D-MODULES, FAISCEAUX PERVERS ET CONJECTURE DE KAZHDAN-LUSZTIG (D'APRÈS BEILINSON-BERNSTEIN)

SIMON RICHE

Table des matières

Introduction

L'objectif de ces notes est d'exposer comment le calcul des multiplicités des modules simples dans les modules de Verma d'une algèbre de Lie semi-simple complexe peut se traduire en un problème concernant des faisceaux pervers sur la variété des drapeaux associée. Ce résultat est dû à Beilinson-Bernstein [1], dans les années 1980. Combiné à des résultats antérieurs de Kazhdan-Lusztig (voir §§5.2 et 5.3), il a permis la preuve de la célèbre "conjecture de Kazhdan-Lusztig".

Les résultats généraux (théorie des D-modules algébriques, équivalence de Riemann-Hilbert) sont énoncés précisément, mais sans preuve. On a souligné dans des remarques et des exemples les points importants ou délicats de ces théories. On donne quelques preuves (ou au moins des indications) pour les résultats liés à la théorie des représentations. Les définitions et les résultats de base concernant les faisceaux pervers sont supposée connus. Pour des détails sur tous ces résultats, on pourra consulter [Be] et [HTT], qui sont les principales références de ces notes.

Conventions. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés algébriques, on note f^{-1} l'image inverse faisceautique, et f^* l'image inverse de $\mathcal{O}$-modules. Si $Y \subset X$ est une sous-variété localement fermée lisse, et $\mathcal{L}$ un système local sur Y, on normalise $\mathrm{IC}(Y, \mathcal{L})$ de sorte que ce complexe soit un faisceau pervers. On note simplement $\mathrm{IC}(Y)$ pour $\mathrm{IC}(Y, \underline{\mathbb{C}}_Y)$.

Date: 25/04/2010.

1. Le même résultat a également été démontré simultanément et indépendamment par Brylinski-Kashiwara. Leur preuve est très similaire, mais leur version du théorème de localisation (voir Théorème 3.3.1) est beaucoup plus faible (quoique suffisante pour le problème considéré).

On note $K^0(\mathscr{A})$ le groupe de Grothendieck d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. On note par le même symbole un foncteur exact entre deux catégories abéliennes et le morphisme induit en K-théorie. On note $[M]$ la classe d'un objet M.

Si F est un foncteur exact entre deux catégories abéliennes, on note de la même façon le foncteur induit entre les catégories dérivées. Par contre, on notera "R" ou "L" pour les foncteurs dérivés d'un foncteur qui n'est a priori pas exact.

1. Rappels sur les D-modules algébriques

Les résultats de cette partie sont dus à Bernstein. Ils adaptent dans un contexte algébrique des résultats antérieurs de Kashiwara. De bonnes références pour cette théorie sont [HTT, Be, Bo]. Pour la version analytique de la théorie, on pourra consulter [Ka].

1.1. **Définitions.** Soit X une variété lisse complexe [2]. On note $\mathcal{D}_X$ le sous-faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$ engendré par $\mathcal{O}_X$ et le fibré tangent $\mathcal{T}_X$. (Rappelons que par définition $\mathcal{T}_X = \{\theta \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \mid \forall f, g \in \mathcal{O}_X,\ \theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g)\}$.) On écrira simplement "$\mathcal{D}_X$*-module*", ou même "D-module", pour "faisceau de $\mathcal{D}_X$-modules". Sauf mention du contraire, un $\mathcal{D}_X$-module sera toujours un $\mathcal{D}_X$-module *à gauche*. Les $\mathcal{D}_X$-modules à gauche (resp. à droite) forment une catégorie abélienne (avec les définitions évidentes), notée $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^{\mathrm{op}})$). On note $D^b(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée bornée de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$.

Un $\mathcal{D}_X$-module sera dit *quasi-cohérent* s'il est quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module. Il sera dit *cohérent* [3] s'il est, de plus, localement finiment engendré sur $\mathcal{D}_X$. On note $D^b_c(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dont les objets ont des faisceaux de cohomologie cohérents.

On utilisera des notations similaires pour D^+ et D^-.

1.2. **D-modules à gauche et à droite.** Soit Ω_X le faisceau canonique sur X (des formes différentielles de degré $n = \dim(X)$). Il existe une action naturelle de $\mathcal{T}_X$ sur Ω_X, par la dérivation de Lie, donnée par la formule suivante :

$$\big((\mathrm{Lie}\ \theta)(\omega)\big)(\theta_1, \cdots, \theta_n) \ = \ \theta(\omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(\theta_1, \cdots, [\theta, \theta_i], \cdots, \theta_n).$$

On vérifie qu'on définit une action *à droite* de $\mathcal{D}_X$ sur Ω_X en posant $\omega \cdot \theta := -(\mathrm{Lie}\ \theta)(\omega)$. On obtient donc un morphisme

$$\mathcal{D}_X^{\mathrm{op}} \ \to \ \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\Omega_X) \cong \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}.$$

On vérifie (encore facilement) que ce morphisme induit un isomorphisme

$$\mathcal{D}_X^{\mathrm{op}} \ \xrightarrow{\sim} \ \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}.$$

2. Plus généralement, les résultats de cette partie sont valables sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Par contre, les résultats de la partie 2 ne sont connus que sur le corps $\mathbb{C}$.

3. Un $\mathcal{D}_X$-module est quasi-cohérent, resp. cohérent, au sens de ces définitions ssi il est quasi-cohérent, resp. cohérent, comme faisceau sur l'espace annelé $(X, \mathcal{D}_X)$, au sens des définitions habituelles.

On en déduit le résultat suivant.

Lemme 1.2.1. *Le foncteur*

$$\mathcal{M} \mapsto \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X) \;\cong\; \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^{\mathrm{op}}).$$

Remarque 1.2.2. De façon plus explicite, la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ se déduit de la structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche sur $\mathcal{M}$ et de la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite sur Ω_X par la formule suivante pour $\theta \in \mathcal{T}_X$:

$$(t \otimes m) \cdot \theta \;=\; (t \cdot \theta) \otimes m - t \otimes (\theta \cdot m).$$

1.3. **Image directe, image inverse.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés lisses complexes. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module à gauche, alors il existe une structure naturelle de $\mathcal{D}_X$-module à gauche sur $f^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$, définie par

$$\theta \cdot (g \otimes m) = \theta(g) \otimes m + g\tilde{\theta}(m),$$

où $\theta \mapsto \tilde{\theta}$ désigne le morphisme naturel

$$\mathcal{T}_X \to f^*\mathcal{T}_Y$$

obtenu en dérivant f. En particulier, le faisceau $f^*\mathcal{D}_Y$ est donc naturellement muni d'une structure de $(\mathcal{D}_X, f^{-1}\mathcal{D}_Y)$-bimodule. On note ce bimodule

$$\mathcal{D}_{X\to Y} \;:=\; f^*\mathcal{D}_Y.$$

Avec cette notation, on a clairement un isomorphisme de $\mathcal{D}_X$-modules

$$f^*\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$$

pour la structure définie ci-dessus.

Définition 1.3.1. On définit le foncteur d'*image inverse*

$$Lf^* : \left\{ \begin{array}{ccc} D^b(\mathcal{D}_Y) & \to & D^b(\mathcal{D}_X) \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M} \end{array} \right. .$$

On note aussi $f^\dagger := Lf^*[\dim(X) - \dim(Y)]$.

En utilisant le Lemme 1.2.1, on peut définir le $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)$-bimodule

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \;:=\; \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{-1} \;\cong\; \Omega_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{-1}).$$

Définition 1.3.2. On définit le foncteur d'*image directe*

$$\int_f : \left\{ \begin{array}{ccc} D^b(\mathcal{D}_X) & \to & D^b(\mathcal{D}_Y) \\ \mathcal{M} & \mapsto & Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) \end{array} \right. .$$

Ici, Rf_* est le foncteur dérivé de l'image directe par le morphisme d'espaces annelés $(X, f^{-1}\mathcal{D}_Y) \to (Y, \mathcal{D}_Y)$ induit par f.

Remarque 1.3.3. (1) En général, $\int_f$ n'est pas le foncteur dérivé d'un foncteur entre les catégories abéliennes de D-modules.

(2) Notons bien qu'en général on n'a *pas* d'isomorphisme entre $\mathrm{For}_Y \circ \int_f$ et $Rf_* \circ \mathrm{For}_X$, où $\mathrm{For}_X : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{O}_X)$ est le foncteur d'oubli, et de même pour For_Y, et Rf_* est le foncteur d'image directe pour les $\mathcal{O}$-modules. On n'a pas non plus d'isomorphisme au niveau des $H^0(-)$. L'image directe pour les D-modules est donc plus subtile que l'image inverse.

(3) Si f est une inclusion ouverte, on a $f^*\mathcal{D}_Y = f^{-1}\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_X$. Donc pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, le faisceau $f_*\mathcal{M}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_Y$-module. Le foncteur $\int_f$ est le foncteur dérivé du foncteur donné par cette opération. En particulier, ce foncteur correspond bien à l'image directe des $\mathcal{O}$-modules sous le foncteur d'oubli.

(4) Supposons que f est une inclusion localement fermée, et que f est un morphisme affine [4]. On vérifie facilement que, sous la première hypothèse, le $\mathcal{D}_X$-module à droite $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ est localement libre. Donc pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module, $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ est concentré en degré 0, et isomorphe à $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$. En particulier, l'action de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ sur ce module se factorise via le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module quasi-cohérent, alors $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ est également quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module. Comme les images directes supérieures d'un faisceau quasi-cohérent par un morphisme affine s'annulent, sous ces hypothèses $\int_f \mathcal{M}$ est donc concentré en degré 0, c'est-à-dire isomorphe à un $\mathcal{D}_Y$-module.

On a les résultats habituels pour les foncteurs d'image directe et inverse (compatibilité à la composition, restriction aux modules quasi-cohérents, restriction aux modules cohérents pour l'image directe propre, théorème de changement de base, formule de projection). Voir [HTT, §§1.5 et 1.7, et Theorem 2.5.1]. Notons cependant qu'il n'y a pas d'adjonction entre $\int_f$ et Lf^* en général.

1.4. **Dualité.**

Définition 1.4.1. On définit le foncteur de dualité

$$\mathbb{D}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} D^-(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} & \to & D^+(\mathcal{D}_X) \\ \mathcal{M} & \mapsto & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}[\dim X] \end{array} \right. .$$

Notons que $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ est naturellement un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à droite. En utilisant le Lemme 1.2.1, on se ramène à des modules à gauche en tensorisant par Ω_X^{-1}.

On peut vérifier que le foncteur $\mathbb{D}_X$ se restreint en un foncteur de la catégorie $D^b_c(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}}$ vers $D^b_c(\mathcal{D}_X)$, et qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{D}_X \circ \mathbb{D}_X \cong \mathrm{Id}$ sur $D^b_c(\mathcal{D}_X)$. En particulier, $\mathbb{D}_X$ induit une anti-équivalence de cette catégorie. (Voir [HTT, Proposition 2.6.5].)

Exemple 1.4.2. Supposons que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module qui est localement libre de rang fini comme $\mathcal{O}_X$-module [5]. Un tel D-module est appelé une

4. Cette seconde hypothèse est par exemple vérifiée si X est affine, si f est l'inclusion d'un ouvert dont le complémentaire est un diviseur de Y, ou si f est une inclusion fermée.

5. Notons qu'un $\mathcal{D}_X$-module qui est cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module vérifie automatiquement cette condition, voir [HTT, Theorem 1.4.10].

connexion intégrable. Alors le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X$-module à gauche, donnée par la formule suivante pour $\theta \in \mathcal{T}_X$:

$$(\theta \cdot \phi)(m) \;=\; \theta \cdot \phi(m) - \phi(\theta \cdot m).$$

On peut vérifier que $\mathbb{D}_X(\mathcal{M})$ est concentré en degré 0, et qu'il existe un isomorphisme

$$\mathbb{D}_X(\mathcal{M}) \;\cong\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

Voir [HTT, Example 2.6.10].

1.5. **Variété caractéristique, D-modules holonomes.** Il existe une filtration naturelle (notée F) sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_X$, par l'ordre des opérateurs différentiels. De plus, il existe un isomorphisme naturel

$$\mathrm{gr}^F\, \mathcal{D}_X \;\cong\; \pi_* \mathcal{O}_{T^*X},$$

où $\pi : T^*X \to X$ est la projection.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. On peut vérifier qu'il existe une filtration F sur $\mathcal{M}$ telle que le gradué associé $\mathrm{gr}^F \mathcal{M}$ soit cohérent comme faisceau de modules sur $\pi_* \mathcal{O}_{T^*X}$, c'est-à-dire soit l'image directe d'un faisceau cohérent $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur T^*X. Une telle filtration est dite *bonne*. On définit alors la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, notée

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$$

comme étant le support de $\widetilde{\mathcal{M}}$. On peut vérifier que ce support ne dépend pas du choix de la bonne filtration.

Un résultat fondamental dû notamment à Gabber affirme que $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ est une sous-variété *involutive*[6] pour la structure symplectique canonique de T^*X. En particulier, sa dimension est supérieure à $\dim(X)$ si $\mathcal{M} \neq 0$.

Définition 1.5.1. Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est dit *holonome* si $\mathcal{M} = 0$ ou si $\dim(\mathrm{Ch}(\mathcal{M})) = \dim(X)$, c'est-à-dire si $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ est une sous-variété lagrangienne de T^*X.

Exemple 1.5.2. Les connexions intégrables (voir Exemple 1.4.2) sont des D-modules holonomes. En effet, pour un tel D-module on a $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = X$, où X est considéré comme la section nulle de T^*X. (Voir [HTT, Proposition 2.2.5].)

On peut vérifier que les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes forment une catégorie abélienne, stable par extension dans la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. On notera $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dont les objets ont leurs faisceaux de cohomologie holonome. On peut vérifier que les foncteurs $\mathbb{D}_X$, $\int_f$, $f^\dagger$ se restreignent en des foncteurs entre les catégories $D^b_h(-)$ (même si les deux derniers foncteurs ne se restreignent pas en des foncteurs pour les D-modules cohérents en général). Voir [HTT, §§3.1 et 3.2]. De plus, on a le résultat suivant (voir [HTT, Corollary 2.6.8]).

Proposition 1.5.3. *Pour tout $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$, l'objet*

$$\mathbb{D}_X(\mathcal{M}) \in D^b(\mathcal{D}_X)$$

est concentré en degré 0, et isomorphe à un $\mathcal{D}_X$-module holonome.

6. Une sous-variété V d'une variété symplectique M est dite *involutive* si pour tout point lisse x de V, on a $T_x(V)^{\perp,\omega_x} \subseteq T_x(V)$ pour la forme symplectique ω_x sur $T_x(M)$.

Maintenant on peut définir deux nouveaux foncteurs.

Définition 1.5.4. On définit les foncteurs

$$\int_{f!} := \mathbb{D}_Y \circ \int_f \circ \mathbb{D}_X : D^b_h(\mathcal{D}_X) \to D^b_h(\mathcal{D}_Y),$$
$$f^\bigstar := \mathbb{D}_X \circ f^\dagger \circ \mathbb{D}_Y : D^b_h(\mathcal{D}_Y) \to D^b_h(\mathcal{D}_X).$$

Ces foncteurs ont le comportement attendu sur les catégories $D^b_h(-)$. En particulier on a le résultat suivant (voir [HTT, Corollary 3.2.15]).

Proposition 1.5.5. *Le foncteur $\int_{f!}$, respectivement $f^\bigstar$, est adjoint à gauche du foncteur $f^\dagger$, respectivement $\int_f$, entre les catégories $D^b_h(\mathcal{D}_X)$ et $D^b_h(\mathcal{D}_Y)$.*

1.6. **D-modules holonomes simples.** On peut vérifier que tout D-module holonome est de longueur finie. On peut également donner une classification des D-modules holonomes simples, comme suit. Cette classification ressemble beaucoup à celle des faisceaux pervers simples. Cette relation sera expliquée dans la partie 2.

Soit $Y \subset X$ une sous-variété localement fermée lisse. Supposons de plus que l'inclusion $i : Y \hookrightarrow X$ est un morphisme affine. Sous ces conditions, l'image par $\int_i$ d'un $\mathcal{D}_Y$-module holonome est un $\mathcal{D}_X$-module holonome (voir la Remarque 1.3.3(4) et le §1.5). En utilisant la Proposition 1.5.3, on déduit qu'il en est de même pour l'image directe exceptionnelle $\int_{i!}$. De plus, on peut vérifier que pour tout D-module holonome $\mathcal{M}$ il existe un morphisme fonctoriel [7]

$$\int_{i!} \mathcal{M} \to \int_i \mathcal{M}.$$

Son image sera notée $\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})$, et appelée l'*extension intermédiaire* de $\mathcal{M}$.

Le théorème suivant regroupe les propriétés principales de ces D-modules (voir [HTT, Theorem 3.4.2, Proposition 3.4.3].

Théorème 1.6.1. (i) *Sous les conditions précédentes sur Y et i, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module holonome simple, alors $\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome simple. De plus, c'est l'unique sous-module (respectivement quotient) simple de $\int_i \mathcal{M}$ (respectivement $\int_{i!} \mathcal{M}$).*

(ii) *Tout $\mathcal{D}_X$-module holonome simple est isomorphe à $\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})$ pour une sous-variété Y vérifiant les conditions précédentes et une connexion intégrable simple $\mathcal{M}$ sur Y.*

(iii) *Soient $(Y, \mathcal{M})$ et $(Y', \mathcal{M}')$ deux paires vérifiant les conditions de* (ii). *Alors il existe un isomorphisme $\mathcal{L}(Y, \mathcal{M}) \cong \mathcal{L}(Y', \mathcal{M}')$ ssi $\overline{Y} = \overline{Y'}$ et $\mathcal{M}|_U \cong \mathcal{M}'|_U$ pour un ouvert dense U de $Y \cap Y'$.*

(iv) *Supposons que Y vérifie les conditions précédentes, et soit $\mathcal{M}$ une connexion intégrable sur Y. Alors il existe un isomorphisme* [8]

$$\mathbb{D}_X\big(\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})\big) \;\cong\; \mathcal{L}(Y, \mathbb{D}_Y(\mathcal{M})).$$

7. Il semble d'après la construction (cf. [HTT, Theorem 3.2.16]) que ce morphisme n'est pas déterminé de façon unique par la donnée de i. Par contre, son image est bien déterminée d'après le Théorème 1.6.1(i).

8. Rappelons que sous ces conditions $\mathbb{D}_Y(\mathcal{M})$ est de nouveau une connexion intégrable, voir Exemple 1.4.2.

2. Equivalence de Riemann-Hilbert

Dans cette partie on énonce l'équivalence de Riemann-Hilbert, un résultat fondamental (dû à Kashiwara et Mebkhout dans le cadre analytique, et à Bernstein dans le cadre algébrique) qui permet de relier la théorie des D-modules à celle des faisceaux pervers.

2.1. D-modules holonomes réguliers.

La notion de D-module holonome *régulier* est très importante, mais difficile à appréhender. Ici on en donne une définition assez simple mais peu éclairante, due à Bernstein. Pour des détails sur les motivations qui peuvent conduire à cette définition (qui viennent de l'analyse), on pourra consulter [HTT, Chapitre 5].

Soit C une courbe (lisse). Soit $\overline{C}$ une complétion lisse de C (qui est unique à isomorphisme près), et soit $i : C \hookrightarrow \overline{C}$ l'inclusion. Pour tout $c \in \overline{C} - C$ on fixe un paramètre local x_c, et on note $\theta_c := x_c \cdot \frac{d}{dx_c} \in (\mathcal{D}_{\overline{C}})_c$. Notons que i vérifie les conditions de la Remarque 1.3.3(4).

Définition 2.1.1. Une connexion intégrable $\mathcal{M}$ sur C est dite *régulière* si pour tout $c \in \overline{C} - C$, le $(\mathcal{D}_{\overline{C}})_c$-module $(\int_i \mathcal{M})_c$ est une réunion de $(\mathcal{O}_{\overline{C}})_c$-sous-modules cohérents stables par θ_c.

On peut vérifier que si $f : C \to C'$ est un morphisme dominant entre deux courbes, et si $\mathcal{M}$ est une connexion intégrable sur C', alors $\mathcal{M}$ est régulière ssi $f^*\mathcal{M}$ est régulière. Ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.1.2. (i) Une connexion intégrable $\mathcal{M}$ sur X est dite *régulière* si pour toute courbe lisse C et tout morphisme $i : C \to X$, la connexion intégrable $i^*\mathcal{M}$ est régulière (au sens de la Définition 2.1.1).

(ii) Un $\mathcal{D}_X$-module holonome est dit *régulier* si ses facteurs de composition sont de la forme $\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})$ avec $Y \subset X$ une sous-variété localement fermée telle que l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ soit affine, et $\mathcal{M}$ est une connexion intégrable régulière sur Y.

Exemple 2.1.3. On vérifie facilement que $\mathcal{O}_X$ est une connexion intégrable régulière.

On note $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dont les objets ont des faisceaux de cohomologie holonomes réguliers. On peut vérifier que cette sous-catégorie est stable par les foncteurs $\mathbb{D}_X$, $\int_f$, $\int_{f!}$, $f^\dagger$ et $f^\bigstar$ pour un morphisme f. (Voir [HTT, Theorem 6.1.5].)

2.2. Foncteur de De Rham.

Soit X^{an} la variété X, vue comme variété analytique. On note $D^b(\underline{\mathbb{C}}_{X^{\mathrm{an}}})$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X^{an}, et $D^b_{\mathrm{const}}(X)$ la sous-catégorie pleine dont les objets ont des faisceaux de cohomologie constructibles. Insistons sur le fait que, même si la notation peut être trompeuse, les objets de $D^b_{\mathrm{const}}(X)$ sont des complexes de faisceaux sur l'espace topologique X^{an} et non X.

On note également $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ le faisceau d'anneaux des fonctions holomorphes sur X^{an}. Il existe un morphisme naturel d'espaces annelés

$$\iota : (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_X).$$

On note $\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels holomorphes sur X^{an}. On a par définition

$$\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}} \cong \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_X} \iota^{-1}\mathcal{D}_X.$$

On note $D^b(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}})$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}$-modules à gauche. On a alors un foncteur naturel exact

$$(-)^{\mathrm{an}} : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}).$$

Définition 2.2.1. On définit le foncteur de De Rham

$$DR_X : \left\{ \begin{array}{ccc} D^b(\mathcal{D}_X) & \to & D^b(\underline{\mathbb{C}}_{X^{\mathrm{an}}}) \\ \mathcal{M} & \mapsto & \Omega_{X^{\mathrm{an}}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}} (\mathcal{M})^{\mathrm{an}} \end{array} \right.$$

Remarque 2.2.2. Ce foncteur a une interprétation en termes de solutions d'équations différentielles, voir [HTT, Proposition 4.7.4]. Il est clair d'après cette interprétation que l'objet $DR_X(\mathcal{M})$ peut être très différent de son "analogue algébrique" $\Omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$. En effet il est très différent de chercher des solutions d'une équation différentielle dans les fonctions polynomiales ou dans les fonctions analytiques. Cette version algébrique n'a pas un comportement intéressant.

Exemple 2.2.3. En utilisant la résolution localement libre

$$0 \to \Omega^0_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}} \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}} \to \cdots \to \Omega^{\dim X}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}} \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}} \to \Omega_{X^{\mathrm{an}}} \to 0,$$

on vérifie que si $\mathcal{M}$ est une connexion intégrable alors $DR_X(\mathcal{M})$ est concentré en degré $-\dim(X)$. Sa cohomologie de degré $-\dim(X)$ est un système local sur X^{an}, formé des *sections horizontales* de $\mathcal{M}$, i.e. on a

$$DR_X(\mathcal{M}) \ \cong \ \ker(\mathcal{M}^{\mathrm{an}} \cong \Omega^0_{X^{\mathrm{an}}} \otimes \mathcal{M}^{\mathrm{an}} \to \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}} \otimes \mathcal{M}^{\mathrm{an}})[\dim(X)].$$

(Voir [HTT, Theorem 4.2.4].) Le fait que ces sections horizontales forment un système local est à rapprocher du théorème classique de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles.

Le théorème suivant est un résultat fondamental, dû à Kashiwara dans le cadre analytique, et à Bernstein dans le cadre algébrique (voir [HTT, Theorem 4.7.7]). Il est appelé "théorème de constructibilité de Kashiwara".

Théorème 2.2.4. *Le foncteur DR_X induit un foncteur*

$$DR_X : D^b_h(\mathcal{D}_X) \to D^b_{\mathrm{const}}(X).$$

On peut finalement énoncer *l'équivalence de Riemann-Hilbert* (voir [HTT, Theorems 7.1.1, 7.2.2, 7.2.5]).

Théorème 2.2.5. (i) *Il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\mathbf{D}_X \circ DR_X \cong DR_X \circ \mathbb{D}_X : D^b_h(X) \to D^b_{\mathrm{const}}(X).$$

Ici $\mathbf{D}_X : D^b_{\mathrm{const}}(X) \to D^b_{\mathrm{const}}(X)$ est le foncteur de dualité de Verdier.

(ii) *On a des isomorphismes de foncteurs*

$$DR_Y \circ \int_f \cong Rf_* \circ DR_X : \ D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \to D^b_{\mathrm{const}}(Y),$$
$$DR_Y \circ \int_{f!} \cong Rf_! \circ DR_X : \ D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \to D^b_{\mathrm{const}}(Y),$$
$$DR_X \circ f^\dagger \cong f^! \circ DR_Y : \ D^b_{rh}(\mathcal{D}_Y) \to D^b_{\mathrm{const}}(X),$$
$$DR_X \circ f^\bigstar \cong f^{-1} \circ DR_Y : \ D^b_{rh}(\mathcal{D}_Y) \to D^b_{\mathrm{const}}(X).$$

(iii) *Le foncteur*

$$DR_X : D^b_{rh}(X) \to D^b_{\mathrm{const}}(X)$$

est une équivalence de catégories. Il induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers et la catégorie $\mathrm{Perv}(X)$ *des faisceaux pervers sur* X^{an}.

Remarque 2.2.6. Dans (ii), il est très important de se restreindre aux modules holonomes *réguliers.*

Exemple 2.2.7. En particulier, le foncteur DR_X induit une équivalence entre connexions intégrables régulières sur X et systèmes locaux sur X^{an} (voir [HTT, Corollary 5.3.10]). De plus, si Y est une sous-variété lisse localement fermée dont l'inclusion est affine, et si $\mathcal{M}$ est une connexion intégrable régulière sur Y, alors $DR_X(\mathcal{L}(Y, \mathcal{M})) \cong \mathrm{IC}(Y, DR_Y(\mathcal{M}))$.

2.3. **D-modules équivariants.** Soit X une variété complexe lisse, munie d'une action d'un groupe algébrique K. Soient $a, p_2 : K \times X \to X$ l'action et la projection sur la seconde composante. Un $\mathcal{D}_X$-module K-équivariant est la donnée d'un couple $(\mathcal{M}, \phi)$, où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module, et ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{K\times X}$-modules $p_2^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} a^*\mathcal{M}$ satisfaisant la condition de cocycle habituelle. Pour simplifier on omettra souvent l'isomorphisme ϕ. On note $\mathrm{Mod}^K_c(\mathcal{D}_X)$ la catégorie (abélienne) des $\mathcal{D}_X$-modules K-équivariants.

Le résultat suivant se démontre très facilement (voir [HTT, Theorem 11.6.1]). Il simplifie grandement l'utilisation de l'équivalence de Riemann-Hilbert.

Proposition 2.3.1. *Supposons que K n'a qu'un nombre fini d'orbites sur X. Alos un $\mathcal{D}_X$-module cohérent K-équivariant est automatiquement holonome régulier. En particulier, sous cette condition le foncteur de De Rham induit une équivalence*

$$\mathrm{Mod}^K_c(\mathcal{D}_X) \ \cong \ \mathrm{Perv}^K(X),$$

où $\mathrm{Perv}^K(X)$ *est la catégorie des faisceaux pervers K-équivariants sur X.*

3. Localisation de Beilinson-Bernstein

Dans cette partie on explique les liens entre la théorie des représentations d'une algèbre de Lie semi-simple complexe et la théorie des D-modules sur la variété des drapeaux associée. Ce lien est donné par la théorie de la *localisation*, due à Beilinson-Bernstein. Les références pour cette partie sont [Be, Mi] ou [HTT, Chapitre 11]. On pourra également consulter [BMR, §3] [9].

9. Cet article développe un analogue de la théorie de la localisation en caractéristique positive, en reprenant plusieurs constructions géométriques de la théorie sur $\mathbb{C}$.

3.1. **Notations et rappels.** Soit G un groupe algébrique semi-simple complexe[10], simplement connexe. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{U}\mathfrak{g}$ le centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$. On a clairement $\mathfrak{Z} = (\mathcal{U}\mathfrak{g})^G$, pour l'action de G sur $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ par conjugaison.

On choisit un sous-groupe de Borel $B \subset G$ et un tore maximal $T \subset B$, et on note $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{t}$ leurs algèbres de Lie. Soient B^+ le sous-groupe de Borel opposé à B (relativement à T), $\mathfrak{b}^+$ son algèbre de Lie, U et U^+ les radicaux unipotents de B et B^+, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^+$ leurs algèbres de Lie.

Soit R le système de racines de (G,T), et R^+ les racines de $\mathfrak{n}^+$. Soit W le groupe de Weyl de (G,T) (ou de R). Soit ρ la demi-somme des racines positives. On définit l'action décalée de W sur $\mathfrak{t}^*$ par la formule

$$w \bullet \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

(Ici, on note ρ pour sa différentielle.) On note similairement l'action contragrédiente sur $\mathfrak{t}$.

On a la décomposition triangulaire

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

On peut donc définir un morphisme $\gamma : \mathcal{U}\mathfrak{g} \to \mathcal{U}\mathfrak{t} = \mathrm{S}(t)$ comme étant la projection associée à la décomposition $\mathcal{U}\mathfrak{g} = \mathcal{U}\mathfrak{t} \oplus (\mathfrak{n} \cdot \mathcal{U}\mathfrak{g} + \mathcal{U}\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{n}^+)$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.1.1. *Le morphisme γ induit un isomorphisme (appelé* isomorphisme d'Harish-Chandra*)*

$$\mathfrak{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}(\mathfrak{t})^{(W,\bullet)} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}^*/(W,\bullet)].$$

D'après cette proposition, tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ définit un caractère de $\mathfrak{Z}$ (qui ne dépend que de l'orbite de λ sous $(W,\bullet)$). On note

$$(\mathcal{U}\mathfrak{g})^\lambda := \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{Z}} \mathbb{C}_\lambda.$$

On note $\mathrm{Mod}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^\lambda)$ la catégorie des $(\mathcal{U}\mathfrak{g})^\lambda$-modules, et $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^\lambda)$ la sous-catégorie des modules de type fini.

Dans cette partie on explique la théorie de la localisation pour une large classe de caractères centraux λ. Dans la partie 4 on n'utilisera que le cas particulier $\lambda = 0$.

3.2. **Opérateurs différentiels sur $\mathcal{B}$ et algèbre enveloppante.** Considérons le morphisme quotient

$$p : G/U \to \mathcal{B} = G/B.$$

Le groupe T agit naturellement sur G/U par multiplication à droite, ce qui fait de p un T-torseur. On définit le faisceau d'anneaux

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} := p_*(\mathcal{D}_{G/U})^T.$$

Autrement dit, au-dessus d'un ouvert V de G/B, les sections de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$ sont les opérateurs différentiels sur $p^{-1}(V)$ invariants par l'action de T. L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique H est isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels sur H invariants par l'action (à droite

10. Plus généralement, les résultats de cette partie sont vérifiés sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

ou à gauche, au choix) de H par multiplication. Comme p est localement trivial, on en déduit que *localement* $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}\mathfrak{t}$. De plus, comme $\mathfrak{t}$ est abélienne, on a $\mathcal{U}\mathfrak{t} = \mathrm{S}(\mathfrak{t})$.

De façon plus précise, l'action de T sur G/U induit (en différentiant le morphisme $G/U \times T \to G/U$) un morphisme $\mathfrak{t} \to \Gamma(G/U, \mathcal{T}_{G/U})$, qui induit un morphisme d'algèbres $\mathrm{S}(\mathfrak{t}) \to \Gamma(G/U, \mathcal{D}_{G/U})$, qui se factorise lui-même en un morphisme d'algèbres

$$\mathrm{S}(\mathfrak{t}) \to \Gamma(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}). \tag{3.2.1}$$

Tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ induit un caractère de $\mathrm{S}(\mathfrak{t})$. On définit le faisceau d'anneaux sur $\mathcal{B}$

$$\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}} \ := \ \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathrm{S}(\mathfrak{t})} \mathbb{C}_{\lambda}.$$

Notons que par définition on $\mathcal{D}^0_{\mathcal{B}} = \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$.

De même, l'action de G sur G/U (par multiplication à gauche) induit un morphisme d'algèbres

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} \to \Gamma(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}). \tag{3.2.2}$$

Le résultat suivant se démontre en regardant précisément les définitions (voir [BMR, Lemma 3.1.5] ou [Mi, Partie C]).

Lemme 3.2.3. *Les morphismes* (3.2.1) *et* (3.2.2) *se factorisent, en utilisant l'isomorphisme de la Proposition* 3.1.1*, en un morphisme d'algèbres*

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{S}(\mathfrak{t})^{(W,\bullet)}} \mathrm{S}(\mathfrak{t}) \ \to \ \Gamma(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}).$$

Puis, en utilisant que ce morphisme est filtré et en utilisant des résultats géométriques qui permettent de comprendre le gradué associé, on peut démontrer le point (i) du théorème suivant. Le point (ii) s'en déduit par la formule de projection. (Voir [BMR, Proposition 3.4.1] ou [Mi, Partie C] pour le détail des preuves.)

Théorème 3.2.4. (i) *Le morphisme*

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{S}(\mathfrak{t})^{(W,\bullet)}} \mathrm{S}(\mathfrak{t}) \ \to \ \Gamma(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}})$$

est un isomorphisme d'algèbres.

(ii) *Pour tout* $\lambda \in \mathfrak{t}^*$*, on a un isomorphisme d'algèbres*

$$(\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\lambda} \ \xrightarrow{\sim} \ \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}}).$$

Notons qu'il existe une inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = p_*(\mathcal{O}_{G/U})^T \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$. On notera $\mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}})$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}}$-modules à gauche qui sont quasi-cohérents sur $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, et $\mathrm{Mod}_c(\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}})$ la sous-catégorie des modules qui sont, de plus, localement de type fini sur $\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}}$.

Remarque 3.2.5. On vérifie facilement que si λ est entier, c'est-à-dire est la différentielle d'un caractère de T (qu'on note de la même manière), on a un isomorphisme d'algèbre $\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\lambda)$. (Pour la définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\lambda)$, voir la preuve du Théorème 3.3.1 ci-dessous.) En effet, $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\lambda)$ est isomorphe au sous-faisceau de $p_*(\mathcal{O}_{G/U})$ formé des sections sur lesquelles T agit par λ. Il est donc naturellement muni d'une action de $\mathcal{D}^{\lambda}_{\mathcal{B}}$.

3.3. **Théorème de localisation.** On peut maintenant énoncer le théorème de localisation. Pour les détails de la preuve, on pourra consulter [HTT, §11.4].

Théorème 3.3.1. (i) *Suposons que* λ *vérifie la condition suivante :*

$$\forall \alpha \in R^+, \ (\lambda+\rho)(\alpha^\vee) \notin \mathbb{Z}_{<0}. \tag{3.3.2}$$

Alors le foncteur

$$\Gamma(\mathcal{B}, -) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda}) \ \to \ \mathrm{Mod}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\lambda})$$

est exact.

(ii) *Suposons que* λ *vérifie la condition suivante :*

$$\forall \alpha \in R^+, \ (\lambda+\rho)(\alpha^\vee) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}. \tag{3.3.3}$$

Alors les foncteurs

$$\Gamma := \Gamma(\mathcal{B}, -)$$

et

$$\mathfrak{L}^{\lambda} := \mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda} \otimes_{(\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\lambda}} -$$

induisent des équivalences de catégories quasi-inverses

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda}) \ \cong \ \mathrm{Mod}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\lambda}).$$

Ces équivalences se restreignent en une équivalence

$$\mathrm{Mod}_{c}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda}) \ \cong \ \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^{\lambda}).$$

Remarque 3.3.4. La condition plus forte (3.3.3) est nécessaire pour que (ii) soit vérifié. En effet $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\rho)$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-\rho}$-module non-nul qui est annulé par Γ. Par exemple, pour $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, on a $\mathcal{B} \cong \mathbb{P}^1$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\rho) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Idée de la preuve. Par des arguments simples, on vérifie qu'il suffit de démontrer les deux assertions suivantes :

(a) Sous la condition (3.3.2), pour tout $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda})$ et pour tout $k > 0$ on a $H^k(\mathcal{B}, \mathcal{M}) = 0$.

(b) Sous la condition (3.3.3), pour tout $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\lambda})$ le morphisme naturel (d'adjonction) $\mathfrak{L}^{\lambda} \circ \Gamma(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ est surjectif.

Pour tout $\mu \in X^*(T)$, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu)$ le fibré en droites formé des sections[11] de $G \times^B \mathbb{C}_{\mu} \to \mathcal{B}$. Avec notre normalisation, $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu)$ est ample si μ est strictement dominant. De plus, sous cette condition on a $\Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu)) = V(\mu)$. Ici, $V(\mu)$ est le G-module simple de plus haut poids μ. En particulier, il existe des morphismes naturels

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu), \quad \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \hookrightarrow V(-w_0\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu)$$

(où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W) qui induisent des morphismes

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \xrightarrow{p_{\mu}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu),$$

$$\mathcal{M} \xhookrightarrow{i_{\mu}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(\mu) \otimes_{\mathbb{C}} V(-w_0\mu).$$

Le point-clé de la preuve est le suivant.

11. Rappelons que $G \times^B \mathbb{C}_{\mu} \to \mathcal{B}$ est le quotient de $G \times \mathbb{C}$ par l'action de B donnée par $b \cdot (g, t) = (gb^{-1}, \mu(b)t)$.

Lemme 3.3.5. (i) *Sous l'hypothèse* (3.3.2), *le morphisme* i_μ *est scindé.*
(ii) *Sous l'hypothèse* (3.3.3), *le morphisme* p_μ *est scindé.*

Montrons comment on peut terminer la preuve du théorème en admettant ce lemme. Prouvons tout d'abord (a). Il suffit de monter que pour tout sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, le morphisme $H^k(\mathcal{B}, \mathcal{N}) \to H^k(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ est nul. Par amplitude, si μ est suffisamment dominant on a $H^k(\mathcal{B}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\mu)) = 0$, et donc aussi $H^k(\mathcal{B}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\mu) \otimes_\mathbb{C} V(-w_0\mu)) = 0$. Le résultat suit en inspectant le diagramme commutatif suivant, dont la flèche verticale de droite est injective par (i) :

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathcal{B}, \mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(\mathcal{B}, \mathcal{M}) \arrow[d, hook] \\
H^k(\mathcal{B}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\mu) \otimes_\mathbb{C} V(-w_0\mu)) \arrow[r] & H^k(\mathcal{B}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\mu) \otimes_\mathbb{C} V(-w_0\mu)).
\end{tikzcd}$$

Prouvons maintenant (b). Soit $\mathcal{M}'$ l'image du morphisme $\mathfrak{L}^\lambda \circ \Gamma(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$, et $\mathcal{M}''$ son conoyau. Par définition de $\mathcal{M}'$ on a $\Gamma(\mathcal{M}') = \Gamma(\mathcal{M})$, et par exactitude de Γ (prouvée ci-dessus), on en déduit $\Gamma(\mathcal{M}'') = 0$. Par (ii), p_μ est scindé. Donc pour tout μ on a $\Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{M}'' \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\mu)) = 0$, ce qui implique $\mathcal{M}'' = 0$ par les propriétés usuelles des faisceaux amples. $\square$

Preuve du Lemme 3.3.5. Commençons par prouver (ii). En utilisant une filtration de $V(\mu)$ par les poids de B, on obtient une filtration

$$V(\mu) \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathcal{B} = \mathcal{V}^0 \supset \mathcal{V}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{V}^n = 0$$

telle que pour tout i on a $\mathcal{V}^i/\mathcal{V}^{i+1} \cong \mathcal{O}_\mathcal{B}(\nu_i)$, où les ν_i sont les poids de $V(\mu)$ (comptés avec leur multiplicité) et $(\nu_i = \mu) \Rightarrow (i = 0)$. Cette filtration induit une filtration

$$\mathcal{M} \otimes_\mathbb{C} V(\mu) = \mathcal{M}^0 \supset \mathcal{M}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{M}^n = 0,$$

telle que $\mathcal{M}^i/\mathcal{M}^{i+1} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\nu_i)$ et que p_μ s'identifie au morphisme $\mathcal{M}^0 \twoheadrightarrow \mathcal{M}^0/\mathcal{M}^1$. Maintenant, via le morphisme du Théorème 3.2.4, $\mathcal{M}$ est un faisceau de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-modules. L'action diagonale munit donc $\mathcal{M} \otimes_\mathbb{C} V(\mu)$ et les $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\nu_i)$ d'une structure de faisceaux de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-modules. De plus, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\nu_i)$ a pour caractère central [12] $\lambda + \nu_i$. Donc le centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ agit de façon localement finie sur $\mathcal{M} \otimes_\mathbb{C} V(\mu)$ et on peut considérer sa décomposition en sous-espaces de poids généralisés pour l'action du centre. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} \mathcal{O}_\mathcal{B}(\nu_0)$ est le seul sous-facteur de caractère central $\lambda + \mu$ dans la filtration. Supposons que $\lambda + \nu_i$ induise le même caractère central que $\lambda + \mu$. Alors il existe $w \in W$ tel que $\lambda + \mu = w \bullet (\lambda + \nu_i)$. Alors

$$w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho) = \mu - w(\nu_i).$$

Dans cette expression le membre de droite est dans $\mathbb{Z}_{\geq 0} R^+$ (car $w(\nu_i)$ est un poids de $V(\mu)$), et par la condition (3.3.3) le membre de gauche n'est pas dans $\mathbb{Z}_{\geq 0} R^+ - \{0\}$. On en déduit que $w(\lambda + \rho) = \lambda + \rho$, c'est-à-dire $w = 1$ (en utilisant encore la condition (3.3.3)), et donc $i = 0$.

12. Cela n'est pas immédiatement clair car il n'est pas simple de comprendre le comportement du centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ sous la comultiplication $\mathcal{U}\mathfrak{g} \to \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathcal{U}\mathfrak{g}$. Par contre, l'assertion devient claire si on remarque tous nos objets sont en fait des faisceaux de $\mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{S}(\mathfrak{t})^{(W,\bullet)}} \mathrm{S}(\mathfrak{t})$-modules. Alternativement, on peut aussi utiliser la Remarque 3.2.5.

(i) Par des arguments similaires, il suffit de démontrer que sous l'hypothèse (3.3.2), si $\lambda+\mu+\nu$ induit le même caractère central que λ (où ν est un poids de $V(-w_0\mu)$), alors $\nu=-\mu$. Supposons qu'il existe $w\in W$ tel que $\lambda+\mu+\nu=w\bullet\lambda$. Alors

$$w(\lambda+\rho)-(\lambda+\rho)=\nu-(-\mu).$$

Or $-\mu$ est le plus bas poids de $V(-w_0\mu)$, donc le membre de droite est dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}R^+$. La condition (3.3.2) impose alors $\nu=-\mu$. □

3.4. **Modules équivariants.** Supposons maintenant $\lambda=0$. Alors $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^0=\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, et donc on peut considérer les $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^0$-modules B-équivariants pour l'action de B^+ par multiplication à gauche sur $\mathcal{B}$ (voir §2.3). De plus ; 0 verifie la condition (3.3.3). On peut vérifier (voir [HTT, Theorem 11.5.3]) que l'équivalence du Théorème 3.3.1 induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod}_c^{B^+}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}})\ \cong\ \mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0), \tag{3.4.1}$$

où $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$ désigne la catégorie des $(\mathcal{U}\mathfrak{g})^0$-modules B^+-équivariants, c'est-à-dire tels que l'action de $\mathcal{U}\mathfrak{b}^+$ s'intègre en une action de B^+. Insistons sur le fait que l'action de B^+ (si elle existe) est entièrement déterminée par l'action de $\mathcal{U}\mathfrak{b}^+$. La "$B^+$-équivariance" sur un $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-module n'est donc pas une structure supplémentaire, mais uniquement une condition sur l'action de $\mathcal{U}\mathfrak{b}^+$.

3.5. **Modules de Verma, modules simples.** Pour les résultats de cette sous-partie, on pourra consulter [HTT, §12].

Pour tout $\lambda\in\mathfrak{t}^*$, le $\mathcal{U}\mathfrak{t}$-module $\mathbb{C}_\lambda$ d'étend en un module sur $\mathcal{U}\mathfrak{b}^+$, de telle sorte que $\mathfrak{n}^+$ agit de façon triviale. On peut alors considérer le $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-module induit

$$M(\lambda):=\mathcal{U}\mathfrak{g}\otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{b}^+}\mathbb{C}_\lambda.$$

Il est bien connu que $M(\lambda)$ admet un unique quotient simple, noté $L(\lambda)$.

On vérifie aisément que $\mathfrak{Z}$ agit sur $M(\lambda)$ (et donc aussi sur $L(\lambda)$) via le caractère induit par λ. En particulier, les modules de Verma de caractère central 0 sont les $M(w\bullet 0)$. Pour des raisons qui apparaitront plus tard, on va les paramétrer d'une façon qui n'est pas la plus naturelle, en posant

$$M_w:=M(ww_0\bullet 0)=M(-w\rho-\rho).$$

De même, on pose

$$L_w:=L(-w\rho-\rho).$$

Il est clair que si λ est un caractère entier, alors $\mathbb{C}_\lambda$ s'intègre en un B^+-module. Alors $M(\lambda)$ est un $\mathcal{U}\mathfrak{g}$-module B^+-équivariant, et de même pour $L(\lambda)$. En particulier, les M_w et les L_w appartiennent à la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$. De plus, les L_w sont les objets simples de cette catégorie. Les facteurs simples de M_w sont L_w, avec multiplicité 1, et certains L_y pour $y<w$. (Ici "$<$" désigne l'ordre de Bruhat dans W.) En particulier, les classes des M_w pour $w\in W$ forment également une base du groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$ (puisque la matrice exprimant leurs coordonnées dans la base $\big([L_y]\big)_{y\in W}$ est inversible).

Dans la partie 4 on va s'intéresser au problème suivant.

Problème 3.5.1. Déterminer la multiplicité de L_y dans M_w.

De façon équivalente, on cherche à décomposer les éléments $[M_w]$ dans la base de $K^0(\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0))$ formée par les M_w. Il est bien connu que l'opération qui à un objet M de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$ associe son caractère $\mathrm{ch}(M)$ (la somme formelle des caractères de T sur M, avec leurs multiplicités) induit une inclusion de $K^0(\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0))$ dans le groupe des sommes formelles de caractères de T. Et un calcul simple donne l'égalité

$$\mathrm{ch}(M_w) = \frac{e^{-w\rho-\rho}}{\prod_{\alpha \in R^+}(1-e^{-\alpha})}.$$

Pour résoudre le Problème 3.5.1 (modulo un problème d'algèbre linéaire, facile à résoudre si on considère un cas concret), il suffit donc de savoir résoudre le problème suivant.

Problème 3.5.2. Calculer $\mathrm{ch}(L_w)$.

Notons que si on sait calculer les $\mathrm{ch}(L_w)$, alors on peut décomposer le caractère de n'importe quel objet M de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$ comme une somme de ces caractères, et donc déterminer les multiplicités de tous les facteurs simples de M. Ceci explique l'intérêt du Problème 3.5.1.

Enfin, comme on sait calculer les $\mathrm{ch}(M_y)$, et comme les $\big([M_y]\big)_{y\in W}$ forment une base de $K^0(\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0))$, il suffit de résoudre le problème suivant.

Problème 3.5.3. Décomposer la classe $[L_w]$ dans la base $\big([M_y]\big)_{y\in W}$ de $K^0(\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0))$.

Dans la partie 4 on va montrer comment le Problème 3.5.3 peut se traduire en un problème concernant les faisceaux pervers sur $\mathcal{B}$, suivant Beilinson-Bernstein.

4. Multiplicités des modules de Verma et faisceaux pervers

4.1. **Définitions et rappels.** On a vu (équation (3.4.1) et Proposition 2.3.1) qu'il existe des équivalences de catégories

$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{L}^0} \mathrm{Mod}_c^{B^+}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}) \xrightarrow[\sim]{DR_{\mathcal{B}}} \mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B}). \tag{4.1.1}$$

On va maintenant utiliser cette chaîne d'équivalences pour montrer que le problème de calculer les multiplicités des modules simples dans les modules de Verma peut se traduire en termes de faisceaux pervers sur $\mathcal{B}$. Dans cette partie il sera plus commode de travailler avec le sous-groupe de Borel positif B^+. On identifie donc $\mathcal{B}$ au quotient G/B^+, via le morphisme $gB^+ \mapsto gw_0B$.

Rappelons qu'on a la décomposition de Bruhat

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{w\in W} X_w$$

avec $X_w = B^+wB^+/B^+$. Pour tout $w \in W$ on note $i_w : X_w \hookrightarrow \mathcal{B}$ l'inclusion. Rappelons également qu'on a $\dim(X_w) = \ell(w)$, où ℓ désigne la longueur dans le groupe de Coxeter W. Pour simplifier les notations, on écrira yB^+ pour désigner le point $y \cdot B^+/B^+$ de $\mathcal{B}$ (pour $y \in W$).

Dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$, on s'intéresse aux objets L_w et M_w, $w \in W$ (voir §3.5). Notons

$$\mathcal{L}_w := \mathfrak{L}^0(L_w) = \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{g}} L_w, \quad \mathcal{M}_w := \mathfrak{L}^0(M_w) = \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{g}} M_w.$$

Soit $i_w : X_w \to \mathcal{B}$ l'inclusion de la variété de Schubert X_w. On va également considérer le $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-module B-équivariant

$$\mathcal{N}_w := \int_{i_w} \mathcal{O}_{X_w}.$$

(Notons que i_w est un morphisme affine, donc $\mathcal{N}_w$ est effectivement concentré en degré 0, voir la Remarque 1.3.3(4).)

Rappelons enfin que les objets simples de la catégorie $\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B})$ sont les complexes d'intersection $\mathrm{IC}(X_w)$. Les classes des objets $(i_w)_! \underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\ell(w)]$ forment également une base du groupe de Grothendieck de $\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B})$ (car la matrice donnant leurs coefficients dans la base $\big(\mathrm{IC}(X_y)\big)_{y \in W}$ est triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale, donc inversible).

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat principal exposé dans ces notes, qui sera démontré au §4.4.

Théorème 4.1.2. *On a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck de la catégorie* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)$ *:*

$$[L_w] \;=\; \sum_{y \in W} a_{y,w} \cdot [M_y]$$

avec

$$a_{y,w} \;=\; (-1)^{\ell(y)} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \cdot \dim\big(H^j(\mathrm{IC}(X_w)_{yB^+})\big).$$

4.2. **Etude de $\mathcal{N}_w$.**

Lemme 4.2.1. *Les caractères* $\mathrm{ch}(\Gamma(\mathcal{N}_w))$ *et* $\mathrm{ch}(M_w)$ *sont égaux. En particulier,* $\Gamma(\mathcal{N}_w)$ *et* M_w *ont même classe en* K*-théorie.*

Démonstration. (i) Considérons les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{n}_1 = \bigoplus_{\alpha \in R^- \cap w(R^-)} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_2 = \bigoplus_{\alpha \in R^+ \cap w(R^-)} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Soient N_1 et N_2 les sous-groupes (unipotents) de G associés. Fixons un représentant de w dans le normalisateur $N_G(T)$ (noté aussi w), et considérons le morphisme

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} N_1 \times N_2 & \to & \mathcal{B} \\ (n_1, n_2) & \mapsto & n_1 n_2 w B^+ \end{array} \right.$$

Par les propriétés bien connues des cellules de Bruhat, ϕ est une inclusion ouverte, d'image $V := wUB^+/B^+$. De plus, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} N_2 \cong \{1_G\} \times N_2 \arrow[r, "\phi", "\sim"'] \arrow[d, hook] & X_w \arrow[d, hook] \\ N_1 \times N_2 \arrow[r, "\phi", "\sim"'] & V. \end{tikzcd}$$

On en déduit les isomorphismes suivants.

$$\Gamma(\mathcal{B},\mathcal{N}_w) \cong \Gamma(X_w, \mathcal{D}_{\mathcal{B}\leftarrow X_w} \otimes_{\mathcal{D}_{X_w}} \mathcal{O}_{X_w}) \cong \Gamma(X_w, \mathcal{D}_{V\leftarrow X_w} \otimes_{\mathcal{D}_{X_w}} \mathcal{O}_{X_w})$$
$$\cong \Gamma(N_2, \mathcal{D}_{N_1\times N_2\leftarrow N_2} \otimes_{\mathcal{D}_{N_2}} \mathcal{O}_{N_2}).$$

Un calcul élémentaire donne alors (en notant $\mathcal{D}(X)$ les sections globales de $\mathcal{D}_X$ pour une variété affine lisse X, et de même pour $\mathcal{O}_X$ et Ω_X^{-1})

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathcal{N}_w) \ &\cong\ \big(\mathcal{D}(N_1) \otimes_{\mathcal{O}(N_1)} \mathbb{C}\big) \otimes_{\mathbb{C}} \big(\Omega^{-1}(N_1) \otimes_{\mathcal{O}(N_1)} \mathbb{C}\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(N_2)\\ &\cong\ \mathcal{U}(\mathfrak{n}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{\dim(\mathfrak{n}_1)}(\mathfrak{n}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{n}_2^*).\end{aligned}$$

Comme ces isomorphismes sont T-équivariants, on obtient donc finalement

$$\mathrm{ch}(\Gamma(\mathcal{N}_w)) \ = \ \frac{e^{-w\rho-\rho}}{\prod_{\alpha\in R^+}(1-e^{-\alpha})} \ = \ \mathrm{ch}(M_w).$$

Ce qui conclut la preuve. □

4.3. **Identification de $\mathcal{L}_w$.** Notons $\mathcal{L}(X_w, \mathcal{O}_{X_w})$ l'extension minimale de la connexion régulière $\mathcal{O}_{X_w}$ sur X_w (voir §1.6).

Lemme 4.3.1. *Pour tout $w \in W$ on a un isomorphisme*

$$\mathcal{L}_w \cong \mathcal{L}(X_w, \mathcal{O}_{X_w}).$$

Démonstration. Par la classification des D-modules holonomes simples (ou celle des faisceaux pervers simples), pour tout $w \in W$ il existe $y \in W$ et un isomorphisme $\mathcal{L}_w \cong \mathcal{L}(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$. Par construction, L_w est un facteur de composition de M_w. Donc $\mathcal{L}_w$ est un facteur de composition de $\mathcal{M}_w$, et donc également de $\mathcal{N}_w$ d'après le Lemme 4.2.1. Il s'ensuit que $y \leq w$ pour l'ordre de Bruhat. (En effet, par construction $\mathcal{N}_w$ est à support dans $\overline{X_w}$.) Par récurrence sur w, on montre alors facilement qu'on doit avoir $y = w$. □

4.4. **Fin de la preuve.** D'après les équivalences (4.1.1), on a des isomorphismes

$$K^0\big(\mathrm{Mod}_{\mathrm{tf}}^{B^+}((\mathcal{U}\mathfrak{g})^0)\big) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{L}^0} K^0\big(\mathrm{Mod}_c^{B^+}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}})\big) \xrightarrow[\sim]{DR_{\mathcal{B}}} K^0\big(\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B})\big).$$

Pour simplifier les notations, on écrit $\underline{\mathbb{C}}_{X_w}$ pour $(i_w)_!\underline{\mathbb{C}}_{X_w}$.

Lemme 4.4.1. *On a les égalités suivantes dans $K^0\big(\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B})\big)$:*

$$\begin{aligned}DR_{\mathcal{B}}([\mathcal{L}_w]) \ &= \ [\mathrm{IC}(X_w)]\\ DR_{\mathcal{B}}([\mathcal{M}_w]) \ &= \ [\underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\dim(X_w)]]\end{aligned}$$

Démonstration. La première égalité découle du Lemme 4.3.1 et du fait que $DR_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(X_w, \mathcal{O}_{X_w})) \cong \mathrm{IC}(X_w)$.

Pour prouver la deuxième égalité, on observe que les faisceaux pervers simples $\mathrm{IC}(X_w)$ sont invariants par la dualité $\mathbf{D}_X$ (voir le Théorème 1.6.1(iv) pour l'énoncé analogue sur les D-modules holonomes). Il s'ensuit que l'action de $\mathbf{D}_X$ sur $K^0(\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B}))$ est triviale. En particulier,

$$\big[\underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\ell(w)]\big] = \big[\mathbf{D}_{\mathcal{B}}(\underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\ell(w)])\big] = \big[R(i_w)_*\underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\ell(w)]\big].$$

Maintenant, d'après le Lemme 4.2.1 on sait que $[\mathcal{M}_w] = [\mathcal{N}_w]$. Et, d'après le Théorème 2.2.5 et l'Exemple 2.2.3, on sait qu'on a un isomorphisme $DR_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}_w) \cong R(i_w)_*\mathbb{C}_{X_w}[\dim X_w]$. □

On peut maintenant achever la preuve du théorème.

Démonstration du Théorème 4.1.2. Considérons l'application

$$\phi : \begin{cases} K^0(\mathrm{Perv}^{B^+}(\mathcal{B})) & \to & \mathbb{Z}[W] \\ M & \mapsto & \sum_{y \in W} \Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(M_{yB^+}) \Big) \cdot y \end{cases}$$

On a clairement

$$\phi\big([\underline{\mathbb{C}}_{X_w}[\dim(X_w)]] \big) = (-1)^{\ell(w)} w.$$

Donc ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules. D'autre part, par définition,

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{IC}(X_w)) &= \sum_{y \in W} \Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(\mathrm{IC}(X_w)_{yB^+}) \Big) \cdot y \\ &= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)} \Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(\mathrm{IC}(X_w)_{yB^+}) \Big) \cdot \phi\big([\underline{\mathbb{C}}_{X_y}[\dim(X_y)]] \big). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que ϕ est un isomorphisme et le Lemme 4.4.1, on en déduit le résultat. $\square$

5. Compléments et remarques

5.1. **Identification de $\mathcal{M}_w$.** On peut en fait démontrer qu'il existe un isomorphisme

$$\mathcal{M}_w \cong \mathbb{D}_X(\mathcal{N}_w) = \int_{i_w !} \mathcal{O}_{X_w}. \tag{5.1.1}$$

La preuve s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 5.1.2. *$\mathcal{N}_w$ n'a aucun sous-$\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-module non nul dont le support est inclus dans $\overline{X_w} - X_w$.*

Démonstration. Soit V l'ouvert considéré dans la preuve du Lemme 4.2.1. Soit $Z = \mathcal{B} - V$, et soit $j : V \hookrightarrow \mathcal{B}$ l'inclusion. D'après un résultat général (voir [HTT, Proposition 1.7.1]), il existe un triangle distingué

$$R\Gamma_Z(\mathcal{N}_w) \to \mathcal{N}_w \to \int_j j^\dagger \mathcal{N}_w \xrightarrow{+1} . \tag{5.1.3}$$

On vérifie facilement que $\int_j j^\dagger \mathcal{N}_w \cong j_*(\mathcal{N}_w|_V)$, et donc par définition de $\mathcal{N}_w$ la deuxième flèche du triangle (5.1.3) est un isomorphisme. Donc $R\Gamma_Z(\mathcal{N}_w) = 0$. Comme $\overline{X_w} - X_w \subset Z$, ceci prouve le résultat. $\square$

Preuve de (5.1.1). Comme $\mathbb{D}_{\mathcal{B}}$ agit trivialement en K-théorie (voir la preuve du Lemma 4.4.1), on a $\mathrm{ch}(\Gamma(\mathbb{D}_{\mathcal{B}}\mathcal{N}_w)) = \mathrm{ch}(\Gamma(\mathcal{N}_w)) = \mathrm{ch}(M_w)$. (Ici on a utilisé le Lemme 4.2.1.) En particulier, $\Gamma(\mathbb{D}_{\mathcal{B}}\mathcal{N}_w)$ a pour plus haut poids $-w\rho - \rho$, et il existe donc un morphisme $f : M_w \to \Gamma(\mathbb{D}_{\mathcal{B}}\mathcal{N}_w)$. De plus, L_w n'est pas un facteur de composition de $C := \mathrm{Coker}(f)$. Soit $\mathcal{C} = \mathfrak{L}^0(C)$. On a alors une suite exacte

$$\mathcal{M}_w \to \mathbb{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}_w) \to \mathcal{C} \to 0.$$

En dualisant on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathbb{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{N}_w \to \mathbb{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_w).$$

Le $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-module $\mathbb{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ n'a pas $\mathcal{L}_w$ comme facteur de composition, donc son support est inclus dans $\overline{X_w} - X_w$. Par le Lemme 5.1.2, on en déduit $\mathbb{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 0 = \mathcal{C}$. Le morphisme f est donc surjectif. Par égalité des caractères de M_w et $\Gamma(\mathbb{D}_{\mathcal{B}}\mathcal{N}_w)$, c'est donc un isomorphisme. Ce qui prouve l'isomorphisme (5.1.1), étant donné que Γ est une équivalence de catégories. □

5.2. **Calcul effectif des multiplicités.** Le Théorème 4.1.2 montre comment traduire le problème du calcul des multiplicités des modules de Verma en un problème de faisceaux pervers sur $\mathcal{B}$. L'intérêt de cette "traduction" est qu'on peut effectivement faire des calculs dans les faisceaux pervers. Plus précisément, on peut démontrer que la quantité

$$(-1)^{\ell(y)} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \cdot \dim\big(H^j(\mathrm{IC}(X_w)_{yB^+})\big)$$

est égale à $(-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)$, où $P_{y,w}$ est le polynôme de Kazhdan-Lusztig associé à y et w (défini en utilisant l'algèbre de Hecke de W), ce qui permet de compléter la preuve de la célèbre "Conjecture de Kazhdan-Lusztig".

La première preuve de cette égalité est due à Kazhdan-Lusztig (voir §5.3). Une preuve légèrement différente est esquissée dans [Be] et présentée en détail dans [HTT, Proposition 13.2.1]. Cette preuve utilise la propriété de *pureté* des faisceaux pervers simples (ou des modules de Hodge mixtes simples) sur $\mathcal{B}$. Cette propriété est générale pour les faisceaux pervers simples sur une variété.

5.3. **Cohomologie des fibres des faisceaux pervers et coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig.** Pour démontrer l'égalité du §5.2, Kazhdan-Lusztig ont en fait démontré plus précisément que

$$P_{y,w}(q) \;=\; \sum_{j \in \mathbb{Z}} \big(\dim H^{j-\ell(w)}(\mathrm{IC}(X_w)_{yB})\big) \cdot q^{j/2},$$

voir [KL]. (En particulier, $H^{j-\ell(w)}(\mathrm{IC}(X_w)_{yB}) = 0$ si j est impair.) Pour prouver ce résultat, ils démontrent la *pureté ponctuelle* des faisceaux pervers simples sur $\mathcal{B}$, qui n'est pas une propriété générale. (Voir aussi [HTT, Theorem 13.2.11] ou [Ha].)

Une preuve plus élémentaire du même résultat, due à MacPherson et Springer, est donnée dans [Sp]. Pour une présentation de cette preuve, des remarques sur les autres preuves, et des calculs explicites, on pourra consulter [Ri].

5.4. **Multiplicités pour les autres caractères centraux.** Le théorème 4.1.2 et l'égalité du §5.2 décrivent les caractères des modules simples de caractère central 0. En utilisant des foncteurs de translation, on peut en déduire les caractères simples pour tous les caractères entiers. En fait, des méthodes similaires à celles décrites dans ces notes (cohomologie d'intersection tordue) permettent de décrire les caractères simples pour tout caractère central rationnel (c'est-à-dire égal au quotient d'un caractère entier par un entier). Puis un argument de déformation dû à Jantzen permet d'étendre cette description à un caractère central arbitraire. (Voir [KT] pour les détails.)

5.5. **Exemple : $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.** Suposons que $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On choisit pour B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures, pour B^+ celui des matrices triangulaires inférieures. Le groupe des caractères de $T = B \cap B^+$ s'identifie à $\mathbb{Z}$, où k correspond au caractère

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t^k.$$

On a $W = \{1, s\}$, avec $s^2 = 1$. La variété des drapeaux $\mathcal{B}$ s'identifie à $\mathbb{P}^1$, et la décomposition de Bruhat est

$$\mathbb{P}^1 = X_1 \sqcup X_s \quad \text{avec } X_1 = \{\infty\},\ X_s = \mathbb{A}^1.$$

Par définition on a

$$M_s = \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{b}^+} \mathbb{C}_0, \quad M_1 = \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{b}^+} \mathbb{C}_{-2}.$$

Leurs caractères sont

$$\mathrm{ch}(M_s) = \sum_{k \leq 0} e^k, \quad \mathrm{ch}(M_1) = \sum_{k \leq -2} e^k.$$

Le module de Verma M_1 est simple (puisqu'il n'existe aucun module simple de plus haut poids strictement inférieur à -2 dans la catégorie considérée), donc

$$M_1 = L_1. \tag{5.5.1}$$

D'autre part, L_s est le module trivial $\mathbb{C}$. On a une suite exacte

$$0 \to L_1 \to M_s \to L_s \to 0. \tag{5.5.2}$$

Au niveau géométrique, les variétés de Schubert $\overline{X_1}$ et $\overline{X_s}$ sont toutes deux lisses. On a donc

$$\mathrm{IC}(X_1) = \underline{\mathbb{C}}_{X_1}, \quad \mathrm{IC}(X_s) = \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{P}^1}[1].$$

L'égalité

$$(i_1)_! \underline{\mathbb{C}}_{X_1} = (i_1)_* \underline{\mathbb{C}}_{X_1} = \mathrm{IC}(X_1)$$

(car X_1 est fermé) traduit l'égalité (5.5.1). On a également une suite exacte naturelle de faisceaux

$$0 \to (i_s)_! \underline{\mathbb{C}}_{X_s} \to \underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{P}^1} \to (i_1)_* \underline{\mathbb{C}}_{X_1} \to 0.$$

En faisant tourner le triangle, on obtient une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to \mathrm{IC}(X_1) \to (i_s)_! \underline{\mathbb{C}}_{X_s}[1] \to \mathrm{IC}(X_s) \to 0,$$

qui est la traduction géométrique de la suite exacte (5.5.2).

Références

[Be] J. Bernstein, *Algebraic theory of D-modules*. Notes disponibles en ligne à l'adresse http://www.math.uchicago.edu/~arinkin/langlands/Bernstein/Bernstein-dmod.pdf.

[BMR] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, D. Rumynin, *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic*, avec un appendice de R. Bezrukavnikov et S. Riche, Ann. of Math. **167** (2008), 945–991. (arXiv:math/0205144)

[Bo] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Academic Press, 1987.

[HTT] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki, *D-modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Progress in Mathematics 236, Birkäuser, 2008.

[Ka] M. Kashiwara, *D-modules and Microlocal Calculus*, Translations of Mathematical Monographs 217, A.M.S., 2003.

[KT] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras*, in *Representations and Quantizations (Shanghai, 1998)*, China Higher Education Press, 2000, 275–296. (arXiv:math/9903123.)

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, in "Geometry of the Laplace operator", pp. 185–203, Proc. Sympos. Pure Math. 36, Amer. Math. Soc., 1980.

[Ha] T. Haines, *A proof of the Kazhdan-Lusztig purity theorem via the decomposition theorem of BBD*. Notes disponibles en ligne à l'adresse http://www-users.math.umd.edu/∼tjh/.

[Mi] D. Miličić, *Localization and Representation Theory of Reductive Lie Groups*. Notes disponibles en ligne à l'adresse http://www.math.utah.edu/∼milicic/.

[Ri] S. Riche, *Perverse sheaves on flag manifolds and Kazhdan-Lusztig polynomials (after Kazhdan-Lusztig, MacPherson, Springer, . . .)*. Notes disponibles en ligne à l'adresse http://math.univ-bpclermont.fr/∼riche/.

[Sp] T. A. Springer, *Quelques applications de la cohomologie d'intersection*, Astérisque **92–93** (1982), 249–273.

Clermont Université, Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand.

CNRS, UMR 6620, Laboratoire de Mathématiques, F-63177 Aubière.

E-mail address: simon.riche@math.univ-bpclermont.fr