Suites

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques
XA100M

1. INTRODUCTION : QU'EST-CE QU'UNE SUITE ?

On appelle suite de nombres un paquet de nombres donnés dans un certain ordre et que l'on peut énumérer.
C'est donc un paquet de nombres donnés les uns à la suite des autres.
Par exemple,

$$1 \quad 4 \quad -2 \quad 6 \quad 7$$

est une suite de (cinq) nombres et

$$4 \quad 1 \quad -2 \quad 7 \quad 6$$

est une **autre** suite de (cinq) nombres.
Une suite de nombres n'est pas nécessairement finie :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \textit{etc.}$$

est une suite infinie de nombres. Il nous faut trouver une méthode pour rendre le terme « *etc.* » non ambigü.
Chaque nombre d'une suite s'appelle un **terme** de cette suite.

On donne **trois** façons de décrire une suite.

1re méthode : on cite tous les termes de la suite dans l'ordre. Par exemple, $1 \ 4 \ -2 \ 6 \ 7$. Cela n'est possible que lorsque la suite a un nombre fini de termes.

2e méthode : on donne une recette de calcul de chaque terme. Par exemple, on construit une suite w en disant que, pour chaque entier $n \geq 1$, le terme d'indice n de la suite vaut $4,5 \times n$. Le premier terme est $w_1 = 4,5$, le deuxième terme est $w_2 = 4,5 \times 2 = 9$, le dix-millième terme est

$$w_{10000} = 4,5 \times 10000 = 45000.$$

De même, avec cette méthode, la suite de tous les entiers naturels peut-être décrite sans ambigüité, plutôt que de dire : on décrit la suite u par

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \textit{etc.}$$

on dira : on décrit la suite u par $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 0$.

3e méthode : on donne le premier terme de la suite puis une recette de calcul de chaque terme en fonction des termes précédents. Par exemple, on construit une suite v en disant

– $v_1 = 1$: le terme d'indice 1 de la suite v est 1 ;
– pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + 3$: on construit chaque terme en ajoutant 3 au précédent.

Le premier terme de cette suite est $v_1 = 1$, le deuxième est $v_2 = v_1 + 3 = 1 + 3 = 4$, le troisième est $v_3 = v_2 + 3 = 4 + 3 = 7$ *etc.* Avec cette méthode, si on voulait calculer le dix-millième terme, il faudrait déjà calculer les neuf mille neuf cent quatrevingt-dix-neuf premiers termes.

P

Q

Rien n'oblige à compter les termes d'une suite à partir de 1. En décrivant la suite des entiers naturels par $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 0$, on a commencé à compter les termes de la suite u par 0 : le premier terme est $u_0 = 0$, le deuxième terme est $u_1 = 1$, le vingt-septième terme est $u_{26} = 26$.
On peut en fait compter les termes d'une suite en partant de n'importe quel nombre entier.

Par exemple, on définit une suite t en posant :
- $t_{-4} = 2$: le premier terme est le terme d'indice -4 et il vaut 2 ;
- pour tout entier $n \geq -4$, $t_{n+1} = t_n \times t_n$: on construit chaque terme en multipliant le terme précédent de cette suite par lui même.

Le deuxième terme de la suite t est le terme d'indice -3 qui vaut

$$t_{-3} = t_{-4} \times t_{-4} = 2 \times 2 = 4.$$

Le troisième terme de la suite t est le terme d'indice -2 qui vaut

$$t_{-2} = t_{-3} \times t_{-3} = 4 \times 4 = 16$$

etc.

2.1. Définition.

Définition 1. *Une suite est dite* ***arithmétique de raison*** r *si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent auquel on a ajouté* r.

Par exemple, la suite v définie par

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1 \end{cases}$$

est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_1 = 1$.

P
Q

Soit n_0 un nombre entier et r un nombre réel, la suite arithmétique de **premier terme** u_{n_0} et de **raison** r est donc la suite définie par la donnée de u_{n_0} et la règle

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

Par exemple dans la suite v définie juste avant, on avait $n_0 = 1$ et $r = 3$.

La suite arithmétique de premier terme $u_{-12} = 0$ et de raison $-4,2$ est définie par

$$\begin{cases} u_{-12} = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 4,2 \quad \text{pour tout entier } n \geq -12. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $n_0 = -12$, $r = -4,2$ et $u_{n_0} = u_{-12} = 0$.

2.2. Calcul des termes d'une suite arithmétique. On considère une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r. On veut calculer le terme d'indice n.

Le premier terme est donc u_{n_0}.
Le deuxième terme est $u_{n_0+1} = u_{n_0} + r$.
Le troisième terme est $u_{n_0+2} = u_{n_0+1} + r = u_{n_0} + r + r = u_{n_0} + 2r$.

En réitérant, on obtient que si $k \geq 0$, le $k+1^{\text{e}}$ terme est $u_{n_0+k} = u_{n_0} + k \times r$.

En remplaçant $n_0 + k$ par n (ce qui est la même chose que remplacer k par $n - n_0$, on obtient que le terme d'indice n est

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times r.$$

On considère une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r.

On peut calculer le terme d'indice n pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ grâce à la formule

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times r.$$

Par exemple, si v est la suite définie par

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

Que vaut v_{1234} ?

Le premier terme est $v_1 = 2$. On a donc $n_0 = 1$ et $v_{n_0} = 2$. La raison est $r = 3$. Le terme d'indice $n = 1234$ est alors donné par

$$v_{1234} = 2 + (1234 - 1) \times 3 = 3701.$$

P

Q

2.3. Calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique. On a vu comment calculer les termes d'une suite arithmétique. On voudrait maintenant pouvoir la somme des premiers termes.

Par exemple, si w_n est la suite définie par

$$\begin{cases} w_{12} = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \quad \text{pour tout entier } n \geq 12. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$\begin{aligned} w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{15} &= 1 + (1+2) + (1+2\times 2) + (1+2\times 3) \\ &= 4\times 1 + 2\times(1+2+3) \\ &= 4 + 2\times 6 \\ &= 16. \end{aligned}$$

2.3.1. *Exemple fondamental.* On considère la suite de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1,

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

D'après le §2.2, on a $u_n = n$ pour tout entier $n \geq 1$. Si $N \geq 1$ est un entier, la somme des N premiers termes est donc

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = 1 + 2 + \cdots + N.$$

On calcule cette somme grâce à la formule

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N \times (N+1)}{2}.$$

Par exemple

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55.$$

2.3.2. *Preuve de l'exemple fondamental.* On veut montrer que la somme des N premiers entiers supérieurs à 1 est

$$1+2+\cdots+N = \frac{N\times(N+1)}{2}.$$

Si $N=1$, cette formule est vraie puisque $\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$. Supposons qu'elle est vraie pour un entier N et montrons la alors pour l'entier suivant. On a

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(N+1) &= (1+2+\cdots+N)+(N+1)\\ &= \frac{N\times(N+1)}{2}+(N+1)\\ &= \frac{(N+1)\times(N+2)}{2}.\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $N+1$.
La formule est vraie pour le premier entier, puis si elle est vraie pour un entier, elle l'est pour l'entier suivant. Elle est donc vraie pour tous les entiers.

2.3.3. *Cas général.* Si u est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r la somme des N premiers termes de cette suite est

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = N \times u_{n_0} + \frac{r}{2} \times (N-1) \times N.$$

Considérons

$$\begin{cases} w_{12} = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \quad \text{pour tout entier } n \geq 12. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{15} = 4 \times v_{12} + \frac{2}{2} \times (4-1) \times 4 = 16.$$

Considérons

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n - 6 \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

La somme des 9 premiers termes est

$$9 \times 4 + \frac{-6}{2} \times (9-1) \times 9 = 36 - 216 = -280.$$

La somme des 10000 premiers termes est

$$10000 \times 4 + \frac{-6}{2} \times (10000-1) \times 10000 = -299930000.$$

2.3.4. *Preuve du cas général.* D'après le §2.2, on calcule

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = u_{n_0}+(u_{n_0}+r)+(u_{n_0}+2\times r)+\cdots+\big(u_{n_0}+(N-1)\times r\big)$$

Le terme u_{n_0} apparaît N fois donc

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r+2\times r+\cdots+(N-1)\times r.$$

On factorise alors par r pour avoir

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r\times(1+2+\cdots+(N-1)).$$

Enfin, en utilisant l'exemple fondamental

$$u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+N-1} = N\times u_{n_0}+r\times\frac{(N-1)\times N}{2}.$$

3.1. Définition.

Définition 2. *Une suite est dite* ***géométrique de raison*** *q si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au terme précédent multiplié par q.*

Par exemple, la suite t définie par

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times t_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0 \end{cases}$$

est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = 1$.

Soit n_0 un nombre entier et q un nombre réel, la suite géométrique de **premier terme** u_{n_0} et de **raison** q est donc la suite définie par la donnée de u_{n_0} et la règle

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

Par exemple dans la suite t définie juste avant, on avait $n_0 = 0$ et $q = \dfrac{1}{2}$.

La suite géométrique de premier terme $u_{-1} = 3$ et de raison 2 est définie par

$$\begin{cases} u_{-1} = 3 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq -1. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $n_0 = -1$, $q = 2$ et $u_{n_0} = u_{-1} = 3$. Les premiers termes sont

$$u_{-1} = 3, \quad u_0 = 6, \quad u_1 = 12, \quad u_2 = 24, \quad u_3 = 48, \ldots$$

P

Q

3.2. Calcul des termes d'une suite géométrique. On considère une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q. On veut calculer le terme d'indice n.

Le premier terme est donc u_{n_0}.
Le deuxième terme est $u_{n_0+1} = q \times u_{n_0}$.
Le troisième terme est $u_{n_0+2} = q \times u_{n_0+1} = q \times q \times u_{n_0} = q^2 \times u_{n_0}$.

En réitérant, on obtient que si $k \geq 0$, le $k+1^{\text{e}}$ terme est $u_{n_0+k} = q^k \times u_{n_0}$.

En remplaçant $n_0 + k$ par n (ce qui est la même chose que remplacer k par $n - n_0$), on obtient que le terme d'indice n est

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

P
Q

On considère une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q.

On peut calculer le terme d'indice n pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ grâce à la formule

$$u_n = q^{n-n_0} \times u_{n_0}.$$

La suite géométrique de premier terme $w_{-2} = 1$ et de raison 10 vérifie

$$\begin{aligned} w_{10} &= 10^{10-(-2)} \times 1 \\ &= 10^{12} \\ &= 1\underbrace{000000000000}_{12 \text{ zéros}}. \end{aligned}$$

La suite géométrique de premier terme $h_4 = 3,2$ et de raison $1,13$ vérifie

$$\begin{aligned} h_{12} &= 1,13^{12-4} \times 3,2 \\ &= 1,13^{8} \times 3,2 \\ &= 8,50702141730058272. \end{aligned}$$

3.3. Calcul de la somme des termes d'une suite géométrique.

3.3.1. *Exemple fondamental.* On considère la suite de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q où q est un nombre réel **différent de** 1,

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

D'après le §3.2, on a $u_n = q^n$ pour tout entier $n \geq 0$. Si $N \geq 1$ est un entier, la somme des N premiers termes est donc

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} = 1 + q + \cdots + q^{N-1}.$$

On calcule cette somme grâce à la formule

$$1 + q + \cdots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

Par exemple,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = \frac{16 - 1}{1} = 15\,;$$

P

Q

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5-1}{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{\frac{1}{32}-1}{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{31}{32}\times 2 \\
&= \frac{31}{16}.
\end{aligned}
$$

3.3.2. *Preuve de l'exemple fondamental.* Si $q \neq 1$, on veut montrer que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

C'est équivalent à

$$(q-1) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) = q^N - 1.$$

Or

$$\begin{aligned}(q-1) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) \\ = q \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}).\end{aligned}$$

Puis

$$q \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N$$

et en retirant $1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1}$ à $q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N$, il reste $q^N - 1$ ce qui donne le résultat recherché.

3.3.3. *Cas général.* Si u est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q avec q un nombre réel différent de 1, la somme des N premiers termes de cette suite est

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Considérons

$$\begin{cases} f_0 = 2 \\ f_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times f_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

La somme des quatre premiers termes est

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 2 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{4}.$$

Considérons

$$\begin{cases} u_7 = 5 \\ u_{n+1} = 10 \times u_n \quad \text{pour tout entier } n \geq 7. \end{cases}$$

La somme des 6 premiers termes est

$$u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = 5 \times \frac{10^6 - 1}{10 - 1} = 5 \times \frac{999999}{9} = 555555.$$

P

Q

3.3.4. *Preuve du cas général.* D'après le §3.2, on calcule

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} + q \times u_{n_0} + q^2 \times u_{n_0} + \cdots + q^{N-1} \times u_{n_0}$$

On factorise par u_{n_0} pour obtenir

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1})$$

et l'exemple fondamental implique

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+N-1} = u_{n_0} \times \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$