Les emprunts indivis

Administration **É**conomique et **S**ociale

Mathématiques
XA100M

Les emprunts **indivis** sont les emprunts faits auprès **d'un seul prêteur**.

On va étudier le cas où le prêteur met à disposition de l'emprunteur un capital pour une durée fixée à l'avance, et où l'emprunteur rembourse ce capital selon un rythme convenu et verse des intérêts à échéances périodiques.

1. Le cas général

Lors de chaque annuité (remboursement), on fait la part entre

– La somme qui participe au **remboursement du capital emprunté** ;
– La somme qui participe au **remboursement de l’intérêt**.

La somme qui participe au remboursement du capital emprunté s’appelle l’**amortissement**.

Si A_p est l'annuité de la période p, c'est-à-dire le montant payé **à la fin** de la période p, on a

$$☞ \quad A_p = I_p + M_p$$

avec

- L'intérêt crée pendant la période p et remboursé en fin de cette période, noté I_p ;
- L'amortissement de la période p, noté M_p.

Situation

Emprunt d'un capital D_0 au taux d'intérêt i par période pendant n périodes.

Notations

- Le capital restant dû en **début** de période p est noté D_{p-1} ;
- Le montant de l'annuité payée en **fin** de période p est noté A_p ;
- L'intérêt versé en **fin** de la période p est noté I_p ;
- L'amortissement versé en **fin** de la période p est noté M_p.

Principe

☞ À chaque début de période p, on a une dette D_{p-1}, c'est la somme qui reste due et crée un intérêt $I_p = D_{p-1}i$ pendant la période. À la fin, de la période, on rembourse l'annuité A_p qui paye l'intérêt I_p et contribue au remboursement de la dette : $A_p = I_p + M_p$. La dette de début de période $p+1$ est alors $D_p = D_{p-1} - M_p$.

⏮ C'est le même principe que la méthode de calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités certaines temporaires (chapitre *Annuités*, §3.1) avec $A_0 = 0$ et où la dette était notée V au lieu de D.

On résume la situation par période dans un tableau, appelé

tableau d'amortissement.

Tableau d'amortissement

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	D_0	$I_1 = D_0\, i$	M_1	$A_1 = I_1 + M_1$
2	$D_1 = D_0 - M_1$	$I_2 = D_1\, i$	M_2	$A_2 = I_2 + M_2$
3	$D_2 = D_1 - M_2$	$I_3 = D_2\, i$	M_3	$A_3 = I_3 + M_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$D_{p-1} = D_{p-2} - M_{p-1}$	$I_p = D_{p-1}\, i$	M_p	$A_p = I_p + M_p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - M_{n-1}$	$I_n = D_{n-1}\, i$	M_n	$A_n = I_n + M_n$

La dette en fin de n^{e} période (donc en début de $n+1^{\text{e}}$) doit être totalement payée donc

$$☞ \quad D_n = D_{n-1} - M_n = 0.$$

Coût de l'emprunt

La somme remboursée au total est la somme de toutes les annuités versées, c'est-à-dire $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$,

la somme empruntée au début est D_0

le coût de l'emprunt est donc

☞ $$A_1 + A_2 + \cdots + A_n - D_0.$$

Somme restant à payer

La somme qui reste à payer au début de la période $p+1$ est la valeur actuelle des $n-p$ annuités restantes (c'est la somme qui va être remboursée par les $n-p$ annuités restantes, intérêt compris).

⏮ D'après le chapitre *Annuités*, §3.1, on a donc

$$☞ \quad D_p = \sum_{k=p+1}^{n} A_k(1+i)^{p-k}$$

Pour chaque valeur de k comprise entre $p+1$ et n, on calcule $A_k(1+i)^{p-k}$ puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

Somme empruntée

En particulier, la somme due en début de première période, D_0, est la somme empruntée.

Lors d'un emprunt sur n périodes, au taux i par périodes, en remboursant A_k à la période k ($k = 1, 2, \dots, n$), on peut emprunter

$$☞ \quad D_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+i)^{-k}$$

Pour chaque valeur de k comprise entre 1 et n, on calcule $A_k(1+i)^{-k}$ puis on fait la somme de tous les termes calculés.

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

Amortissement

On peut relier l'amortissement d'une période à l'amortissement de la période précédente.

$$M_{p+1} = (1+i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

$$\text{En effet,} \quad A_{p+1} = M_{p+1} + I_{p+1} \quad \text{donc} \quad M_{p+1} = A_{p+1} - I_{p+1}.$$

Puis,

$$I_{p+1} = D_p i \quad \text{donc} \quad M_{p+1} = A_{p+1} - D_p i.$$

Puis

$$D_p = D_{p-1} - M_p$$

donc

(1) $$M_{p+1} = A_{p+1} - D_{p-1} i + M_p i.$$

Or,

$$D_{p-1} i = I_p \quad \text{et} \quad A_p = M_p + I_p$$

donc

(2) $$D_{p-1} i = A_p - M_p.$$

En reportant (2) dans (1), on obtient

$$M_{p+1} = A_{p+1} - A_p + M_p + M_p i = (1+i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

2.1. Somme empruntable.

Dans le cas général, on a vu que

$$D_0 = A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + A_n(1+i)^{-n}.$$

Ici,

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_0 = a\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right].$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$, donc

$$D_0 = a(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

P
Q

Lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, on peut emprunter

$$☞ \quad D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

⏮ Voir le chapitre *Annuités*, §3.2.2.

2.2. Valeur de l'annuité.

Lorsqu'on veut acheter un bien, on connaît la valeur de ce bien, c'est cette somme D_0 qu'on veut emprunter. Quelles annuités doit-on payer pour rembourser cet emprunt lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période à annuités constantes ?

On a vu que

$$D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

donc

$$☞ \quad a = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Les expressions

$$D_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

et

$$a = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

ne sont que deux expressions différentes d'une même formule.

N'en retenez qu'une et retrouvez l'autre immédiatement.

2.3. Dette en début de période.

Dans le cas général, on a vu que

$$D_p = A_{p+1}(1+i)^{-1} + A_{p+2}(1+i)^{-2} + \cdots + A_{n-1}(1+i)^{-(n-1-p)} + A_n(1+i)^{-(n-p)}.$$

Ici,

$$A_{p+1} = A_{p+2} = \cdots = A_{n-1} = A_n = a.$$

On a donc

$$D_p = a\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-p-1)} + (1+i)^{-(n-p)}\right].$$

On reconnaît la somme des $n-p$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$, donc

$$D_p = a(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-(n-p)}}{1-(1+i)^{-1}} = a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}.$$

Lors d'un emprunt pendant n périodes, au taux i par période, en remboursant a par période, la dette en début de $p+1^{\text{e}}$ période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de p^{e} période) est

☞ $$D_p = a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}.$$

2.4. Lien entre somme empruntée et dette.

Il n'est pas nécessaire de connaître l'annuité pour calculer la dette en début de $p+1^{\text{e}}$ période à partir de la somme empruntée. En effet, on a

$$D_p = a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$$

et

$$a = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

donc

$$\begin{aligned} D_p &= D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\,\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i} \\ &= D_0\frac{1-(1+i)^{p-n}}{1-(1+i)^{-n}} \end{aligned}$$

puis, en multipliant numérateur et dénominateur par $(1+i)^n$, on obtient

$$D_p = D_0\frac{(1+i)^n-(1+i)^p}{(1+i)^n-1}.$$

Lors d'un emprunt de D_0, pendant n périodes, au taux i par période, la dette en début de $p+1^{\text{e}}$ période (c'est-à-dire, la dette après paiement de l'annuité de p^{e} période) est

$$☞ \quad D_p = D_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$

P

Q

2.5. Amortissement.

Dans le cas général, on a vu la relation

$$M_{p+1} = (1+i)M_p + A_{p+1} - A_p.$$

Ici, $A_{p+1} = A_p$ donc

$$M_{p+1} = (1+i)M_p.$$

☞ Dans un emprunt par annuités constantes, les amortissements sont en suite géométrique de raison $1+i$.

Le premier amortissement est

$$M_1 = A_1 - I_1 = a - D_0 i.$$

Or,

$$a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

donc

$$M_1 = D_0 i \frac{(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}} = D_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}.$$

Puisque $M_p = (1+i)M_{p-1}$, on a $M_p = (1+i)^{p-1}M_1$ et donc

$$M_p = D_0 \frac{i(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1}.$$

3. Un exemple

On emprunte un capital de 76000 € au taux d'intérêt annuel 10% pour 5 ans. Les remboursements se font à la fin de chaque année par annuités constantes. Le montant de chaque annuité est

$$a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 76000 \times \frac{0,1}{1-\frac{1}{1,1^5}} = 20048,61 \text{ €}.$$

Le capital dû en début de 1^{re} année est donc D_0 =76000 €. Pendant la première année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_1 = D_0 i = 76000 \times 0,1 = 7600.$$

L'annuité est A_1 =20048,61 €, de sorte que l'amortissement en euros de cette première année est

$$M_1 = A_1 - I_1 = 20048,61 - 7600 = 12448,61.$$

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2				
3				
4				
5				

Le capital dû en début de 1$^{\text{re}}$ année est D_0=76000 €. L'amortissement de cette première année est M_1 =12448,61 € donc le capital dû en début de 2$^{\text{e}}$ année est, en euros,

$$D_1 = D_0 - M_1 = 76000 - 12448,61 = 63551,39.$$

Pendant la deuxième année, cette somme produit un intérêt, en euros, de

$$I_2 = D_1 i = 63551,39 \times 0,1 = 6355,14.$$

L'annuité est A_2 =20048,61 €, de sorte que l'amortissement en euros de cette deuxième année est

$$M_2 = A_2 - I_2 = 20048,61 - 6355,14 = 13693,47.$$

P

Q

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2	63551,39 €	6355,14 €	13693,47 €	20048,61 €
3				
4				
5				

En répétant ce qu'on a fait pour la deuxième année, on construit pas-à-pas le tableau

Période	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité de la période
1	76000 €	7600 €	12448,61 €	20048,61 €
2	63551,39 €	6355,14 €	13693,47 €	20048,61 €
3	49857,92 €	4985,80 €	15062,82 €	20048,61 €
4	34795,10 €	3479,51 €	16569,10 €	20048,61 €
5	18226 €	1822,6 €	18226 €	20048,61 €

Méthode rapide

Le montant de chaque annuité est obtenu par

$$A_p = a = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

En utilisant la formule

$$D_p = a\frac{1-(1+i)^{p-n}}{i}$$

on remplit rapidement la colonne *capital dû*. En utilisant

$$I_p = D_{p-1}\, i,$$

on remplit alors rapidement la colonne *intérêt*. Enfin, en utilisant

$$M_p = A_p - I_p,$$

on remplit rapidement la colonne *amortissement*.

Tout cela est facilement programmable avec un logiciel tableur.

Un autre exemple, de calcul de prêt immobilier, est disponible sur

`http://www.univ-montp3.fr/miap/ens/AES/XA100M/`