Université Paul Valéry

Arts - Lettres - Langues

Sciences humaines & sociales

# Intérêts

**A**dministration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques

XA100M

# 1. La notion d'intérêt

## 1.1. Définition.

**Définition 1.** *L'****intérêt*** *est la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (le prêteur) à un autre agent économique.*

Lorsqu'une personne (physique ou morale) emprunte de l'argent à une autre, elle achète cet emprunt. L'intérêt est le coût de cet emprunt.

La somme empruntée s'appelle le **capital**. La somme qui doit être remboursée est donc

la somme du capital et de l'intérêt.

## 1.2. Exemples.

*Exemple* 1. Vous empruntez de l'argent à la banque. Vous est l'emprunteur, le banquier est le prêteur. Votre emprunt vous coûte.

*Exemple* 2. Vous placez de l'argent sur un compte bancaire. Vous est le prêteur, la banque est l'emprunteur. Votre placement vous rapporte (et coûte à la banque).

## 1.3. Taux d’intérêt.

**Définition 2.** *Le* ***taux d’intérêt*** *par période est l’intérêt rapporté par une unité monétaire pendant une période.*

Le taux d’intérêt par période est le nombre $i$ par lequel il faut multiplier le capital $C$ pour obtenir l’intérêt $I$ produit par $C$ pendant la période :

$$I = C \times i.$$

L’emprunteur aura donc a rembourser

$$C + I = C + C \times i$$

et la somme à rembourser après une période est donc

$$(1 + i) \times C.$$

*Exemple* 3. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour un an au taux annuel de $5,6\%$. On rappelle

$$5,6\% = \frac{5,6}{100} = 0,056.$$

On a $C = 800$ et $i = 0,056$. L'intérêt en euros produit par 800 € à $5,6\%$ annuel pendant un an est

$$800 \times 0,056 = 44,48.$$

La somme en euros que vous devrez rembourser après un an est donc

$$800 \times (1 + 0,056) = 844,48.$$

Votre emprunt vous aura coûté 44,48 €.

*Exemple* 4. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour **deux** ans au taux annuel de $5,6\%$. Comment calculer l'intérêt ?

*1^re méthode :* on a vu dans l'exemple 3 que l'intérêt dû après un an est de 44,48 €. L'intérêt produit par les 800 € pendant la deuxième année est encore de 44,48 € donc, à la fin de la deuxième année, vous remboursez 800 €+44,48 €+44,48 €=888,96 €. Au total, votre emprunt vous a coûté

88,96 €.

$\longrightarrow$ notion d'intérêt simple

*Exemple* 4. Pour payer la caution de votre appartement, votre banquier vous prête 800 € pour **deux** ans au taux annuel de $5,6\%$. Comment calculer l'intérêt ?

*2e méthode :* on a vu dans l'exemple 3 que l'intérêt dû après un an est de 44,48 €. Vous ne payez **pas** ces 44,48 € et tout se passe comme si, à la fin de la première année et il vous restait à rembourser 844,48 €. L'intérêt produit par ces 844,48 € pendant la seconde année est (en euros)

$$844,48 \times 0,056 = 47,29$$

et à la fin de la seconde année, vous devez rembourser (en euros)

$$844,48 + 47,29 = 891,77.$$

Votre emprunt était de 800 €, vous remboursez 891,77 € donc cet emprunt vous a coûté

91,77 €.

$\longrightarrow$ notion d'intérêt composé

## 2. Intérêts simples

### 2.1. Définition.

**Définition 3.** *Un capital est placé à* ***intérêts simples*** *si c'est le* ***capital de départ*** *qui produit l'intérêt pendant toute la durée du placement.*

**2.2. Calcul des intérêts simples.** On emprunte un capital $C_0$ pendant $n$ périodes au taux $i$ par période.

L'intérêt à payer après la première période est $C_0 \times i$ et, puisque c'est le capital de départ $C_0$ qui produit l'intérêt, l'intérêt à payer après chaque période est $C_0 \times i$.

L'**intérêt total** à payer (le coût de l'emprunt) est donc

$$I_n = \underbrace{C_0 \times i + \cdots + C_0 \times i}_{n \text{ fois}}$$

c'est-à-dire

$$I_n = C_0 \times n \times i.$$

La **somme totale à rembourser** est $C_n = C_0 + I_n$ donc

$$C_n = (1 + n \times i) \times C_0.$$

P

Q

**2.3. Intérêts simples précomptés, intérêts simples postcomptés.** Lors d'un emprunt à intérêts simples, l'intérêt peut être remboursé en début ou en fin d'emprunt.

Lorsque l'intérêt est payé en **fin** d'emprunt, l'intérêt est dit **postcompté** : l'emprunteur dispose de $C_0$ en début d'emprunt et rembourse $(1+n\times i)\times C_0$ en fin d'emprunt.

Lorsque l'intérêt est payé en **début** d'emprunt, l'intérêt est dit **précompté** : l'emprunteur emprunte $C_0$ en début d'emprunt mais reçoit

$$C_0 - I_n = (1 - i \times n) \times C_0$$

et rembourse $C_0$ en fin d'emprunt.

Sauf indication contraire, les intérêts simples sont postcomptés.

## 3.1. Définition.

**Définition 4.** *Un capital est placé à* ***intérêts composés*** *si, à la fin de chaque période, l'intérêt gagné est incorporé au capital pour produire lui aussi un intérêt.*

Sauf si on précise qu'il est à intérêts simples, un placement ou un emprunt sera toujours considéré comme étant à intérêts composés.

**3.2. Calcul de la valeur acquise.** On place un capital $C_0$ pendant $n$ périodes au taux $i$ par période.
Fin de la première période : l'intérêt produit est $C_0 \times i$, le capital est $C_1 = C_0 \times (1+i)$.
Fin de la deuxième période : l'intérêt produit est $C_1 \times i = C_0 \times (1+i) \times i$, le capital est $C_2 = C_1 \times (1+i) = C_0 \times (1+i)^2$.

D'une période à l'autre, la capital est multiplié par $(1+i)$. Le suite $C_n$ est donc une suite géométrique de premier terme $C_0$ et de raison $1+i$ de sorte que :
le capital à la fin des $n$ périodes est

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Ce capital s'appelle la **valeur acquise**. Dans le cas où vous avez placé de l'argent, c'est la somme qu'on vous remet à la fin du placement ; dans le cas où vous avez emprunté de l'argent, c'est la somme que vous devez rembourser.

**3.3. Calcul de l'intérêt.** Lors du placement d'un capital $C_0$ pendant $n$ périodes au taux $i$ par période, la valeur acquise est

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Puisque le capital de départ était $C_0$, l'**intérêt total** à payer (le coût de l'emprunt) est

$$I_n = C_n - C_0 = \left[(1+i)^n - 1\right] \times C_0.$$

**3.4. Calcul de la valeur actuelle.** On a déjà calculé la valeur acquise $C_n$ par le placement d'un capital $C_0$ au taux $i$ par période pendant $n$ périodes.

On peut inversement calculer le capital qu'il faut placer au taux $i$ par période pendant $n$ périodes pour obtenir un capital $C$. Ce capital $C_0$ qu'il faut placer s'appelle la **valeur actuelle**.

Puisque $C$ sera la valeur acquise par placement de la valeur actuelle $C_0$, on a

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

et donc, la valeur actuelle d'un capital $C$ placé au taux $i$ par période pendant $n$ périodes est

$$C_0 = \frac{C}{(1+i)^n}.$$

Lorsque le taux d'intérêt est donné pour une période, mais que l'on emprunte pour une sous-période de cette période, il faut savoir calculer l'intérêt dû.

*Exemple* 5. Pour un placement d'un an au taux annuel de $5,7\%$, quel taux mensuel produit le même intérêt sur un an ? Ici, la période est l'année et la sous-période est le mois. Il y a douze sous-périodes.

Là encore, il faut distinguer intérêts simples et composés.

P
Q

### 4.1. Définitions.

**Définition 5.** *Le **taux proportionnel** au taux $i$ pour une sous-période est le taux qui, appliqué à **intérêts simples** sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux $i$ sur la période.*

**Définition 6.** *Le **taux équivalent** au taux $i$ pour une sous-période est le taux qui, appliqué à **intérêts composés** sur toutes les sous-périodes composant la période aboutit à la même valeur acquise que celle obtenue en appliquant le taux $i$ sur la période.*

**4.2. Calcul du taux proportionnel.** On divise la périodes en $k$ sous-périodes et on veut calculer le taux proportionnel au taux $i$ pour une sous-période. On note $i_k$ ce taux proportionnel.
En plaçant le capital $C_0$ à intérêts simples au taux $i_k$ pendant $k$ sous-périodes, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + k \times i_k)$$

(voir §2.2).
En plaçant la capital $C_0$ pendant une période au taux $i$, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i)$$

(voir §1.3).
Par définition du taux proportionnel, il doit y avoir égalité de ces deux valeurs acquises donc

$$C_0 \times (1 + k \times i_k) = C_0 \times (1 + i).$$

Puisque

$$C_0 \times (1 + k \times i_k) = C_0 \times (1 + i)$$

on déduit

$$1 + k \times i_k = 1 + i$$

d'où

$$k \times i_k = i$$

et enfin

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

La taux proportionnel au taux $i$ pour une période divisée en $k$ sous-périodes est

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

**4.3. Calcul du taux équivalent.** On divise la périodes en $k$ sous-périodes et on veut calculer le taux équivalent au taux $i$ pour une sous-période. On note $i_k$ ce taux équivalent.
En plaçant le capital $C_0$ à intérêts composés au taux $i_k$ pendant $k$ sous-périodes, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i_k)^k$$

(voir §3.2).
En plaçant la capital $C_0$ pendant une période au taux $i$, on obtient la valeur acquise

$$C_0 \times (1 + i)$$

(voir §1.3).
Par définition du taux équivalent, il doit y avoir égalité de ces deux valeurs acquises donc

$$C_0 \times (1 + i_k)^k = C_0 \times (1 + i).$$

Puisque

$$C_0 \times (1 + i_k)^k = C_0 \times (1 + i)$$

on déduit

$$(1 + i_k)^k = 1 + i$$

d'où

$$1 + i_k = (1 + i)^{1/k}$$

et enfin

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1.$$

La taux équivalent au taux $i$ pour une période divisée en $k$ sous-périodes est

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1.$$

*Remarque.* On a toujours

$$(1+i)^{1/k} < 1 + \frac{i}{k}$$

de sorte que le taux équivalent est toujours inférieur au taux proportionnel (toute chose égale par ailleurs).

*Exemple* 6. On place au taux annuel $5,07\%$. On calcule le taux proportionnel mensuel. On a $i = 0,0507$. La période est l'année, la sous-période est le mois donc $k = 12$. Le taux proportionnel mensuel est donc

$$i_{12} = \frac{0,0507}{12} = 0,004225 = 0,4225\%.$$

Si on place 273 € pendant sept mois à intérêts simples au taux annuel $5,07\%$, la somme (en euros) à rembourser est donc

$$C_7 = 273 \times (1 + 0,004225 \times 7) = 281,07.$$

*Exemple* 7. On place au taux annuel $5,07\%$. On calcule le taux équivalent mensuel. On a $i = 0,0507$. La période est l'année, la sous-période est le mois donc $k = 12$. Le taux équivalent mensuel est donc

$$i_{12} = (1+0,0507)^{1/12} - 1 = 0,004130 = 0,4130\%.$$

Si on place 273 € pendant sept mois à intérêts composés au taux annuel $5,07\%$, la somme (en euros) à rembourser est donc

$$C_7 = 273 \times (1+0,004130)^7 = 281,00.$$