



Un exercice supplémentaire : prêt immobilier

— EXERCICE —

D)

Monsieur Dupont souhaite acheter une maison. Son banquier lui propose un prêt au taux i , qu'il remboursera par annuités mensuelles. Cela signifie que i est le taux *annuel* et que pour les calculs, on utilisera le mois comme période et le taux mensuel *proportionnel* (noté i_p).

1) Montrer que, pour calculer la somme V_0 que M. Dupont peut emprunter sur N années au taux i , en versant a chaque mois, il utilise la formule

$$V_0 = 12a \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12N}}{i}.$$

(On rappelle que si $i = 4,75\%$, alors $i = 0,0475$).

2) Monsieur Dupont voudrait emprunter 150000 € pendant 15 ans. Le banquier lui propose alors un taux de 4,45%. Quel montant M. Dupont devra-t-il rembourser chaque mois? Même question si le prêt se fait sur 20 ans au taux de 4,75%.

3) En fait, Monsieur Dupont ne peut rembourser que 650 € par mois (en effet, il gagne 2000 €). Quelle somme peut-il emprunter sur 20 ans au taux de 4,75%?

★ 4) Si j et ℓ sont deux entiers avec $j < \ell$, on note $I(j, \ell)$ l'intérêt payé pendant les mois $j, j+1, \dots, \ell$ (par exemple, l'intérêt payé pendant la deuxième année est $I(13, 24)$). Montrer que

$$I(j, \ell) = a(\ell - j + 1) - \frac{a}{i_p} \frac{(1 + i_p)^{\ell - j + 1} - 1}{(1 + i_p)^{n - j + 1}}$$

si l'emprunt est au taux i pendant n périodes et en versant a par période.

5) Montrer que, pour calculer l'intérêt $I(k)$ et l'amortissement $M(k)$ que Monsieur Dupont paiera au cours de la k^e année, le banquier de M. Dupont utilise les formules suivantes

$$I(k) = 12a - \frac{12a}{i} \frac{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12(N - k + 1)}}$$

$$M(k) = \frac{12a}{i} \frac{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12(N - k + 1)}}$$

si l'emprunt est au taux i pendant N années et en versant a par mois. Calculer le capital restant dû à la fin de l'année k (c'est-à-dire au début de l'année $k + 1$).

6) On suppose que M. Dupont emprunte la somme trouvée à la question I.3. Compléter le tableau suivant.

Année	Intérêt versé pendant l'année	Amortissement versé pendant l'année	Capital dû en fin d'année
1			
3	4403,88 €	3396,12 €	90860,46 €
9	3286,51 €	4513,49 €	66727,26 €
15	1801,51 €	5998,49 €	34653,89 €
20			

★ 7) Les revenus de M. Dupont lui permette de recourir à un prêt à taux 0 : c'est-à-dire qu'il peut, sur une période de 12 ans emprunter 20% de la somme nécessaire à l'achat de son logement à 0%. Pour payer le reste, Monsieur Dupont fait un prêt à 4,75% pendant 20 ans. Sachant qu'il peut rembourser au plus 650 € par mois, combien peut-il emprunter ? (On suppose les annuités des deux prêts constantes.)

★★ 8) Reprendre la question I.7 en ne supposant plus les annuités constantes : tant que le prêt à taux 0 n'est pas remboursé, les 650 € de remboursement sont partagés entre le remboursement des deux prêts, à partir du moment où le prêt à taux 0 est remboursé, les 650 € servent à rembourser le prêt sur 20 ans. Quel est alors le coût du prêt ?

9) [Question subsidiaire] Si le prix du mètre carré est de 2000 € (c'est le cas à Montpellier pour l'immobilier neuf, le prêt à taux 0 s'applique à l'achat d'immobilier neuf), quelle surface M. Dupont peut-il acheter ?