-dire un triplet avec lequel on s'autorise à faire des calculs), c'est naturellement plus compliqué!

1.1.3 Définition. Soit M_1 et M_2 deux points, dont les coordonnées sont (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) . Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est le triplet $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

On vérifie alors que :

- 1.1.4 Proposition.**
- (i) $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ pour tout point M ;
 - (ii) $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}$ pour deux points M_1 et M_2 ;
 - (iii) $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_3}$, pour trois points M_1, M_2 et M_3 .

Bien sûr, tout vecteur \vec{u} peut se mettre sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$, mais les deux points M_1 et M_2 ne sont pas uniques (par exemple si $\vec{u} = (x, y, z)$ on peut prendre $(1, 2, -37)$ et $(x+1, y+2, z-37)$ comme coordonnées pour M_1 et M_2).

Le langage des vecteurs permet d'exprimer très simplement le fait que trois points distincts de l'espace M, P et Q sont alignés : l'alignement a lieu quand on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{MQ}$. Si on ne veut pas avoir à préciser "distincts", on remplace cette condition par celle de pouvoir trouver deux réels λ, μ tels que : $\lambda \cdot \overrightarrow{MP} + \mu \cdot \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$. Ceci justifie la définition suivante :

1.1.5 Définition. On dit de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} qu'ils sont *colinéaires* s'il est possible de trouver deux réels λ et μ dont l'un au moins n'est pas nul et tels que : $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

1.1.6 Proposition. Les deux vecteurs $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ sont colinéaires dans \mathbb{R}^3 si et seulement si les trois nombres $x_u y_v - y_u x_v$, $y_u z_v - z_u y_v$ et $z_u x_v - x_u z_v$ sont nuls.

1.1.7 Notation. Si a, b, x, y sont quatre réels, on pose $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = ay - bx$.

La condition de colinéarité ci-dessus peut alors se retenir comme :

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = 0.$$

On dispose donc d'un moyen pour décrire la droite passant par deux points M_1 et M_2 dont on connaît les coordonnées : un point P appartient à cette droite si $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1P}$ sont colinéaires, donc si les coordonnées (x, y, z) de P vérifient

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x - x_1 \\ y_2 - y_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y - y_1 \\ z_2 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & x - x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.1)$$

où (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées de M_1 et (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées de M_2 .

1.1.8 Remarque. Dans l'espace à 3 dimensions, une droite est donnée par 2 équations non proportionnelles. La formule (1.1) a beau fournir 3 équations, une de celles-ci pourra toujours être déduite à partir des deux autres. Exemple : un point $M(x, y, z)$ est sur la droite passant par $M_1(1, 0, 2)$ et $M_2(0, 2, 2)$ si $2x + y = 2$ et $z = 2$ (ici, la deuxième et la troisième équation sont proportionnelles).

1.2 Produit scalaire

En plus des deux opérations (addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire) dont le résultat est toujours un vecteur, on définit le produit scalaire de deux vecteurs, dont le résultat est un scalaire (un réel!) :

1.2.1 Définitions. Soit $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ défini par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

On trouve dans les livres beaucoup d'autres notations pour le produit scalaire, comme par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

En faisant les calculs, on peut montrer que :

1.2.2 Propriétés. Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et λ un nombre réel.

- (i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.
- (ii) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.
- (iii) $\langle \lambda \cdot \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \cdot \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
- (iv) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$, donc $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ et l'égalité a lieu si et seulement si \vec{u} est le vecteur nul.

Mettons en pratique ces propriétés sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part : $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \geq \|\vec{u} + \vec{v}\| \geq 0$, donc $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \geq (\|\vec{u} + \vec{v}\|)^2$.

Aussi peut-on écrire :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \\ &\geq \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

On tire donc :

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \geq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

En appliquant cette propriété à \vec{u} et $-\vec{v}$, on trouve

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{-v}\| \\ &\geq \langle \vec{u}, -\vec{v} \rangle = - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Au total, on a montré que :

1.2.3 Proposition. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, et l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Dans le calcul précédent, on trouve le théorème de Pythagore, c'est-à-dire $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ a lieu si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

D'où la définition :

1.2.4 Définition. On dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$. S'il s'agit de vecteurs de norme 1, on parle alors de vecteurs orthonormaux.

Avec cette définition, l'orthogonalité de deux vecteurs correspond à la notion intuitive d'angle droit entre les deux vecteurs.

Si M_1, M_2, M_3, M_4 sont quatre points de l'espace (tels que $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$), alors nous disposons d'un moyen pour écrire que les droites (M_1M_2) et (M_3M_4) sont orthogonales : il suffit d'écrire que $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{M_3M_4}$. Avec les coordonnées par rapport à un repère orthonormé :

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3) = 0.$$

1.2.5 Remarque. Tout ce qui a été dit jusqu'ici est en fait valable pour l'espace à n dimensions, pour n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Les coordonnées sont alors des n -uplets, vivant dans l'ensemble \mathbb{R}^n . En particulier, le cas de l'espace à deux dimensions est associé à l'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de réels et s'obtient en supprimant la troisième coordonnée, ou ce qui revient au même, en faisant $z = 0$ dans les formules ci-dessus.

Questions : qu'en est-il du cas $n = 1$? que devient le produit d'un réel et d'un vecteur ? et le produit scalaire ? que devient la norme ? que peut-on dire de deux réels "orthogonaux" ?

A présent, nous allons voir une construction qui ne peut être faite que dans le cas de \mathbb{R}^3 .

1.3 Une spécificité de \mathbb{R}^3 : le produit vectoriel

Dans la suite, on suppose que l'espace à trois dimensions est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, permettant de l'identifier avec \mathbb{R}^3 .

1.3.1 Définition. Soit $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur :

$$(y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v) = \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right). \quad (1.2)$$

On montre facilement par le calcul la principale propriété du produit vectoriel :

1.3.2 Proposition. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la fois à \vec{u} et à \vec{v} .

Comme on l'a déjà vu plus haut, le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} est nul si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Les calculs montrent :

1.3.3 Proposition. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et λ un nombre réel.

- (i) $(\lambda \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- (ii) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- (iii) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- (iv) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- (v) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

Calculer le produit vectoriel de deux vecteurs permet donc de savoir si ces deux vecteurs sont colinéaires (si le résultat est nul !). L'autre intérêt est de construire facilement un nouveau repère orthonormé :

1.3.4 Corollaire. Si \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont deux vecteurs orthogonaux et normés de \mathbb{R}^3 alors $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé de l'espace.

Le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est direct si $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Il est indirect sinon (et dans ce cas, il est facile de montrer qu'alors $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$).

D'après le point (v) de la proposition 1.3.3, le couple de réels $(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|)$ est un élément de \mathbb{R}^2 qui est toujours sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. On peut donc affirmer :

1.3.5 Corollaire. Pour tous \vec{u} et \vec{v} vecteurs de l'espace il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta \quad \text{et} \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

1.3.6 Remarque. Contrairement au produit scalaire, le calcul du produit vectoriel dépend (de l'orientation) de la base orthonormée dans laquelle on fait le calcul. En utilisant les propriétés 1.3.3, on trouve que la formule (1.2) appliquée aux coordonnées dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donne le même résultat que lorsqu'on l'applique aux coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si et seulement si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe. Si elle est indirecte, la formule (1.2) appliquée aux coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donne le vecteur opposé à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

1.4 Equation d'un plan dans \mathbb{R}^3

Dans ce dernier paragraphe nous introduisons un dernier outil. Il s'agit du *produit mixte* que nous nommerons plutôt *déterminant*. Rappelons que comme dans les paragraphes précédents, l'espace ambiant est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associée permet d'identifier l'espace des vecteurs avec \mathbb{R}^3 .

1.4.1 Définition. Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace. On appelle déterminant de ces trois vecteurs et on note $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la quantité :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle.$$

Avec $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ et $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$ on a

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= x_u \begin{vmatrix} y_v & y_w \\ z_v & z_w \end{vmatrix} + y_u \begin{vmatrix} z_v & z_w \\ x_v & x_w \end{vmatrix} + z_u \begin{vmatrix} x_v & x_w \\ y_v & y_w \end{vmatrix} \\ &= x_u(y_v z_w - y_w z_v) + y_u(z_v x_w - z_w x_v) + z_u(x_v y_w - x_w y_v). \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.4.2 Proposition. Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace. Ces vecteurs sont coplanaires (sont dans un même plan) si et seulement si leur déterminant est nul.

Soit M_1, M_2 et M_3 trois points de l'espace. On a vu au (1.1) un critère pour savoir si trois points sont alignés à partir de leurs coordonnées. Si ces trois points ne sont pas alignés, M_1, M_2, M_3 définissent un plan : le seul qui les contienne. On dispose à présent d'un critère pour savoir si un point P , de coordonnées (x, y, z) , appartient à ce plan $(M_1 M_2 M_3)$: c'est le cas si $\overrightarrow{M_1 P}$, $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\overrightarrow{M_1 M_3}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si : $\det(\overrightarrow{M_1 P}, \overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0$. On a donc :

1.4.3 Proposition. L'équation du plan $(M_1 M_2 M_3)$ est :

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (y - y_1) \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

où (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) sont les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On termine en donnant une interprétation géométrique de la valeur absolue du déterminant :

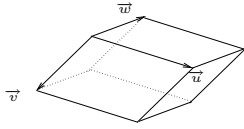


Fig 5.

$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ est égal au volume du seul parallélépipède que l'on peut construire en s'appuyant sur les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

Ainsi, conformément à l'intuition, trois vecteurs de l'espace sont coplanaires s'ils engendrent un parallélépipède de volume nul.

2 Fonctions de plusieurs variables

Comme exemple de fonction de plusieurs variables, reprenons celui de la profondeur d'un océan, représentée sur une carte marine en fonction des variables longitude et latitude : soit $f(x, y)$ la profondeur de l'océan au point de longitude x et latitude y .

2.1 Dérivées partielles

Si un marin fait route à latitude constante $y = y_0$, le tracé qu'indiquera son sondeur définit une fonction d'une seule variable $x \mapsto f(x, y_0)$. S'il vire à angle droit et fait route à longitude constante $x = x_0$, le sondeur se met à tracer le graphe d'une nouvelle fonction d'une seule variable $y \mapsto f(x_0, y)$.

2.1.1 Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit (x_0, y_0) un point de \mathbb{R}^2 . Si la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable au point x_0 , on appelle sa dérivée : la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point (x_0, y_0) , et on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, ou $\partial_1 f(x_0, y_0)$, pour exprimer qu'on dérive f par rapport à la *première* variable.

On calcule cette dérivée en considérant y comme une constante dans l'expression de $f(x, y)$ et en dérivant par rapport à la variable x . En échangeant les rôles de x et y , on obtient de la même manière la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) , notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, ou $\partial_2 f(x_0, y_0)$: on dérive par rapport à la *deuxième* variable.

La fonction qui à (x_0, y_0) associe la valeur $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ se note $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_1 f$. On définit de la même manière la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$, ou encore $\partial_2 f$.

2.1.2 Exemple. (i) Soit $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + xy^3$.

On trouve que f admet des dérivées partielles sur tout \mathbb{R}^2 et que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 2y_0^2 + y_0^3$ alors que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4x_0y_0 + 3x_0y_0^2$.

(ii) La dérivée partielle par rapport à x de $f : (x, y) \mapsto \ln(xy)$ existe aux points (x_0, y_0) tels que $\begin{cases} x_0 > 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_0 < 0 \\ y_0 < 0 \end{cases}$, et vaut : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1/x_0$. On trouve aussi que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1/y_0$.

Tout comme pour les fonctions d'une seule variable, on dit qu'une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en un point (x_0, y_0) si on peut assurer que $f(x, y)$ est aussi proche de $f(x_0, y_0)$ qu'on le souhaite, en imposant simplement à (x, y) d'être suffisamment proche de (x_0, y_0) . Rappelons que la proximité entre les deux nombres $f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$ se mesure par la valeur absolue de leur différence, alors que plus généralement la distance entre les deux points (x, y) et (x_0, y_0) correspond à la norme du vecteur les joignant.

Pour les fonctions de deux variables, la continuité est encore préservée par addition, produit, quotient et composition de fonctions continues. Aussi : une fonction polynomiale à deux variables est continue sur \mathbb{R}^2 ; une fraction rationnelle à deux variables est continue sur son domaine de définition ; une expression polynomiale ou rationnelle de fonctions cosinus, sinus, logarithme ou exponentielle faisant intervenir deux variables est continue sur son domaine de définition.

2.1.3 Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède en tout point (x_0, y_0) ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 , on dit que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Dans le cas de fonctions d'une seule variable, on a vu combien il est utile de pouvoir fractionner le calcul de la dérivée en utilisant des fonctions composées. Voici un cas de figure un peu plus général, faisant intervenir une fonction de plusieurs variables :

2.1.4 Proposition. Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables que l'on suppose de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Si $x = x(t)$ et $y = y(t)$ sont deux fonctions dérivables de la variable t , alors $t \mapsto z(t)$ est une fonction dérivable et on a

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t),$$

ce qu'on résume en : $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

2.1.5 Exemple. Soit $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$, $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$. Si $z(t) = f(x(t), y(t))$, on a :

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\sin t \cdot 2x(t)/(x(t)^2 + y(t)^4) + \cos t \cdot 4y(t)^3/(x(t)^2 + y(t)^4) \\ &= -2 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) / (\cos^2 t + \sin^4 t) \\ &= -\sin 4t / 2(\cos^2 t + \sin^4 t). \end{aligned}$$

En effet $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos(t)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x/(x^2 + y^4)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3/(x^2 + y^4)$.

En appliquant cette technique, on peut donc fractionner le calcul d'une dérivée partielle et on trouve :

2.1.6 Proposition. Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables que l'on suppose de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Si $x = x(s, t)$ et $y = y(s, t)$ sont deux fonctions des variables s et t qui sont de classe C^1 , alors $(s, t) \mapsto z(s, t)$ est une fonction de classe C^1 et ses dérivées partielles se calculent en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) \\ \text{et } \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t), \end{aligned}$$

où on a écrit “ (x, y) ” au lieu de $(x(s, t), y(s, t))$ pour résumer la formule. Pour résumer encore plus, on peut écrire : $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$ et $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$.

2.1.7 Exemple. Soit $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$, $x(s, t) = \cos(s + t)$ et $y(s, t) = \sin(s + 2t)$. Si $z(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) &= -\sin(s + t) \cdot 2x(s, t)/(x^2(s, t) + y^4(s, t)) \\ &\quad + \cos(s + 2t) \cdot 4y^3(s, t)/(x^2(s, t) + y^4(s, t)) \\ &= -2 \sin(s + t) \cos(s + t) / (\cos^2(s + t) + \sin^4(s + 2t)) \\ &\quad + 4 \cos(s + 2t) \sin^3(s + 2t) / (\cos^2(s + t) + \sin^4(s + 2t)). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) &= -\sin(s+t) \cdot 2x(s, t)/(x^2(s, t) + y^4(s, t)) \\ &\quad + 2\cos(s+2t) \cdot 4y^3(s, t)/(x^2(s, t) + y^4(s, t)) \\ &= -2\sin(s+t)\cos(s+t)/(\cos^2(s+t) + \sin^4(s+2t)) \\ &\quad + 8\cos(s+2t)\sin^3(s+2t)/(\cos^2(s+t) + \sin^4(s+2t)).\end{aligned}$$

En effet les dérivées partielles de f ont déjà été calculées plus haut et $\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) = -\sin(s+t)$, $\frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = -\sin(s+t)$, $\frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = \cos(s+2t)$ et enfin $\frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = 2\cos(s+2t)$.

2.2 Gradient

2.2.1 Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède au point (x_0, y_0) ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. On appelle *gradient* de f au point (x_0, y_0) le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

2.2.2 Exemple. Pour $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + xy^3$, le vecteur gradient en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\overrightarrow{\text{grad}}_f(x, y) = (3x^2 + 2y^2 + y^3, 4xy + 3xy^2)$$

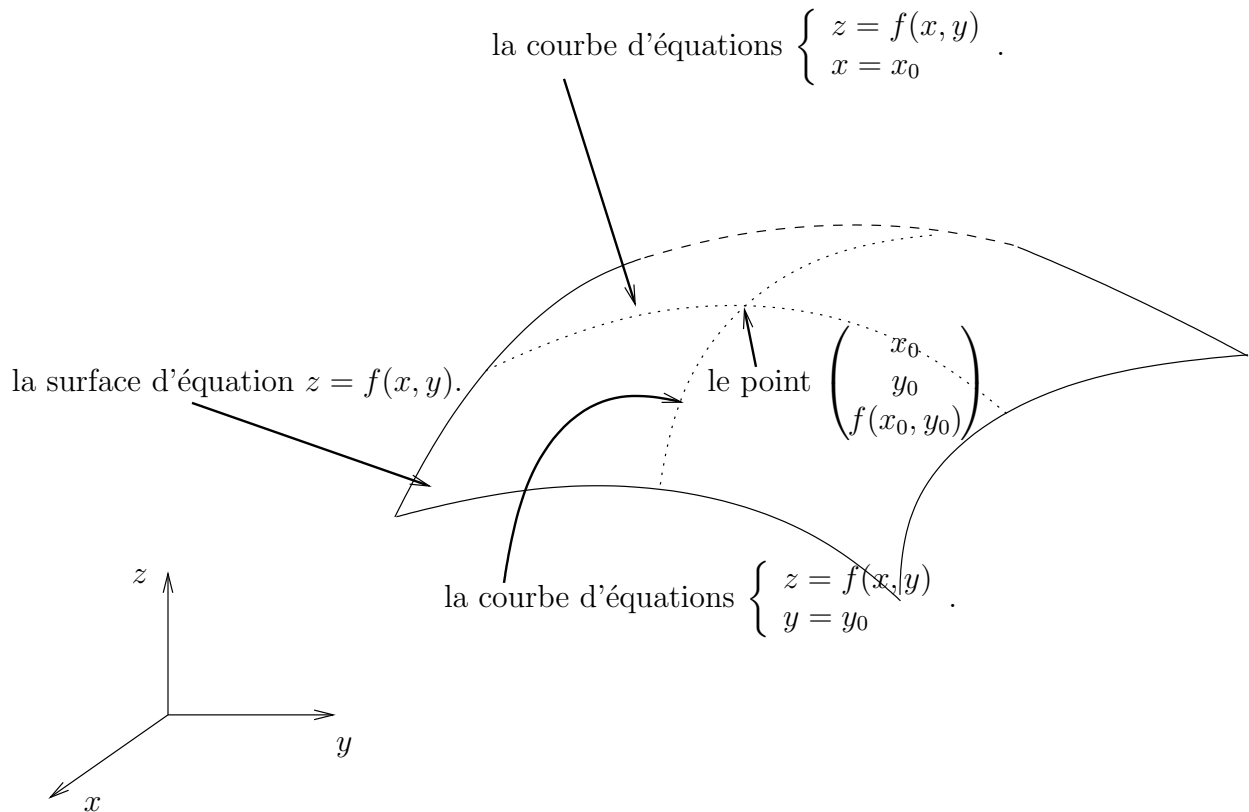
Pour une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , cette notion de vecteur gradient, rassemblant les deux dérivées partielles, généralise la notion de dérivée d'une fonction d'une seule variable. Nous allons voir comment le gradient permet de trouver ce qui généralise la notion de droite tangente et d'obtenir l'approximation affine locale de la fonction.

2.3 Surface représentative et courbes de niveau

Si l'on veut représenter graphiquement une fonction de deux variables, il est naturel de s'inspirer de ce que l'on sait faire pour les fonctions d'une seule variable : les deux variables sont représentées comme les coordonnées d'un point du plan, et on introduit une nouvelle dimension pour représenter la valeur de la fonction au dessus du point "variable". Ainsi : on représente graphiquement les valeurs d'une fonction de deux variables f par l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace à trois dimensions dont la troisième coordonnée vérifie :

$$z = f(x, y).$$

On voit donc que la "courbe représentative" d'une fonction d'une seule variable se généralise, quand il y a deux variables, à une *surface représentative*. Par exemple, si la terre était plate, le fond de la mer serait une représentation graphique de la fonction "profondeur de la mer" dont nous avons parlé. Un autre exemple de surface représentative : la carte en relief de l'IGN de la chaîne des Puys représentant la fonction qui à un point géographique associe son altitude.

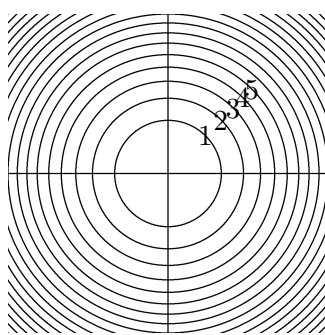


On voit que cette manière de représenter une fonction n'est pas très pratique : le dessin sur une feuille ne peut que suggérer la forme de la surface représentative. Pour cette raison, on a recours à une autre technique. Par exemple, un cartographe sait donner sur une feuille de papier une idée de la forme du fond de la mer, ou de celle d'une montagne. Pour cela, il dessine des lignes de niveau sur une carte (et il ajoute des couleurs).

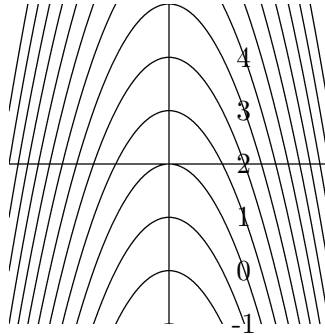
2.3.1 Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un réel. L'ensemble

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$$

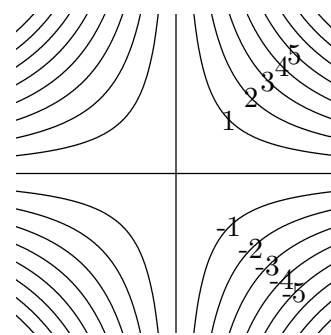
s'appelle la *ligne de niveau* a de la fonction f .



lignes de niveau de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$



lignes de niveau de $(x, y) \mapsto y + x^2$



lignes de niveau de $(x, y) \mapsto xy$

Généralement on choisit un écart d'altitude Δz constant entre deux courbes de niveau consécutives. Cette représentation permet de connaître les variations de la fonction, avec une précision de Δz .

2.3.2 Remarque. (i) Si $a \neq b$, les lignes de niveau L_a et L_b n'ont pas de point commun.

(ii) Chaque point du domaine de définition de f est sur une ligne de niveau de f .

Voyons à présent le lien entre le gradient et ces deux manières de représenter une fonction.

2.3.3 Définition. Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et (x_0, y_0) un point de \mathbb{R}^2 tel que $\overrightarrow{\text{grad}}_f(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$. Un point (x, y, z) de \mathbb{R}^3 appartient au *plan tangent* à la surface représentative de f au dessus de (x_0, y_0) s'il vérifie l'équation :

$$P : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.1)$$

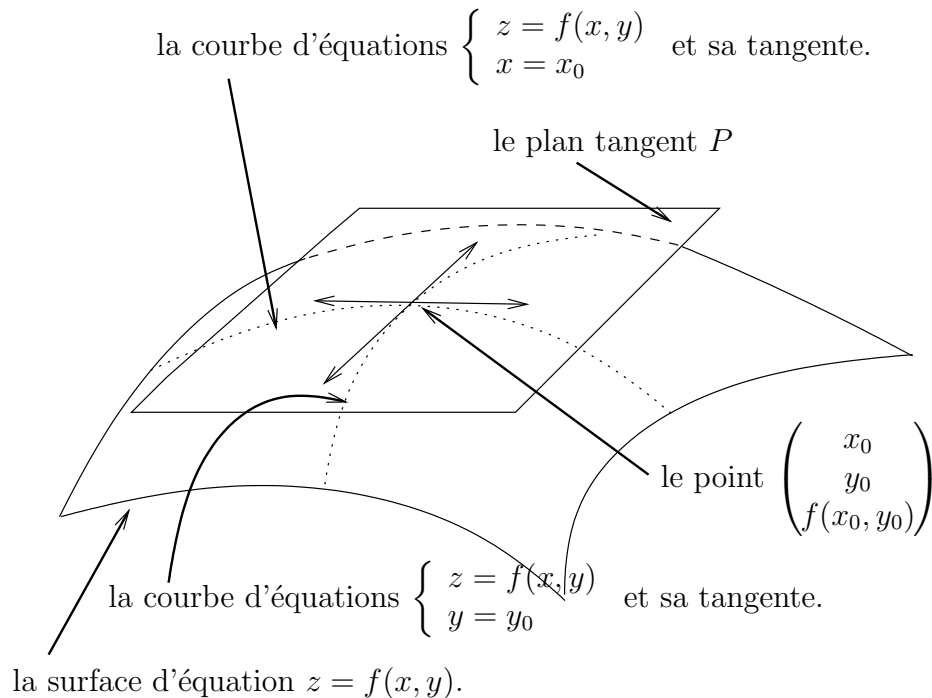
2.3.4 Remarque. (i) En utilisant les notations $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et $M = (x, y, z)$ dans \mathbb{R}^3 , on peut résumer cette équation par : M appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal au vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$.

(ii) Une autre manière (encore plus résumée) de retenir cette équation est de s'inspirer de l'équation de la tangente pour les fonctions d'une variable :

$$P : z = f(X_0) + \langle \overrightarrow{\text{grad}}_f(X_0), \overrightarrow{X_0X} \rangle ,$$

où la variable $x \in \mathbb{R}$ est remplacé par le point variable $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, le point au dessus duquel on cherche la tangente, $x_0 \in \mathbb{R}$, est remplacé par $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{\text{grad}}_f(X_0)$ remplace la dérivée $f'(x_0)$.

Ce plan tangent P possède la propriété suivante : si une courbe tracée sur la surface représentative de f passe par $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, sa tangente, si elle existe, est une droite du plan P .



C'est le plan qui réalise la meilleure approximation de la surface représentative au voisinage de (x_0, y_0) .

Ces propriétés sont la conséquence de la proposition suivante :

2.3.5 Proposition. Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et $X_0 = (x_0, y_0)$ un point de \mathbb{R}^2 . Pour tout $X = (x, y)$, on a :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad (2.2)$$

En résumé :

$$f(X) = f(X_0) + \langle \overrightarrow{\text{grad}}_f(X_0), \overrightarrow{X_0X} \rangle + o(\|\overrightarrow{X_0X}\|)$$

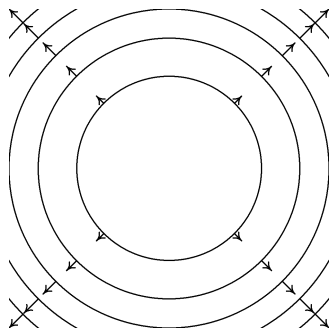
L'équation (2.2) montre que quand f est de classe C^1 , on peut en faire localement l'approximation par un polynôme de degré 1 en x et y , c'est-à-dire : faire une approximation affine de f au voisinage de $X_0 = (x_0, y_0)$.

Connaître le gradient permet donc de savoir à quoi ressemble, localement, la surface représentative de la fonction.

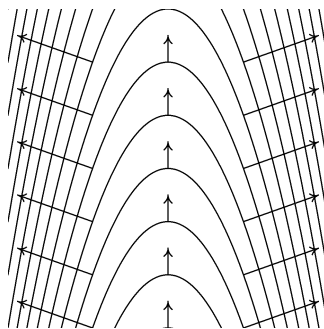
Regardons à présent le cas de la représentation par lignes de niveau. Si le gradient en (x_0, y_0) est non nul, on peut montrer que la ligne de niveau passant par (x_0, y_0) possède une tangente, qui s'obtient en faisant l'intersection du plan horizontal qui contient $M_0(x_0, y_0, f(X_0))$ avec le plan tangent en M_0 .

La tangente à la ligne de niveau $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}_f(x_0, y_0)$. En utilisant aussi (2.2), on trouve que

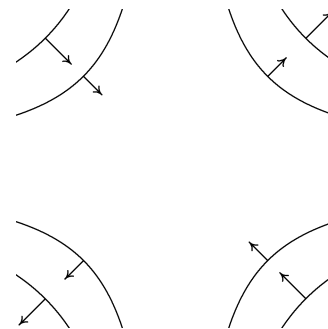
2.3.6 Proposition. Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et $X_0(x_0, y_0)$ un point de \mathbb{R}^2 tel que $\overrightarrow{\text{grad}}_f(X_0) \neq \vec{0}$. Alors la ligne de niveau de f qui passe par X_0 a sa tangente perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}_f(X_0)$. De plus ce vecteur gradient pointe dans la direction des niveaux croissants.



gradient et lignes de niveau de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$



gradient et lignes de niveau de $(x, y) \mapsto y + x^2$



gradient et lignes de niveau de $(x, y) \mapsto xy$

Chapitre IV

Primitives et Équations Différentielles

Une *équation différentielle* est une équation qui met en relation une **fonction inconnue** avec une ou plusieurs de ses dérivées.

Ce type d'équation est omniprésent dès que l'on veut modéliser un phénomène dans le temps. Dans ce chapitre nous allons en voir quelques exemples.

Sauf indication contraire, y désignera la fonction inconnue. Elle sera -par défaut- définie sur un intervalle noté I .

1 Primitives

1.1 Généralités

Le type le plus élémentaire d'équations différentielles est celui-ci :

$$y' = f \tag{1.1}$$

où f est une fonction donnée. Une telle équation a une solution dès que f est continue. Les solutions de (1.1) sont alors appelées les **primitives** de f .

Énonçons quelques propriétés des primitives :

1.1.1 Proposition. (i) Si F et G sont deux primitives de f alors $F - G$ est constante sur l'intervalle I . De façon équivalente : les primitives de f sont les fonctions de la forme $F + c$ où F est une primitive fixée et c une constante.

(ii) Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf pour toute constante λ .

1.1.2 Exemple. Les primitives de la fonction $x \mapsto 7x^4 + 22x^3$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{7}{5}x^5 + \frac{11}{2}x^4 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

La propriété (i) ci-dessus a pour conséquence :

1.1.3 Proposition. Soit $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de (1.1) qui prend la valeur l en a .

Dans la pratique, on trouve les primitives de f en reconnaissant en f la dérivée d'une fonction usuelle (à l'aide du tableau 1.3 par exemple) ou plus généralement en utilisant de façon inversée les règles de dérivation. C'est ce que nous allons développer dans les deux prochains paragraphes.

1.1.4 Notations. On utilise quelquefois la *notation intégrale* pour désigner une primitive arbitraire :

$$y(x) = \int f(x) dx \quad \text{signifie que pour tout } x \in I, \quad y'(x) = f(x) \quad (1.2)$$

1.2 Primitives de quelques fonctions usuelles

En se référant au chapitre sur la dérivation :

$f(x)$	$y(x)$ tel que $y'(x) = f(x)$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$

(1.3)

1.2.1 Exemples. (i) $f(x) = \sqrt{x}$. Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, on obtient :

$$y'(x) = \sqrt{x} \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2x} + 4 \sin x$. Grâce à la linéarité (cf. (ii) de la page précédente) et au tableau :

$$y'(x) = \frac{1}{2x} + 4 \sin x \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{1}{2} \ln(|x|) - 4 \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.3 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée

La fonction $f(x) = 2x \cos(x^2)$ n'apparaît pas dans le tableau (1.3), pourtant on y trouve une fonction très voisine : \cos , dont les primitives sont les fonctions $x \mapsto \sin(x) + c$. Soyons plus précis : on a $f(x) = 2x \cos(u(x))$ où la fonction $u(x)$ est donnée par $u(x) = x^2$. Remarquons que $2x = u'(x)$, donc :

$$f(x) = u'(x) \sin'(u(x))$$

Ainsi, on reconnaît dans l'expression de f la dérivée d'une fonction composée, en effet si :

$$y(x) = \sin(u(x))$$

alors

$$y'(x) = u'(x) \sin'(u(x))$$

par la formule bien connue de *dérivation d'une fonction composée*.

Conclusion : les primitives de $2x \cos(x^2)$ sont les fonctions $y(x) = \sin(x^2) + c$.

Il est donc indispensable de connaître les primitives des fonctions usuelles et de se souvenir de la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d}{dx} [g(u(x))] = u'(x)g'(u(x))$$

On peut retenir ce qui précède à l'aide de la notation intégrale pour les primitives (1.2) et de la notation différentielle, sous la forme :

$$\int u'(x)f(u(x)) dx = \int f(u)du \quad (1.4)$$

sans oublier de substituer u par $u(x)$ à la fin des calculs.

1.3.1 Exemples. (i) $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$. On a $f(x) = u'(x)g'(u(x))$ avec $u(x) = 2x+1$ et $g'(u) = \sqrt{u}$. D'où :

$$y'(x) = f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(ii) $f(x) = xe^{x^2}$. On a $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)g'(u(x))$ avec $u(x) = x^2$ et $g'(u) = e^u$. D'où :

$$y'(x) = f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

(iii) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On a $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}u'(x)g'(u(x))$ avec $u(x) = x^2+1$ et $g'(u) = \frac{1}{u}$. D'où :

$$y'(x) = f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.$$

1.4 Primitivation par parties

Supposons que la fonction f dont on cherche les primitives se présente sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$. La règle de dérivation d'un produit de fonctions donne :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = f(x) + g(x)$$

donc $f(x) = (uv)'(x) - g(x)$ et si $w(x)$ désigne une primitive de g , alors les primitives de f sont les fonctions : $x \mapsto (uv)(x) - w(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Cette technique, appelée *primitivation par parties*, peut se mémoriser ainsi :

$$\int u'(x)v(x)dx = (uv)(x) - \int u(x)v'(x)dx. \quad (1.5)$$

1.4.1 Exemples. Déterminons les primitives de f dans les cas suivants :

(i) $f(x) = xe^x$. Posons $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$. Il vient :

$$y'(x) = xe^x \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$$

(ii) $f(x) = x \sin x$. Choisissons $u'(x) = \sin x$, $v(x) = x$. Il vient :

$$y'(x) = x \sin x \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c,$$

(iii) $f(x) = \ln x$. On constate que $f(x) = u'(x)v(x)$ avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$. C'est intéressant car la fonction $u(x)v'(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ est facile à primitiver... :

$$y'(x) = \ln x \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = x \ln x - x + c$$

(iv) $f(x) = e^x \sin x$. Posons $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. Après la première primitivation par parties, on a :

$$(1) \quad \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Recommençons une primitivation par parties avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \cos x$. Alors :

$$(2) \quad \int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

En substituant dans (1) le calcul de $\int e^x \cos x dx$ fait dans (2) on obtient :

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,$$

dont on déduit le résultat :

$$y'(x) = e^x \sin x \quad \text{si et seulement si} \quad y(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

1.4.2 Remarque. Les exemples (i) et (ii) peuvent se systématiser au cas où la fonction à primitiver est du type $p(x)g(x)$ avec p un polynôme de degré d et $g(x)$ une fonction que l'on sait primitiver (au moins) d fois : on obtient les primitives de $p(x)g(x)$ après d primitivations par parties successives où on choisit toujours de dériver la partie polynomiale. Exemples :

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (x^2 + x + 2)e^x dx \\ &= (x^2 + x + 2)e^x - \int (2x + 1)e^x dx \quad (u' = e^x, v = x^2 + x + 2) \\ &= (x^2 + x + 2)e^x - \left((2x + 1)e^x - \int 2e^x dx \right) \quad (u' = e^x, v = 2x + 1) \\ &= (x^2 + x + 2)e^x - (2x + 1)e^x + 2e^x + c = (x^2 - x + 3)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (x^2 - 2x + 2) \cos x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2) \sin x - \int (2x - 2) \sin x dx \quad (u' = \cos x, v = x^2 - 2x + 2) \\ &= (x^2 - 2x + 2) \sin x - \left((2x - 2)(-\cos x) - \int 2(-\cos x) dx \right) \quad (u' = \sin x, v = 2x - 2) \\ &= (x^2 - 2x + 2) \sin x + (2x - 2) \cos x - 2 \sin x + c = (x^2 - 2x) \sin x + (2x - 2) \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 Équations Différentielles Linéaires du Premier Ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$y'(x) + ay(x) = f(x) \quad (2.1)$$

où a est une constante et f une fonction continue donnée.

2.0.3 Définition. L'équation homogène associée à (2.1) est l'équation différentielle :

$$y'(x) + ay(x) = 0 \quad (2.2)$$

La fonction f dans l'équation (2.1) est appelée *second membre*.

2.1 Principe de résolution

Il repose sur le principe de superposition :

2.1.1 Proposition. (Principe de superposition)

Si y_1 est solution de l'équation $y'(x) + ay(x) = f_1(x)$ et y_2 est solution de l'équation $y'(x) + ay(x) = f_2(x)$ alors $c.y_1 + d.y_2$ est solution de l'équation $y'(x) + ay(x) = c.f_1(x) + d.f_2(x)$ pour tous nombres réels c, d .

Ainsi, si y_p et y_q sont solutions de $y' + ay = f$ alors $y_q - y_p$ est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$, autrement dit $y_q = y_p + y$ où y est solution de l'équation homogène associée. On en déduit la stratégie suivante pour résoudre, en trois étapes, l'équation (2.1) :

Étape 1 : Recherche des solutions de l'équation homogène associée.

Étape 2 : Recherche d'une solution de l'équation complète.

Étape 3 : Écriture de la forme générale des solutions de l'équation complète.

2.2 Étape 1 : Résolution de l'équation homogène

Soit y une fonction ne s'annulant jamais sur I (en particulier soit $y(x) > 0$ pour tout $x \in I$, soit $y(x) < 0$ pour tout $x \in I$). Alors :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 & \text{ équivaut à : } \frac{y'}{y} = -a \\ & \text{équivaut à : } \ln(|y|) = -ax + b ; b \in \mathbb{R} \\ & \text{équivaut à : } |y| = e^{-ax+b} ; b \in \mathbb{R} \\ & \text{équivaut à : } |y| = ce^{-ax} ; c \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{équivaut à : } y = ce^{-ax} ; c \in \mathbb{R}^* \quad (2.4)$$

Bien sûr, il faut aussi rechercher des solutions parmi les fonctions qui s'annulent sur I .
En fait :

2.2.1 Lemme. Si $y' + ay = 0$ et si il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = 0$, alors $y(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Pour le prouver, on montre que pour toute solution $y(x)$, la fonction $y(x)e^{ax}$ est constante (sa dérivée est nulle).

Donc la seule solution oubliée était la solution évidente $y = 0$. Finalement :

2.2.2 Proposition. La forme générale des solutions de (2.2) est :

$$y(x) = ce^{-ax} \quad (2.5)$$

où c est une constante réelle quelconque.

2.2.3 Exemple. Résolvons l'équation homogène associée à l'équation :

$$y'(x) + 3y(x) = x + 1$$

(Ici, $I = \mathbb{R}$). Cette équation homogène est $y'(x) + 3y(x) = 0$. Ses solutions sont, d'après la proposition 2.5 :

$$y(x) = ce^{-3x} \text{ où } c \text{ est une constante réelle arbitraire.}$$

2.3 Étape 2 : recherche d'une solution de l'équation complète

Pour cela, on utilise la *méthode de la variation de la constante* :

On peut rechercher une solution particulière de $y' + ay = f$ sous la forme :

$$y_p(x) = c(x)e^{-ax} \quad (2.6)$$

Puis on écrit :

$$y_p \text{ satisfait (2.1)} \quad (2.7)$$

$$\text{si et seulement si : } (c(x)e^{-ax})' + ac(x)e^{-ax} = f(x),$$

$$\text{si et seulement si : } c'(x)e^{-ax} - ac(x)e^{-ax} + ac(x)e^{-ax} = f(x),$$

$$\text{si et seulement si : } c'(x)e^{-ax} = f(x)$$

$$\text{si et seulement si : } c'(x) = f(x)e^{ax}$$

On pourra retenir :

2.3.1 Proposition. La fonction $y_p(x) = c(x)e^{-ax}$ est solution de (2.1) si et seulement si $c(x)$ est une primitive de $f(x)e^{ax}$.

2.3.2 Exemple. Reprenons l'exemple précédent : $y'(x) + 3y(x) = x + 1$. Les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = ce^{-3x}$, c une constante arbitraire. La méthode de variation de la constante nous propose de chercher une solution de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-3x}$ où $c(x)$ est une fonction à déterminer. Appliquons l'équation différentielle à notre fonction candidate y_p :

$$y_p(x) = c(x)e^{-3x} \text{ vérifie } y'(x) + 3y(x) = x + 1 \text{ signifie que :}$$

$$\text{pour tout } x \in I, \quad (c(x)e^{-3x})' + 3c(x)e^{-3x} = x + 1,$$

$$c' \text{ est-à-dire : pour tout } x \in I, \quad c'(x)e^{-3x} - 3c(x)e^{-3x} + 3c(x)e^{-3x} = x + 1,$$

$$\text{ou encore : pour tout } x \in I, \quad c'(x)e^{-3x} = x + 1$$

$$\text{ou encore : pour tout } x \in I, \quad c'(x) = (x + 1)e^{3x}$$

On pouvait aussi utiliser la proposition 2.3.1 pour éviter le calcul.

Il reste le calcul des primitives de la fonction $(x + 1)e^{3x}$. Cela se fait ici à l'aide d'une primitivation par parties :

$$\begin{aligned}\int (x + 1)e^{3x} dx &= \frac{x + 1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{x + 1}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + k, \text{ où } k \text{ est une constante arbitraire}\end{aligned}$$

On cherche juste une solution donc fixons $k = 0$, ce qui donne $c(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{9}\right)e^{3x}$, donc la fonction

$$y_p(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9}$$

est une solution de $y'(x) + 3y(x) = x + 1$.

2.4 Étape 3 : Écriture de la forme générale des solutions

En vertu du principe de superposition 2.1.1, si y_p, y_q sont solutions de $y' + ay = f$, alors $y_q - y_p$ est solution de l'équation homogène associée : ainsi, y_q est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène. Réciproquement, pour toute solution y de l'équation homogène, la fonction $y_p + y$ est solution de $y' + ay = f$. Autrement dit, toute solution de $y' + ay = f$ est la somme d'une solution particulière y_p et d'une solution de l'équation homogène.

2.4.1 Proposition. *Si y_p désigne une solution donnée de (2.1) alors la forme générale des solutions de (2.1) est :*

$$y(x) = y_p(x) + ce^{-ax}$$

où c est une constante réelle arbitraire.

2.4.2 Exemple. Continuons le même exemple. On sait déjà que les solutions de l'équation homogène $y' + 3y = 0$ sont : $y(x) = ce^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$, et que la fonction $\frac{x}{3} + \frac{2}{9}$ est solution de $y' + 3y = x + 1$. Donc la forme générale des solutions de cette équation est :

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} + ce^{-3x} \text{ où } c \text{ est une constante réelle arbitraire}$$

2.5 Conditions initiales

Les solutions de (2.1) dépendent d'une constante c arbitraire, c'est-à-dire qu'il y a autant de solutions que de choix possibles pour c parmi les nombres réels. Cette constante est fixée dès qu'une *condition initiale* est imposée. Plus précisément :

2.5.1 Proposition. *Soit $x_0 \in I$ et $m_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction y solution de $y' + ay = f$ et satisfaisant la condition initiale $y(x_0) = m_0$.*

2.5.2 Exemple. Toujours pour le même exemple. On ajoute la condition initiale $y(0) = \frac{11}{9}$.

Soit $y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} + ce^{-3x}$ une solution de l'équation. Alors y satisfait la condition initiale si et seulement si $\frac{11}{9} = 0 + \frac{2}{9} + ce^0$, c'est-à-dire si et seulement si $c = 1$. Donc l'unique solution de $y'(x) + 3y(x) = x + 1$ satisfaisant la condition initiale $y(0) = \frac{11}{9}$ est la fonction :

$$y(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{9} + e^{-3x}$$

2.6 En résumé

- Étape 1 : On écrit les solutions de l'équation homogène grâce à la proposition (2.2.2) :

$$y(x) = ce^{-ax} \text{ où } c \text{ est une constante réelle arbitraire}$$

ou on retrouve ce résultat en refaisant le calcul (2.8).

- Étape 2 : On applique la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution de l'équation complète. La méthode consiste à chercher une solution sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-ax}$. On peut utiliser le résultat (2.3.1) :

$$y_p(x) = c(x)e^{-ax} \text{ est solution si et seulement si } c'(x) = f(x)e^{ax}$$

ou le retrouver en faisant le calcul (2.7).

- Étape 3 : On utilise la proposition 2.4.1 et les informations précédentes pour écrire la forme générale des solutions de l'équation différentielle :

$$\text{Les solutions de l'équation } y'(x) + ay(x) = f(x) \text{ sont les fonctions : } \\ y(x) = y_p(x) + ce^{-ax} \text{ où } c \text{ est une constante réelle.}$$

- Si une condition initiale est présente, on déterminera la constante c pour que la solution $y(x) = y_p(x) + ce^{-ax}$ satisfasse cette condition.

2.6.1 Remarque. Pour résoudre $y' + ay = f$, on peut aussi trouver un raccourci qui évite les étapes décrites précédemment. En effet, en multipliant l'équation différentielle par e^{ax} , le problème est ramené à un calcul de primitives :

$$\begin{aligned} y'(x) + ay(x) = f(x) & \text{ équivaut à : } e^{ax}y'(x) + ae^{ax}y(x) = e^{ax}f(x) \\ & \text{ équivaut à : } (e^{ax}y(x))' = e^{ax}f(x) \\ & \text{ équivaut à : } e^{ax}y(x) = \int e^{ax}f(x)dx = g(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ & \text{ équivaut à : } y(x) = g(x)e^{-ax} + ce^{-ax} ; \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.7 Approfondissement

On a traité le cas des équations différentielles $y' + ay = f$ où a est un nombre réel. Le cas où a est une fonction continue (sur le même intervalle I) se traite de façon identique et les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$y(x) = ce^{-A(x)}$$

où $A'(x) = a(x)$ et c est une constante réelle arbitraire. On détermine ensuite une solution de l'équation complète avec la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = c(x)e^{-A(x)}$. Enfin, on écrit la forme générale des solutions, qui résulte encore une fois de l'application du principe de superposition (cf. 2.4.1).

3 Équations Différentielles Linéaires Homogènes du Second Ordre

Considérons maintenant une *équation linéaire homogène du second ordre* :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (3.1)$$

où a, b, c sont des nombres réels et où on impose $a \neq 0$.

3.1 Résolution

3.1.1 Définition. L'équation caractéristique de l'équation (3.1) est l'équation du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.2)$$

La forme des solutions de (3.1) va dépendre des solutions de l'équation caractéristique. Rappelons que pour déterminer les solutions d'une équation du second degré telle que (3.2), on calcule son *discriminant* :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si le discriminant est strictement positif ($\Delta > 0$) alors les solutions de (3.2) sont réelles et distinctes (on parle de *racines réelles simples*), données par :

$$s_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si le discriminant est nul ($\Delta = 0$) alors (3.2) a une seule solution, réelle (on parle de *racine double*), donnée par :

$$s = \frac{-b}{2a}$$

- Si le discriminant est strictement négatif ($\Delta < 0$) alors l'équation (3.2) a deux solutions distinctes qui sont des nombres complexes conjugués donnés par :

$$s_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad s_2 = \frac{-b}{2a} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Pour le lecteur non familier des nombres complexes, on retiendra juste la définition des nombres (réels) : $\gamma = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ associés au cas $\Delta < 0$: ce sont eux qui serviront dans la suite (on a bien sûr $s_1 = \gamma + i\omega$ et $s_2 = \gamma - i\omega$).

En gardant les notations ci-dessus :

3.1.2 Proposition. La forme générale des solutions de (3.1) est :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x), \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des constantes réelles arbitraires}$$

avec

$y_1(x) = e^{s_1 x}$ et $y_2(x) = e^{s_2 x}$	si $\Delta > 0$
$y_1(x) = e^{s x}$ et $y_2(x) = x e^{s x}$	si $\Delta = 0$
$y_1(x) = \cos(\omega x) e^{\gamma x}$ et $y_2(x) = \sin(\omega x) e^{\gamma x}$	si $\Delta < 0$

Chapitre V

Intégrales

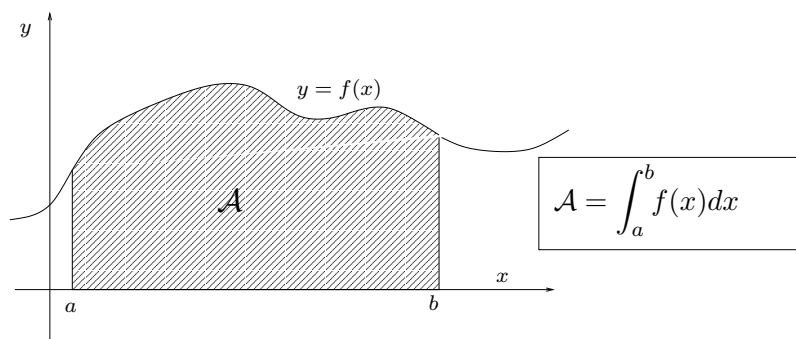
Quand on veut calculer :

- le travail effectué par une force sur un chemin donné,
- la vitesse d'un objet en chute libre au bout d'un temps donné,
- la hausse des prix sur une période de temps pour laquelle on connaît le taux d'inflation,
- et bien d'autres choses encore...

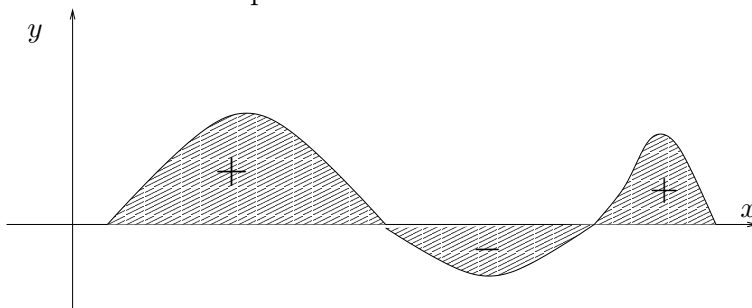
on a recours à un calcul d'intégrales. Nous allons donner une définition très intuitive de l'intégrale d'une fonction continue, puis énoncerons ses principales propriétés utiles pour les calculs.

1 Définition de l'intégrale

1.0.3 Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a \leq b$). L'intégrale de f entre a et b est l'aire algébrique délimitée par le graphe de f , l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$. Elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.

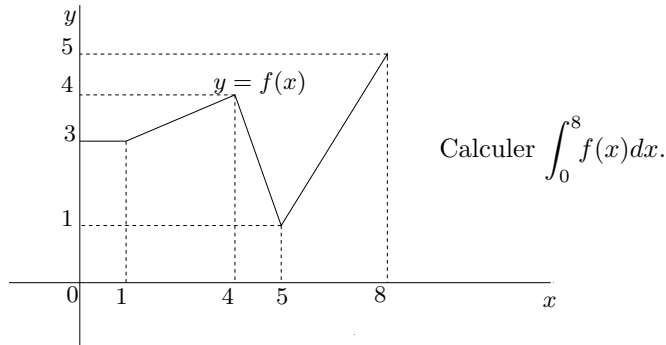


Par algébrique, on signifie que les portions du graphe de f au dessus de l'axe des abscisses ont une contribution positive et celles au dessous une contribution négative :



1.0.4 Définition. On définit $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $b \leq a$ par :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$



1.0.5 Exercice.

2 Le théorème fondamental du calcul intégral

2.0.6 Théorème. (Théorème fondamental du calcul intégral). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive quelconque de f . Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

2.0.7 Remarque. Puisque deux primitives F, G de f diffèrent d'une constante, on a $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ et il est clair que la formule dans le théorème ne dépend pas du choix de F . En fait, cette formule pourrait être prise comme une définition de l'intégrale.

2.0.8 Remarque. On a pour toute fonction g continûment dérivable sur $[a, b]$:

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$

Le théorème fondamental du calcul intégral (TFCI) nous fournit un outil de calcul pour les intégrales :

Pour calculer l'intégrale de f entre a et b , il suffit de déterminer une primitive de f sur cet intervalle et d'appliquer la formule du TFCI.

Réciproquement, le TFCI permet d'exprimer les primitives de f à l'aide d'intégrales :

2.0.9 Corollaire. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

2.0.10 Exemple. Si $g(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$ alors $g'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$.

3 Les principales propriétés de l'intégrale

Les vérifications de ce qui suit sont laissées en exercice d'approfondissement.

3.0.11 Proposition.

1) *Linéarité de l'intégrale :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$\int_a^b c f(t) dt = c \int_a^b f(t) dt \quad c \in \mathbb{R}$$

2) *Relation de Chasles :*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

3) *Croissance de l'intégrale :*

$$\text{Si } a \leq b \text{ et si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

3.0.12 Corollaire. (i) Si f est positive et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(ii) Si $|f|$ désigne la fonction valeur absolue de f et si $a \leq b$ alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

(iii) Si f est encadrée par deux constantes m, M , c'est-à-dire si pour tout $x \in I$ on a : $m \leq f(x) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

(iv) Il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\int_a^b f(t) dt = \frac{1}{b-a} f(c)$. (Théorème de la valeur moyenne)

3.0.13 Remarque. On a aussi :

– Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

– Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

– Si f est périodique de période T et $n \in \mathbb{Z}$ alors $\int_a^{a+nT} f(t) dt = n \int_a^{a+T} f(t) dt$.

4 Deux autres techniques de calcul

Le TFCI permet de disposer des techniques vues pour le calcul des primitives.

4.1 Intégration par parties

4.1.1 Proposition. *Si f et g sont continûment dérivables sur I alors :*

$$\boxed{\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.} \quad (\text{Intégration par parties})$$

Où par convention : $[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

4.1.2 Exemples. (i) Calculons $\int_0^1 xe^x dx$. On effectue la même intégration par parties que précédemment :

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

(ii) Calculons $\int_0^\pi x \sin x dx$ en intégrant par parties :

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = [x \cos x]_\pi^0 + [\sin x]_0^\pi = \pi.$$

(iii) Calculons $\int_1^e \ln x dx$ en intégrant par parties :

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.$$

4.2 Changements de variables

4.2.1 Théorème. *Soit φ continûment dérivable sur un intervalle J et f continue sur $\varphi(J)$. Alors :*

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad (\text{Formule de changement de variables pour les intégrales})$$

4.2.2 Remarque. On a “posé” $x = \varphi(t)$ ce qui “entraîne” $dx = \varphi'(t)dt$ et modifie les bornes $x = \varphi(a)$ par $t = a$ et $x = \varphi(b)$ par $t = b$.

4.2.3 Exemples.

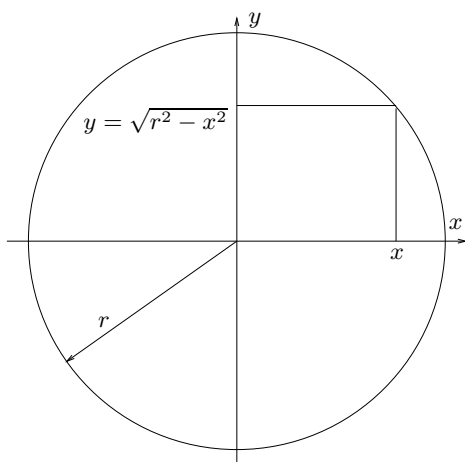
(i) Si f est continue et paire alors sa primitive F s'annulant en 0 est impaire. En effet

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ et en posant } t = -u :$$

$$F(x) = \int_0^{-x} f(-u) \cdot (-du) = - \int_0^{-x} f(-u)du = - \int_0^{-x} f(u)du = -F(-x).$$

De même, si f est impaire, ses primitives sont paires.

(ii) Calculons l'aire A du disque de centre O et de rayon r dans le plan euclidien. En munissant le plan d'un repère orthonormé de centre O et en appelant x et y les coordonnées associées aux axes, des considérations élémentaires montrent que $\frac{1}{4}A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.



Posons $x = r \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$.

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} (r \cos t) \cdot (r \cos t dt) \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= r^2 \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

On retrouve la formule : $A = \pi r^2$.

(iii) Calculons $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Proposons $x = \tan t$: en effet, cela donne

$$dx = (1 + \tan^2 t) dt = (1 + x^2) dt, \quad \text{d'où : } dt = \frac{dx}{1 + x^2},$$

Comme $\tan 0 = 0$ et $\tan(\pi/4) = 1$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} dt = [t]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

5 Quelques applications de l'intégration

5.1 Longueur d'une courbe

Quelle est la longueur D de la trajectoire dans le plan décrite par un véhicule de coordonnées $M(x(t), y(t))$ entre $t = a$ et $t = b$?

Considérons le vecteur vitesse $V(t) = (x'(t), y'(t))$ associé. Il donne la direction de la tangente à la trajectoire et la vitesse instantanée du véhicule. Sa norme est :

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

On peut montrer que :

$$D = \int_a^b v(t) dt.$$

5.1.1 Exercice. 1) Calculer D pour $M(t) = (t, 2t^{3/2})$, $a = 0$, $b = 1$.

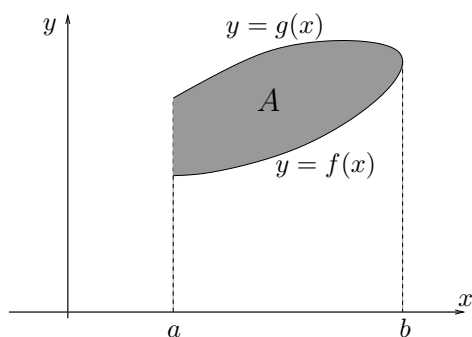
2) Calculer D pour $M(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$. On pourra utiliser le changement de variables $2t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (Réponse : $D = (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))/4$).

5.2 Calculs de surface

Nous avons calculé l'aire d'un disque de rayon r . Plus généralement, si une région R du plan peut être caractérisée comme l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq g(x),$$

alors l'aire A est donnée par : $A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.



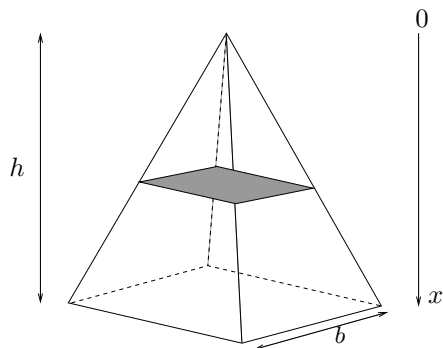
5.2.1 Exercice. Aire de la région intérieure à l'ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

5.3 Calculs de volumes

Considérons un solide dans l'espace et fixons un axe (Ox) . Supposons que les coupes du solide orthogonales à l'axe Ox ont une aire $A(x)$ continue en x , x variant entre deux valeurs finies a et b . Le volume V du solide est donné par :

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

5.3.1 Exercice. Calculer le volume de cette pyramide de base carrée.



5.3.2 Exemple. Un solide est dit de *révolution* s'il est obtenu par rotation du graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$ autour de l'axe (Ox) . Le graphe de la fonction étant initialement tracé dans un plan (Oxy) . Les sections du solides (orthogonales à l'axe Ox) sont des disques de rayon $|f(x)|$. Par conséquent :

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

5.3.3 Exercice. Calculer le volume d'une boule de rayon 1.