

# Algèbres de Lie

Simon Riche

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE, CNRS, LMBP, F-63000 CLERMONT-  
FERRAND, FRANCE.

*E-mail address:* `simon.riche@uca.fr`



## Table des matières

Introduction	5
<b>partie 1. Structure des algèbres de Lie</b>	<b>7</b>
Chapitre 1. Préliminaires d'algèbre linéaire	9
1. Rappels sur les corps	9
2. Rappels d'algèbre linéaire	10
3. Produit tensoriel	12
Chapitre 2. Définitions et exemples	19
1. Algèbres de Lie	19
2. Algèbres et algèbres de Lie	20
3. Morphismes d'algèbres de Lie	21
4. Sous-algèbres de Lie	22
5. Idéaux et algèbres quotient	24
6. Centre et sous-algèbre dérivée	27
7. Dérivations	28
8. Représentations	29
Chapitre 3. Algèbres de Lie de petite dimension	31
1. Algèbres de Lie abéliennes	31
2. Dimension 1	31
3. Dimension 2	32
4. Dimension 3	33
Chapitre 4. Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles	43
1. Algèbres de Lie résolubles	43
2. Algèbres de Lie nilpotentes	46
3. Théorème d'Engel	47
4. Théorème de Lie	51
5. Interprétation en termes de représentations	53
Chapitre 5. Algèbre enveloppante et théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt	57
1. Algèbre tensorielle et algèbre symétrique	57
2. Algèbre enveloppante et énoncé du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt	63
3. Preuve du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt	66
4. Quelques conséquences du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt	70
5. Représentations de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -modules	72
6. Application au théorème d'Ado	72
<b>partie 2. Représentations des algèbres de Lie semi-simples</b>	<b>79</b>

Chapitre 6. Algèbres de Lie semi-simples	81
1. Décomposition de Jordan des endomorphismes	81
2. Le critère de Cartan	84
3. Forme de Killing	86
4. Applications	87
Chapitre 7. Théorème de semi-simplicité de Weyl et représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$	93
1. Compléments sur les représentations	93
2. Théorème de Weyl	97
3. Représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$	100
Chapitre 8. Décomposition radicielle des algèbres de Lie semi-simples	105
1. Sous-algèbres de Lie torales et décomposition radicielle	105
2. Propriétés des racines	108
3. Remarque sur l'unicité	113
Chapitre 9. Systèmes de racines et groupes de Weyl	115
1. Définitions et premières propriétés	115
2. Bases, racines simples, et chambres de Weyl	117
3. Étude du groupe de Weyl	121
4. Poids entiers	124
Chapitre 10. Représentations de plus haut poids	127
1. Sous-algèbres de Borel et décomposition triangulaire	127
2. Représentations cycliques de plus haut poids	128
3. Critère de finitude	134
Chapitre 11. Formules de caractères	139
1. Élément de Casimir universel	139
2. Caractères	141
3. Formules de Kostant et de Weyl	144
<b>partie 3. Exercices et examens</b>	<b>151</b>
Annexe A. Exercices	153
1. Chapitre 2	153
2. Chapitre 3	155
3. Chapitre 4	156
4. Chapitre 5	158
5. Chapitre 6	160
6. Chapitre 7	161
7. Chapitre 8	163
8. Chapitre 9	164
9. Chapitre 10	166
10. Chapitre 11	168
Annexe B. Examen du premier semestre	171
Annexe C. Examen du deuxième semestre	177

## Introduction

Les notes qui suivent proposent une introduction à la théorie des représentations via l'exemple des algèbres de Lie semi-simples complexes. Elles ont servi de support pour un cours de Master 2 de 45 heures à Clermont-Ferrand en 2015/2016. La première partie présente la théorie générale des algèbres de Lie, avec notamment les principaux théorèmes classiques (théorèmes d'Engel, de Lie, de Poincaré–Birkhoff–Witt et d'Ado). La seconde partie concerne les algèbres de Lie semi-simples. Elle présente la structure de ces algèbres (en construisant et étudiant leurs systèmes de racines) puis la construction de leurs représentations “de plus haut poids”. Notons que la classification des algèbres de Lie semi-simples n'est pas traitée. Enfin, dans une troisième partie nous avons rassemblé des feuilles d'exercices illustrant les notions vues dans le cours ainsi que les sujets d'examens proposés aux étudiants.

Les sources principales utilisées pour préparer ces notes ont été les suivantes :

- (1) K. Erdmann, M. Wildon, *Introduction to Lie algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, 2006.
- (2) J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Second printing, revised, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer-Verlag, 1978.

Cependant, par rapport à ces ouvrages, on a essayé d'insister plus sur le point de vue de la théorie des représentations. Pour des compléments, le lecteur intéressé pourra également consulter notamment :

- (1) A. Henderson, *Representations of Lie algebras. An introduction through  $\mathfrak{gl}_n$* , Australian Mathematical Society Lecture Series 22, Cambridge University Press, 2012.
- (2) M. Geck, *On the construction of semisimple Lie algebras and Chevalley groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 8, 3233–3247.

Je remercie V. Gouttard pour m'avoir signalé une erreur dans une démonstration.



Première partie

Structure des algèbres de Lie





## Préliminaires d'algèbre linéaire

### 1. Rappels sur les corps

**1.1. Caractéristique.** Soit  $\mathbb{k}$  un corps. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit

$$\bar{n} = 1 + \cdots + 1 \quad (n \text{ termes}).$$

Pour  $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , on pose  $\bar{n} := -(\overline{-n})$ . On peut facilement vérifier que l'application

$$(1.1) \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{k} \\ n & \mapsto & \bar{n} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes (et même d'anneaux), de sorte que son noyau est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , donc est de la forme  $p\mathbb{Z}$  pour un  $p \in \mathbb{N}$ . Par définition, on a

$$p\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \bar{n} = 0\}.$$

**DÉFINITION - PROPOSITION 1.1.** L'entier  $p$  est soit 0, soit un nombre premier. On l'appelle la *caractéristique* de  $\mathbb{k}$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $p$  n'est ni 0, ni un nombre premier. Alors on peut écrire  $p = qr$ , avec  $1 < q < p$  et  $1 < r < p$ . On a, dans  $\mathbb{k}$ ,

$$0 = \bar{p} = \bar{q} \cdot \bar{r}.$$

Comme  $\mathbb{k}$  est un corps, ceci implique qu'on a soit  $\bar{q} = 0$ , soit  $\bar{r} = 0$ , en d'autres termes que soit  $q$  soit  $r$  appartient au noyau de (1.1), c'est-à-dire à  $p\mathbb{Z}$ . Ce qui est absurde.  $\square$

**EXEMPLE 1.2.** (1) Les corps  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont de caractéristique 0.

(2) Si  $p$  est un nombre premier, le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est de caractéristique  $p$ .

### 1.2. Corps algébriquement clos.

**DÉFINITION 1.3.** Le corps  $\mathbb{k}$  est dit *algébriquement clos* si tout polynôme  $P \in \mathbb{k}[X]$  admet une racine (dans  $\mathbb{k}$ ).

La principale conséquence de cette définition que nous utiliserons dans ces notes est la suivante : si  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos et si  $V$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors tout endomorphisme de  $V$  admet une valeur propre (puisque les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique).

**EXEMPLE 1.4.** (1) Le corps  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos.

(2) Les corps  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas algébriquement clos. (Par exemple, le polynôme  $X^2 + 1$  n'admet pas de racines dans  $\mathbb{R}$ , et donc a fortiori dans  $\mathbb{Q}$ .)

- (3) Si  $p$  est un nombre premier, le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  n'est pas algébriquement clos. (Par exemple, le polynôme

$$1 + \prod_{m=0}^{p-1} (X - \overline{m})$$

n'admet pas de racine dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .)

## 2. Rappels d'algèbre linéaire

**2.1. Image et image inverse de sous-espaces.** Soit  $\mathbb{k}$  un corps. Si  $E, F$  sont des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire, pour tous sous-espaces vectoriels  $E' \subset E$  et  $F' \subset F$ , on pose

$$\begin{aligned} f(E') &:= \{f(x), x \in E'\} \subset F, \\ f^{-1}(F') &:= \{x \in E \mid f(x) \in F'\} \subset E. \end{aligned}$$

On rappelle que  $f(E')$  et  $f^{-1}(F')$  sont des sous-espaces vectoriels de  $F$  et  $E$ , respectivement.

EXERCICE 2.1. Soient  $E, F$  des espaces vectoriels, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- (1) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $E' \subset E$  on a

$$f^{-1}(f(E')) = E' + \text{Ker}(f).$$

- (2) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $F' \subset F$ , on a

$$f(f^{-1}(F')) = F' \cap \text{Im}(f).$$

**2.2. Espace vectoriel quotient.** Soit  $E$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Pour tout  $x \in E$  on peut considérer la classe

$$x + F := \{x + y, y \in F\} \subset E.$$

Par définition, le quotient  $E/F$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  de la forme  $x + F$  pour  $x \in E$ . Il est muni d'une structure d'espace vectoriel, où

$$\lambda \cdot (x + F) = (\lambda \cdot x) + F, \quad (x + F) + (y + F) = (x + y) + F.$$

Le vecteur nul de l'espace vectoriel  $E/F$  est  $0 + F = F$ . Par définition, pour  $x, y \in E$  on a

$$(2.1) \quad x + F = y + F \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in F.$$

On a une application naturelle

$$\pi : \begin{cases} E & \rightarrow & E/F \\ x & \mapsto & x + F \end{cases},$$

qui est clairement surjective. On vérifie facilement que  $\pi$  est une application linéaire. Pour tout  $x \in E$  on a  $\pi^{-1}(\pi(x)) = x + F \subset E$ . En particulier  $\text{Ker}(\pi) = F$ , et  $\pi$  n'est pas injective si  $F \neq \{0\}$ .

REMARQUE 2.2. Si  $x, y \in E$ , on utilise parfois la notation

$$x = y \pmod{F}$$

pour dire que  $\pi(x) = \pi(y)$ , c'est-à-dire que  $x - y \in F$ .

EXERCICE 2.3. Soit  $F' \subset E$  un supplémentaire de  $F$ , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel tel que  $E = F \oplus F'$ . Montrer que la composée

$$F' \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} E/F$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

### 2.3. Annulation et factorisation.

DÉFINITION 2.4. Soient  $E, F, G$  des espaces vectoriels, et  $f : E \rightarrow G, g : E \rightarrow F$  des applications linéaires. On dit que  $f$  se factorise par  $g$  s'il existe une application linéaire  $h : F \rightarrow G$  telle que  $f = h \circ g$ .

Fixons maintenant  $E$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel, et notons  $\pi : E \rightarrow E/F$  la projection associée.

PROPOSITION 2.5. Soit  $G$  un espace vectoriel et  $f : E \rightarrow G$  une application linéaire. Alors  $f$  se factorise par  $\pi$  ssi  $f(F) = \{0\}$ . De plus, si cette condition est vérifiée, l'application linéaire  $g : E/F \rightarrow G$  telle que  $f = g \circ \pi$  est unique.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que  $f = h \circ \pi$  pour une application linéaire  $h : E/F \rightarrow G$ . Alors  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(h \circ \pi) \supset \text{Ker}(\pi) = F$ , donc  $f(F) = \{0\}$ .

Réciproquement, supposons que  $f(F) = \{0\}$ . On définit alors l'application

$$\bar{f} : E/F \rightarrow G$$

en posant, pour  $x \in E, \bar{f}(x + F) = f(x)$ . Cette application est bien définie puisque si  $x + F = y + F$  alors  $x - y \in F$  (voir (2.1)), donc on a

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0,$$

ce qui montre que  $\bar{f}(x + F) = \bar{f}(y + F)$ . D'autre part on a clairement  $f = \bar{f} \circ \pi$ , et  $\bar{f}$  est une application linéaire puisque pour  $x, y \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda(x + F) + \mu(y + F)) &= \bar{f}((\lambda x + \mu y) + F) = f(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \bar{f}(x + F) + \mu \bar{f}(y + F). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'équivalence des deux propriétés.

Finalement, comme l'application  $\pi$  est surjective, l'égalité  $f = g \circ \pi$  détermine l'image par  $g$  de tout vecteur de  $E/F$ , ce qui prouve l'unicité.  $\square$

Comme vu dans l'exercice 2.3, le quotient  $E/F$  est isomorphe à n'importe quel supplémentaire de  $F$ . L'intérêt principal du quotient  $E/F$  par rapport à un supplémentaire est qu'étant donné une structure sur  $E$  qui stabilise  $F$  (en un sens approprié), on peut souvent en déduire une structure similaire sur  $E/F$ , ce qui n'est en général pas possible en considérant un supplémentaire. Par exemple, soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f(F) \subset F$ . Alors la composée  $\pi \circ f : E \rightarrow E/F$  est nulle sur  $F$ , de sorte que d'après la proposition 2.5 il existe un endomorphisme  $\bar{f}$  de  $E/F$  tel que  $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$ . Par contre, si  $F'$  est un supplémentaire de  $F$ , en général on n'a pas  $f(F') \subset F'$ , de sorte que  $f$  ne définit pas "naturellement" d'endomorphisme de  $F'$ . (En fait, il est même possible qu'il n'existe aucun supplémentaire  $F'$  de  $F$  tel que  $f(F') \subset F'$ .) Un autre exemple de ce phénomène apparaîtra dans le contexte des algèbres de Lie et de leurs idéaux au chapitre 2.

### 2.4. Noyau et image.

PROPOSITION 2.6. *Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels, et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$E/\text{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f).$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $f(\text{Ker}(f)) = \{0\}$ , l'application

$$\begin{cases} E/\text{Ker}(f) & \rightarrow & F \\ x + \text{Ker}(f) & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est bien définie, et linéaire (voir la proposition 2.5). Cette application prend clairement ses valeurs dans  $\text{Im}(f)$ , on peut donc la considérer comme une application linéaire de  $E/\text{Ker}(f)$  vers  $\text{Im}(f)$ .

Vérifions que  $\bar{f} : E/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  est surjective. Soit  $y \in \text{Im}(f)$ . Par définition il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Alors  $y = \bar{f}(x + \text{Ker}(f))$ , ce qui prouve la surjectivité.

Finalement, vérifions que  $\bar{f}$  est injective. Soit  $x + \text{Ker}(f) \in E/\text{Ker}(f)$ , et supposons que  $\bar{f}(x + \text{Ker}(f)) = 0$ . Alors on a

$$0 = \bar{f}(x + \text{Ker}(f)) = f(x).$$

Donc  $x \in \text{Ker}(f)$ , et donc  $x + \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f)$ , ce qui prouve l'injectivité et achève la preuve.  $\square$

## 3. Produit tensoriel

**3.1. Définition.** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels de dimension finie<sup>1</sup>. Soient  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  une base de  $E$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)$  une base de  $F$ . On considère alors l'espace vectoriel  $\mathbb{T}(E, F, \mathbf{e}, \mathbf{f})$  dont une base est constituée des symboles  $e_i \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} f_j$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $j \in \{1, \dots, s\}$ .

Pour tous  $v \in E$  et  $w \in F$  on définit le vecteur  $v \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} w \in \mathbb{T}(E, F, \mathbf{e}, \mathbf{f})$  de la façon suivante. Décomposons  $v$  et  $w$  sur les bases  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{f}$  respectivement :

$$v = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i, \quad w = \sum_{j=1}^s \mu_j f_j.$$

On pose alors

$$v \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} w := \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot e_i \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} f_j.$$

Notons que si  $v = e_i$  est un vecteur de la base  $\mathbf{e}$  et  $w = f_j$  est un vecteur de la base  $\mathbf{f}$ , le vecteur  $e_i \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} f_j$  défini de cette façon coïncide bien avec le vecteur noté de la même façon précédemment.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout autre choix de bases  $\mathbf{e}'$  de  $E$  et  $\mathbf{f}'$  de  $F$ , il existe une unique application linéaire*

$$\varphi_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}^{\mathbf{e}', \mathbf{f}'} : \mathbb{T}(E, F, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{T}(E, F, \mathbf{e}', \mathbf{f}')$$

qui vérifie la propriété

$$\varphi_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}^{\mathbf{e}', \mathbf{f}'}(v \otimes^{\mathbf{e}, \mathbf{f}} w) = v \otimes^{\mathbf{e}', \mathbf{f}'} w$$

1. Cette hypothèse ne joue aucun rôle important, mais permet de fixer plus facilement les notations pour les bases.

pour tous  $v \in E$  et  $w \in F$ . De plus, pour toutes bases  $e, e', f, f'$ , on a

$$\varphi_{e',f'}^{e,f} \circ \varphi_{e,f}^{e',f'} = \text{Id}_{\mathbb{T}(E,F,e,f)}.$$

En particulier,  $\varphi_{e,f}^{e',f'}$  est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Le morphisme  $\varphi_{e,f}^{e',f'}$  doit en particulier vérifier

$$\varphi_{e,f}^{e',f'}(e_i \otimes^{e,f} f_j) = e_i \otimes^{e',f'} f_j.$$

Cette équation détermine  $\varphi_{e,f}^{e',f'}$  de façon unique puisque les vecteurs de la forme  $e_i \otimes^{e,f} f_j$  forment une base de  $E \otimes F$ .

Considérons maintenant l'unique application linéaire  $\varphi$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{T}(E, F, e, f)$  vers  $\mathbb{T}(E, F, e', f')$  qui vérifie

$$\varphi(e_i \otimes^{e,f} f_j) = e_i \otimes^{e',f'} f_j.$$

Soient  $m_{i,k}$  et  $n_{j,l}$  les scalaires définis par les conditions

$$e_i = \sum_{k=1}^r m_{i,k} \cdot e'_k, \quad f_j = \sum_{l=1}^s n_{j,l} \cdot f'_l.$$

Soient maintenant  $v \in E$  et  $w \in F$ . On veut montrer que

$$\varphi(v \otimes^{e,f} w) = v \otimes^{e',f'} w.$$

Décomposons  $v$  et  $w$  sur les bases  $e$  et  $f$  respectivement :

$$v = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i, \quad w = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot f_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(v \otimes^{e,f} w) &= \varphi \left( \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot e_i \otimes^{e,f} f_j \right) \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot \varphi(e_i \otimes^{e,f} f_j) \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot e_i \otimes^{e',f'} f_j \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot \left( \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, r\} \\ l \in \{1, \dots, s\}}} m_{i,k} n_{j,l} \cdot e'_k \otimes^{e',f'} f'_l \right) \\ &= \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, r\} \\ l \in \{1, \dots, s\}}} \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i m_{i,k} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^s \mu_j n_{j,l} \right) \cdot e'_k \otimes^{e',f'} f'_l. \end{aligned}$$

Or on a

$$v = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \left( \sum_{k=1}^r m_{i,k} e'_k \right) = \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i m_{i,k} \right) \cdot e'_k$$

et

$$w = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot f_j = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot \left( \sum_{l=1}^s n_{j,l} \cdot f'_l \right) = \sum_{l=1}^s \left( \sum_{j=1}^s \mu_j n_{j,l} \right) \cdot f'_l.$$

Donc, par définition, on a

$$v \otimes^{e',f'} w = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, r\} \\ l \in \{1, \dots, s\}}} \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i m_{i,k} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^s \mu_j n_{j,l} \right) \cdot e'_k \otimes^{e',f'} f'_l,$$

ce qui prouve que

$$\varphi(v \otimes^{e,f} w) = v \otimes^{e',f'} w,$$

et donc que  $\varphi_{e',f'}^{e',f'}$  existe (et est égale à l'application  $\varphi$  considérée ci-dessus).

L'application  $\varphi_{e',f'}^{e,f} \circ \varphi_{e,f}^{e',f'}$  vérifie

$$\varphi_{e',f'}^{e,f} \circ \varphi_{e,f}^{e',f'} (v \otimes^{e,f} w) = v \otimes^{e,f} w$$

pour tous  $v \in E$  et  $w \in F$ , et donc en particulier

$$\varphi_{e',f'}^{e,f} \circ \varphi_{e,f}^{e',f'} (e_i \otimes^{e,f} f_j) = e_i \otimes^{e,f} f_j$$

pour tous  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Comme les vecteurs  $e_i \otimes^{e,f} f_j$  forment une base de  $\mathbb{T}(E, F, e, f)$ , ceci implique que

$$\varphi_{e',f'}^{e,f} \circ \varphi_{e,f}^{e',f'} = \text{Id}_{\mathbb{T}(E, F, e, f)}.$$

Les mêmes arguments montrent que

$$\varphi_{e,f}^{e',f'} \circ \varphi_{e',f'}^{e,f} = \text{Id}_{\mathbb{T}(E, F, e', f')},$$

ce qui implique que  $\varphi_{e,f}^{e',f'}$  est un isomorphisme (d'inverse  $\varphi_{e',f'}^{e,f}$ ).  $\square$

La proposition 3.1 montre que l'espace vectoriel  $\mathbb{T}(E, F, e, f)$  est indépendant du choix des bases  $e$  et  $f$ , à identification *canonique* près. On le note donc  $E \otimes F$ , et on l'appelle l'espace vectoriel *produit tensoriel* de  $E$  et  $F$ . Notons qu'on a

$$\dim(E \otimes F) = \dim(E) \cdot \dim(F).$$

De même, pour tous vecteurs  $v \in E$  et  $w \in F$ , le vecteur  $v \otimes^{e,f} w$  est indépendant du choix de  $e$  et  $f$ , au sens où l'identification canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{T}(E, F, e, f)$  avec  $\mathbb{T}(E, F, e', f')$  envoie  $v \otimes^{e,f} w$  sur  $v \otimes^{e',f'} w$ . On note donc ce vecteur

$$v \otimes w \in E \otimes F.$$

Cette construction définit une application canonique

$$(3.1) \quad \psi_{E,F} : E \times F \rightarrow E \otimes F,$$

qui n'est *pas* linéaire. En fait cette application est *bilinéaire* : elle vérifie

$$\psi_{E,F}(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \psi_{E,F}(v_1, w) + \mu \psi_{E,F}(v_2, w),$$

$$\psi_{E,F}(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \psi_{E,F}(v, w_1) + \mu \psi_{E,F}(v, w_2)$$

pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  et  $v, v_1, v_2 \in E$ ,  $w, w_1, w_2 \in F$ .

REMARQUE 3.2. Les vecteurs de la forme  $v \otimes w$  (c'est-à-dire les vecteurs dans l'image de l'application  $\psi_{E,F}$ ) sont appelés *tenseurs purs*. Ces vecteurs engendrent l'espace vectoriel  $E \otimes F$ . Mais, si  $\dim(E) \geq 2$  et  $\dim(F) \geq 2$ , il existe des vecteurs dans  $E \otimes F$  qui ne sont pas des tenseurs purs. Par exemple, choisissons  $E = F = \mathbb{k}^2$ , muni de sa base canonique  $(e_1, e_2)$ . Les tenseurs purs sont les vecteurs de la forme

$$(\lambda e_1 + \mu e_2) \otimes (\lambda' e_1 + \mu' e_2) = \lambda \lambda' \cdot e_1 \otimes e_1 + \lambda \mu' \cdot e_1 \otimes e_2 + \lambda' \mu \cdot e_2 \otimes e_1 + \mu \mu' \cdot e_2 \otimes e_2.$$

En particulier, si le coefficient de  $e_1 \otimes e_1$  est nul, alors soit le coefficient de  $e_1 \otimes e_2$  soit le coefficient de  $e_2 \otimes e_1$  est nul. Ceci montre que le vecteur

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

n'est pas un tenseur pur.

EXERCICE 3.3 (Propriété universelle du produit tensoriel). Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels, et soit  $\varphi : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire. Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $\varphi' : E \otimes F \rightarrow G$  telle que  $\varphi = \varphi' \circ \psi_{E,F}$ , où  $\psi_{E,F} : E \times F \rightarrow E \otimes F$  est l'application canonique considérée ci-dessus.

EXERCICE 3.4. Montrer que si  $E, E_1, E_2, F, F_1, F_2$  sont des espaces vectoriels, il existe des isomorphismes canoniques

$$(E_1 \times E_2) \otimes F \cong E_1 \otimes F \times E_2 \otimes F \quad \text{et} \quad E \otimes (F_1 \times F_2) \cong E \otimes F_1 \times E \otimes F_2.$$

**3.2. Functorialité.** Considérons quatre espaces vectoriels  $E_1, E_2, F_1, F_2$  de dimension finie, et des applications linéaires  $g : E_1 \rightarrow E_2$  et  $h : F_1 \rightarrow F_2$ .

PROPOSITION 3.5. *Il existe une unique application linéaire*

$$\varphi : E_1 \otimes F_1 \rightarrow E_2 \otimes F_2$$

telle que, pour tous  $v \in E_1$  et  $w \in F_1$ , on a

$$\varphi(v \otimes w) = g(v) \otimes h(w).$$

Cette application linéaire est notée  $g \otimes h$ .

DÉMONSTRATION. La condition de l'énoncé définit  $\varphi$  sur les tenseurs purs. Comme ces vecteurs engendrent  $E_1 \otimes F_1$  (voir la remarque 3.2), il ne peut exister au plus qu'une application linéaire satisfaisant cette condition.

Démontrons maintenant l'existence de  $\varphi$ . Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  une base de  $E_1$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)$  une base de  $F_1$ . Alors les vecteurs  $e_i \otimes f_j$  (pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $j \in \{1, \dots, s\}$ ) forment une base de  $E_1 \otimes F_1$ . On peut donc définir une application

$$\varphi : E_1 \otimes F_1 \rightarrow E_2 \otimes F_2$$

par la condition que  $\varphi(e_i \otimes f_j) = g(e_i) \otimes h(f_j)$  pour tous  $i, j$ . Soient maintenant  $v \in E_1$  et  $w \in F_1$  des vecteurs quelconques. Décomposons  $v$  et  $w$  sur les bases  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{f}$  respectivement :

$$v = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i, \quad w = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot f_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(v \otimes w) &= \varphi \left( \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot e_i \otimes f_j \right) \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot \varphi(e_i \otimes f_j) \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\}}} \lambda_i \mu_j \cdot g(e_i) \otimes h(f_j) \\
&= \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i g(e_i) \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^s \mu_j h(f_j) \right) \\
&= g(v) \otimes h(w).
\end{aligned}$$

(Ici, la quatrième égalité découle de la bilinéarité de l'application  $\psi_{E_2, F_2}$ .) Notre application linéaire  $\varphi$  vérifie donc la condition de l'énoncé, et l'existence est prouvée.  $\square$

**EXERCICE 3.6.** Exprimer  $\text{Ker}(g \otimes h)$  et  $\text{Im}(g \otimes h)$  en fonction de  $\text{Ker}(g)$ ,  $\text{Ker}(h)$ ,  $\text{Im}(g)$  et  $\text{Im}(h)$ .

**3.3. Associativité.** Considérons trois espaces vectoriels  $E_1, E_2, E_3$  de dimension finie.

**PROPOSITION 3.7.** *Il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\varphi : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \xrightarrow{\sim} E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

tel que, pour tous  $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$  et  $v_3 \in E_3$ , on a

$$(3.2) \quad \varphi((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3).$$

**DÉMONSTRATION.** L'unicité est claire, comme dans la preuve de la proposition 3.5. Pour démontrer l'existence, on fixe des bases  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  de  $E_1$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)$  de  $E_2$ , et  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_t)$  de  $E_3$ . Alors les vecteurs  $(e_i \otimes f_j) \otimes g_k$  (pour  $i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}$  et  $k \in \{1, \dots, t\}$ ) forment une base de  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ . On peut donc définir une application

$$\varphi : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \rightarrow E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

par la condition que

$$\varphi((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) = e_i \otimes (f_j \otimes g_k)$$

pour tous  $i, j, k$ . Soient maintenant  $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$  et  $v_3 \in E_3$  des vecteurs quelconques. Décomposons  $v_1, v_2, v_3$  sur les bases  $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$  respectivement :

$$v_1 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i, \quad v_2 = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot f_j, \quad v_3 = \sum_{k=1}^t \nu_k \cdot g_k.$$



On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) &= \varphi \left( \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\} \\ k \in \{1, \dots, t\}}} \lambda_i \mu_j \nu_k \cdot (e_i \otimes f_j) \otimes g_k \right) \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\} \\ k \in \{1, \dots, t\}}} \lambda_i \mu_j \nu_k \cdot \varphi((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) \\
&= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\} \\ k \in \{1, \dots, t\}}} \lambda_i \mu_j \nu_k \cdot e_i \otimes (f_j \otimes g_k) \\
&= \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i \right) \otimes \left( \left( \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot f_j \right) \otimes \left( \sum_{k=1}^t \nu_k \cdot g_k \right) \right) \\
&= v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3).
\end{aligned}$$

Notre application linéaire  $\varphi$  vérifie donc bien la condition de la proposition, et la preuve est complète.  $\square$

En utilisant la proposition 3.7, on peut donc identifier les espaces vectoriels  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$  et  $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$ , et les noter plus simplement  $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ . De même, si  $v_1, v_2, v_3$  sont comme ci-dessus, (3.2) montre que le vecteur  $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  est bien défini.

De façon plus générale, en utilisant la proposition 3.7, on peut vérifier que si  $E_1, \dots, E_n$  sont des espaces vectoriels, leur produit tensoriel

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_n$$

est bien défini, et si  $(v_1, \dots, v_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ , le vecteur

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$$

est bien défini.



## Définitions et exemples

Dans ton le chapitre, on fixe un corps  $\mathbb{k}$ .

### 1. Algèbres de Lie

#### 1.1. Définition.

DÉFINITION 1.1 (Algèbre de Lie). Une *algèbre de Lie* (sur  $\mathbb{k}$ ) est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ , muni d'une application

$$[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) (bilinéarité) pour tous  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  on a

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z] \quad \text{et} \quad [x, \lambda y + \mu z] = \lambda[x, y] + \mu[x, z];$$

- (2) (antisymétrie) pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $[x, x] = 0$  ;

- (3) (identité de Jacobi) pour tous  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  on a

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

L'application  $[-, -]$  est généralement appelée *crochet de Lie* ou *commutateur*.

REMARQUE 1.2. (1) Soient  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Les conditions d'antisymétrie et de bilinéarité impliquent que

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x].$$

On en déduit que

$$[y, x] = -[x, y].$$

En particulier cette relation implique que, si on a vérifié l'antisymétrie, il suffit de vérifier la première des relations de bilinéarité.

- (2) Puisque  $[-, -]$  est bilinéaire, d'après l'exercice 3.3 du chapitre 1, elle définit une application  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , qu'on notera de la même façon. Le crochet de Lie peut donc être défini comme une application  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui est antisymétrique et qui vérifie l'identité de Jacobi.

EXEMPLE 1.3. Si  $V$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, on peut définir une structure d'algèbre de Lie sur  $V$  en définissant le crochet  $[-, -] : V \times V \rightarrow V$  par  $[v, v'] = 0$  pour tous  $v, v' \in V$ . (Cette application vérifie évidemment les conditions de bilinéarité, d'antisymétrie et l'identité de Jacobi.) Une algèbre de Lie de cette forme (c'est-à-dire telle que le crochet de Lie est l'application nulle) est appelée *abélienne* ou *commutative*.

### 1.2. Produit d'algèbres de Lie.

PROPOSITION 1.4. *Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie. Alors l'espace vectoriel produit  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ , muni de l'application*

$$[-, -] : \begin{cases} (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) & \rightarrow & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & ([x, x'], [y, y']) \end{cases} ,$$

*est une algèbre de Lie.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que cette application est bilinéaire, antisymétrique et qu'elle vérifie l'identité de Jacobi. Soient  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ ,  $x', y', z' \in \mathfrak{h}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ . On a alors

$$\begin{aligned} [\lambda(x, x') + \mu(y, y'), (z, z')] &= [(\lambda x + \mu y, \lambda x' + \mu y'), (z, z')] \\ &= ([\lambda x + \mu y, z], [\lambda x' + \mu y', z']) = (\lambda[x, z] + \mu[y, z], \lambda[x', z'] + \mu[y', z']) \\ &= \lambda([x, z], [x', z']) + \mu([y, z], [y', z']) = \lambda[(x, x'), (z, z')] + \mu[(y, y'), (z, z')]. \end{aligned}$$

De même, on peut vérifier que

$$[(x, x'), \lambda(y, y') + \mu(z, z')] = \lambda[(x, x'), (y, y')] + \mu[(x, x'), (z, z')],$$

ce qui prouve la bilinéarité.

Soient maintenant  $x \in \mathfrak{g}$  et  $x' \in \mathfrak{h}$ . On a

$$[(x, x'), (x, x')] = ([x, x], [x', x']) = (0, 0),$$

ce qui prouve l'antisymétrie.

Finalement, soient  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  et  $x', y', z' \in \mathfrak{h}$ . On a

$$\begin{aligned} [(x, x'), [(y, y'), (z, z')]] + [(y, y'), [(z, z'), (x, x')]] + [(z, z'), [(x, x'), (y, y')]] \\ = ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]], [x', [y', z']] + [y', [z', x']] + [z', [x', y']]) \\ = (0, 0), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

REMARQUE 1.5. Comme pour les espaces vectoriels, on note parfois le produit  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  par  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ .

## 2. Algèbres et algèbres de Lie

On rappelle qu'une  $\mathbb{k}$ -algèbre<sup>1</sup> est un anneau  $A$ , qui est muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{k}$  (telle que l'addition pour cette structure d'espace vectoriel et pour la structure d'anneau coïncident), ces structures vérifiant la condition

$$\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b)$$

pour  $\lambda \in \mathbb{k}$  et  $a, b \in A$ . (En d'autres termes, la multiplication est bilinéaire)

PROPOSITION 2.1. *Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre. Considérons l'application*

$$[-, -] : A \times A \rightarrow A$$

*définie par*

$$[a, b] := ab - ba$$

*pour  $a, b \in A$ . Alors  $A$ , munie de l'application  $[-, -]$ , est une algèbre de Lie.*

1. On utilise parfois le terme d'*algèbre associative* pour insister sur le fait que le produit est associatif. Cette propriété sera toujours supposée vérifiée.

DÉMONSTRATION. On vérifie les 3 conditions de la définition. Commençons par la bilinéarité. Pour  $a, b, c \in A$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} [\lambda a + \mu b, c] &= (\lambda a + \mu b)c - c(\lambda a + \mu b) = \lambda(ac) + \mu(bc) - \lambda(ca) - \mu(cb) \\ &= \lambda(ac - ca) + \mu(bc - cb) = \lambda[a, c] + \mu[b, c]. \end{aligned}$$

La vérification de la condition

$$[a, \lambda b + \mu c] = \lambda[a, b] + \mu[b, c]$$

est similaire, et laissée au lecteur.

Considérons maintenant l'antisymétrie. Pour  $a \in A$  on a

$$[a, a] = aa - aa = 0.$$

Finalement on vérifie l'identité de Jacobi. Pour  $a, b, c \in A$  on a

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] &= [a, bc - cb] + [b, ca - ac] + [c, ab - ba] \\ &= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) - (ca - ac)b + c(ab - ba) - (ab - ba)c \\ &= abc - acb - bca + cba + bca - bac - cab + acb + cab - cba - abc + bac = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Cette proposition permet d'exhiber des exemples moins triviaux d'algèbres de Lie. Par exemple, si  $V$  est un espace vectoriel, alors l'espace vectoriel  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$  des endomorphismes de  $V$  (comme  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel) est une algèbre pour la loi  $f \cdot g = f \circ g$ . On peut donc le munir d'une structure d'algèbre de Lie, avec crochet

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Cette algèbre de Lie sera notée  $\mathfrak{gl}(V)$ .

De façon similaire, si  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace vectoriel  $M_n(\mathbb{k})$  des matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$  est une algèbre pour le produit des matrices. On peut donc le munir d'une structure d'algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie sera notée  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ .

### 3. Morphismes d'algèbres de Lie

DÉFINITION 3.1 (Morphismes d'algèbres de Lie). Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie. Un *morphisme d'algèbres de Lie* de  $\mathfrak{g}$  vers  $\mathfrak{h}$  est une application linéaire  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  qui vérifie

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$ . On dit que  $\varphi$  est un *isomorphisme d'algèbres de Lie* si  $\varphi$  est bijective.

Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ , on parle d'*endomorphisme d'algèbre de Lie* et d'*automorphisme d'algèbre de Lie*.

- REMARQUE 3.2. (1) Si  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  et  $\psi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{k}$  sont des morphismes d'algèbres de Lie, alors  $\psi \circ \varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie.
- (2) Si  $A$  et  $B$  sont deux algèbres et si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres, alors  $\varphi$  est également un morphisme d'algèbres de Lie (pour les structures sur  $A$  et  $B$  fournies par la proposition 2.1).

EXERCICE 3.3. Montrer que si  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors l'application  $\varphi^{-1} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  est également un isomorphisme d'algèbres de Lie.

EXEMPLE 3.4. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ . Alors l'application

$$\varphi : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$$

qui envoie une application linéaire  $f$  sur sa matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est un isomorphisme d'algèbres. C'est donc également un isomorphisme d'algèbres de Lie.

## 4. Sous-algèbres de Lie

### 4.1. Définition.

DÉFINITION 4.1 (Sous-algèbre de Lie). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Une *sous-algèbre de Lie* de  $\mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  tel que, pour tous  $x, y \in \mathfrak{h}$ , on a  $[x, y] \in \mathfrak{h}$ .

REMARQUE 4.2. Si  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{k}$  sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$  est également une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, alors le crochet  $[-, -]$  se restreint en une application  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ , qui vérifie les conditions de bilinéarité, d'antisymétrie, et l'identité de Jacobi. Ce crochet définit donc une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{h}$ . Cette construction permet d'exhiber de nombreux nouveaux exemples d'algèbres de Lie.

EXEMPLES 4.3. Soit  $n \geq 1$ . Les sous-espaces suivants de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  sont des sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  (et sont donc munies d'une structure d'algèbre de Lie) :

- (1) le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{d}_n(\mathbb{k})$  formé des matrices diagonales ;
- (2) le sous-espace  $\mathfrak{b}_n^+(\mathbb{k})$  formé des matrices triangulaires supérieures ;
- (3) le sous-espace  $\mathfrak{b}_n^-(\mathbb{k})$  formé des matrices triangulaires inférieures ;
- (4) le sous-espace  $\mathfrak{u}_n^+(\mathbb{k})$  formé des matrices strictement triangulaires supérieures (c'est-à-dire triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale) ;
- (5) le sous-espace  $\mathfrak{u}_n^-(\mathbb{k})$  formé des matrices strictement triangulaires inférieures.

EXEMPLE 4.4. Soit

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \mid \text{Tr}(X) = 0\}.$$

Alors  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ . En effet si  $X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ , on a

$$\text{Tr}([X, Y]) = \text{Tr}(XY - YX) = \text{Tr}(XY) - \text{Tr}(YX) = 0.$$

EXEMPLE 4.5. Soit  $n \geq 1$ , et considérons la matrice  $S \in M_{2n}(\mathbb{k})$  définie par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit alors

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}) \mid SX = -{}^tXS\}.$$

Alors  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ . En effet, pour  $X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  on a

$$\begin{aligned} S \cdot [X, Y] &= S(XY - YX) = SXY - SYX = -{}^tXSY + {}^tYSX \\ &= {}^tX{}^tYS - {}^tY{}^tXS = ({}^tX{}^tY - {}^tY{}^tX)S = -{}^t(XY - YX)S = -{}^t[X, Y] \cdot S, \end{aligned}$$

donc  $[X, Y] \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 4.6. Écrivons

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{k})$ . Montrer que  $X$  appartient à  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  ssi on a

$${}^tB = B, \quad {}^tC = C \quad \text{et} \quad {}^tA = -D.$$

En déduire que  $\dim(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})) = 2n^2 + n$ .

#### 4.2. Sous-algèbres de Lie et morphismes.

PROPOSITION 4.7. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie, et soit  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie.

- (1) Pour toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ , le sous-espace  $\varphi(\mathfrak{k}) = \{\varphi(x), x \in \mathfrak{k}\}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$ . En particulier,  $\text{Im}(\varphi)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$ .
- (2) Pour toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ , le sous-espace  $\varphi^{-1}(\mathfrak{k}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) \in \mathfrak{k}\}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

DÉMONSTRATION. (1) Soient  $x, y \in \varphi(\mathfrak{k})$ . Alors il existe  $x', y' \in \mathfrak{k}$  tels que  $x = \varphi(x')$ ,  $y = \varphi(y')$ . On a alors

$$[x, y] = [\varphi(x'), \varphi(y')] = \varphi([x', y']).$$

Comme  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , on a  $[x', y'] \in \mathfrak{k}$ , de sorte que  $[x, y] \in \varphi(\mathfrak{k})$ . Ceci prouve que  $\varphi(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie.

En appliquant ce fait à  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$ , on obtient que  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(\mathfrak{g})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$ .

(2) Soient  $x, y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{k})$ . Alors

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

appartient à  $\mathfrak{k}$  car  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre de Lie et  $\varphi(x)$  et  $\varphi(y)$  appartiennent à  $\mathfrak{k}$ . On en déduit que  $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{k})$ , et donc que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

EXERCICE 4.8. Considérons la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) & \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \\ X & \mapsto JXJ \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie, qui se restreint en des isomorphismes

$$\mathfrak{b}_n^+(\mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{b}_n^-(\mathbb{k}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{u}_n^+(\mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{u}_n^-(\mathbb{k}).$$

## 5. Idéaux et algèbres quotient

### 5.1. Idéaux.

DÉFINITION 5.1 (Idéal). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Un *idéal de  $\mathfrak{g}$*  est un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  qui vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{i}, [x, y] \in \mathfrak{i}.$$

REMARQUE 5.2. La notion d'idéal est l'analogie, dans le contexte des algèbres de Lie, de la notion de sous-groupe distingué dans le contexte des groupes.

PROPOSITION 5.3. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Si  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ , alors

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \text{Vect}(\{[x, y], x \in \mathfrak{i}, y \in \mathfrak{j}\})$$

sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons tout d'abord le cas de  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ . Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ . Par définition, il existe  $z \in \mathfrak{i}$  et  $t \in \mathfrak{j}$  tels que  $y = z + t$ . On a alors

$$[x, y] = [x, z + t] = [x, z] + [x, t]$$

par bilinéarité du crochet. Comme  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux, on a  $[x, z] \in \mathfrak{i}$  et  $[x, t] \in \mathfrak{j}$ . Ceci montre que  $[x, y] \in \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ , et donc que  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Considérons maintenant le cas de  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ . Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ . Par définition de  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$ , des scalaires  $\lambda_k \in \mathbb{k}$  (pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) et des éléments  $z_k \in \mathfrak{i}$ ,  $t_k \in \mathfrak{j}$  (encore pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) tels que

$$y = \sum_{k=1}^n \lambda_k [z_k, t_k].$$

On a alors

$$[x, y] = \left[ x, \sum_{k=1}^n \lambda_k [z_k, t_k] \right] = \sum_{k=1}^n \lambda_k [x, [z_k, t_k]]$$

par bilinéarité du crochet. En utilisant l'identité de Jacobi, on a déduit que

$$[x, y] = \sum_{k=1}^n \lambda_k (-[z_k, [t_k, x]] - [t_k, [x, z_k]]).$$

Comme  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux on a  $[x, z_k] \in \mathfrak{i}$  et  $[t_k, x] = -[x, t_k] \in \mathfrak{j}$  pour tout  $k$ , ce qui implique que  $[x, y] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ , et finalement que  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

EXERCICE 5.4. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soient  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  des idéaux de  $\mathfrak{g}$ . Montrer que  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et que  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ .

### 5.2. Algèbre de Lie quotient.

PROPOSITION 5.5 (Algèbre de Lie quotient). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. Alors l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} & \rightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \\ (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) & \mapsto & [x, y] + \mathfrak{i} \end{cases}$$

est bien définie, et elle définit une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ . De plus, l'application quotient

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie.



DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord que l'application  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est bien définie. Pour cela, il faut vérifier que la classe  $[x, y] + \mathfrak{i}$  ne dépend que des classes de  $x$  et  $y$  modulo  $\mathfrak{i}$ . Soient  $z, t \in \mathfrak{i}$ ; alors on a

$$[x + z, y + t] = [x, y] + [z, y] + [x, t] + [z, t].$$

Puisque  $\mathfrak{i}$  est un idéal, les vecteurs  $[z, y]$ ,  $[x, t]$  et  $[z, t]$  appartiennent à  $\mathfrak{i}$ . On en déduit que

$$[x + z, y + t] + \mathfrak{i} = [x, y] + \mathfrak{i},$$

ce qui démontre l'assertion voulue.

Par définition, il est clair que pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$  on a

$$\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)].$$

En utilisant cette propriété (et la surjectivité de  $\pi$ ) on peut vérifier que le crochet sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  satisfait les trois propriétés d'un crochet de Lie. Par exemple, pour l'antisymétrie, on voit que

$$[x + \mathfrak{i}, x + \mathfrak{i}] = [\pi(x), \pi(x)] = \pi([x, x]) = \pi(0) = 0 + \mathfrak{i}.$$

La bilinéarité et la relation de Jacobi se vérifient de la même manière.  $\square$

### 5.3. Idéaux, quotients, et morphismes.

PROPOSITION 5.6. Soient  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie, et  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie.

- (1) Pour tout idéal  $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{h}$ , le sous-espace vectoriel  $\varphi^{-1}(\mathfrak{j}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) \in \mathfrak{j}\}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .
- (2) Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ ; de plus,  $\varphi$  induit un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}/\text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\varphi).$$

- (3) Si  $\varphi$  est surjective, alors pour tout idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ , le sous-espace vectoriel  $\varphi(\mathfrak{i}) \subset \mathfrak{h}$  est un idéal.

DÉMONSTRATION. (1) Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ . Alors

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in \mathfrak{j}$$

car  $\varphi(y) \in \mathfrak{j}$  et  $\mathfrak{j}$  est un idéal. On en déduit que  $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ , ce qui prouve que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

(2) En appliquant (1) à  $\mathfrak{j} = \{0\}$ , on obtient que  $\text{Ker}(\varphi)$  est un idéal. Considérons l'application

$$\psi : \mathfrak{g}/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$$

définie par  $\psi(x + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(x)$ . D'après la proposition 2.6 du chapitre 1, cette application est bien définie, et est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il reste à démontrer que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Soient  $x, y \in \mathfrak{g}$ , et considérons les vecteurs  $x + \text{Ker}(\varphi)$  et  $y + \text{Ker}(\varphi)$  de  $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\varphi)$ . On a

$$\begin{aligned} \psi([x + \text{Ker}(\varphi), y + \text{Ker}(\varphi)]) &= \psi([x, y] + \text{Ker}(\varphi)) = \varphi([x, y]) \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)] = [\psi(x + \text{Ker}(\varphi)), \psi(y + \text{Ker}(\varphi))]. \end{aligned}$$

Donc  $\psi$  est effectivement un morphisme d'algèbres de Lie, et la preuve de (2) est complète.

(3) Soient  $x \in \mathfrak{h}$  et  $y \in \varphi(\mathfrak{i})$ . Par définition, il existe  $y' \in \mathfrak{i}$  tel que  $y = \varphi(y')$ . D'autre part, comme  $\varphi$  est surjectif, il existe  $x' \in \mathfrak{g}$  tel que  $x = \varphi(x')$ . On a alors

$$[x, y] = [\varphi(x'), \varphi(y')] = \varphi([x', y']).$$

Comme  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , on a  $[x', y'] \in \mathfrak{i}$ , donc  $[x, y] \in \varphi(\mathfrak{i})$ . Ceci démontre que  $\varphi(\mathfrak{i})$  est un idéal.  $\square$

REMARQUE 5.7. La propriété (3) est bien entendu fausse si  $\varphi$  n'est pas surjective. Par exemple, l'image de l'inclusion  $\mathfrak{u}_n^+(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  n'est pas un idéal si  $n \geq 2$ .

PROPOSITION 5.8. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie, et soit  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie surjectif. Alors les applications

$$(5.1) \quad \mathfrak{k} \mapsto \varphi(\mathfrak{k}), \quad \mathfrak{l} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{l})$$

induisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre les sous-algèbres de Lie (resp. idéaux) de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\text{Ker}(\varphi)$  et les sous-algèbres de Lie (resp. idéaux) de  $\mathfrak{h}$ .

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.7, si  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  alors  $\varphi(\mathfrak{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$ . De même, comme  $\varphi$  est surjectif, d'après la proposition 5.6, si  $\mathfrak{k}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  alors  $\varphi(\mathfrak{k})$  est un idéal de  $\mathfrak{h}$ .

Réciproquement, si  $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$  est un sous-espace vectoriel, alors  $\varphi^{-1}(\mathfrak{l})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\text{Ker}(\varphi)$ . D'après la proposition 4.7, si  $\mathfrak{l}$  est une sous-algèbre de Lie alors  $\varphi^{-1}(\mathfrak{l})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . D'après la proposition 5.6, si  $\mathfrak{k}$  est un idéal alors  $\varphi^{-1}(\mathfrak{k})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

On a vérifié que les règles (5.1) définissent bien des applications entre les sous-algèbres de Lie, resp. idéaux, de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\text{Ker}(\varphi)$  et les sous-algèbres de Lie, resp. idéaux, de  $\mathfrak{h}$ . D'après l'exercice 2.1 du chapitre 1, pour tout sous-espace vectoriel  $\mathfrak{k}$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\text{Ker}(\varphi)$  on a  $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{k})) = \mathfrak{k}$  et pour tout sous-espace vectoriel  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{h}$  on a  $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}$ , ce qui démontre que ces applications sont des bijections réciproques l'une de l'autre.  $\square$

EXERCICE 5.9. (1) Montrer que  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  est un idéal, et que l'algèbre de Lie quotient  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})/\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  est abélienne, de dimension 1.

(2) Montrer que le sous-espace  $\mathbb{k} \cdot I_n \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  est un idéal. Montrer que, si  $\text{car}(\mathbb{k})$  ne divise pas  $n$ , la composition

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \twoheadrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})/(\mathbb{k} \cdot I_n)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

**5.4. Algèbres de Lie simples.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  possède toujours deux idéaux dits *triviaux*,  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ .

DÉFINITION 5.10. Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite *simple* si elle n'est pas abélienne et si ses seuls idéaux sont  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ .

REMARQUE 5.11. (1) Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie, et soit  $\varphi : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$  un isomorphisme. D'après la proposition 5.8,  $\mathfrak{g}$  est simple ssi  $\mathfrak{h}$  est simple.

(2) Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie abélienne de dimension au moins 2, alors toute droite de  $\mathfrak{g}$  est un idéal non trivial. Donc la condition que  $\mathfrak{g}$  n'est pas abélienne n'exclut que les cas  $\mathfrak{g} = \{0\}$  et  $\mathfrak{g} = \mathbb{k}$ .

EXERCICE 5.12. Montrer que, si  $\text{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  est simple.  
*Indication* : si

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on pourra utiliser (après les avoir démontrées) les relations suivantes :

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

EXERCICE 5.13. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , les algèbres de Lie  $\mathfrak{b}_n^\pm(\mathbb{k})$  et  $\mathfrak{u}_n^\pm(\mathbb{k})$  ne sont pas simples.

## 6. Centre et sous-algèbre dérivée

DÉFINITION 6.1 (Centre et sous-algèbre dérivée). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Le *centre*  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est le sous-espace vectoriel

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] = 0\}.$$

La *sous-algèbre dérivée*  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{Vect}(\{[x, y], x, y \in \mathfrak{g}\}).$$

PROPOSITION 6.2. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Les sous-espaces vectoriels  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ .

DÉMONSTRATION. Le cas de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  découle de la proposition 5.3 (appliquée à  $\mathfrak{i} = \mathfrak{j} = \mathfrak{g}$ ). Traitons maintenant le cas de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Pour  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathfrak{g}$ , on a  $[x, y] = 0$ , donc  $[x, y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , ce qui montre que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

EXERCICE 6.3. Montrer que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})) = \mathbb{k} \cdot I_n \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}).$$

EXERCICE 6.4. (1) Montrer que si  $n \geq 3$  ou si  $\mathbb{k}$  est de caractéristique différente de 2, on a  $\mathcal{D}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ .

(2) Montrer que si  $\text{car}(\mathbb{k}) = 2$ , on a  $\mathcal{D}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})) \neq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 6.5. Montrer que

$$\mathcal{D}(\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})) = \mathbb{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6.6. Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, et soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $V$ . On pose

$$\mathfrak{g}(V, \varphi) := V \times \mathbb{k},$$

et on définit une application  $[-, -] : \mathfrak{g}(V, \varphi) \times \mathfrak{g}(V, \varphi) \rightarrow \mathfrak{g}(V, \varphi)$  par

$$[(v, \lambda), (v', \mu)] = (\lambda\varphi(v') - \mu\varphi(v), 0)$$

pour  $v, v' \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ .

(1) Montrer que  $[-, -]$  définit une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}(V, \varphi)$ .

(2) Montrer que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}(V, \varphi)) = \text{Im}(\varphi) \times \{0\}$ .

(3) Montrer que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(V, \varphi)) = \begin{cases} \text{Ker}(\varphi) \times \{0\} & \text{si } \varphi \neq 0; \\ \mathfrak{g}(V, \varphi) & \text{si } \varphi = 0. \end{cases}$$

(4) Montrer que si  $\psi : V \rightarrow V'$  est un isomorphisme, alors l'application linéaire

$$(\psi, \text{Id}_{\mathbb{k}}) : V \times \mathbb{k} \rightarrow V' \times \mathbb{k}$$

définit un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}(V, \varphi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(V', \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}).$$

EXERCICE 6.7. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  deux algèbres de Lie, et soit  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  un morphisme d'algèbres de Lie.

(1) Montrer que  $f(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$ .

(2) Montrer que si  $f$  est surjective, alors  $f(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$ .

## 7. Dérivations

DÉFINITION 7.1. Soit  $A$  un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire

$$- \star - : A \times A \rightarrow A.$$

Une *dérivation* de  $A$  (par rapport à  $\star$ ) est une application linéaire  $d : A \rightarrow A$  qui vérifie

$$d(a \star b) = d(a) \star b + a \star d(b)$$

pour tous  $a, b \in A$ .

On note  $\text{Der}(A)$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{gl}(A)$  formé des dérivations de  $A$ .

PROPOSITION 7.2. Soit  $A$  un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire  $- \star - : A \times A \rightarrow A$ . Alors  $\text{Der}(A)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(A)$ .

DÉMONSTRATION. Il est clair qu'une combinaison linéaire de dérivations est une dérivation, de sorte que  $\text{Der}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{gl}(A)$ .

Soient maintenant  $d, d' \in \text{Der}(A)$ . Pour  $a, b \in A$  on a

$$\begin{aligned} d \circ d'(a \star b) &= d(d'(a) \star b + a \star d'(b)) \\ &= (d \circ d')(a) \star b + d'(a) \star d(b) + d(a) \star d'(b) + a \star (d \circ d')(b). \end{aligned}$$

De même on a

$$d' \circ d(a \star b) = (d' \circ d)(a) \star b + d(a) \star d'(b) + d'(a) \star d(b) + a \star (d' \circ d)(b).$$

En soustrayant on obtient que

$$[d, d'](a \star b) = [d, d'](a) \star b + a \star [d, d'](b),$$

ce qui prouve que  $[d, d'] \in \text{Der}(A)$  est finalement que  $\text{Der}(A)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(A)$ .  $\square$

EXEMPLE 7.3. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et considérons le cas où  $A = \mathfrak{g}$ ,  $- \star - = [-, -]$ . L'identité de Jacobi peut se réécrire sous la forme

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Ceci montre que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , l'application linéaire  $y \mapsto [x, y]$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$ . Les dérivations de cette forme sont appelées *intérieures*.

## 8. Représentations

### 8.1. Définition.

DÉFINITION 8.1 (Représentations). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Une *représentation* de  $\mathfrak{g}$  est la donnée d'un espace vectoriel  $V$  et d'une application bilinéaire

$$\mathfrak{g} \times V \rightarrow V,$$

notée  $(x, v) \mapsto x \cdot v$ , qui vérifie

$$(8.1) \quad [x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$  et  $v \in V$ .

REMARQUE 8.2. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie. Si  $V$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , alors l'espace vectoriel  $V$ , muni de l'application bilinéaire  $\mathfrak{h} \times V \rightarrow V$  définie par  $(x, v) \mapsto x \cdot v$ , est une représentation de  $\mathfrak{h}$ , appelée *restriction de  $V$  à  $\mathfrak{h}$* .

Soit  $V$  une représentation, et, pour  $x \in \mathfrak{g}$ , considérons l'application  $\varphi(x) : V \rightarrow V$  définie par  $\varphi(x)(v) = x \cdot v$ . Alors  $\varphi$  définit une application linéaire  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , et la relation (8.1) implique que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Réciproquement, si  $V$  est un espace vectoriel et  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  est un morphisme d'algèbres de Lie, alors on vérifie facilement que  $V$ , muni de l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g} \times V \rightarrow V \\ (x, v) \mapsto \varphi(x)(v) \end{array} \right. ,$$

est une représentation de  $\mathfrak{g}$ . Il revient donc au même de se donner une représentation de  $\mathfrak{g}$  ou un morphisme d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  vers une algèbre de Lie de la forme  $\mathfrak{gl}(V)$ .

DÉFINITION 8.3 (Représentation simple). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ . Cette représentation est dite *simple* si  $V \neq \{0\}$  et si les seuls sous-espaces vectoriels  $W$  de  $V$  tels que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $x(W) \subset W$ , sont  $\{0\}$  et  $V$ .

EXEMPLE 8.4. Un exemple fondamental de représentation est la *représentation adjointe*. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Considérons l'espace vectoriel  $V = \mathfrak{g}$ , muni de l'application bilinéaire

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

donnée par le crochet de Lie. Dans ce contexte, la relation (8.1) est équivalente à la relation de Jacobi, de sorte que  $\mathfrak{g}$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , appelé la *représentation adjointe*. Le morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  associé est noté  $\text{ad}$ , de sorte que

$$\text{ad}(x)(y) = [x, y].$$

On a  $\text{Ker}(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

EXERCICE 8.5. Soit  $V$  un espace vectoriel. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{gl}(V) \times V \rightarrow V \\ (f, v) \mapsto f(v) \end{array} \right.$$

définit une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$  sur  $V$ , et que cette représentation est simple. (Cette représentation est appelée la *représentation naturelle* de  $\mathfrak{gl}(V)$ .)

EXERCICE 8.6. Montrer que si  $V$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  et si  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  est le morphisme d'algèbres de Lie associé, alors le morphisme  $\rho^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$  défini par

$$\rho^*(x) : \xi \mapsto -\xi \circ \rho(x),$$

définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $V^*$ .

DÉFINITION 8.7 (Morphisme de représentations). Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations de  $\mathfrak{g}$ , et soient  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1)$  et  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_2)$  les morphismes d'algèbres de Lie associés. Un *morphisme de représentations* de  $V_1$  vers  $V_2$  est une application linéaire  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  telle que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $\varphi \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ \varphi$ .

Un *isomorphisme de représentations* est un morphisme de représentations qui est bijectif.

REMARQUE 8.8. Si  $\varphi$  est un isomorphisme de représentations, alors la bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  est également un (iso)morphisme de représentations.

**8.2. Produit tensoriel de représentations.** Soient  $(V_1, \rho_1)$  et  $(V_2, \rho_2)$  deux représentations de  $\mathfrak{g}$ . (Ici  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1)$  et  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_2)$  sont des morphismes d'algèbres de Lie.) On considère l'application linéaire

$$\rho : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2) \\ x & \mapsto & \rho_1(x) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x) \end{cases} .$$

LEMME 8.9. *L'application linéaire  $\rho$  est un morphisme d'algèbres de Lie.*

DÉMONSTRATION. Soient  $x, y \in \mathfrak{g}$ . On a

$$\begin{aligned} \rho([x, y]) &= \rho_1([x, y]) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2([x, y]) \\ &= (\rho_1(x) \circ \rho_1(y) - \rho_1(y) \circ \rho_1(x)) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes (\rho_2(x) \circ \rho_2(y) - \rho_2(y) \circ \rho_2(x)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \rho([x, y]) &= (\rho_1(x) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x)) \circ (\rho_1(y) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(y)) \\ &\quad - (\rho_1(y) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(y)) \circ (\rho_1(x) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x)), \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) = [\rho(x), \rho(y)],$$

ce qui prouve le lemme. □

Le lemme 8.9 montre que  $\rho$  définit une structure de représentation de  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $V_1 \otimes V_2$ . Cette représentation est appelée le *produit tensoriel* des représentations  $(V_1, \rho_1)$  et  $(V_2, \rho_2)$ .

EXERCICE 8.10. Considérons l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ , où  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme de représentations

$$\mathfrak{gl}(V) \cong V^* \otimes V$$

où  $\mathfrak{gl}(V)$  est muni de la représentation adjointe,  $V$  de la représentation naturelle, et  $V^*$  de la représentation déduite via l'exercice 8.6.

## Algèbres de Lie de petite dimension

### 1. Algèbres de Lie abéliennes

PROPOSITION 1.1. *Si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont deux algèbres de Lie abéliennes de dimension finie, alors il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $f : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$  ssi  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h})$ .*

DÉMONSTRATION. S'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $f : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$ , alors en particulier  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui implique que  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h})$ . Réciproquement, supposons que  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h})$ . Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $f : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$ . L'application  $f$  est également un morphisme d'algèbres de Lie. En effet, pour  $x, y \in \mathfrak{g}$  on a

$$f([x, y]) = f(0) = 0 = [f(x), f(y)]$$

puisque les crochets de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont nuls. Donc  $f$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.  $\square$

COROLLAIRE 1.2. *Pour tout  $n \geq 0$  il existe, à isomorphisme près, exactement une algèbre de Lie abélienne de dimension  $n$ .*

DÉMONSTRATION. On a démontré dans la proposition 1.1 que deux algèbres de Lie abéliennes de dimension  $n$  sont isomorphes, donc il existe, à isomorphisme près, au plus une algèbre de Lie abélienne de dimension  $n$ . D'autre part l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^n$ , muni du crochet nul, est une algèbre de Lie abélienne de dimension  $n$ . Donc il existe, à isomorphisme près, exactement une algèbre de Lie abélienne de dimension  $n$ .  $\square$

### 2. Dimension 1

PROPOSITION 2.1. *Toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne. En particulier il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule algèbre de Lie de dimension 1.*

DÉMONSTRATION. Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension 1 et si  $x$  est un vecteur non nul de  $\mathfrak{g}$ , la condition d'antisymétrie impose que  $[x, x] = 0$ . Si  $y, z$  sont des vecteurs de  $\mathfrak{g}$ , il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  tels que  $y = \lambda x$  et  $z = \mu x$ , et alors

$$[y, z] = [\lambda x, \mu x] = \lambda \mu [x, x] = 0.$$

Donc le crochet de Lie est nul, et  $\mathfrak{g}$  est abélienne.

D'après la proposition 1.1, il existe, à isomorphisme près, une unique algèbre de Lie abélienne de dimension 1. Donc il existe exactement une algèbre de Lie de dimension 1 à isomorphisme près.  $\square$

### 3. Dimension 2

PROPOSITION 3.1. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie non abélienne, de dimension 2. Alors il existe une base  $(x, y)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que*

$$[x, y] = x.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $(x', y')$  une base quelconque de  $\mathfrak{g}$ . Alors il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  tels que

$$[x', y'] = \lambda x' + \mu y'.$$

Démontrons par l'absurde que  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont pas tous deux nuls : en fait, si c'était le cas on aurait  $[x', y'] = 0$  et donc, pour tous  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ ,

$$[\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y'] = \alpha\gamma[x', x'] + \alpha\delta[x', y'] + \beta\gamma[y', x'] + \beta\delta[y', y'] = 0$$

(car chaque terme dans la somme est nulle), ce qui contredit l'hypothèse que  $\mathfrak{g}$  est non abélienne.

Quitte à échanger  $x'$  et  $y'$ , on peut donc supposer que  $\lambda \neq 0$ . On pose alors

$$x = \lambda x' + \mu y', \quad y = \frac{1}{\lambda} y'.$$

La matrice de la famille  $(x, y)$  dans la base  $(x', y')$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant non nul donc inversible. Donc la famille  $(x, y)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . D'autre part on a

$$[x, y] = [\lambda x' + \mu y', \frac{1}{\lambda} y'] = [x', y'] + \frac{\mu}{\lambda} [y', y'] = [x', y'] = x.$$

Donc cette base vérifie bien la propriété de l'énoncé.  $\square$

COROLLAIRE 3.2. *Il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule algèbre de Lie non abélienne de dimension 2.*

DÉMONSTRATION. Soient  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  deux algèbres de Lie non abéliennes de dimension 2. D'après la proposition 3.1, il existe une base  $(x_1, y_1)$  de  $\mathfrak{g}_1$  et une base  $(x_2, y_2)$  de  $\mathfrak{g}_2$  qui vérifient

$$[x_1, y_1] = x_1, \quad [x_2, y_2] = x_2.$$

Considérons l'unique application linéaire  $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  qui vérifie

$$f(x_1) = x_2, \quad f(y_1) = y_2.$$

Comme  $(x_2, y_2)$  est une base de  $\mathfrak{g}_2$ ,  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

D'autre part,  $f$  est un morphisme d'algèbres de Lie. En effet, pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} f([\alpha x_1 + \beta y_1, \gamma x_1 + \delta y_1]) &= f((\alpha\delta - \beta\gamma)x_1) = (\alpha\delta - \beta\gamma)x_2 \\ &= [\alpha x_2 + \beta y_2, \gamma x_2 + \delta y_2] = [f(\alpha x_1 + \beta y_1), f(\gamma x_1 + \delta y_1)]. \end{aligned}$$

Donc  $f$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

On a démontré que deux algèbres de Lie non abéliennes de dimension 2 quelconques sont isomorphes, et donc qu'il existe au plus une algèbre de Lie non



abélienne de dimension 2. Il reste à démontrer qu'il en existe une. Pour cela on considère le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$  formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

pour  $a, b \in \mathbb{k}$ . On a

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ad \\ 0 & bd \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & bc \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$ , de dimension 2. On a

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

donc cette algèbre de Lie est non abélienne, ce qui achève la preuve.  $\square$

**EXERCICE 3.3.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2. Montrer que  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$  et que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ .

#### 4. Dimension 3

Considérons maintenant le cas où  $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ , qui commence à être plus complexe.

##### 4.1. Cas $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

**PROPOSITION 4.1.** *Il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule algèbre de Lie de dimension 3 vérifiant les conditions  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$  et  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , à savoir l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})$  (aussi appelée algèbre de Lie de Heisenberg).*

**DÉMONSTRATION.** Tout d'abord, le fait que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})$  vérifie ces propriétés est vérifié dans l'exercice 6.5.

Considérons maintenant une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  qui vérifie les conditions de l'énoncé. Comme  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ , il existe  $x, y \in \mathfrak{g}$  tels que  $[x, y] \neq 0$ . On pose  $z := [x, y]$ ; cet élément appartient à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  donc à  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . On a donc

$$(4.1) \quad [x, y] = z, \quad [x, z] = 0, \quad [y, z] = 0.$$

Montrons que la famille  $(x, y, z)$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  des éléments de  $\mathbb{k}$  tels que  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ . On a alors

$$0 = [x, \alpha x + \beta y + \gamma z] = \alpha[x, x] + \beta[x, y] + \gamma[x, z] = \beta z.$$

Donc  $\beta = 0$ . De même, en calculant  $[y, \alpha x + \beta y + \gamma z]$ , on obtient que  $\alpha = 0$ . On a donc  $\gamma z = 0$ , et finalement  $\gamma = 0$ , ce qui conclut la preuve du fait que  $(x, y, z)$  est une famille libre. Comme  $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ , c'est une base de  $\mathfrak{g}$ .

Dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})$ , on considère les éléments

$$x_0 = E_{12}, \quad y_0 = E_{23}, \quad z_0 = E_{13}.$$

Ces éléments forment une base de  $\mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k})$ . Un calcul facile (et laissé au lecteur) montre que

$$[x_0, y_0] = z_0, \quad [x_0, z_0] = 0, \quad [y_0, z_0] = 0.$$

On considère alors l'unique application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{u}_3^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{g}$$

qui vérifie  $\varphi(x_0) = x$ ,  $\varphi(y_0) = y$ ,  $\varphi(z_0) = z$ . Comme  $\varphi$  envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'autre part, pour tous  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  dans  $\mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0, \alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0]) &= \varphi((\alpha\beta' - \beta\alpha')z_0) \\ &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')z = [\alpha x + \beta y + \gamma z, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z] \\ &= [\varphi(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0), \varphi(\alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0)]. \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie, et donc un isomorphisme d'algèbres de Lie.  $\square$

#### 4.2. Cas $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

PROPOSITION 4.2. *Il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule algèbre de Lie de dimension 3 vérifiant les conditions  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$  et  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , à savoir le produit de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1 et de l'unique algèbre de Lie non abélienne de dimension 2.*

DÉMONSTRATION. Notons  $\mathfrak{g}_2$  l'unique algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, et posons  $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2 \times \mathbb{k}$  (où  $\mathbb{k}$  est vue comme algèbre de Lie abélienne de dimension 1). Alors  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_3) = \mathcal{D}(\mathfrak{g}_2) \times \{0\}$  est de dimension 1 d'après l'exercice 3.3, et  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_3) = \{0\} \times \mathbb{k}$  (toujours d'après l'exercice 3.3), de sorte que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_3) \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_3)$ .

Réciproquement, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie vérifiant les conditions de l'énoncé, et soit  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . Alors on a  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathbb{k} \cdot x$ . Comme  $x \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , il existe  $y \in \mathfrak{g}$  tel que  $[x, y] \neq 0$ . On a  $[x, y] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathbb{k} \cdot x$ , donc le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x, y) \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Cette sous-algèbre est de dimension au plus 2, et non abélienne (car  $[x, y] \neq 0$ ). Donc, d'après le corollaire 3.2, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\psi : \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\sim} \text{Vect}(x, y)$ .

D'après la proposition 3.1, il existe une base  $(a, b)$  de  $\text{Vect}(x, y)$  telle que  $[a, b] = a$ . Alors  $a \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , donc  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathbb{k} \cdot a$ . Soit  $c \in \mathfrak{g}$  un vecteur tel que la famille  $(a, b, c)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathbb{k} \cdot a$ , il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  tels que

$$[a, c] = \lambda a, \quad [b, c] = \mu a.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} [a, \mu a - \lambda b + c] &= -\lambda[a, b] + [a, c] = -\lambda a + \lambda a = 0, \\ [b, \mu a - \lambda b + c] &= \mu[b, a] + [b, c] = -\mu a + \mu a = 0, \\ [c, \mu a - \lambda b + c] &= \mu[c, a] - \lambda[c, b] = -\lambda\mu a + \lambda\mu a = 0, \end{aligned}$$

donc le vecteur  $d := \mu a - \lambda b + c$  appartient à  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . La matrice de la famille  $(a, b, d)$  dans la base  $(a, b, c)$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant 1, donc inversible. Donc la famille  $(a, b, d)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ .

Considérons maintenant l'application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2 \times \mathbb{k} \rightarrow \mathfrak{g}$$

définie par  $\varphi(v, \alpha) = \psi(v) + \alpha d$ . L'image de  $\varphi$  contient  $a$ ,  $b$  et  $d$ , donc cette application est surjective. Comme  $\dim(\mathfrak{g}_3) = \dim(\mathfrak{g}) = 3$ , c'est même un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour  $v, v' \in \mathfrak{g}_2$  et  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} \varphi([(v, \alpha), (v', \alpha')]) &= \varphi([v, v'], 0) = \psi([v, v']) = [\psi(v), \psi(v')] \\ &= [\psi(v) + \alpha d, \psi(v') + \alpha' d] = [\varphi(v, \alpha), \varphi(v', \alpha')] \end{aligned}$$

puisque  $d$  est central. Donc  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie, et finalement un isomorphisme d'algèbres de Lie.  $\square$

**4.3. Cas  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2$ .** On va maintenant étudier le cas où  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2$ . On commence par un lemme général.

LEMME 4.3. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , on a  $\text{Tr}(\text{ad}(x)) = 0$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est engendré (comme espace vectoriel) par les vecteurs de la forme  $[x, y]$  pour  $x, y \in \mathfrak{g}$ , il suffit de montrer que  $\text{Tr}(\text{ad}([x, y])) = 0$ . Mais on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{ad}([x, y])) &= \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y) - \text{ad}(y) \circ \text{ad}(x)) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) - \text{Tr}(\text{ad}(y) \circ \text{ad}(x)) = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

LEMME 4.4. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie telle que*

$$\dim(\mathfrak{g}) = 3, \quad \dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2.$$

*Alors  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Lie abélienne, et pour tout  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  la restriction de l'endomorphisme  $\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(y, z)$  une base de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , et soit  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , de sorte que  $(x, y, z)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . Pour montrer que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est abélienne, il suffit de montrer que  $[y, z] = 0$ .

Comme  $[y, z] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  tels que  $[y, z] = \alpha y + \beta z$ . Considérons maintenant la matrice de l'endomorphisme  $\text{ad}(y)$  dans la base  $(x, y, z)$ . Comme  $[y, x] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , cette matrice a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & \alpha \\ \star & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a donc  $\text{Tr}(\text{ad}(y)) = \beta$ . D'après le lemme 4.3, on a d'autre part  $\text{Tr}(\text{ad}(y)) = 0$ . Donc  $\beta = 0$ . Les mêmes considérations, appliquées à  $z$  au lieu de  $y$ , montrent que  $\alpha = 0$ , ce qui implique que  $[y, z] = 0$  et achève la preuve de la première assertion.

Pour démontrer la deuxième assertion, on remarque tout d'abord qu'on a  $\text{Im}(\text{ad}(x)) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  par définition de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , de sorte que la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  définit bien un endomorphisme de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est engendré par les vecteurs  $[x, y]$ ,  $[x, z]$  et  $[y, z]$ . Comme  $[y, z] = 0$  et comme  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2$ , les vecteurs  $[x, y]$  et  $[x, z]$  sont linéairement indépendants. Ceci prouve que le rang de la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est 2, en d'autres termes que cette restriction est un isomorphisme.  $\square$

Dans la suite de cette partie on utilise la notation  $\mathfrak{g}(V, \varphi)$  introduite dans l'exercice 6.6 du chapitre 2.

COROLLAIRE 4.5. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie telle que*

$$\dim(\mathfrak{g}) = 3, \quad \dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2.$$

*Alors si  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et si  $\varphi$  est la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\mathfrak{g}(\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \varphi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}.$$

DÉMONSTRATION. On considère l'application linéaire

$$f : \mathfrak{g}(\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \varphi) \rightarrow \mathfrak{g}$$

définie par  $f(v, \lambda) = v + \lambda x$  pour  $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Cette application est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'autre part, pour  $v, v' \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} f([(v, \lambda), (v', \lambda')]) &= f(\lambda\varphi(v') - \lambda'\varphi(v), 0) = f(\lambda[x, v'] - \lambda'[x, v], 0) \\ &= \lambda[x, v'] - \lambda'[x, v] = [v + \lambda x, v' + \lambda'x] = [f(v, \lambda), f(v', \lambda')] \end{aligned}$$

(car  $[v, v'] = [x, x] = 0$ ), donc  $f$  est un morphisme d'algèbres de Lie.  $\square$

Pour continuer notre étude, on va considérer maintenant une famille d'algèbres de Lie dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ . On pose

$$\mathfrak{g}_\lambda := \mathbb{k}^3,$$

et on définit une application  $[-, -] : \mathfrak{g}_\lambda \times \mathfrak{g}_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda$  en posant

$$[(x, y, z), (x', y', z')] = (zx' - z'x, \lambda(zy' - z'y), 0).$$

En appliquant l'exercice 6.6 du chapitre 2 au cas  $V = \mathbb{k}^2$ , muni de l'endomorphisme  $\varphi_\lambda$  dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on obtient que  $\mathfrak{g}_\lambda$  est une algèbre de Lie, et qu'elle vérifie  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathbb{k}^2 \oplus \{0\}$ . On note  $i_\lambda : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda$  l'application linéaire définie par  $i_\lambda(x, y) = (x, y, 0)$ . (On peut vérifier que  $i_\lambda$  est un morphisme d'algèbres de Lie si  $\mathbb{k}^2$  est vu comme algèbre de Lie abélienne.)

LEMME 4.6. *Pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}^\times$ , les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_\lambda$  et  $\mathfrak{g}_\mu$  sont isomorphes ssi  $\mu = \lambda$  ou  $\mu = \lambda^{-1}$ .*

DÉMONSTRATION. En appliquant l'exercice 6.6 du chapitre 2 pour l'automorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{k}^2$  dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient un isomorphisme

$$\mathfrak{g}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(\mathbb{k}^2, \varphi'_\lambda),$$

où  $\varphi'_\lambda$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{k}^2$  dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, il est facile de vérifier que l'automorphisme de  $\mathbb{k}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}(\mathbb{k}^2, \varphi'_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\lambda^{-1}},$$

ce qui prouve que  $\mathfrak{g}_\lambda$  et  $\mathfrak{g}_{\lambda^{-1}}$  sont isomorphes.

Réciproquement, supposons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$f : \mathfrak{g}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\mu.$$

En appliquant l'exercice 6.7 du chapitre 2 à  $f$  et  $f^{-1}$ , on obtient que  $f$  se restreint en un isomorphisme  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathfrak{g}_\mu)$ , c'est-à-dire en un isomorphisme  $\mathbb{k}^2 \oplus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^2 \oplus \{0\}$ . En d'autres termes, il existe un automorphisme  $g$  de  $\mathbb{k}^2$  tel que  $f \circ i_\lambda = i_\mu \circ g$ .

Soient maintenant  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$  les scalaires tels que

$$f(0, 0, 1) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Alors pour  $v \in \mathbb{k}^2$  on a d'une part

$$f([(0, 0, 1), i_\lambda(v)]) = f(i_\lambda(\varphi_\lambda(v))) = i_\mu(g \circ \varphi_\lambda(v)),$$

et d'autre part

$$f([(0, 0, 1), i_\lambda(v)]) = [f(0, 0, 1), f(i_\lambda(v))] = [(\alpha, \beta, \gamma), i_\mu(g(v))] = \gamma \cdot i_\mu(\varphi_\mu \circ g(v)).$$

Comme  $i_\mu$  est injective, ceci implique que

$$g \circ \varphi_\lambda = (\gamma \cdot \varphi_\mu) \circ g,$$

et donc que les endomorphismes  $\varphi_\lambda$  et  $\gamma \cdot \varphi_\mu$  de  $\mathbb{k}^2$  sont conjugués. Ils ont donc les mêmes valeurs propres, donc

$$\{1, \lambda\} = \{\gamma, \gamma\mu\}.$$

Ceci implique que  $\lambda = \mu^{\pm 1}$ , et termine la preuve.  $\square$

**PROPOSITION 4.7.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie telle que*

$$\dim(\mathfrak{g}) = 3, \quad \dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2.$$

*Supposons qu'il existe  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  tel que la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est diagonalisable. Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ , unique au remplacement de  $\lambda$  par  $\lambda^{-1}$  près, tel que  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}_\lambda$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  tel que la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est diagonalisable. Comme  $\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$  est inversible d'après le lemme 4.4, quitte à remplacer  $x$  par un multiple on peut supposer qu'une des valeurs propres de cette restriction est 1. Soit  $\lambda$  l'autre valeur propre de  $\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$ ; alors  $\lambda \neq 0$ . De plus, il existe un isomorphisme

$$\psi : \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^2$$

tel que  $\psi \circ (\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}) = \varphi_\lambda \circ \psi$ . Alors d'après le corollaire 4.5 et l'exercice 6.6 du chapitre 2 on a des isomorphismes d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\lambda.$$

L'unicité de  $\lambda$  (au remplacement par  $\lambda^{-1}$  près) découle du lemme 4.6.  $\square$

REMARQUE 4.8. Si  $\mathfrak{g}$  est comme ci-dessus et s'il existe un  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  tel que  $\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$  est diagonalisable, alors pour tout  $y \in \mathfrak{g}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(y)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$  de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est diagonalisable. En effet, pour un tel  $y$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{k}$  et  $v \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  tels que  $y = \alpha \cdot x + v$ . Et comme  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est abélienne (d'après le lemme 4.4), on a alors  $\text{ad}(y)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})} = \alpha \cdot \text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$ , donc cet endomorphisme est effectivement diagonalisable.

Pour compléter l'étude du cas  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2$ , il reste à considérer le cas où pour tout  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  n'est pas diagonalisable. Nous ne considérerons ce cas que sous l'hypothèse que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos.

PROPOSITION 4.9. *Supposons que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie telle que*

$$\dim(\mathfrak{g}) = 3, \quad \dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 2.$$

*Supposons que pour tout  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , la restriction de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  n'est pas diagonalisable. Alors  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}(\mathbb{k}^2, \varphi)$  où  $\varphi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{k}^2$  dont la matrice dans la base canonique est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . Comme  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, l'endomorphisme  $\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$  admet une valeur propre. Comme dans la preuve de la proposition 4.7, on peut supposer que cette valeur propre est 1. Alors, comme  $\text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}$  n'est pas diagonalisable, 1 est sa seule valeur propre, et il existe une base  $(y, z)$  de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha \in \mathbb{k}^\times$ . D'après l'exercice 6.6 du chapitre 2, l'application linéaire

$$\psi = \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{g})$$

définie par  $\psi(\lambda, \mu) = \lambda y + \mu \alpha^{-1} z$  définit un isomorphisme

$$\mathfrak{g}(\mathbb{k}^2, \varphi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \text{ad}(x)|_{\mathcal{D}(\mathfrak{g})}).$$

En utilisant également le corollaire 4.5, on obtient finalement un isomorphisme  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(\mathbb{k}^2, \varphi)$ , ce que achève la preuve.  $\square$

EXERCICE 4.10. Montrer que l'algèbre de Lie considérée dans la proposition 4.9 n'est isomorphe à aucune algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_\lambda$ .

#### 4.4. Cas $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ .

LEMME 4.11. *Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos, et soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension 3. Si  $f$  est un endomorphisme de  $V$  de rang 2 et dont la seule valeur propre est 0, alors il existe une base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $f$  est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème de Cayley–Hamilton, on a  $f \circ f \circ f = 0$ . Et comme  $f$  est de rang 2, on a  $\text{Im}(f) \not\subset \text{Ker}(f)$ , donc  $f \circ f \neq 0$ . Soit  $v \in V$  un vecteur tel que  $(f \circ f)(v) \neq 0$ . Montrons que la famille  $((f \circ f)(v), f(v), v)$  est une base de  $V$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $\mathbb{k}$ , et supposons que

$$(4.2) \quad \alpha \cdot (f \circ f)(v) + \beta \cdot f(v) + \gamma \cdot v = 0.$$

Alors on a

$$(4.3) \quad 0 = f(\alpha \cdot (f \circ f)(v) + \beta \cdot f(v) + \gamma \cdot v) = \beta \cdot (f \circ f)(v) + \gamma \cdot f(v),$$

puis

$$0 = f(\beta \cdot (f \circ f)(v) + \gamma \cdot f(v)) = \gamma \cdot (f \circ f)(v).$$

Comme  $(f \circ f)(v) \neq 0$ , ceci implique que  $\gamma = 0$ . En utilisant (4.3), on obtient alors que  $\beta = 0$ , puis en utilisant (4.2) on obtient finalement que  $\alpha = 0$ . Ceci prouve que la famille  $((f \circ f)(v), f(v), v)$  est libre. Comme il s'agit d'une famille de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est bien une base de  $V$ .

Dans cette base, la matrice de  $f$  est la matrice souhaitée.  $\square$

LEMME 4.12. *Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension 3, et soit  $f$  un endomorphisme de  $V$  ayant pour valeurs propres 0 et  $\alpha \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ , et tel que  $\text{Tr}(f) = 0$ . Alors  $f$  est diagonalisable, avec valeurs propres 0,  $\alpha$  et  $-\alpha$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$ . Comme  $f$  admet 0 et  $\alpha$  comme valeurs propres,  $\chi_f$  est divisible par  $X(X - \alpha)$ . Comme  $\chi_f$  est unitaire et de degré 3, le polynôme quotient  $\chi_f/X(X - \alpha)$  est unitaire de degré 1, donc de la forme  $X - \beta$ . On a donc

$$\chi_f = X(X - \alpha)(X - \beta).$$

De cette formule on voit que le coefficient de  $X^2$  dans  $\chi_f$  est  $(-\alpha - \beta)$ . Par ailleurs ce coefficient est  $-\text{Tr}(f) = 0$ , ce qui implique que  $\beta = -\alpha$ . L'endomorphisme  $f$  a donc 3 valeurs propres : 0,  $\alpha$  et  $-\alpha$ . Comme  $\dim(V) = 3$ , cet endomorphisme est nécessairement diagonalisable.  $\square$

PROPOSITION 4.13. *Supposons que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos et que  $\text{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ . Alors il n'existe, à isomorphisme près, qu'une seule algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension 3 telle que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , à savoir l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .*

DÉMONSTRATION. D'après l'exercice 6.4 du chapitre 2, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  vérifie les conditions de l'énoncé.

Considérons maintenant une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  quelconque de dimension 3, et telle que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ . On va procéder en plusieurs étapes.

*Étape 1* : Montrons que, pour tout  $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  de  $\mathfrak{g}$  est de rang 2, et vérifie  $\text{Ker}(\text{ad}(x)) = \mathbb{k} \cdot x$ . En effet, soient  $y, z \in \mathfrak{g}$  tels que  $(x, y, z)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . Alors le sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  est engendré par les vecteurs

$$[x, y], \quad [x, z] \quad \text{et} \quad [y, z].$$

Comme  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 3$ , ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants. En particulier les vecteurs  $[x, y]$  et  $[x, z]$ , qui appartiennent à  $\text{Im}(\text{ad}(x))$ , sont linéairement indépendants, donc  $\text{rg}(\text{ad}(x)) \geq 2$ . Comme d'autre part  $x \in \text{Ker}(\text{ad}(x))$  on a  $\dim(\text{Ker}(\text{ad}(x))) \geq 1$ , et le théorème du rang entraîne alors que  $\text{rg}(\text{ad}(x)) = 2$  et  $\dim(\text{Ker}(\text{ad}(x))) = 1$ . Comme  $x \in \text{Ker}(\text{ad}(x)) \setminus \{0\}$ , on a alors  $\text{Ker}(\text{ad}(x)) = \mathbb{k} \cdot x$ , ce qui conclut la preuve de cette première étape.

*Étape 2* : Montrons maintenant qu'il existe  $t \in \mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}(t)$  admet une valeur propre non nulle. En effet, soit  $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  quelconque. Si  $\text{ad}(x)$  admet une valeur propre non nulle, on peut prendre  $t = x$ . Sinon, d'après le lemme 4.11 il existe  $a, b, c \in \mathfrak{g}$  tels que

$$[x, a] = 0, \quad [x, b] = a, \quad [x, c] = b.$$

Alors  $a \in \text{Ker}(\text{ad}(x)) = \mathbb{k} \cdot x$  (d'après l'étape 1). Donc  $[b, x] = -a \in \mathbb{k} \cdot x \setminus \{0\}$ , ce qui prouve que  $\text{ad}(b)$  a une valeur propre non nulle ; on peut donc prendre  $t = b$ .

*Étape 3* : Montrons qu'il existe une base  $(e, h, f)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que

$$(4.4) \quad [e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

En effet, soit  $t$  comme dans l'étape 2. Alors comme  $\text{ad}(t)(t) = [t, t] = 0$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(t)$  a 0 pour valeur propre, et également une valeur propre non nulle. D'après le lemme 4.3 (et notre hypothèse que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ ), on a  $\text{tr}(\text{ad}(t)) = 0$ . On peut donc appliquer le lemme 4.12, qui garantit que  $\text{ad}(t)$  est diagonalisable, avec pour valeurs propres 0,  $\alpha$  et  $-\alpha$  (pour un certain  $\alpha \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ ).

Posons maintenant  $h = \frac{2}{\alpha}t$ . Alors  $\text{ad}(h)$  est diagonalisable, avec pour valeurs propres 0, 2 et  $-2$ . L'élément  $h$  est vecteur propre de  $h$  pour la valeur propre 0. Soit  $e$  un vecteur propre pour la valeur propre 2, et  $f'$  un vecteur propre pour la valeur propre  $-2$ . Alors  $(e, h, f')$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . On a

$$\text{ad}(h)([e, f']) = [\text{ad}(h)(e), f'] + [e, \text{ad}(h)(f')] = [2e, f'] + [e, -2f'] = 0,$$

donc  $[e, f'] \in \text{Ker}(\text{ad}(h)) = \mathbb{k} \cdot h$ . D'autre part  $[e, f'] \neq 0$ . (En effet, sinon  $\text{Ker}(\text{ad}(e))$  contiendrait les vecteurs  $e$  et  $f'$  qui sont linéairement indépendants, donc serait de dimension au moins 2, ce qui est impossible d'après l'étape 1.) Donc il existe  $\lambda \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$  tel que  $[e, f'] = \lambda h$ . On pose alors  $f = \frac{1}{\lambda}f'$ , et notre base vérifie les relations (4.4).

*Étape 4* : Montrons maintenant qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ . Soit  $(e, h, f)$  une base qui satisfait les conditions de l'étape 3. On définit une application  $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{g}$  en posant

$$\varphi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \alpha h + \beta e + \gamma f.$$

Alors  $\varphi$  est une application linéaire. (Cette vérification est laissée au lecteur.) Son image contient les vecteurs  $e, h$  et  $f$ , donc  $\varphi$  est surjective. Comme  $\dim(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})) = \dim(\mathfrak{g}) = 3$ ,  $\varphi$  est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\alpha', \beta', \gamma'$  dans  $\mathbb{k}$  on a

$$\begin{aligned} \varphi \left( \left[ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \right] \right) &= \varphi \begin{pmatrix} \beta\gamma' - \beta'\gamma & 2\alpha\beta' - 2\beta\alpha' \\ 2\gamma\alpha' - 2\alpha\gamma' & \gamma\beta' - \beta\gamma' \end{pmatrix} \\ &= (\beta\gamma' - \beta'\gamma)h + (2\alpha\beta' - 2\beta\alpha')e + (2\gamma\alpha' - 2\alpha\gamma')f. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (4.4), on obtient que

$$\begin{aligned} \left[ \varphi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \right] &= [\alpha h + \beta e + \gamma f, \alpha' h + \beta' e + \gamma' f] \\ &= \alpha\beta'[h, e] + \alpha\gamma'[h, f] + \alpha'\beta[e, h] + \beta\gamma'[e, f] + \alpha'\gamma[f, h] + \beta'\gamma[f, e] \\ &= (\beta\gamma' - \beta'\gamma)h + (2\alpha\beta' - 2\beta\alpha')e + (2\gamma\alpha' - 2\alpha\gamma')f. \end{aligned}$$



Donc

$$\varphi \left( \left[ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \right] \right) = \left[ \varphi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix} \right],$$

ce qui prouve que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie, et donc un isomorphisme d'algèbres de Lie.  $\square$



## Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

### 1. Algèbres de Lie résolubles

**1.1. Suite dérivée.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On définit la *suite dérivée*  $(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}))_{n \geq 0}$  de  $\mathfrak{g}$  par récurrence en posant

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})).$$

Par définition on a

$$\cdots \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}.$$

Les propriétés essentielles de la suite dérivée sont les suivantes.

LEMME 1.1. (1) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

(2) Pour tout  $n \geq 0$ , l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})/\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$  est abélienne.

DÉMONSTRATION. (1) Cette propriété se démontre par récurrence sur  $n$ . Elle est clairement vraie pour  $n = 0$ . Puis, si  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$  est un idéal, alors  $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})]$  est un idéal par la proposition 5.3 du chapitre 2.

(2) Soient  $x, y \in \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$ . Alors on a par définition

$$[x + \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}), y + \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})] = [x, y] + \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}).$$

Or  $[x, y] \in [\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})] = \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$ , donc  $[x, y] + \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0 + \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$ . Donc tout crochet d'éléments de  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})/\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$  est nul, ce qui prouve que cette algèbre de Lie est abélienne.  $\square$

REMARQUE 1.2. Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, il est clair que pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$ .

EXERCICE 1.3. Montrer que pour tous  $n, m \geq 0$  on a  $\mathcal{D}^n(\mathcal{D}^m(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^{n+m}(\mathfrak{g})$ .

### 1.2. Algèbres de Lie résolubles.

DÉFINITION 1.4 (Algèbres de Lie résolubles). L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite *résoluble* si elle vérifie  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

Notons que si  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , alors  $\mathcal{D}^m(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour tout  $m \geq n$ . Le lemme 1.1 montre également que toute algèbre de Lie résoluble est une "extension" d'algèbres de Lie abéliennes.

PROPOSITION 1.5. (1) Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie résoluble et si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, alors  $\mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie résoluble.

(2) Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie résoluble et si  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  est un idéal, alors  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est une algèbre de Lie résoluble.

DÉMONSTRATION. (1) D'après la remarque 1.2, pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$ . Donc si  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour un  $n$ , alors  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{h}) = \{0\}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{h}$  est résoluble.

(2) Considérons le morphisme canonique  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ , qui est surjectif. En appliquant l'exercice 6.7 du chapitre 2 de façon répétée, on obtient que pour tout  $n \geq 0$  on a

$$\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \pi(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})).$$

Donc si  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour un  $n$ , on a  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{0\}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est résoluble.  $\square$

EXERCICE 1.6. Montrer que les algèbres de Lie suivantes sont résolubles :

- (1)  $\mathfrak{b}_n^\pm(\mathbb{k})$ ;
- (2)  $\mathfrak{u}_n^\pm(\mathbb{k})$ ;
- (3) les algèbres de Lie abéliennes;
- (4) l'unique algèbre de Lie non abélienne de dimension 2 (cf. §3 du chapitre 3).

**1.3. Idéaux résolubles.** Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie, un *idéal résoluble* de  $\mathfrak{g}$  est un idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  qui, vu comme algèbre de Lie, est résoluble.

PROPOSITION 1.7. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie.*

- (1) *Si  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  est un idéal résoluble et si  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est résoluble, alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble.*
- (2) *Si  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est résoluble.*

DÉMONSTRATION. (1) Par hypothèse, il existe des entiers  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{0\}$  et  $\mathcal{D}^m(\mathfrak{i}) = \{0\}$ . Comme dans la preuve de la proposition 1.5(2), on a

$$\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \pi(\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}))$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , où  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est la surjection canonique. Comme  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{0\}$ , on en déduit que  $\pi(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})) = \{0\}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{i}$ . En utilisant l'exercice 1.3 puis la remarque 1.2, on en déduit que

$$\mathcal{D}^{n+m}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^m(\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}^m(\mathfrak{i}) = \{0\},$$

ce qui montre que  $\mathfrak{g}$  est résoluble.

(2) Considérons la composée

$$f : \mathfrak{j} \hookrightarrow \mathfrak{i} + \mathfrak{j} \twoheadrightarrow (\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i}.$$

Comme chacune des deux applications linéaires qui interviennent dans cette composition est un morphisme d'algèbre de Lie,  $f$  est un morphisme d'algèbres de Lie. D'autre part  $f$  est surjective. En effet, si  $x \in \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  alors il existe  $y \in \mathfrak{i}$  et  $z \in \mathfrak{j}$  tels que  $x = y + z$ . Alors

$$x + \mathfrak{i} = y + z + \mathfrak{i} = y + \mathfrak{i} = f(y).$$

D'après la proposition 5.6 du chapitre 2, il existe donc un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{j}/\text{Ker}(f) \cong (\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i}.$$

D'après la proposition 1.5(2) et l'hypothèse que  $\mathfrak{j}$  est résoluble, ceci implique que  $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i}$  est résoluble.

Maintenant on peut appliquer (1) :  $\mathfrak{i}$  est un idéal résoluble de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ , tel que le quotient  $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i}$  est résoluble, donc  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est résoluble.  $\square$

#### 1.4. Radical.

DÉFINITION - PROPOSITION 1.8. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Alors  $\mathfrak{g}$  possède un unique plus grand idéal résoluble, c'est-à-dire un unique idéal résoluble contenant tous les idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ . Cet idéal est noté  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ , et est appelé le *radical* de  $\mathfrak{g}$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{i}'$  sont deux plus grands idéaux résolubles, alors comme  $\mathfrak{i}$  est résoluble on a  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{i}'$ , et comme  $\mathfrak{i}'$  est résoluble on a  $\mathfrak{i}' \subset \mathfrak{i}$ , d'où  $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}'$ . Ceci prouve l'unicité.

Prouvons maintenant l'existence. Comme  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, il existe un idéal résoluble  $\mathfrak{i}$  dont la dimension est maximale parmi tous les idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ . Alors, si  $\mathfrak{j}$  est un autre idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ , l'idéal  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est résoluble par la proposition 1.7(2), donc on a  $\dim(\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) \leq \dim(\mathfrak{i})$ . D'autre part on a clairement  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ , donc  $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{i}$ . Donc  $\mathfrak{i}$  contient bien tous les idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ , ce qui prouve l'existence du plus grand idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

REMARQUE 1.9. Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})$ .

LEMME 1.10. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  un idéal résoluble. Alors  $\mathfrak{h} \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})$ , et  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ .

DÉMONSTRATION. Par définition  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  contient tous les idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$ , donc en particulier  $\mathfrak{h}$ .

Le sous-espace vectoriel  $\text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  est un idéal résoluble (d'après la proposition 5.8 du chapitre 2 et la proposition 1.5(2)), donc

$$(1.1) \quad \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} \subset \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

Réciproquement, notons  $\mathfrak{i}$  l'image inverse de  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  par la surjection naturelle  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Alors  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  (d'après la proposition 5.8 du chapitre 2), et on a  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \mathfrak{i}/\mathfrak{h}$ . D'après la proposition 1.7(1), ceci implique que  $\mathfrak{i}$  est résoluble, et donc que  $\mathfrak{i} \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})$ . On a finalement démontré que

$$(1.2) \quad \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \mathfrak{i}/\mathfrak{h} \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}.$$

En comparant (1.1) et (1.2), on obtient que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ .  $\square$

EXERCICE 1.11. Montrer que si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des algèbres de Lie de dimension finie, on a  $\text{Rad}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \times \text{Rad}(\mathfrak{h})$ .

#### 1.5. Algèbres de Lie semi-simples et réductives.

DÉFINITION 1.12 (Algèbres de Lie semi-simples). Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie est dite *semi-simple* si  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ .

REMARQUE 1.13. Il est facile de déduire de l'exercice 1.11 que tout produit (fini) d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple.

PROPOSITION 1.14. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Alors l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.

DÉMONSTRATION. Comme  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ , d'après le lemme 1.10 on a  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})) = \text{Rad}(\mathfrak{g})/\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ .  $\square$

EXERCICE 1.15. Montrer que toute algèbre de Lie simple de dimension finie est semi-simple.

**DÉFINITION 1.16** (Algèbres de Lie réductives). Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie est dite *réductive* si  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

**REMARQUE 1.17.** Il est facile de déduire de l'exercice 1.11 que tout produit (fini) d'algèbres de Lie réductives est réductif.

**PROPOSITION 1.18.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Alors l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$  est réductive.*

**DÉMONSTRATION.** Pour simplifier les notations, posons  $\mathfrak{i} := [\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ , et notons  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  la surjection naturelle. D'après la remarque 1.9, on a  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$ .

D'autre part,  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  qui est résoluble (car contenu dans  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ ). Donc, d'après le lemme 1.10, on a  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{i}$ . Donc si  $x \in \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$  il existe  $y \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$  tel que  $\pi(y) = x$ . Alors pour tout  $z \in \mathfrak{g}$  on a

$$[x, \pi(z)] = [\pi(y), \pi(z)] = \pi([y, z]) = 0$$

car  $[y, z] \in \mathfrak{i} = [\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ . Ceci prouve que  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$ , et donc que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$ , puis finalement que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$ .  $\square$

## 2. Algèbres de Lie nilpotentes

**2.1. Suite centrale descendante.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On définit la *suite centrale descendante*  $(\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}))_{n \geq 0}$  de  $\mathfrak{g}$  par récurrence en posant

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g})].$$

Les propriétés essentielles de la suite centrale descendante sont les suivantes.

**LEMME 2.1.** (1) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

(2) Pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ .

(3) Pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ .

**DÉMONSTRATION.** (1) La preuve est identique à celle du lemme 1.1(1).

(2) Comme  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  d'après (1), on a

$$\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})] \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}),$$

ce qui prouve l'inclusion voulue.

(3) On démontre l'inclusion par récurrence sur  $n$ . Elle est évidente si  $n = 0$ . Supposons maintenant que  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ . Alors on a

$$\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})] = \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}),$$

ce qui prouve l'inclusion au rang  $n + 1$ .  $\square$

**REMARQUE 2.2.** (1) Le nom de "suite centrale descendante" provient du fait que  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})/\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$  est inclus dans le centre de  $\mathfrak{g}/\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$  pour tout  $n \geq 0$ .

(2) Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ . Plus généralement, pour tout morphisme d'algèbres de Lie  $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ , on a  $\varphi(\mathcal{C}^n(\mathfrak{h})) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$  pour tout  $n \geq 0$ .

## 2.2. Algèbres de Lie nilpotentes.

DÉFINITION 2.3 (Algèbres de Lie nilpotentes). L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite *nilpotente* si elle vérifie  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

Comme dans le cas des algèbres de Lie résolubles, si  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$  alors  $\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}) = \{0\}$  pour tout  $m \geq n$ .

EXERCICE 2.4. (1) Montrer que  $\mathfrak{u}_n^\pm(\mathbb{k})$  est nilpotente pour tout  $n \geq 1$ .

(2) Si  $n \geq 2$ , montrer que  $\mathfrak{b}_n^\pm(\mathbb{k})$  n'est *pas* nilpotente.

PROPOSITION 2.5. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie.

(1) Si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, alors elle est résoluble.

(2) Si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, alors  $\mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie nilpotente.

(3) Si  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est nilpotente, alors  $\mathfrak{g}$  est nilpotente.

DÉMONSTRATION. (1) Comme  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, il existe  $n$  tel que  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = 0$ . D'après le lemme 2.1(3), on a  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ , d'où  $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , ce qui prouve que  $\mathfrak{g}$  est résoluble.

(2) D'après la remarque 2.2(2), pour tout  $n \geq 0$  on a  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ . Donc si  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = 0$  alors  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{h}) = 0$ , ce qui prouve l'assertion.

(3) D'après la remarque 2.2(2), si  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est la surjection naturelle, pour tout  $k \geq 0$  on a  $\pi(\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ . Soit maintenant  $k \geq 0$  un entier tel que  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Alors  $\pi(\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})) = \{0\}$ , donc  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , ce qui implique que  $\mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = \{0\}$ . Donc  $\mathfrak{g}$  est nilpotente.  $\square$

REMARQUE 2.6. La réciproque de la proposition 2.5(1) est fautive, comme le montre l'exercice 2.4.

EXERCICE 2.7. (1) Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie nilpotente et si  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  est un idéal, alors  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est nilpotente.

(2) Donner un exemple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et d'idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  sont nilpotentes, mais  $\mathfrak{g}$  n'est *pas* nilpotente.

EXERCICE 2.8. Montrer que si  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 2, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  est nilpotente. (Ceci pourra être comparé avec l'exercice 5.12 du chapitre 2.)

## 3. Théorème d'Engel

**3.1. Énoncé.** Dans cette partie nous allons étudier le *théorème d'Engel*. Ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME 3.1 (Théorème d'Engel, version 1). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  telle que tout élément de  $\mathfrak{g}$  est un endomorphisme nilpotent de  $V$ . Alors il existe une base  $\mathbf{e}$  de  $V$  telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , la matrice de  $x$  dans  $\mathbf{e}$  est strictement triangulaire supérieure.

**3.2. Lemmes préliminaires.** Avant de démontrer ce théorème, on commence par quelques résultats préliminaires qui seront utilisés dans la preuve.

LEMME 3.2. *Soit  $V$  un espace vectoriel, et soit  $x$  un endomorphisme nilpotent de  $V$ . Alors l'application linéaire*

$$\text{ad}(x) : \begin{cases} \mathfrak{gl}(V) & \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ y & \mapsto [x, y] \end{cases}$$

*est nilpotente.*

DÉMONSTRATION. Considérons les applications linéaires

$$\lambda_x : \begin{cases} \mathfrak{gl}(V) & \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ y & \mapsto x \circ y \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho_x : \begin{cases} \mathfrak{gl}(V) & \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ y & \mapsto y \circ x \end{cases}.$$

Par définition du crochet dans  $\mathfrak{gl}(V)$ , on a  $\text{ad}(x) = \lambda_x - \rho_x$  dans l'espace vectoriel des endomorphismes de  $\mathfrak{gl}(V)$ .

Les applications  $\lambda_x$  et  $\rho_x$  sont nilpotentes. En effet, si  $n \in \mathbb{N}$  est tel que  $x^n = 0$  (où  $x^n$  est la composée de  $n$  copies de  $x$ ) alors pour tout  $y \in \mathfrak{gl}(V)$  on a

$$\underbrace{\lambda_x \circ \cdots \circ \lambda_x}_{n \text{ fois}}(y) = \underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ fois}} \circ y = x^n \circ y = 0,$$

et de même

$$\underbrace{\rho_x \circ \cdots \circ \rho_x}_{n \text{ fois}}(y) = y \circ \underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ fois}} = y \circ x^n = 0.$$

D'autre part les endomorphismes  $\lambda_x$  et  $\rho_x$  commutent : en effet pour tout  $y \in \mathfrak{gl}(V)$  on a

$$\lambda_x \circ \rho_x(y) = \lambda_x(y \circ x) = x \circ y \circ x = \rho_x(x \circ y) = \rho_x \circ \lambda_x(y).$$

On peut donc utiliser le fait que toute combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents *qui commutent* est nilpotente<sup>1</sup>, pour prouver que  $\text{ad}(x) = \lambda_x - \rho_x$  est un endomorphisme nilpotent, ce qui achève la preuve.  $\square$

LEMME 3.3. *Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ , et soit  $\mathfrak{h}$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Considérons le sous-espace vectoriel de  $V$  défini par*

$$W := \{v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(v) = 0\}.$$

*Alors pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $x(W) \subset W$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $v \in W$ . Alors pour tout  $y \in \mathfrak{h}$  on a

$$y(x(v)) = (y \circ x)(v) = ([y, x] + x \circ y)(v) = [y, x](v) + x(y(v)) = [y, x](v)$$

car  $y(v) = 0$ . Comme  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  on a  $[y, x] \in \mathfrak{h}$ , et donc  $[y, x](v) = 0$  puisque  $v \in W$ . Ceci montre que  $y(x(v)) = 0$ , et donc que  $x(v) \in W$ , et achève la preuve.  $\square$

**3.3. Démonstration du théorème d'Engel.** La proposition suivante est l'étape-clé de la démonstration du théorème d'Engel.

PROPOSITION 3.4. *Soit  $V$  un espace vectoriel non nul de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  telle que tout élément de  $\mathfrak{g}$  est un endomorphisme nilpotent de  $V$ . Alors il existe un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $x(v) = 0$ .*

1. Rappelons que ceci découle de la formule du binôme de Newton.



DÉMONSTRATION. Ce résultat se prouve par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ . Si  $\dim(\mathfrak{g}) = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que  $\dim(\mathfrak{g}) > 0$ .

*Étape 1.* Soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie propre maximale, c'est-à-dire une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  telle que  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$  et telle qu'aucun sous-espace vectoriel  $\mathfrak{k}$  tel que  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  et tel que  $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$  n'est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . (Par exemple, on peut choisir pour  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Lie stricte qui est de dimension maximale parmi les sous-algèbres de Lie strictes de  $\mathfrak{g}$ .) Montrons qu'il existe  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  tel que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x$  (c'est-à-dire que  $\mathfrak{h}$  est un hyperplan de  $\mathfrak{g}$ ) et que  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

telle que  $\varphi(y)$  est l'application linéaire

$$x + \mathfrak{h} \mapsto [y, x] + \mathfrak{h}.$$

(Cette application linéaire est bien définie car  $[y, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ , puisque  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .)

Vérifions que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie (en d'autres termes, que  $\varphi$  définit une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ). En fait, pour  $y, z \in \mathfrak{h}$  et  $x \in \mathfrak{g}$  on a

$$\begin{aligned} (\varphi(y) \circ \varphi(z) - \varphi(z) \circ \varphi(y))(x + \mathfrak{h}) &= \varphi(y)([z, x] + \mathfrak{h}) - \varphi(z)([y, x] + \mathfrak{h}) \\ &= [y, [z, x]] - [z, [y, x]] + \mathfrak{h} \\ &= [[y, z], x] + \mathfrak{h} \\ &= \varphi([y, z])(x + \mathfrak{h}), \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de l'identité de Jacobi.

Ceci étant établi, on obtient que  $\varphi(\mathfrak{h})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  (voir la proposition 4.7 du chapitre 2). De plus, pour tout  $y \in \mathfrak{h}$ , en utilisant le fait que  $\text{ad}(y)$  est nilpotent (d'après le lemme 3.2) on vérifie facilement que  $\varphi(y)$  est nilpotent. Finalement, on a

$$\dim(\varphi(\mathfrak{h})) \leq \dim(\mathfrak{h}) < \dim(\mathfrak{g}).$$

Donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la sous-algèbre de Lie  $\varphi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ . On obtient ainsi  $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  tel que le vecteur  $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  est annulé par  $\varphi(\mathfrak{h})$ . En d'autres termes, pour tout  $y \in \mathfrak{h}$  on a

$$0 + \mathfrak{h} = \varphi(y)(x + \mathfrak{h}) = [y, x] + \mathfrak{h},$$

c'est-à-dire  $[y, x] \in \mathfrak{h}$ . Ceci implique que  $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Par maximalité, on a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x.$$

De plus, le fait que  $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$  montre également que  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

*Étape 2.* Considérons maintenant

$$W := \{v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(v) = 0\}.$$

Par hypothèse de récurrence (qui est applicable car  $\dim(\mathfrak{h}) < \dim(\mathfrak{g})$ ),  $W \neq \{0\}$ . De plus, d'après le lemme 3.3, ce sous-espace est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , donc en particulier par  $x$ . Comme  $x$  est nilpotent, sa restriction à  $W$  est nilpotente, donc non injective. Il existe donc  $v \in W \setminus \{0\}$  tel que  $x(v) = 0$ . Le vecteur  $v$  est alors annulé par  $\mathfrak{h}$  et par  $x$ , donc par  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x$ , ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

On peut finalement donner la preuve du théorème d'Engel.

PREUVE DU THÉORÈME 3.1. On raisonne cette fois par hypothèse sur  $\dim(V)$ . Si  $\dim(V) = \{0\}$ , il n'y a rien à prouver.

Supposons maintenant que  $\dim(V) > 0$ . D'après la proposition 3.4, il existe  $e_1 \in V \setminus \{0\}$  qui est annulé par tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ . On pose alors  $V' := V/\mathbb{k} \cdot e_1$ . Tout élément de  $\mathfrak{g}$  définit un endomorphisme de  $V'$  (puisque'il stabilise  $\mathbb{k} \cdot e_1$ ), ce qui permet de définir un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V')$ . De plus, l'image de tout élément de  $\mathfrak{g}$  est nilpotent. Comme  $\dim(V') < \dim(V)$  on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'image de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{gl}(V')$ , et on obtient donc des vecteurs  $e_2, \dots, e_n$  dans  $V$  tels que  $(e_2 + \mathbb{k} \cdot e_1, \dots, e_n + \mathbb{k} \cdot e_1)$  est une base de  $V'$ , et telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  la matrice dans cette base de l'action de  $x$  sur  $V'$  est strictement triangulaire supérieure; en d'autres termes, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $i \in \{2, \dots, n\}$  on a

$$(3.1) \quad x(\mathbb{k} \cdot e_i \oplus \dots \oplus \mathbb{k} \cdot e_2 \oplus \mathbb{k} \cdot e_1) \subset \mathbb{k} \cdot e_{i-1} \oplus \dots \oplus \mathbb{k} \cdot e_1.$$

Alors il est facile de vérifier que la famille  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$  et, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , (3.1) et le fait que  $x(e_1) = 0$  montrent que la matrice de  $x$  dans  $e$  est strictement triangulaire supérieure.  $\square$

**3.4. Formulation alternative.** Le théorème d'Engel est parfois présenté sous la forme suivante.

THÉORÈME 3.5 (Théorème d'Engel, version 2). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Alors  $\mathfrak{g}$  est nilpotente si et seulement si pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  de  $\mathfrak{g}$  est nilpotent.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, supposons que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, et soit  $x \in \mathfrak{g}$ . Soit  $n$  un entier tel que  $\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Alors si  $y \in \mathfrak{g}$  on a

$$\text{ad}(x)^n(y) = \underbrace{[x, [x, \dots [x, y] \dots]]}_n \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Ceci implique que  $\text{ad}(x)^n = 0$ , donc que  $\text{ad}(x)$  est un endomorphisme nilpotent de  $\mathfrak{g}$ .

On démontre la réciproque par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ , le cas  $\dim(\mathfrak{g}) = 0$  étant évident. Supposons donc que  $\dim(\mathfrak{g}) > 0$ , et que  $\text{ad}(x)$  est nilpotent pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ . Pour commencer, on va démontrer que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ .

Considérons la sous-algèbre de Lie  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  (voir l'exemple 8.4 du chapitre 2 pour la preuve qu'il s'agit d'une sous-algèbre de Lie). Par hypothèse, cette sous-algèbre de Lie est constituée d'endomorphismes nilpotents donc, d'après la proposition 3.4, il existe  $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  tel que  $\text{ad}(y)(x) = 0$  pour tout  $y \in \mathfrak{g}$ . Alors  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , ce qui implique en particulier que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ .

On peut maintenant montrer que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente. Tout d'abord il est facile de vérifier que pour tout  $x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  l'endomorphisme  $\text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$  est nilpotent. D'autre part,  $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) < \dim(\mathfrak{g})$  puisque  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Donc, par récurrence, on sait que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est nilpotente. D'après la proposition 2.5(3), on en déduit que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente.  $\square$

EXERCICE 3.6. Redémontrer que  $\mathfrak{u}_n^\pm(\mathbb{k})$  est nilpotente en utilisant le théorème d'Engel.

#### 4. Théorème de Lie

**4.1. Énoncé.** Le théorème de Lie est une sorte d'analogie, pour les algèbres de Lie résolubles, du théorème d'Engel. Contrairement au théorème d'Engel, il nécessite des hypothèses sur le corps de base  $\mathbb{k}$ .

**THÉORÈME 4.1** (Théorème de Lie). *Supposons que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie résoluble. Il existe une base  $e$  de  $V$  telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , la matrice de  $x$  dans la base  $e$  est triangulaire supérieure.*

**4.2. Lemme d'invariance.** Avant de démontrer ce théorème nous commençons par un résultat préliminaire.

**LEMME 4.2.** *Supposons que  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 0. Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. Pour toute forme linéaire  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{k}$ , le sous-espace vectoriel*

$$W = \{v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(v) = \lambda(y) \cdot v\} \subset V$$

*est stable par tout élément de  $\mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Fixons  $v \in W$  et  $x \in \mathfrak{g}$ . On veut montrer que  $x(v) \in W$ , c'est-à-dire que pour tout  $y \in \mathfrak{h}$  on a

$$(4.1) \quad y(x(v)) = \lambda(y) \cdot x(v).$$

Cette relation est évidente si  $v = 0$ ; on supposera donc que  $v \neq 0$  dorénavant.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  le plus grand entier tel que les vecteurs

$$v, x(v), \dots, x^n(v)$$

sont linéairement indépendants. Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $E_i$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par les vecteurs  $v, x(v), \dots, x^i(v)$ . On a clairement  $x(E_i) \subset E_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , et  $x(E_n) \subset E_n$  (car  $x^{n+1}(v) \in E_n$ , par définition de  $n$ ). Par convention, on pose aussi  $E_{-1} = \{0\}$ .

Montrons maintenant, par récurrence sur  $i \in \{0, \dots, n\}$ , que pour tout  $z \in \mathfrak{h}$  on a

$$(4.2) \quad z(x^i(v)) = \lambda(z) \cdot x^i(v) + u_{i-1} \quad \text{où } u_{i-1} \in E_{i-1}.$$

(Bien sûr, le vecteur  $u_{i-1}$  dépend de  $z$ .) Tout d'abord, si  $i = 0$  on a  $z(v) = \lambda(z) \cdot v$ , donc (4.2) est bien vérifié. Soit maintenant  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et supposons le résultat connu pour  $i-1$ . On a alors

$$z(x^i(v)) = (zx)(x^{i-1}(v)) = ([z, x] + xz)(x^{i-1}(v)).$$

Maintenant on applique l'hypothèse de récurrence aux éléments  $[z, x]$  et  $z$  de  $\mathfrak{h}$  pour obtenir des vecteurs  $u_{i-2}$  et  $u'_{i-2}$  dans  $E_{i-2}$  tels que

$$[z, x](x^{i-1}(v)) = \lambda([z, x]) \cdot x^{i-1}(v) + u_{i-2} \quad \text{et} \quad z(x^{i-1}(v)) = \lambda(z) \cdot x^{i-1}(v) + u'_{i-2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} z(x^i(v)) &= \lambda([z, x]) \cdot x^{i-1}(v) + u_{i-2} + x(\lambda(z) \cdot x^{i-1}(v) + u'_{i-2}) \\ &= \lambda(z) \cdot x^i(v) + (\lambda([z, x]) \cdot x^{i-1}(v) + u_{i-2} + x(u'_{i-2})). \end{aligned}$$

Le vecteur  $\lambda([z, x]) \cdot x^{i-1}(v) + u_{i-2} + x(u'_{i-2})$  appartient à  $E_{i-1}$ , donc (4.2) est bien vérifié. Ceci achève la récurrence.

Fixons maintenant  $y \in \mathfrak{h}$ . La relation (4.2) montre que le sous-espace vectoriel  $E_n$  de  $V$  est stable par tous les éléments de  $\mathfrak{h}$ , en particulier par  $y$  et  $[x, y]$ . Elle montre également que la matrice de la restriction de  $[x, y]$  à  $E_n$ , dans la base  $v, x(v), \dots, x^n(v)$ , est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux tous égaux à  $\lambda([x, y])$ . Ceci implique que

$$\mathrm{Tr}([x, y]_{|E_n}) = (n + 1) \cdot \lambda([x, y]).$$

D'autre part, comme  $E_n$  est stable par  $y$  et par  $x$ , on a

$$\mathrm{Tr}([x, y]_{|E_n}) = \mathrm{Tr}(x_{|E_n} \circ y_{|E_n} - y_{|E_n} \circ x_{|E_n}) = \mathrm{Tr}(x_{|E_n} \circ y_{|E_n}) - \mathrm{Tr}(y_{|E_n} \circ x_{|E_n}) = 0.$$

Donc  $(n + 1) \cdot \lambda([x, y]) = 0$  ce qui implique, puisque  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 0, que  $\lambda([x, y]) = 0$ .

On peut finalement montrer (4.1) :

$$y(x(v)) = (y \circ x)(x) = (x \circ y)(v) - [x, y](v) = x(\lambda(y) \cdot v) - \lambda([x, y]) \circ v = \lambda(y) \cdot x(v),$$

ce qui prouve que  $x(v)$  appartient à  $W$  et achève la preuve.  $\square$

**REMARQUE 4.3.** La preuve du lemme 4.2 montre que si  $W \neq \{0\}$  alors la forme linéaire  $\lambda$  est nulle sur le sous-espace vectoriel  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ .

**4.3. Démonstration du théorème de Lie.** Comme pour le théorème d'Engel, l'étape principale de la preuve du théorème de Lie est la construction d'un vecteur propre commun à tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ .

**PROPOSITION 4.4.** *Supposons que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie résoluble. Il existe un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$  qui est vecteur propre de tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** La preuve suit un schéma assez similaire à celui de la preuve de la proposition 3.4. On raisonne par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ , le cas  $\dim(\mathfrak{g}) = 0$  étant évident.

*Étape 1.* Comme  $\mathfrak{g}$  est résoluble, l'inclusion  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  est stricte. Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}/\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  de codimension 1 (c'est-à-dire un hyperplan), et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  l'image inverse de  $E$  par la surjection naturelle  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . Alors  $\mathfrak{h}$  est un hyperplan dans  $\mathfrak{g}$ , qui contient  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . C'est également un idéal de  $\mathfrak{g}$  : en effet, pour  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \mathfrak{h}$  on a

$$[x, y] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}.$$

On fixe également un élément  $x \in \mathfrak{g}$  tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x.$$

*Étape 2.* On applique l'hypothèse de récurrence à  $\mathfrak{h}$ , qui est de dimension  $\dim(\mathfrak{g}) - 1$ . On obtient donc un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$  qui est vecteur propre pour tous les éléments de  $\mathfrak{h}$ . Pour tout  $y \in \mathfrak{h}$ , il existe donc un unique  $\lambda(y) \in \mathbb{k}$  tel que

$$y(v) = \lambda(y) \cdot v.$$

Il est très facile de voir que  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{k}$  est une forme linéaire. On peut alors considérer le sous-espace vectoriel

$$W = \{u \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(u) = \lambda(y) \cdot u\}$$

de  $V$ . Par construction ce sous-espace contient  $v$ , donc n'est pas nul. Et d'après le lemme 4.2 il est stable par tout élément de  $\mathfrak{g}$ , donc en particulier par  $x$ .

*Étape 3.* On considère finalement la restriction de  $x$  à  $W$ . Comme  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, cet endomorphisme de  $W$  possède un vecteur propre : il existe  $w \in W \setminus \{0\}$  qui est vecteur propre de  $x|_W$ , donc de  $x$ . Comme  $w$  appartient à  $W$ , il est également vecteur propre de tout élément de  $\mathfrak{h}$ . Et finalement, comme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k} \cdot x$ ,  $w$  est vecteur propre de tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

La fin de la preuve est identique à celle du théorème 3.1.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1. On raisonne par récurrence sur  $\dim(V)$ , le cas  $\dim(V) = \{0\}$  étant évident.

Supposons donc que  $\dim(V) > 0$ . D'après la proposition 4.4, il existe  $e_1 \in V \setminus \{0\}$  qui est vecteur propre de tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ . On pose alors  $V' := V/\mathbb{k} \cdot e_1$ . Tout élément de  $\mathfrak{g}$  définit un endomorphisme de  $V'$  (puisque'il stabilise  $\mathbb{k} \cdot e_1$ ), ce qui permet de définir un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V')$ . Comme  $\dim(V') < \dim(V)$  on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'image de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{gl}(V')$  (qui est une algèbre de Lie résoluble d'après la proposition 1.5(2)), et on obtient donc des vecteurs  $e_2, \dots, e_n$  dans  $V$  tels que  $(e_2 + \mathbb{k} \cdot e_1, \dots, e_n + \mathbb{k} \cdot e_1)$  est une base de  $V'$ , et telle que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  la matrice dans cette base de l'action de  $x$  sur  $V'$  est triangulaire supérieure ; en d'autres termes, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $i \in \{2, \dots, n\}$  on a

$$(4.3) \quad x(\mathbb{k} \cdot e_i \oplus \dots \oplus \mathbb{k} \cdot e_2 \oplus \mathbb{k} \cdot e_1) \subset \mathbb{k} \cdot e_i \oplus \dots \oplus \mathbb{k} \cdot e_2 \oplus \mathbb{k} \cdot e_1.$$

Alors la famille  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$  et, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , (4.3) et le fait que  $e_1$  est vecteur propre de  $x$  montrent que la matrice de  $x$  dans  $\mathbf{e}$  est triangulaire supérieure.  $\square$

REMARQUE 4.5. Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base comme dans le théorème 4.1. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , posons

$$V_i := \mathbb{k} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k} e_i.$$

Alors on a

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

et pour tout  $i$  on a  $\dim(V_i) = i$ . Une telle suite de sous-espaces est appelé un *drapeau*. De plus, ce drapeau est stable par  $\mathfrak{g}$ , au sens où pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $x(V_i) \subset V_i$ . Le théorème de Lie affirme donc l'existence d'un drapeau stable par  $\mathfrak{g}$ . Il est même *équivalent* à l'existence d'un drapeau stable. (En fait, si  $V_1 \subset \dots \subset V_n$  est un drapeau stable, pour trouver une base comme dans l'énoncé du théorème 4.1 il suffit de prendre une base *adaptée* au drapeau, c'est-à-dire une base  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que, pour tout  $i$ , on a  $V_i = V_{i-1} \oplus \mathbb{k} e_i$ .)

EXERCICE 4.6. Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Montrer que si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et si  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie résoluble de  $\mathfrak{gl}(V)$ , alors l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est nilpotente.

## 5. Interprétation en termes de représentations

Dans cette partie on suppose que le corps  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos et de caractéristique 0.

**5.1. Représentations simples des algèbres de Lie résolubles.** Le théorème 4.1 peut se reformuler de la façon suivante.

PROPOSITION 5.1. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie résoluble.*

*Soit  $V$  une représentation simple de  $\mathfrak{g}$ , de dimension finie. Alors  $\dim(V) = 1$ , et le morphisme d'algèbres de Lie  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \mathbb{k}$  associé est une forme linéaire nulle sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ .*

*Réciproquement, pour toute forme linéaire  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  nulle sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , l'application*

$$(5.1) \quad \begin{cases} \mathfrak{g} \times \mathbb{k} & \rightarrow & \mathbb{k} \\ (x, z) & \mapsto & \lambda(x) \cdot z \end{cases} ,$$

*définit une représentation simple de  $\mathfrak{g}$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le morphisme d'algèbres de Lie  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Alors  $\varphi(\mathfrak{g})$  est une sous-algèbre de Lie résoluble de  $\mathfrak{gl}(V)$  (d'après la proposition 1.5(2)), à laquelle on peut appliquer la proposition 4.4. Il existe donc un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$  qui est vecteur propre de tous les endomorphismes  $\varphi(x)$  pour  $x \in \mathfrak{g}$ . Alors  $\mathbb{k} \cdot v$  est un sous-espace vectoriel non nul de  $V$  qui est stable par tous les endomorphismes  $\varphi(x)$ . Comme  $V$  est simple, ceci implique que  $V = \mathbb{k} \cdot v$ , et donc que  $\dim(V) = 1$ .

Pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$ , on a

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x) \circ \varphi(y) - \varphi(y) \circ \varphi(x) = 0,$$

car l'algèbre des endomorphismes de  $V$  est commutative (puisque  $\dim(V) = 1$ ). Comme les éléments de la forme  $[x, y]$  engendrent  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , on en déduit que  $\varphi$  est nulle sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ .

Réciproquement, soit  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  une forme linéaire nulle sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . Alors pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$  et pour tout  $z \in \mathbb{k}$  on a

$$[x, y] \cdot z = \lambda([x, y]) \cdot z = 0$$

puisque  $\lambda$  est nulle sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , et d'autre part

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) &= x \cdot (\lambda(y) \cdot z) - y \cdot (\lambda(x) \cdot z) \\ &= \lambda(x)\lambda(y) \cdot z - \lambda(y)\lambda(x) \cdot z = 0. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$[x, y] \cdot z = x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z),$$

ce qui prouve que (5.1) définit une représentation de  $\mathfrak{g}$ . □

De cette proposition il est facile de déduire que l'ensemble des classes d'isomorphismes<sup>2</sup> représentations simples de dimension finie d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  résoluble est en bijection naturelle avec l'ensemble des formes linéaires sur  $\mathfrak{g}$  qui sont nulles sur  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , qui sont elles-mêmes en bijection naturelle avec les formes linéaires sur  $\mathfrak{g}/\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ .

---

2. Ici par "classe d'isomorphisme" on entend une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence " $V \sim V'$  ssi  $V$  et  $V'$  sont isomorphes".

**5.2. Représentations simples et algèbres de Lie réductives.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie.

PROPOSITION 5.2. *Si  $V$  est une représentation simple de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , il existe une forme linéaire  $\lambda : \text{Rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{k}$ , nulle sur  $[\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ , telle que pour tout  $v \in V$  et tout  $x \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$  on a*

$$x \cdot v = \lambda(x)v.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  le morphisme d'algèbres de Lie associé à la représentation  $V$ . Comme  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Lie résoluble, il en est de même de  $\rho(\text{Rad}(\mathfrak{g}))$  d'après la proposition 1.5(2). D'après la proposition 4.4, il existe donc  $v \in V \setminus \{0\}$  et une forme linéaire  $\lambda : \text{Rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{k}$  telle que  $x \cdot v = \lambda(x)v$  pour tout  $x \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$ . Considérons alors

$$W := \{w \in V \mid \forall x \in \text{Rad}(\mathfrak{g}), x \cdot w = \lambda(x)w\}.$$

$W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , et on vient de voir qu'il contient  $v$ , donc qu'il est non nul. D'après le lemme 4.2 (appliqué à la sous-algèbre de Lie  $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$  et à son idéal  $\rho(\text{Rad}(\mathfrak{g}))$ ), ce sous-espace vectoriel est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $V$  est simple, on en déduit que  $W = V$ , c'est-à-dire que  $x \cdot w = \lambda(x)w$  pour tout  $x \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$  et tout  $w \in V$ .

Puisque  $W \neq 0$ , on a vu dans la remarque 4.3 que  $\lambda$  doit s'annuler sur  $[\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ , et la preuve est complète.  $\square$

La proposition 5.2 montre en particulier que  $\rho(x) = 0$  pour tout  $x \in [\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ . En d'autres termes, le morphisme  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  peut s'écrire comme une composition

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})] \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Donc la représentation  $V$  s'obtient de façon simple à partir d'une représentation simple de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \text{Rad}(\mathfrak{g})]$ , qui est réductive d'après la proposition 1.18. Donc, pour comprendre toutes les représentations simples de dimension finie de toutes les algèbres de Lie de dimension finie, il suffit de comprendre les représentations simples de dimension finie des algèbres de Lie *réductives*. Ceci justifie l'idée que les algèbres de Lie réductives sont "les plus intéressantes" du point de vue de la théorie des représentations, et qu'on se limite souvent à ce cadre.<sup>3</sup>

On verra plus tard que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie réductive, le morphisme naturel

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie, et que l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est semi-simple. On peut déduire de la proposition 5.2 que si  $V$  est une représentation simple de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , sa restriction à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est encore simple, et qu'il existe une forme linéaire  $\lambda : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{k}$  telle que pour tous  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  on a

$$(x + y) \cdot v = x \cdot v + \lambda(y)v.$$

Donc pour comprendre  $V$  (comme représentation de  $\mathfrak{g}$ ) il suffit de comprendre sa restriction à  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ . En d'autres termes, pour comprendre les représentations simples de dimension finie des algèbres de Lie réductives il suffit de comprendre les

---

3. Notons toutefois que le résultat précédent ne concerne que les représentations *simples*. Une algèbre de Lie non réductive peut avoir des représentations non simples qui ne "proviennent" pas d'une représentation d'une algèbre de Lie réductive, et des problèmes intéressants peuvent donc se poser dans ce contexte!

représentations simples de dimension finie des algèbres de Lie *semi-simples*, et on peut donc raisonnablement se restreindre à ce cadre-là.

### 5.3. Critères de semi-simplicité et de réductivité.

PROPOSITION 5.3. *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie telle que  $V$ , vu comme représentation de  $\mathfrak{g}$ , est simple. Alors  $\mathfrak{g}$  est réductive.*

*Si de plus  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ , alors  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 5.2, tout vecteur  $x \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$  agit sur  $V$  par un scalaire. Donc  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{k} \cdot \text{Id}_V \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(V))$ . Donc, a fortiori,  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . En utilisant la remarque 1.9, on obtient que  $\mathfrak{g}$  est réductive.

Si  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ , alors  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \subset (\mathbb{k} \cdot \text{Id}_V) \cap \mathfrak{sl}(V) = \{0\}$  (car  $\text{car}(\mathbb{k}) = 0$ ), et donc  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.  $\square$

REMARQUE 5.4. En particulier, pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$  ou  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  avec  $\dim(V) \geq 2$ , la condition de la proposition 5.3 est vérifiée, et on obtient donc que  $\mathfrak{gl}(V)$  est réductive et que  $\mathfrak{sl}(V)$  est semi-simple.



## Algèbre enveloppante et théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt

### 1. Algèbre tensorielle et algèbre symétrique

**1.1. Algèbres graduées, algèbres filtrées.** Commençons par quelques rappels terminologiques.

Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel. Une *graduation* sur  $V$  est la donnée de sous-espaces vectoriels  $V^n \subset V$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) tels que

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n.$$

Une *filtration* sur  $V$  est la donnée de sous-espaces vectoriels  $F_n V \subset V$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) tels que pour tout  $n$  on a  $F_n V \subseteq F_{n+1} V$  et tels que

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n V.$$

Un espace vectoriel muni d'une graduation est appelé un *espace vectoriel gradué*, et un espace vectoriel muni d'une filtration est appelé un *espace vectoriel filtré*.

Soit  $(V, \{F_n V, n \in \mathbb{N}\})$  un espace vectoriel filtré. Le *gradué associé* à cet espace vectoriel filtré est l'espace vectoriel

$$\text{gr}V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_n V / F_{n-1} V$$

(où, par convention,  $F_{-1} V = \{0\}$ ), muni de la graduation définie par les sous-espaces vectoriels  $\text{gr}^n V := F_n V / F_{n-1} V$ .

**DÉFINITION 1.1.** Une *algèbre graduée* est une  $\mathbb{k}$ -algèbre  $A$  munie d'une graduation

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

de l'espace vectoriel sous-jacent, telle que  $1 \in A^0$  et telle que pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  et tous  $a \in A^n$  et  $b \in A^m$ , le produit  $a \cdot b$  appartient à  $A^{n+m}$ . En termes plus formels, cette condition s'écrit

$$(1.1) \quad A^n \cdot A^m \subset A^{n+m}.$$

Une *algèbre filtrée* est une  $\mathbb{k}$ -algèbre  $A$  munie d'une filtration  $\{F_n A, n \in \mathbb{N}\}$  de l'espace vectoriel sous-jacent, telle que  $1 \in F_0 A$  et telle que pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  et tous  $a \in F_n A$  et  $b \in F_m A$ , le produit  $a \cdot b$  appartient à  $F_{n+m} A$ . En termes plus formels, cette condition s'écrit

$$F_n A \cdot F_m A \subset F_{n+m} A.$$

Soit  $(A, \{F_n A, n \in \mathbb{N}\})$  une algèbre filtrée. Alors l'espace vectoriel gradué  $\text{gr} A$  a une structure naturelle d'algèbre graduée. En effet, considérons la composition

$$\varphi_{n,m} : F_n A \times F_m A \rightarrow F_{n+m} A \twoheadrightarrow \text{gr}^{n+m} A,$$

où la première application est la multiplication et la seconde la surjection naturelle. Pour  $v \in F_m A$  fixé, l'application linéaire  $u \mapsto \varphi_n(u, v)$  s'annule sur  $F_{n-1} A$ . Donc, d'après la proposition 2.5 du chapitre 1, elle induit une application de  $\text{gr}^n A$  vers  $\text{gr}^{n+m} A$ , qu'on notera  $\varphi'_{n,m}(-, v)$ . Puis, pour  $u \in \text{gr}^n A$  fixé, l'application  $v \mapsto \varphi'_{n,m}(u, v)$  est linéaire et s'annule sur  $F_{m-1} A$ . Donc, de même, elle définit une application de  $\text{gr}^m A$  vers  $\text{gr}^{n+m} A$ . On a donc finalement obtenu une application

$$\text{gr}^n A \times \text{gr}^m A \rightarrow \text{gr}^{n+m} A.$$

On peut donc définir une application

$$\text{gr} A \times \text{gr} A \rightarrow \text{gr} A$$

en prenant la somme des applications précédentes pour toutes les valeurs de  $n$  et  $m$ . Il est facile de voir que cette application est associative, et que l'image de  $1 \in F_0 A$  dans  $\text{gr}^0 A$  est un élément neutre. On a donc bien défini une structure d'algèbre sur  $\text{gr} A$ , et cette structure vérifie clairement (1.1). L'espace vectoriel gradué  $\text{gr} A$  est donc bien naturellement une algèbre graduée. On l'appelle l'*algèbre graduée associée* à l'algèbre filtrée  $(A, \{F_n A, n \in \mathbb{N}\})$ .

**1.2. Algèbre tensorielle.** À partir de maintenant on fixe un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie<sup>1</sup>.

On pose  $\mathcal{T}^0(V) := \mathbb{k}$  puis, pour  $n \geq 1$ , on pose

$$\mathcal{T}^n(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ copies}}.$$

Pour tous  $m, n \geq 0$  on définit une application

$$\mu_{m,n} : \mathcal{T}^m(V) \times \mathcal{T}^n(V) \rightarrow \mathcal{T}^{m+n}(V)$$

comme étant l'application canonique (bilinéaire)

$$\mathcal{T}^m(V) \times \mathcal{T}^n(V) \rightarrow \mathcal{T}^m(V) \otimes \mathcal{T}^n(V) = \mathcal{T}^{m+n}(V),$$

voir l'équation (3.1) du chapitre 1. En termes plus concrets, pour des tenseurs purs  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \in \mathcal{T}^m(V)$  et  $w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \in \mathcal{T}^n(V)$  on a

$$\mu_{m,n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n.$$

Il est clair d'après cette expression que si  $m, n, p \geq 0$  on a une égalité

$$(1.2) \quad \mu_{m+n,p} \circ (\mu_{m,n} \times \text{id}_{\mathcal{T}^p(V)}) = \mu_{m,n+p} \circ (\text{id}_{\mathcal{T}^m(V)} \times \mu_{n,p})$$

d'applications de  $\mathcal{T}^m(V) \times \mathcal{T}^n(V) \times \mathcal{T}^p(V)$  vers  $\mathcal{T}^{m+n+p}(V)$ .

Considérons maintenant l'espace vectoriel

$$(1.3) \quad \mathcal{T}(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^n(V).$$

On définit une application

$$\mu : \mathcal{T}(V) \times \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$$

1. Cette hypothèse ne joue aucun rôle important dans les constructions qui suivent.

en posant, pour

$$v = \sum_{n \geq 0} v_n \quad \text{et} \quad w = \sum_{n \geq 0} w_n$$

(avec  $v_n, w_n \in \mathcal{T}^n(V)$ , ces vecteurs étant nuls pour  $n \gg 0$ ),

$$\mu(v, w) = \sum_{m, n \geq 0} \mu_{m, n}(v_m, w_n).$$

LEMME 1.2. *L'application  $\mu$  définit une structure d'algèbre sur l'espace vectoriel  $\mathcal{T}(V)$ .*

DÉMONSTRATION. Le vecteur  $1 \in \mathbb{k} = \mathcal{T}^0(V) \subset \mathcal{T}(V)$  est neutre pour la multiplication  $\mu$ . Les propriétés à vérifier sont donc que la multiplication est bilinéaire et associative.

Commençons par la bilinéarité. On va démontrer que pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  et  $u, v, w \in \mathcal{T}(V)$  on a

$$(1.4) \quad \mu(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \mu(u, w) + \beta \mu(v, w).$$

La vérification du fait que  $\mu(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mu(u, v) + \beta \mu(u, w)$  est très similaire, et laissée au lecteur. Écrivons

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \quad v = \sum_{n \geq 0} v_n \quad \text{et} \quad w = \sum_{n \geq 0} w_n$$

avec  $u_n, v_n$  et  $w_n$  dans  $\mathcal{T}^n(V)$  (et nuls pour  $n \gg 0$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \mu(\alpha u + \beta v, w) &= \mu \left( \sum_{n \geq 0} (\alpha u_n + \beta v_n), \sum_{n \geq 0} w_n \right) \\ &= \sum_{m, n \geq 0} \mu_{m, n}(\alpha u_m + \beta v_m, w_n). \end{aligned}$$

Pour tous  $m, n \geq 0$  on a

$$\mu_{m, n}(\alpha u_m + \beta v_m, w_n) = \alpha \mu_{m, n}(u_m, w_n) + \beta \mu_{m, n}(v_m, w_n),$$

voir les commentaires après l'équation (3.1) du chapitre 1. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu(\alpha u + \beta v, w) &= \sum_{m, n \geq 0} (\alpha \mu_{m, n}(u_m, w_n) + \beta \mu_{m, n}(v_m, w_n)) \\ &= \alpha \cdot \left( \sum_{m, n \geq 0} \mu_{m, n}(u_m, w_n) \right) + \beta \cdot \left( \sum_{m, n \geq 0} \mu_{m, n}(v_m, w_n) \right) \\ &= \alpha \mu(u, w) + \beta \mu(v, w), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (1.4).

Vérifions maintenant l'associativité. Soient  $u, v, w \in \mathcal{T}(V)$ . On doit montrer que

$$\mu(\mu(u, v), w) = \mu(u, \mu(v, w)).$$

Écrivons

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \quad v = \sum_{n \geq 0} v_n \quad \text{et} \quad w = \sum_{n \geq 0} w_n$$

comme ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned}\mu(\mu(u, v), w) &= \mu\left(\sum_{p \geq 0} \sum_{m+n=p} \mu_{m,n}(u_m, v_n), \sum_{q \geq 0} w_q\right) \\ &= \sum_{p,q \geq 0} \mu_{p,q} \left( \sum_{m+n=p} \mu_{m,n}(u_m, v_n), w_q \right) \\ &= \sum_{m,n,q \geq 0} \mu_{m+n,q}(\mu_{m,n}(u_m, v_n), w_q)\end{aligned}$$

par bilinéarité.

Maintenant on utilise l'identité (1.2), puis encore la bilinéarité, pour obtenir que

$$\begin{aligned}\mu(\mu(u, v), w) &= \sum_{m,n,q \geq 0} \mu_{m,n+q}(u_m, \mu_{n,q}(v_n, w_q)) \\ &= \sum_{m,p \geq 0} \mu_{m,p} \left( u_m, \sum_{n+q=p} \mu_{n,q}(v_n, w_q) \right) \\ &= \mu(u, \mu(v, w)),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

À partir de maintenant, on notera plus simplement  $v \cdot w$  à la place de  $\mu(v, w)$  pour  $v, w \in \mathcal{T}(V)$ .

REMARQUE 1.3. Par construction, l'algèbre tensorielle  $\mathcal{T}(V)$ , munie de la décomposition (1.3), est une algèbre graduée.

**1.3. Propriété universelle de l'algèbre tensorielle.** L'algèbre tensorielle  $\mathcal{T}(V)$  a la "propriété universelle" suivante.

THÉORÈME 1.4 (Propriété universelle de l'algèbre tensorielle). *Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre, et soit  $\varphi : V \rightarrow A$  une application linéaire. Il existe un unique morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres*

$$\psi : \mathcal{T}(V) \rightarrow A$$

qui vérifie  $\psi(v) = \varphi(v)$  pour tout  $v \in V = \mathcal{T}^1(V)$ .

DÉMONSTRATION. Pour démontrer l'unicité, on remarque que pour tous vecteurs  $v_1, \dots, v_n \in V$ , l'application  $\psi$  doit vérifier

$$\begin{aligned}\psi(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) &= \psi(v_1 \cdot v_2 \cdot (\dots) \cdot v_n) \\ &= \psi(v_1) \cdot \psi(v_2) \cdot (\dots) \cdot \psi(v_n) = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot (\dots) \cdot \varphi(v_n).\end{aligned}$$

Comme les vecteurs de cette forme engendrent  $\mathcal{T}^n(V)$  comme espace vectoriel, cette égalité détermine  $\psi$  uniquement sur chaque  $\mathcal{T}^n(V)$  pour  $n \geq 1$ . Par ailleurs on doit avoir  $\psi(1) = 1$ , donc  $\psi$  est également déterminée sur  $\mathcal{T}^0(V)$ . Cette application est donc uniquement déterminée sur  $\mathcal{T}(V)$  puisque  $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{T}^n(V)$ .

Démontrons maintenant l'existence de  $\psi$ . Pour cela on choisit une base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$  de  $V$ . Alors les vecteurs  $1 \in \mathcal{T}^0(V)$  et  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$  pour  $n \geq 1$  et  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{T}(V)$ . On peut donc définir l'application linéaire

$$\psi : \mathcal{T}(V) \rightarrow A$$

en posant  $\psi(1) = 1$ , et

$$\psi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = \varphi(e_{i_1}) \cdot (\cdots) \cdot \varphi(e_{i_n})$$

pour  $n$  et  $i_1, \dots, i_n$  comme ci-dessus. En utilisant le fait que  $\varphi$  et  $\psi$  sont linéaires, il est facile de vérifier que  $\psi(v) = \varphi(v)$  pour tout  $v \in V$ . Il reste maintenant à vérifier que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres.

Pour commencer, montrons que si  $m, n \geq 0$  et si  $v \in \mathcal{T}^n(V)$ ,  $w \in \mathcal{T}^m(V)$ , on a

$$(1.5) \quad \psi(v \cdot w) = \psi(v) \cdot \psi(w).$$

Cette égalité est évidente si  $n$  ou  $m$  est nul; on suppose donc maintenant que  $n, m \geq 1$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}} \lambda_{i_1, \dots, i_n} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, \\ w &= \sum_{j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, r\}} \mu_{j_1, \dots, j_m} \cdot e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m} \end{aligned}$$

pour des coefficients  $\lambda_{i_1, \dots, i_n}$  et  $\mu_{j_1, \dots, j_m}$  dans  $\mathbb{k}$ . Calculons maintenant  $\psi(v \cdot w)$  :

$$\begin{aligned} \psi(v \cdot w) &= \psi \left( \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\} \\ j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, r\}}} \lambda_{i_1, \dots, i_n} \mu_{j_1, \dots, j_m} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\} \\ j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, r\}}} \lambda_{i_1, \dots, i_n} \mu_{j_1, \dots, j_m} \cdot \varphi(e_{i_1}) \cdots \varphi(e_{i_n}) \cdot \varphi(e_{j_1}) \cdots \varphi(e_{j_m}). \end{aligned}$$

On obtient donc que  $\psi(v \cdot w)$  est égal à

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} \cdot \varphi(e_{i_1}) \cdots \varphi(e_{i_n}) \right) \cdot \left( \sum_{j_1, \dots, j_m} \mu_{j_1, \dots, j_m} \cdot \varphi(e_{j_1}) \cdots \varphi(e_{j_m}) \right)$$

(où les indices dans les sommes prennent leurs valeurs dans  $\{1, \dots, r\}$ ). Cette dernière quantité est égale à  $\psi(v) \cdot \psi(w)$ , et la preuve de (1.5) est donc complète.

Soient maintenant  $v$  et  $w$  des vecteurs quelconques de  $\mathcal{T}(V)$ . Écrivons

$$v = \sum_{n \geq 0} v_n \quad \text{et} \quad w = \sum_{n \geq 0} w_n$$

avec  $v_n, w_n$  dans  $\mathcal{T}^n(V)$  (et nuls pour  $n \gg 0$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \psi(v \cdot w) &= \psi \left( \sum_{m, n \geq 0} v_m \cdot w_n \right) \\ &= \sum_{m, n \geq 0} \psi(v_m \cdot w_n) \\ &= \sum_{m, n \geq 0} \psi(v_m) \cdot \psi(w_n) \end{aligned}$$

d'après (1.5). On obtient donc

$$\psi(v \cdot w) = \left( \sum_{n \geq 0} \psi(v_n) \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \psi(w_n) \right) = \psi(v) \cdot \psi(w),$$

ce qui achève la preuve du fait que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres.  $\square$

**1.4. Algèbre symétrique.** On peut maintenant définir l'*algèbre symétrique* de  $V$  comme étant le quotient

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{T}(V)/I_{\mathcal{S}}$$

où  $I_{\mathcal{S}}$  est l'idéal bilatère de  $\mathcal{T}(V)$  engendré par les vecteurs de la forme  $u \otimes v - v \otimes u$ . De façon plus concrète,  $I_{\mathcal{S}}$  est l'idéal de  $\mathcal{T}(V)$  formé des vecteurs qui sont des sommes de vecteurs de la forme  $p \cdot (u \otimes v) \cdot q - p \cdot (v \otimes u) \cdot q$  avec  $p, q \in \mathcal{T}(V)$ . Cette description montre qu'on a

$$I_{\mathcal{S}} = \bigoplus_{n \geq 0} (I_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{T}^n(V)).$$

On a donc

$$(1.6) \quad \mathcal{S}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}^n(V) \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}^n(V) = \mathcal{T}^n(V)/(I_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{T}^n(V)).$$

Notons que  $\mathcal{S}^0(V) = \mathbb{k}$  et  $\mathcal{S}^1(V) = V$ . On notera  $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V)$  la surjection naturelle ; il s'agit d'un morphisme d'algèbres.

L'algèbre  $\mathcal{S}(V)$  est commutative. En effet si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $V = \mathcal{S}^1(V)$ , par définition on a  $u \cdot v = v \cdot u$  dans  $\mathcal{S}(V)$ . Puis, comme tout vecteur de  $\mathcal{S}(V)$  s'obtient en faisant des combinaisons linéaires de produits de vecteurs de  $\mathcal{S}^1(V)$  et de  $\mathcal{S}^0(V) = \mathbb{k}$ , tous les vecteurs commutent deux à deux : pour  $p$  et  $q$  dans  $\mathcal{S}(V)$  on a  $p \cdot q = q \cdot p$ .

REMARQUE 1.5. L'algèbre  $\mathcal{S}(V)$ , munie de la décomposition (1.6), est une algèbre graduée.

L'algèbre symétrique a également une "propriété universelle", comme suit.

THÉORÈME 1.6 (Propriété universelle de l'algèbre symétrique). *Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre commutative, et soit  $\varphi : V \rightarrow A$  une application linéaire. Il existe un unique morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres*

$$\psi : \mathcal{S}(V) \rightarrow A$$

qui vérifie  $\psi(v) = \varphi(v)$  pour tout  $v \in V = \mathcal{S}^1(V)$ .

DÉMONSTRATION. La preuve de l'unicité est identique à la preuve de l'unicité dans le théorème 1.4. Considérons donc l'existence. D'après le théorème 1.4, il existe un morphisme d'algèbres

$$\psi' : \mathcal{T}(V) \rightarrow A$$

tel que  $\psi'(v) = \varphi(v)$  pour tout  $v \in V = \mathcal{T}^1(V)$ . Pour tous  $v, w \in V$ , on a

$$\psi'(v \otimes w - w \otimes v) = \psi'(v) \cdot \psi'(w) - \psi'(w) \cdot \psi'(v) = 0$$

puisque  $A$  est commutative. On en déduit que  $\psi'$  est nulle sur  $I_{\mathcal{S}}$ . D'après la proposition 2.5 du chapitre 1, on peut donc définir une application linéaire

$$\psi : \mathcal{S}(V) \rightarrow A$$

en posant  $\psi(p+I_{\mathcal{S}}) = \psi'(p)$ . En utilisant le fait que  $\psi'$  est un morphisme d'algèbres, il est facile de vérifier que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres. D'autre part on a  $\psi(v) = \psi'(v) = \varphi(v)$  pour tout  $v \in V = \mathcal{S}^1(V) = \mathcal{T}^1(V)$ , donc la preuve est complète.  $\square$

On peut construire une base de  $\mathcal{S}(V)$  de la façon suivante.

**PROPOSITION 1.7.** *Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $V$ . Alors le vecteur  $1 \in \mathbb{k} = \mathcal{S}^0(V)$  et les vecteurs*

$$(1.7) \quad e_{i_1} \cdots e_{i_n} \quad \text{avec } n \geq 1, \quad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_n$$

*forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}(V)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Les vecteurs de la forme  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$  avec  $n \geq 1$  et  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}$  engendrent  $\mathcal{T}(V)$  comme espace vectoriel. Comme le morphisme naturel  $\mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V)$  est surjectif, les vecteurs de la forme  $e_{i_1} \cdots e_{i_n}$  engendrent donc  $\mathcal{S}(V)$ . Comme  $\mathcal{S}(V)$  est commutative, tout vecteur de cette forme peut s'écrire avec des indices croissants, ce qui montre que les vecteurs de l'énoncé engendrent  $\mathcal{S}(V)$ .

Il reste à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Pour cela on considère l'algèbre  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{k}$  en  $r$  indéterminées  $X_1, \dots, X_r$ . Par définition, les vecteurs de la forme

$$X_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r}$$

avec  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  forment une base de  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$ . Cette base peut aussi se décrire comme étant formée de 1 et des vecteurs de la forme

$$X_{i_1} \cdots X_{i_n} \quad \text{avec } n \geq 1, \quad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, r\}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_n.$$

Considérons l'application linéaire  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$  définie par  $\varphi(e_i) = X_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ . D'après le théorème 1.6, cette application se prolonge en un morphisme d'algèbres  $\psi : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$ . Ce morphisme envoie la famille de vecteurs de l'énoncé sur la base de  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$  considérée ci-dessus. Cette famille de vecteurs est donc libre, ce qui achève la preuve.  $\square$

**REMARQUE 1.8.** Il est facile de voir que le morphisme d'algèbres  $\mathcal{S}(V) \rightarrow \mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$  considéré dans la preuve de la proposition 1.7 est un isomorphisme d'algèbres.

## 2. Algèbre enveloppante et énoncé du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt

**2.1. Définition.** Soit maintenant  $\mathfrak{g}$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie de dimension finie. Comme  $\mathfrak{g}$  est en particulier un espace vectoriel, on peut considérer son algèbre tensorielle  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ . On notera  $I_{\mathcal{U}}$  l'idéal bilatère de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments de la forme  $x \cdot y - y \cdot x - [x, y]$  pour  $x, y \in \mathfrak{g}$ , qui est aussi le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments de la forme

$$u \cdot (x \cdot y - y \cdot x - [x, y]) \cdot v$$

où  $x, y \in \mathfrak{g}$  et  $u, v \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ .

L'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$  est définie comme le quotient

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/I_{\mathcal{U}}.$$

Par définition, il existe un morphisme d'algèbres naturel (surjectif)  $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . On peut donc considérer l'application linéaire

$$\iota : \mathfrak{g} = \mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

LEMME 2.1. *L'application linéaire  $\iota$  est un morphisme d'algèbres de Lie.*

DÉMONSTRATION. Par définition, pour  $x, y \in \mathfrak{g}$  on a

$$\begin{aligned} \iota(x) \cdot \iota(y) - \iota(y) \cdot \iota(x) &= \pi_{\mathcal{U}}(x) \cdot \pi_{\mathcal{U}}(y) - \pi_{\mathcal{U}}(y) \cdot \pi_{\mathcal{U}}(x) \\ &= \pi_{\mathcal{U}}(x \cdot y - y \cdot x) \\ &= \pi_{\mathcal{U}}([x, y] + (x \cdot y - y \cdot x - [x, y])) \\ &= \pi_{\mathcal{U}}([x, y]) + \pi_{\mathcal{U}}(x \cdot y - y \cdot x - [x, y]) \\ &= \pi_{\mathcal{U}}([x, y]) \\ &= \iota([x, y]), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.  $\square$

REMARQUE 2.2. Il n'est pas clair pour l'instant que l'application  $\iota$  est injective. Cette propriété sera démontrée plus tard ; voir le corollaire 4.3.

**2.2. Propriété universelle.** L'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  possède une “propriété universelle” similaire à celles de l'algèbre tensorielle (voir le théorème 1.4) ou de l'algèbre symétrique (voir le théorème 1.6).

THÉORÈME 2.3 (Propriété universelle de l'algèbre enveloppante). *Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre et  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A$  un morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres de Lie. Il existe alors un unique morphisme d'algèbres*

$$\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$$

tel que la composée

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi} A$$

coïncide avec l'application  $\varphi$ .

DÉMONSTRATION. L'unicité de  $\psi$  est claire, puisque  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est engendrée (comme  $\mathbb{k}$ -algèbre) par  $\iota(\mathfrak{g})$ , et puisque la propriété que doit vérifier  $\psi$  définit son action sur toutes les sommes de produits d'éléments de  $\iota(\mathfrak{g})$ .

Pour démontrer l'existence de  $\psi$ , on utilise tout d'abord le théorème 1.4, qui garantit l'existence d'un morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres

$$\psi' : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$$

tel que  $\psi'(x) = \varphi(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{g} = \mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$ .

Considérons maintenant des vecteurs  $x, y \in \mathfrak{g}$ . On a

$$\begin{aligned} \psi'(x \cdot y - y \cdot x - [x, y]) &= \psi'(x) \cdot \psi'(y) - \psi'(y) \cdot \psi'(x) - \psi'([x, y]) \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y) - \varphi(y) \cdot \varphi(x) - \varphi([x, y]) \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)] - \varphi([x, y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie. L'application  $\psi'$  est donc nulle sur tous les éléments de la forme  $x \cdot y - y \cdot x - [x, y]$ , donc sur  $I_{\mathcal{U}}$ . D'après la proposition 2.5 du chapitre 1, ceci implique qu'on peut définir une application linéaire

$$\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/I_{\mathcal{U}} \rightarrow A$$



en posant

$$\psi(u + I_{\mathcal{U}}) = \psi'(u)$$

pour tout  $u \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ . De plus,  $\psi$  est un morphisme d'algèbres, puisque pour tout  $u, v \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$  on a

$$\begin{aligned} \psi((u + I_{\mathcal{U}}) \cdot (v + I_{\mathcal{U}})) &= \psi(u \cdot v + I_{\mathcal{U}}) \\ &= \psi'(u \cdot v) \\ &= \psi'(u) \cdot \psi'(v) \\ &= \psi(u + I_{\mathcal{U}}) \cdot \psi(v + I_{\mathcal{U}}). \end{aligned}$$

Finalement, la composée

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi} A$$

coïncide, par définition, avec la composée

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi'} A,$$

donc avec  $\varphi$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

EXERCICE 2.4. Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre.

- (1) Montrer que, réciproquement, si  $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  est un morphisme d'algèbres, alors  $\psi \circ \iota$  est un morphisme d'algèbres de Lie, et que le morphisme d'algèbres associé à  $\psi \circ \iota$  par le théorème 2.3 est  $\psi$  lui-même.
- (2) En déduire que l'application  $\psi \mapsto \psi \circ \iota$  définit une bijection de l'ensemble des morphismes d'algèbres de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  dans  $A$  vers l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  vers  $A$ .

**2.3. Théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt.** L'intérêt principal du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt est qu'il permet de comprendre plus concrètement à quoi "ressemble" l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  (voir notamment le corollaire 4.1). Pour l'énoncer, on considère tout d'abord la collection  $\{\mathcal{T}_m(\mathfrak{g}), m \geq 0\}$  de sous-espaces de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  définie par

$$\mathcal{T}_m(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}^0(\mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}^m(\mathfrak{g}).$$

On a  $1 \in \mathcal{T}_0(\mathfrak{g})$ , pour tout  $m \geq 0$  on a

$$\mathcal{T}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{T}_{m+1}(\mathfrak{g}),$$

et pour tous  $m, n \geq 0$  on a

$$\mathcal{T}_m(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{T}_n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{T}_{m+n}(\mathfrak{g}).$$

On a également clairement

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{T}_m(\mathfrak{g}),$$

donc ces sous-espaces définissent sur  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  une structure d'algèbre filtrée.

On considère maintenant les sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  définis, pour  $m \geq 0$ , par

$$\mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) := \pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{T}_m(\mathfrak{g})).$$

De façon plus concrète,  $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  formé par les vecteurs qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs qui sont des produits d'au plus  $m$  éléments de  $\iota(\mathfrak{g})$ . On a encore  $1 \in \mathcal{U}_0(\mathfrak{g})$ ,

$$\mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) \cdot \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_{m+n}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}),$$

donc ces sous-espaces définissent sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  une structure d'algèbre filtrée. Cette filtration est appelée *filtration de Poincaré–Birkhoff–Witt*.

Notons  $\mathcal{V}(\mathfrak{g}) := \text{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  l'algèbre graduée associée à cette filtration.

LEMME 2.5. *La  $\mathbb{k}$ -algèbre  $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$  est engendrée par l'image de la composée*

$$\iota' : \mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}^1(\mathfrak{g}).$$

*De plus, cette algèbre est commutative.*

DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord la première assertion. Pour cela il suffit de vérifier que, pour tout  $m \geq 0$ , tout élément de  $\mathcal{V}^m(\mathfrak{g}) = \text{gr}^m\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  s'écrit comme une combinaison linéaire de produits d'éléments de  $\iota'(\mathfrak{g})$ . Mais, par définition, tout élément  $x$  de  $\mathcal{V}^m(\mathfrak{g})$  est l'image d'un élément  $y$  de  $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ . Et comme, par définition encore,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est un quotient de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ ,  $y$  est une combinaison linéaire de produits d'éléments de  $\iota(\mathfrak{g})$ . Donc  $x$  s'écrit bien comme combinaison linéaire de produits d'éléments de  $\iota'(\mathfrak{g})$ , et l'assertion est prouvée.

Maintenant que ce fait est démontré, pour démontrer la commutativité de  $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$  il suffit de démontrer que les éléments de  $\iota'(\mathfrak{g})$  commutent deux à deux. Soient donc  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Dans  $\mathcal{U}_2(\mathfrak{g})$  on a

$$(2.1) \quad \iota(x) \cdot \iota(y) - \iota(y) \cdot \iota(x) = \iota([x, y]).$$

L'image dans  $\mathcal{V}^2(\mathfrak{g})$  de l'élément de gauche dans cette égalité est par définition  $\iota'(x) \cdot \iota'(y) - \iota'(y) \cdot \iota'(x)$ . Mais l'élément de droite appartient au sous-espace  $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_2(\mathfrak{g})$ . Donc son image dans  $\mathcal{V}^2(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_2(\mathfrak{g})/\mathcal{U}_1(\mathfrak{g})$  est nulle. En prenant l'image de l'égalité (2.1) dans  $\mathcal{V}^2(\mathfrak{g})$  on obtient donc l'égalité

$$\iota'(x) \cdot \iota'(y) - \iota'(y) \cdot \iota'(x) = 0$$

dans  $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$ , ce qui prouve la commutation est achève la preuve.  $\square$

Le lemme 2.5, combiné à la propriété universelle de l'algèbre symétrique (voir le théorème 1.6) permettent de prolonger le morphisme  $\iota'$  en un morphisme d'algèbres surjectif

$$\varphi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{g}).$$

THÉORÈME 2.6 (Théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt). *Le morphisme  $\varphi$  est un isomorphisme d'algèbres.*

### 3. Preuve du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt

La preuve du théorème 2.6 nécessite quelques résultats préliminaires, et ne sera achevée qu'à la fin de cette partie.

On fixe une base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}$  (où  $d = \dim(\mathfrak{g})$ ). Ces éléments définissent des vecteurs dans  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ , qu'on notera encore  $x_1, \dots, x_d$ , mais aussi des vecteurs dans  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ , qu'on notera  $z_1, \dots, z_d$  pour éviter les confusions. On a donc  $\pi_{\mathcal{S}}(x_i) = z_i$

pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Pour tout  $m$ -uplet  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  d'entiers entre 1 et  $d$ , on note

$$x_\lambda = x_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes x_{\lambda_m} \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}), \quad z_\lambda = z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}).$$

Par convention, pour  $m = 0$ , il existe un unique  $m$ -uplet, en l'occurrence l'ensemble vide  $\emptyset$ , et on a  $x_\emptyset = 1$ ,  $z_\emptyset = 1$ . Un  $m$ -uplet  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  comme ci-dessus est dit *croissant* s'il vérifie  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ . (Par convention,  $\emptyset$  est croissant.) D'après la proposition 1.7, les vecteurs  $z_\lambda$  avec  $\lambda$  croissant forment une base de  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ .

Le lemme suivant est la construction-clé de la preuve. Sa démonstration est assez technique. Dans l'énoncé on utilise la notation suivante : si  $i \in \{1, \dots, d\}$  et si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  est un  $m$ -uplet croissant, on écrit  $i \leq \lambda$  si  $m = 0$  (c'est-à-dire si  $\lambda = \emptyset$ ) ou si  $m \geq 1$  et  $i \leq \lambda_1$  (c'est-à-dire si  $m \geq 1$  et  $i \leq \lambda_j$  pour tout  $j$ ). Pour  $m \in \mathbb{N}$  on note

$$\mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{S}^i(\mathfrak{g}).$$

LEMME 3.1. *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une unique application linéaire*

$$f_m : \mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

*qui vérifie les propriétés suivantes :*

(A<sub>m</sub>) *pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  et tout  $k$ -uplet croissant  $\lambda$  tel que  $k \leq m$  et  $i \leq \lambda$ , on a*

$$f_m(x_i \otimes z_\lambda) = z_i z_\lambda;$$

(B<sub>m</sub>) *pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  et tout  $k$ -uplet croissant  $\lambda$  tel que  $k \leq m$ , on a*

$$f_m(x_i \otimes z_\lambda) = z_i z_\lambda \pmod{\mathcal{S}_k(\mathfrak{g})};$$

(C<sub>m</sub>) *pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  et tout  $k$ -uplet croissant  $\lambda$  tel que  $k \leq m - 1$ , on a*

$$f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) = f_m(x_j \otimes f_m(x_i \otimes z_\lambda)) + f_m([x_i, x_j] \otimes z_\lambda).$$

*De plus, pour  $m \geq 1$ , la restriction de  $f_m$  à  $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_m(\mathfrak{g})$  coïncide avec l'application  $f_{m-1}$ .*

REMARQUE 3.2. (1) Si la propriété (B<sub>m</sub>) est vérifiée, alors sous les conditions de la propriété (C<sub>m</sub>) on a  $f_m(x_i \otimes z_\lambda) \in \mathcal{S}_m(\mathfrak{g})$  et  $f_m(x_j \otimes z_\lambda) \in \mathcal{S}_m(\mathfrak{g})$ , de sorte que la condition de (C<sub>m</sub>) a un sens.

(2) Les applications  $f_m$  ne sont pas canoniques : elles dépendent du choix de la base  $(x_1, \dots, x_d)$  (et notamment de la façon dont on a ordonné cette base).

PREUVE DU LEMME 3.1. On prouve l'existence et l'unicité de  $f_m$  par récurrence sur  $m$ . Le cas  $m = 0$  est évident : on  $\mathcal{S}_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{k}$ , et on définit  $f_0$  en posant  $f_0(x_i \otimes 1) = z_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ . (Les vecteurs  $(x_i \otimes 1, i = 1, \dots, d)$  forment une base de  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{k}$ , de sorte qu'il existe une unique application linéaire vérifiant cette égalité.) Les conditions (A<sub>0</sub>), (B<sub>0</sub>) et (C<sub>0</sub>) sont vérifiées, et la condition (A<sub>0</sub>) montre que ce choix de  $f_0$  est le seul possible.

Soit maintenant  $m \geq 1$ , et supposons qu'on a vérifié l'existence et l'unicité d'une application  $f_{m-1}$  satisfaisant les conditions (A<sub>m-1</sub>), (B<sub>m-1</sub>) et (C<sub>m-1</sub>). On a

$$\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g})) \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}^m(\mathfrak{g})).$$

On définit tout d'abord l'application  $f_m$  sur  $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g})$  comme étant l'application  $f_{m-1}$ . (En fait ceci est contraint par l'hypothèse de récurrence : si  $f_m$  existe, sa restriction à  $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g})$  vérifie les propriétés  $(A_{m-1})$ ,  $(B_{m-1})$  et  $(C_{m-1})$ , donc elle doit coïncider avec  $f_{m-1}$  par l'unicité au rang  $m-1$ .)

Pour compléter la définition il reste à définir  $f(x_i \otimes z_\lambda)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  et tout  $m$ -uplet croissant  $\lambda$ . Si  $i \leq \lambda$ , on pose

$$(3.1) \quad f_m(x_i \otimes z_\lambda) = z_i z_\lambda.$$

(Ceci est imposé par la condition  $(A_m)$ .) Si maintenant  $i \not\leq \lambda$ , alors  $\lambda_1 < i$ . On pose  $\mu = (\lambda_2, \dots, \lambda_m)$ . D'après la condition  $(A_{m-1})$ ,  $f_{m-1}(x_{\lambda_1} \otimes z_\mu) = z_{\lambda_1} z_\mu = z_\lambda$ . D'autre part, d'après  $(B_{m-1})$  il existe  $y \in \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g})$  tel que  $f_{m-1}(x_i \otimes z_\mu) = z_i z_\mu + y$ . La condition  $(C_m)$  force alors à poser

$$(3.2) \quad f_m(x_i \otimes z_\lambda) = z_{\lambda_1} z_i z_\mu + f_{m-1}(x_{\lambda_1} \otimes y) + f_{m-1}([x_i, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu).$$

Ceci montre l'unicité de  $f_m$ . Pour conclure, il reste à démontrer que l'unique application linéaire  $f_m : \mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  qui coïncide avec  $f_{m-1}$  sur  $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{S}_{m-1}(\mathfrak{g})$  et vérifie (3.1) (quand  $i \leq \lambda$ ) et (3.2) (quand  $i \not\leq \lambda$ ) vérifie les conditions  $(A_m)$ ,  $(B_m)$  et  $(C_m)$ . Les conditions  $(A_m)$  et  $(B_m)$  sont évidentes. Dans le cas où  $k \leq m-2$ , la condition  $(C_m)$  découle de l'hypothèse de récurrence, de sorte qu'il suffit de considérer le cas  $k = m-1$ . Si  $j < i$  et  $j \leq \lambda$ , l'égalité est vraie par construction de  $f_m$  (voir la condition (3.2) ci-dessus). Les rôles de  $i$  et  $j$  étant symétriques, le cas  $i < j$ ,  $i \leq \lambda$  est également vérifié. Dans le cas  $i = j$ , il n'y a rien à démontrer.

Le seul cas qui reste est donc celui où n'a ni  $i \leq \lambda$ , ni  $j \leq \lambda$ . Dans ce cas, posons  $\mu = (\lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})$ ; on a alors  $\lambda_1 \leq \mu$ ,  $\lambda_1 < i$ ,  $\lambda_1 < j$ . Par  $(A_{m-1})$  et  $(C_{m-1})$ , on a

$$\begin{aligned} f_m(x_j \otimes z_\lambda) &= f_{m-1}(x_j \otimes f_{m-1}(x_{\lambda_1} \otimes z_\mu)) \\ &= f_{m-1}(x_{\lambda_1} \otimes f_{m-1}(x_j \otimes z_\mu)) + f_{m-1}([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu) \\ &= f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu)) + f_m([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu). \end{aligned}$$

D'après  $(B_{m-1})$ , il existe  $w \in \mathcal{S}_{m-2}(\mathfrak{g})$  tel que

$$f_m(x_j \otimes z_\mu) = z_j z_\mu + w.$$

D'autre part, la condition  $(C_m)$  est connue pour  $f_m(x_i \otimes f_m(x_{\lambda_1} \otimes z_j z_\mu))$ , puisque  $\lambda_1 \leq \mu$  et  $\lambda_1 < j$ . Par  $(C_{m-1})$ , la condition similaire est également connue pour  $f_m(x_i \otimes f_m(x_{\lambda_1} \otimes w))$ , de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} f_m(x_i \otimes f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) \\ = f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) + f_m([x_i, x_{\lambda_1}] \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu)). \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned} f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) &= f_m(x_i \otimes f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) + f_m(x_i \otimes f_m([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu)) \\ &= f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) + f_m([x_i, x_{\lambda_1}] \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu)) \\ &\quad + f_m(x_i \otimes f_m([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu)). \end{aligned}$$

Finalement, en appliquant la condition  $(C_{m-1})$  à  $f_m(x_i \otimes f_m([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes z_\mu))$  on obtient que

$$\begin{aligned} f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) &= f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) + f_m([x_i, x_{\lambda_1}] \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu)) \\ &\quad + f_m([x_j, x_{\lambda_1}] \otimes f_m(x_i \otimes z_\mu)) + f_m([x_i, [x_j, x_{\lambda_1}]] \otimes z_\mu). \end{aligned}$$

Comme  $i$  et  $j$  jouent des rôles similaires, on a également une égalité similaire en inversant les rôles de  $i$  et  $j$ . En soustrayant ces égalités on obtient que

$$f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) - f_m(x_j \otimes f_m(x_i \otimes z_\lambda)) = f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\mu))) - f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m(x_j \otimes f_m(x_i \otimes z_\mu))) + f_m([x_i, [x_j, x_{\lambda_1}]] \otimes z_\mu) - f_m([x_j, [x_i, x_{\lambda_1}]] \otimes z_\mu),$$

c'est-à-dire (en utilisant encore  $(C_{m-1})$ ) que

$$f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) - f_m(x_j \otimes f_m(x_i \otimes z_\lambda)) = f_m(x_{\lambda_1} \otimes f_m([x_i, x_j] \otimes z_\mu)) + f_m([x_i, [x_j, x_{\lambda_1}]] \otimes z_\mu) + f_m([x_j, [x_{\lambda_1}, x_i]] \otimes z_\mu)$$

puis, en utilisant  $(C_{m-1})$  et  $(A_{m-2})$ ,

$$f_m(x_i \otimes f_m(x_j \otimes z_\lambda)) - f_m(x_j \otimes f_m(x_i \otimes z_\lambda)) = f_m([x_i, x_j] \otimes z_\lambda) + f_m([x_{\lambda_1}, [x_i, x_j]] \otimes z_\mu) + f_m([x_i, [x_j, x_{\lambda_1}]] \otimes z_\mu) + f_m([x_j, [x_{\lambda_1}, x_i]] \otimes z_\mu).$$

Finalement, l'identité de Jacobi assure que le terme sur la deuxième ligne est nul, ce qui achève la preuve.  $\square$

Le lemme suivant découle facilement du lemme 3.1.

**LEMME 3.3.** *Il existe une représentation  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , tout  $m \geq 0$  et tout  $m$ -uplet ordonné  $\lambda$  on a*

$$\rho(x_i)(z_\lambda) = z_i z_\lambda \pmod{\mathcal{S}_m(\mathfrak{g})}.$$

**DÉMONSTRATION.** Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , on définit l'application linéaire  $\rho(x) : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  en posant, pour tout  $z \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ ,

$$\rho(x)(z) = f_m(x \otimes z),$$

où  $m \geq 0$  est un entier tel que  $z \in \mathcal{S}_m(\mathfrak{g})$ . Ce vecteur ne dépend pas du choix de  $m$  d'après les propriétés des applications  $f_m$ . Alors la condition  $(C_m)$  du lemme 3.1 assure que  $\rho$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , et la condition  $(B_m)$  assure que cette représentation vérifie les conditions de l'énoncé.  $\square$

**LEMME 3.4.** *Soit  $m \geq 0$  et soit  $t \in \mathcal{T}_m(\mathfrak{g}) \cap \text{Ker}(\pi_{\mathcal{U}})$ . Alors la composante  $t_m$  de  $t$  sur  $\mathcal{T}^m(\mathfrak{g})$  appartient à  $\text{Ker}(\pi_{\mathcal{S}})$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme les vecteurs  $x_\lambda$  pour  $\lambda$  un  $m$ -uplet forment une base de  $\mathcal{T}^m(\mathfrak{g})$ , il existe des  $m$ -uplets  $\lambda^1, \dots, \lambda^r$  et des scalaires  $a_1, \dots, a_r$  tels que

$$t_m = \sum_{i=1}^r a_i x_{\lambda^i}.$$

Comme  $\mathfrak{gl}(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))$  est une algèbre, d'après la propriété universelle de l'algèbre enveloppante (théorème 2.3), le morphisme  $\rho$  du lemme 3.3 s'étend en un morphisme  $\rho' : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))$  tel que  $\text{Ker}(\pi_{\mathcal{U}}) \subset \text{Ker}(\rho')$ . On a donc  $\rho'(t) = 0$ . D'autre part la composante de  $\rho(t)(1)$  dans  $\mathcal{S}^m(\mathfrak{g})$  est, d'après le lemme 3.3, égale à  $\sum_{i=1}^r a_i z_{\lambda^i}$ . Cette quantité est donc nulle, ce qui implique que  $\pi_{\mathcal{S}}(t_m) = 0$ , et achève la preuve.  $\square$

On peut finalement donner la preuve du théorème 2.6.

PREUVE DU THÉORÈME 2.6. On doit démontrer que  $\varphi$  est injectif. Pour cela, puisque  $\varphi(\mathcal{S}^m(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{V}^m(\mathfrak{g})$  et puisque les sous-espaces  $\mathcal{V}^m(\mathfrak{g})$  sont en somme directe dans  $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$ , il suffit de montrer que sa restriction à  $\mathcal{S}^m(\mathfrak{g})$  est injective pour tout  $m \geq 0$ .

Soit donc  $t \in \mathcal{T}^m(\mathfrak{g})$ , et supposons que  $\varphi(\pi_{\mathcal{S}}(t)) = 0$ . Puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}^m(\mathfrak{g}) & \\ \pi_{\mathcal{S}} \nearrow & & \searrow \varphi \\ \mathcal{T}^m(\mathfrak{g}) & & \mathcal{V}^m(\mathfrak{g}), \\ \pi_{\mathcal{U}} \searrow & & \nearrow \\ & \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) & \end{array}$$

ceci signifie que  $\pi_{\mathcal{U}}(t) \in \mathcal{U}_{m-1}(\mathfrak{g})$ . Alors il existe  $t' \in \mathcal{T}_{m-1}(\mathfrak{g})$  tel que  $\pi_{\mathcal{U}}(t) = \pi_{\mathcal{U}}(t')$ , c'est-à-dire tel que  $\pi_{\mathcal{U}}(t - t') = 0$ . D'après le lemme 3.4, ceci implique que la composante de  $t - t'$  sur  $\mathcal{T}^m(\mathfrak{g})$ , c'est-à-dire  $t$ , appartient à  $\text{Ker}(\pi_{\mathcal{S}})$ . On a donc  $\pi_{\mathcal{S}}(t) = 0$ , ce qui prouve l'injectivité voulue.  $\square$

#### 4. Quelques conséquences du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt

##### 4.1. Base de l'algèbre enveloppante.

COROLLAIRE 4.1. Soit  $(x_1, \dots, x_d)$  une base de  $\mathfrak{g}$ . Alors les produits

$$\iota(x_{\lambda_1})\iota(x_{\lambda_2}) \cdots \iota(x_{\lambda_m})$$

dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , où  $m \geq 0$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  est un  $m$ -uplet croissant d'entiers dans  $\{1, \dots, d\}$  (ce produit valant 1 par convention si  $\lambda = \emptyset$ ) forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

DÉMONSTRATION. On va prouver par récurrence sur  $n$  que les tels produits pour  $m \leq n$  forment une base de  $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ . (Ceci impliquera le corollaire.) Pour fixer les notations, on notera  $\mathcal{P}_m$  l'ensemble des  $m$ -uplet croissant d'entiers dans  $\{1, \dots, d\}$ .

Le cas  $n = 0$  est évident. Supposons maintenant que  $n \geq 1$ , et que le résultat est connu au rang  $n - 1$ . Montrons tout d'abord que notre famille est libre. Soient  $(a_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_m, m \leq n)$  des scalaires, et supposons que

$$\sum_{m=0}^n \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m} a_\lambda \cdot \iota(x_{\lambda_1})\iota(x_{\lambda_2}) \cdots \iota(x_{\lambda_m}) = 0.$$

Alors l'image de cet élément dans  $\mathcal{V}^n(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})/\mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ , qui est aussi l'image dans  $\mathcal{V}_n(\mathfrak{g})$  de

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} a_\lambda \cdot \iota(x_{\lambda_1})\iota(x_{\lambda_2}) \cdots \iota(x_{\lambda_n}),$$

est nulle. L'image inverse de cet élément par l'isomorphisme  $\varphi$  est

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} a_\lambda \cdot z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} \cdots z_{\lambda_n} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

(où, comme dans la partie 3,  $z_i$  est l'image de  $x_i$  dans  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ ). Ce dernier vecteur est donc nul. D'après la proposition 1.7, ceci implique que  $a_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathcal{P}_n$ . On obtient alors que

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m} a_\lambda \cdot \iota(x_{\lambda_1})\iota(x_{\lambda_2}) \cdots \iota(x_{\lambda_m}) = 0,$$

et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que  $a_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda$ , et donc que notre famille est bien libre.

Montrons maintenant que notre famille engendre  $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ . Soit  $u \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ . Considérons l'image  $v$  de  $u$  dans  $\mathcal{V}^n(\mathfrak{g})$ . Il existe des scalaires  $(a_\lambda, \lambda \in \mathcal{P}_n)$  tels que

$$v = \varphi \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} a_\lambda \cdot z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_n} \right).$$

L'élément de droite est également l'image dans  $\mathcal{V}^n(\mathfrak{g})$  de l'élément

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} a_\lambda \cdot \iota(x_{\lambda_1}) \cdots \iota(x_{\lambda_n}) \in \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}),$$

de sorte que l'élément

$$u - \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} a_\lambda \cdot \iota(x_{\lambda_1}) \cdots \iota(x_{\lambda_n})$$

appartient à  $\mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ . Par hypothèse de récurrence, cet élément est une combinaison linéaire de vecteurs  $\iota(x_{\lambda_1}) \cdots \iota(x_{\lambda_m})$  où  $m \leq n-1$  et  $\lambda \in \mathcal{P}_m$ , ce qui prouve que notre famille est génératrice.  $\square$

**REMARQUE 4.2.** Une fois que le corollaire 4.1 est démontré, on peut interpréter la construction du lemme 3.1 de la façon suivante. En comparant la proposition 1.7 avec le corollaire 4.1, on obtient qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels (mais pas d'algèbres!)  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  qui envoie  $z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m}$  sur  $\iota(x_{\lambda_1}) \cdots \iota(x_{\lambda_m})$ , pour tout  $m$ -uplet croissant  $\lambda$ . Pour tout  $m \geq 0$ , cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme  $\mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ . D'autre part, il existe une application naturelle

$$f'_m : \begin{cases} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) & \rightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ x \otimes y & \mapsto & \iota(x) \cdot y \end{cases}.$$

L'application  $f'_m$  du lemme 3.1 est obtenue en transportant cette application via les isomorphismes  $\mathcal{S}_m(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  considérés ci-dessus.

#### 4.2. Relation entre $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

**COROLLAIRE 4.3.** *L'application  $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est injective.*

**DÉMONSTRATION.** Avec les notations du corollaire 4.1, l'application linéaire  $\iota$  envoie la base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}$  sur la famille  $(\iota(x_1), \dots, \iota(x_d))$ , qui est libre d'après le corollaire 4.1. Donc  $\iota$  est injective.  $\square$

Une fois que le corollaire 4.3 est démontré, on peut identifier  $\mathfrak{g}$  avec son image dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  (une sous-algèbre de Lie), et on n'utilisera donc plus la notation  $\iota$ .

**4.3. Algèbre enveloppante et sous-algèbres de Lie.** Soit maintenant  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie. Considérons le morphisme d'algèbres de Lie obtenu comme la composée

$$\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

D'après la propriété universelle de l'algèbre enveloppante (théorème 2.3), ce morphisme définit un morphisme d'algèbres  $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

**COROLLAIRE 4.4.** *Le morphisme d'algèbres  $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  construit ci-dessus est injectif.*

DÉMONSTRATION. Choisissons une base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $(x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $\mathfrak{h}$ . Alors le morphisme  $\psi$  vérifie

$$\psi(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

pour tous  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, r\}$ . Donc  $\psi$  envoie la base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$  construite au corollaire 4.1 à partir de la base  $(x_1, \dots, x_r)$  de  $\mathfrak{h}$  sur une sous-famille de la base construite par le même procédé à partir de la base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}$ . Donc  $\psi$  envoie une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$  sur une famille libre de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , ce qui prouve que cette application est injective.  $\square$

## 5. Représentations de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -modules

Par définition, une représentation de  $\mathfrak{g}$  est la donnée d'un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Comme  $\mathfrak{gl}(V)$  est une algèbre, d'après la propriété universelle de l'algèbre enveloppante (théorème 2.3), ce morphisme se prolonge en un morphisme d'algèbres  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$ , ce qui définit sur  $V$  une structure de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module (à gauche). Réciproquement, si  $M$  est un  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module (à gauche), cette structure définit un morphisme d'algèbres  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(M)$ . En restreignant ce morphisme à  $\mathfrak{g}$  on obtient un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(M)$ , et donc une structure de représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $M$ . Il revient donc au même de parler de représentations de  $\mathfrak{g}$  ou de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -modules.

## 6. Application au théorème d'Ado

**6.1. Énoncé et résultats admis.** Dans cette partie on suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Le théorème d'Ado est le résultat suivant.

**THÉORÈME 6.1** (Théorème d'Ado). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ . Alors il existe une représentation  $V$  de  $\mathfrak{g}$  telle que le morphisme d'algèbres de Lie associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  est injectif.*

**REMARQUE 6.2.** Ce théorème peut se reformuler en disant que toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie sur  $\mathbb{k}$  est isomorphe à une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  (qui, bien sûr, dépend de  $\mathfrak{g}$ ).

La preuve de ce théorème utilisera les résultats suivants, qui ne seront pas démontrés dans ces notes<sup>2</sup>. (Ils nécessitent tous deux l'hypothèse que la caractéristique de  $\mathbb{k}$  est 0.)

**THÉORÈME 6.3** (Théorème de Levi). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ . Alors il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \text{Rad}(\mathfrak{g})$  (comme espaces vectoriels).*

**PROPOSITION 6.4.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , et soit  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une dérivation (par rapport au crochet de Lie). Alors il existe un idéal nilpotent  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  tel que  $\delta(\text{Rad}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{i}$ .*

<sup>2</sup>. Voir l'annexe B pour une preuve du théorème 6.3. Pour une preuve de la proposition 6.4, on pourra consulter la proposition C.24 dans *Representation Theory* de Fulton–Harris.



**6.2. Dérivations de  $\mathfrak{g}$  et de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .** Les résultats démontrés dans ce paragraphe ne nécessitent aucune hypothèse sur la caractéristique de  $\mathbb{k}$ .

LEMME 6.5. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$  et  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une dérivation (par rapport au crochet de Lie). Alors il existe une unique dérivation  $d : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  (par rapport au produit) telle que  $d(1) = 0$  et  $d(x) = \delta(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .*

DÉMONSTRATION. L'unicité découle du fait que tout élément de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est une combinaison linéaire de 1 et de produits d'éléments de  $\mathfrak{g}$ , et que la condition de l'énoncé et la règle  $d(ab) = d(a)b + ad(b)$  imposent la valeur de  $d$  sur tous ces éléments.

Pour démontrer l'existence on choisit une base  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}$ . Alors le vecteur 1 et les vecteurs de la forme  $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$  avec  $m \geq 1$  et  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, d\}$  forment une base de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ . On peut donc définir une application linéaire

$$d' : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$$

en posant  $d'(1) = 0$  et

$$d'(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = \sum_{k=1}^m x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} \delta(x_{i_k}) x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_m}.$$

Il est facile de voir que  $d'$  est une dérivation (pour le produit de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ ).

Vérifions maintenant que  $d'(I_{\mathcal{U}}) \subset I_{\mathcal{U}}$ . Soient  $u, v \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$  et soient  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Alors on a

$$\begin{aligned} & d'(u \cdot (xy - yx - [x, y]) \cdot v) = \\ & d'(u) \cdot (xy - yx - [x, y]) \cdot v + u \cdot d'(xy - yx - [x, y]) \cdot v + u \cdot (xy - yx - [x, y]) \cdot d'(v). \end{aligned}$$

Donc pour vérifier l'inclusion voulue il suffit de vérifier que  $d'(xy - yx - [x, y]) \in I_{\mathcal{U}}$ . Mais puisque  $d'$  et  $\delta$  sont des dérivations on a

$$\begin{aligned} d'(xy - yx - [x, y]) &= \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(y)x - y\delta(x) - [\delta(x), y] - [x, \delta(y)] \\ &= (\delta(x)y - y\delta(x) - [\delta(x), y]) + (x\delta(y) - \delta(y)x - [x, \delta(y)]), \end{aligned}$$

donc ce vecteur appartient à  $I_{\mathcal{U}}$ , et la preuve est complète.

Maintenant que ceci est établi, d'après la proposition 2.5 du chapitre 1, on peut définir une application linéaire  $d : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  en posant  $d(x + I_{\mathcal{U}}) = d'(x) + I_{\mathcal{U}}$  pour tout  $x + I_{\mathcal{U}} \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})/I_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . En utilisant le fait que  $d'$  est une dérivation de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ , il n'est pas difficile de vérifier que  $d$  est une dérivation de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

LEMME 6.6. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie et soit  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  une dérivation (par rapport au crochet de Lie) qui est nilpotente. Soit  $d$  la dérivation associée à  $\delta$  comme dans le lemme 6.5. Soit  $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  un sous-espace vectoriel tel que  $d(I) \subset I$  et  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est de dimension finie. Alors l'application  $\bar{d} : \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  induite par  $d$  est nilpotente.*

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier (par récurrence sur  $n$ ) que pour tout  $n \geq 1$  et tous  $a, b \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  on a

$$d^n(a \cdot b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^k(a) \cdot d^{n-k}(b).$$

En utilisant cette formule et la construction de  $d$ , en utilisant le fait que  $\delta$  est nilpotente, on peut montrer (encore par récurrence sur  $m$ ) que pour tout  $m \geq 0$  on a  $d(\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ , et que de plus la restriction de  $d$  à  $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$  est nilpotente.

Maintenant, pour tout  $m \geq 0$  notons  $V_m$  l'image de  $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ . Alors on a

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I = \bigcup_{m \geq 0} V_m.$$

Comme  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est de dimension finie, cela implique qu'il existe  $m \geq 0$  tel que  $V_m = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ , c'est-à-dire tel que la composée  $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est surjective. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{d|_{\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})}} & \mathcal{U}_m(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I & \xrightarrow{\bar{d}} & \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I. \end{array}$$

Comme l'application  $d|_{\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})}$  est nilpotente, l'application  $\bar{d}$  l'est également.  $\square$

### 6.3. Plus grand idéal nilpotent.

LEMME 6.7. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie, et soient  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  des idéaux nilpotents de  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $n$  et  $m$  des entiers tels que  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{i}) = \mathcal{C}^m(\mathfrak{j}) = \{0\}$ . Comme  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ , pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{i})$  et  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{j})$  sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, on a

$$(6.1) \quad [\mathfrak{j}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{i})] \subset \mathcal{C}^k(\mathfrak{i}), \quad [\mathfrak{i}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{j})] \subset \mathcal{C}^k(\mathfrak{j}).$$

Soient maintenant  $x_1, \dots, x_{n+m}$  des éléments de  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ , et écrivons  $x_i = y_i + z_i$  avec  $y_i \in \mathfrak{i}$  et  $z_i \in \mathfrak{j}$ . Alors le vecteur

$$[x_1, [x_2, \dots, [x_{n+m-1}, x_{n+m}]]]$$

s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$[t_1, [t_2, \dots, [t_{n+m-1}, t_{n+m}]]]$$

où chaque  $t_i$  est soit  $y_i$ , soit  $z_i$ . Dans chacun de ces termes, il y a soit au moins  $n$  fois  $t_i = y_i$ , soit au moins  $m$  fois  $t_i = z_i$ . En utilisant (6.1), on obtient que dans le premier cas le terme appartient à  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{i})$ , et que dans le second cas il appartient à  $\mathcal{C}^m(\mathfrak{j})$ . Dans tous les cas ce terme doit être nul, et donc  $\mathcal{C}^{n+m}(\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) = \{0\}$ .  $\square$

De même que pour la définition-proposition 1.8, en utilisant le lemme 6.7 il est facile de vérifier que, pour toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie, il existe un unique idéal nilpotent qui contient tous les idéaux nilpotents de  $\mathfrak{g}$ ; on le notera  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ .

LEMME 6.8. *Pour tout idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ , on a*

$$\text{Nil}(\mathfrak{i}) = \text{Nil}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{i}.$$

DÉMONSTRATION. Si  $x \in \mathfrak{g}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$  (voir l'exemple 7.3 du chapitre 2). Donc sa restriction à  $\mathfrak{i}$  est une dérivation de  $\mathfrak{i}$ . D'après la proposition 6.4, ceci implique que  $\text{ad}(x)(\text{Rad}(\mathfrak{i}))$  est inclus dans un idéal nilpotent de  $\mathfrak{i}$ , donc dans  $\text{Nil}(\mathfrak{i})$ . Comme  $\text{Nil}(\mathfrak{i}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{i})$ , on en déduit que

$\text{ad}(x)(\text{Nil}(\mathfrak{i})) \subset \text{Nil}(\mathfrak{i})$ , donc que  $\text{Nil}(\mathfrak{i})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Comme il est nilpotent, ceci montre que  $\text{Nil}(\mathfrak{i}) \subset \text{Nil}(\mathfrak{g})$ , donc que

$$\text{Nil}(\mathfrak{i}) \subset \text{Nil}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{i}.$$

L'inclusion réciproque est facile : puisque  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{i}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{i}$ , il est inclus dans  $\text{Nil}(\mathfrak{i})$ .  $\square$

REMARQUE 6.9. Les mêmes arguments montrent que  $\text{Rad}(\mathfrak{i}) = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{i}$  pour tout idéal  $\mathfrak{i}$ .

**6.4. Le lemme-clé.** L'étape-clé de la démonstration du théorème d'Ado est le lemme suivant.

LEMME 6.10. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie résoluble. Soit  $I$  un idéal bilatère de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  tel que  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est de dimension finie et tel que l'image de tout élément de  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est nilpotent. Alors il existe un idéal bilatère  $I' \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  contenu dans  $I$ , tel que*

- (1)  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  est de dimension finie ;
- (2) l'image de tout élément de  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  est nilpotent ;
- (3) pour toute dérivation  $\delta$  de  $\mathfrak{g}$ , la dérivation  $d$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  associée (comme au lemme 6.5) vérifie  $d(I') \subset I'$ .

DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord que, sous les conditions du lemme, il existe  $N \geq 1$  tel que pour tous éléments  $x_1, \dots, x_N$  dans  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ , on a

$$(x_1 + I) \cdot (x_2 + I) \cdots (x_N + I) = 0.$$

En effet  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  est une représentation de l'algèbre de Lie  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  pour l'action définie par

$$x \cdot (u + I) = xu + I = (x + I) \cdot (u + I).$$

pour  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  et  $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Par hypothèse, l'action de tout élément de  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est nilpotente. Donc, d'après le théorème d'Engel (théorème 3.1 du chapitre 4), il existe une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$  dans laquelle la matrice de l'action de tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  est strictement triangulaire supérieure. Alors si  $N = \dim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)$ , pour tous  $x_1, \dots, x_N$  dans  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ , on a

$$(x_1 + I) \cdot (x_2 + I) \cdots (x_N + I) = x_1 \cdot (x_2 \cdot (\cdots x_N \cdot (1 + I))) = 0,$$

car tout produit de  $N$  matrices strictement triangulaires supérieures de taille  $N$  est nul.

Soit maintenant  $J$  l'idéal bilatère de  $\mathcal{U}/I$  engendré par les éléments  $x + I$  avec  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$ . Si  $N$  est comme ci-dessus, alors  $J^N = \{0\}$ . En effet, un élément de  $J^N$  est une combinaison linéaire de produits d'éléments de la forme  $x + I$  avec  $x \in \mathfrak{g}$ , et tel que  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  pour au moins  $N$  termes du produit. En utilisant la relation

$$(x + I)(y + I) = xy + I = (yx + [x, y]) + I = (y + I)(x + I) + ([x, y] + I)$$

et le fait que  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est un idéal, on peut changer l'ordre dans ces produits de sorte que les  $N$  termes de la forme  $x + I$  avec  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  apparaissent successivement. Alors ce produit est nul par choix de  $N$ , et l'assertion est prouvée.

Notons  $C$  l'image inverse de  $J$  via la surjection naturelle  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ . Alors  $C$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , et le fait que  $J^N = \{0\}$  implique que  $C^N \subset I$ . On pose  $I' := C^N$ . Il reste à démontrer que  $C$  vérifie les 3 propriétés voulues.

Pour démontrer que l'espace vectoriel  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  est de dimension finie, on choisit une base  $x_1, \dots, x_d$  de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/C$  est de dimension finie, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  il existe un polynôme unitaire  $P_i$  tel que  $P_i(x_i) \in C$ . Alors  $(P_i)^N(x_i) \in I'$ , donc en particulier  $x_i + I'$  est annulé par un polynôme unitaire. D'après le corollaire 4.1, le vecteur 1 et les vecteurs de la forme

$$x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$$

avec  $i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , donc leurs images dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  engendrent  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  comme espace vectoriel. Comme chaque  $x_i + I'$  est annulé par un polynôme unitaire, il suffit d'un nombre fini d'éléments  $x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d} + I'$  pour engendrer  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$ , et la propriété est démontrée.

Pour la seconde propriété, on remarque que si  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  alors par hypothèse on a  $x + I \in J$ , donc  $x \in C$ . Alors  $x^N \in C^N = I'$ , donc  $(x + I')^N = 0$ .

Finalement, si  $\delta$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\delta(\mathfrak{g}) = \delta(\text{Rad}(\mathfrak{g})) \subset \text{Nil}(\mathfrak{g})$  d'après la proposition 6.4. Donc  $d$  vérifie  $d(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subset C$ . Puisque  $d$  est une dérivation, ceci implique que  $d(C^N) \subset C^N$ , donc que  $d(I') \subset I'$ .  $\square$

### 6.5. Prolongement de représentations.

PROPOSITION 6.11. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie, soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal résoluble, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie tels que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{h}$ . Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{i}$ , et  $\rho : \mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  le morphisme associé. Supposons que, pour tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{i})$ , l'endomorphisme  $\rho(x)$  de  $V$  est nilpotent.*

*Alors il existe une représentation de dimension finie  $V'$  de  $\mathfrak{g}$ , de morphisme associé  $\rho'$  tel que  $\text{Ker}(\rho') \cap \mathfrak{i} \subset \text{Ker}(\rho)$ . De plus, si  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  ou si  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) = \text{Nil}(\mathfrak{i})$ , on peut choisir  $\rho'$  de sorte que  $\rho'(x)$  est nilpotent pour tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$ .*

DÉMONSTRATION. Let morphisme  $\rho$  définit un morphisme d'algèbres  $\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{i}) \rightarrow \text{End}(V)$  (voir la partie 5). Soit  $I = \text{Ker}(\tilde{\rho})$ . C'est un idéal bilatère de  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})$ , tel que  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})/I$  est de dimension finie. De plus, l'hypothèse sur  $\rho$  assure que pour tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{i})$ ,  $x + I$  est nilpotent dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})/I$ . D'après le lemme 6.10, il existe un idéal bilatère  $I' \subset I$  vérifiant également ces propriétés et tel que pour toute dérivation  $\delta$  de  $\mathfrak{i}$  on a  $d(I') \subset I'$  (où  $d$  est la dérivation de  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})$  associée à  $\delta$ ).

Pour tout  $x \in \mathfrak{h}$ , en utilisant l'exemple 7.3 du chapitre 2, on voit que la restriction  $\delta_x$  de  $\text{ad}(x)$  à  $\mathfrak{i}$  est une dérivation de  $\mathfrak{i}$ ; on notera  $d_x$  la dérivation de  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})$  associée. Par définition de  $I'$  on a  $d_x(I') \subset I'$ . D'autre part, puisque  $[\delta_x, \delta_y] = \delta_{[x,y]}$ , en utilisant le lemme 6.5 on voit que

$$(6.2) \quad d_x d_y - d_y d_x = d_{[x,y]}$$

pour tous  $x, y \in \mathfrak{h}$ .

On définit alors une application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{U}(\mathfrak{i})/I')$$

en posant, pour  $x = y + z$  (avec  $y \in \mathfrak{i}$ ,  $z \in \mathfrak{h}$ ) et  $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{i})$ ,

$$\varphi(x)(u + I') = yu + d_z(u) + I'.$$

Vérifions que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Soient  $y, y' \in \mathfrak{i}$  et  $z, z' \in \mathfrak{h}$ . Alors pour  $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{i})$  on a

$$\begin{aligned} \varphi(y + z) \circ \varphi(y' + z')(u + I') &= \varphi(y + z)(y'u + d_{z'}(u) + I') \\ &= yy'u + yd_{z'}(u) + d_z(y'u) + y'd_z(u) + d_z d_{z'}(u) + I'. \end{aligned}$$

On a une formule similaire pour  $\varphi(y' + z') \circ \varphi(y + z)$ , et en faisant la différence on obtient que

$$[\varphi(y + z), \varphi(y' + z')](u + I') = [y, y']u - [z', y]u + [z, y']u + (d_z d_{z'} - d_{z'} d_z)(u) + I'.$$

En utilisant (6.2), on en déduit que

$$[\varphi(y + z), \varphi(y' + z')] = \varphi([y + z, y' + z']),$$

et donc que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de Lie. En d'autres termes,  $\varphi$  définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{i})/I'$ . On peut donc poser  $V' = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$ ,  $\rho' = \varphi$ .

Vérifions que  $\text{Ker}(\rho') \cap \mathfrak{i} \subset \text{Ker}(\rho)$ . Si  $y \in \mathfrak{i}$ , alors  $\varphi(y)$  est la multiplication à gauche par  $y + I$ . Donc si  $\varphi(y) = 0$  alors  $y + I = 0$ , c'est-à-dire  $y \in I$ , donc  $\rho(y) = 0$ , c'est-à-dire  $y \in \text{Ker}(\rho)$ .

Supposons maintenant que  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) = \text{Nil}(\mathfrak{i})$ . Alors pour tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g}) = \text{Nil}(\mathfrak{i})$ ,  $\varphi(x)$  est la multiplication à gauche par  $x + I'$ . Par le choix de  $I'$  (voir le lemme 6.10),  $x + I'$  est nilpotent, donc  $\varphi(x)$  est nilpotent.

Finalement, considérons le cas où  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , c'est-à-dire où  $\mathfrak{g}$  est nilpotente. Alors  $\mathfrak{i}$  est nilpotent, donc comme ci-dessus  $\varphi(x)$  est nilpotent pour tout  $x \in \mathfrak{i}$ . Soit  $A$  la sous-algèbre de  $\text{End}(\mathcal{U}(\mathfrak{i})/I')$  engendrée par les éléments  $\varphi(x)$  pour  $x \in \mathfrak{g}$ . Soit également  $B$  l'idéal de  $A$  engendré par  $\varphi(\mathfrak{i})$ . Alors, par les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 6.10, il existe  $N \geq 1$  tel que  $B^N = 0$ .

Comme  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, pour tout  $x \in \mathfrak{h}$  l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  est nilpotent, donc  $\delta_x$  est une dérivation nilpotente. D'après le lemme 6.6, ceci implique que l'endomorphisme de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'$  induit par  $d_x$ , c'est-à-dire  $\varphi(x)$ , est nilpotent.

Soit maintenant  $x \in \mathfrak{g}$ , et écrivons  $x = y + z$  avec  $y \in \mathfrak{i}$  et  $z \in \mathfrak{h}$ . Soit  $M \geq 1$  tel que  $\varphi(y)^M = 0$ . Alors  $\varphi(x)^{NM} = (\varphi(y) + \varphi(z))^{NM} = 0$ , puisque dans chaque terme du développement de ce produit, soit  $\varphi(y)$  apparaît au moins  $N$  fois, soit  $\varphi(z)$  apparaît au moins  $M$  fois consécutivement. Donc  $\varphi(x)$  est nilpotent, et la démonstration est terminée.  $\square$

### 6.6. Preuve du théorème d'Ado.

LEMME 6.12. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie résoluble, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. Alors il existe des sous-algèbres de Lie*

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

*telles que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathfrak{g}_{j-1}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}_j$  et  $\dim(\mathfrak{g}_j) = \dim(\mathfrak{g}_{j-1}) + 1$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons tout d'abord le cas où  $\mathfrak{i} = \{0\}$ . Dans ce cas, en utilisant une récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ , il suffit de montrer qu'il existe un idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  de codimension 1. Ceci a été remarqué dans la preuve de la proposition 4.4 du chapitre 4.

Dans le cas général, on considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ , qui est résoluble d'après la proposition 1.5(2) du chapitre 4. D'après le cas particulier déjà traité, il existe des sous-algèbres de Lie

$$\{0\} = \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_{n-1} \subset \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$$

telles que chaque  $\mathfrak{h}_{j-1}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{h}_j$ . On peut alors définir  $\mathfrak{g}_j$  comme l'image inverse de  $\mathfrak{h}_j$  par la surjection  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  pour obtenir les sous-algèbres voulues.  $\square$

PREUVE DU THÉORÈME 6.1. D'après le lemme 6.12 appliqué à  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})$  et à  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \text{Nil}(\mathfrak{g})$ , on peut choisir des sous-algèbres de Lie

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k = \text{Nil}(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

telles que pour  $i \leq n-1$ ,  $\mathfrak{g}_{i-1}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}_i$ . Si  $i \leq k$ , comme  $\mathfrak{g}_i$  est une algèbre de Lie nilpotente d'après la proposition 2.5(2) du chapitre 4, on a  $\text{Nil}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$ . Et pour les  $i > k$ , en faisant une récurrence décroissante (c'est-à-dire en commençant par  $i = n$ ) et en utilisant le lemme 6.8 on peut vérifier que  $\text{Nil}(\mathfrak{g}_i) = \text{Nil}(\mathfrak{g})$  pour tout  $i$ .

L'algèbre de Lie  $\mathbb{k}$  admet une représentation  $\sigma : \mathbb{k} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{k}^2)$  telle que  $\text{Ker}(\sigma) = \{0\}$  et telle que chaque  $\sigma(\lambda)$  est nilpotent : on peut par exemple prendre

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est isomorphe à un produit fini de copies de  $\mathbb{k}$ , en utilisant cette représentation on peut construire une représentation  $W$  de dimension finie de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , de morphisme associé  $\eta : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ , telle que  $\text{Ker}(\eta) = \{0\}$  et telle que  $\eta(z)$  est nilpotent pour tout  $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , en choisissant un complémentaire  $\mathfrak{h}_i$  de  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i$  (qui est de dimension 1, donc automatiquement une sous-algèbre de Lie), puis en appliquant la proposition 6.11 successivement à partir de  $\eta$  (ce qui est possible car dans chaque cas on a soit  $\text{Nil}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$  soit  $\text{Nil}(\mathfrak{g}_i) = \text{Nil}(\mathfrak{g}_{i-1})$ ), on construit pour tout  $i \leq n-1$  une représentation  $V_i$  de dimension finie de  $\mathfrak{g}_i$ , de morphisme associé  $\eta_i$  tel que  $\text{Ker}(\eta_i) \cap \mathfrak{g}_{i-1} \subset \text{Ker}(\eta_{i-1})$  et que  $\eta_i(x)$  est nilpotent pour tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g}_i)$ . Pour  $i = n$ , on peut encore appliquer la proposition 6.11 grâce au théorème 6.3. On obtient donc finalement une représentation  $V_n$  de  $\mathfrak{g}$ , de morphisme associé  $\eta_n : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_n)$  tel que  $\text{Ker}(\eta_n) \cap \mathfrak{g}_{n-1} \subset \text{Ker}(\eta_{n-1})$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \text{Ker}(\eta_i) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \text{Ker}(\eta_i) \cap \mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \text{Ker}(\eta_{i-1}).$$

Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \text{Ker}(\eta_0) = \{0\}$ , ceci implique que  $\text{Ker}(\eta_n) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ .

Finalement on pose  $V = V_n \oplus \mathfrak{g}$ , et  $\rho = \eta_n \oplus \text{ad}$ . Puisque  $\text{Ker}(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  (voir l'exemple 8.4 du chapitre 2), on a

$$\text{Ker}(\rho) = \text{Ker}(\eta_n) \cap \text{Ker}(\text{ad}) = \text{Ker}(\eta_n) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

donc  $\rho$  possède bien la propriété voulue.  $\square$

Deuxième partie

Représentations des algèbres de  
Lie semi-simples





## Algèbres de Lie semi-simples

### 1. Décomposition de Jordan des endomorphismes

Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos, et soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie.

#### 1.1. Décomposition de Jordan.

PROPOSITION 1.1. *Soit  $x$  un endomorphisme de  $V$ .*

- (1) *Il existe des endomorphismes  $x_s$  et  $x_n$  de  $V$  tels que  $x_s$  est diagonalisable,  $x_n$  est nilpotent,  $x_s$  et  $x_n$  commutent, et  $x = x_s + x_n$ . De plus, ces endomorphismes sont uniques.*
- (2) *Il existe des polynômes  $P, Q \in \mathbb{k}[X]$  sans terme constant tels que  $x_s = P(x)$  et  $x_n = Q(x)$ . En particulier,  $x_s$  et  $x_n$  commutent avec tous les endomorphismes de  $V$  commutant à  $x$ .*
- (3) *Si  $W_1 \subset W_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $x(W_2) \subset W_1$ , alors  $x_s(W_2) \subset W_1$  et  $x_n(W_2) \subset W_1$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\chi_x$  le polynôme caractéristique de  $x$ . Comme  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, on peut écrire

$$\chi_x(X) = \prod_{i=1}^m (X - a_i)^{k_i}$$

avec  $a_1, \dots, a_m$  distincts et les  $k_i$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on pose  $V_i = \text{Ker}((x - a_i \cdot \text{id})^{k_i})$ . Alors, d'après le théorème de Cayley–Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \text{Ker}(\chi_x(x)) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}((x - a_i \cdot \text{id})^{k_i}) = \bigoplus_{i=1}^m V_i,$$

et chaque  $V_i$  est stable par  $x$ .

D'autre part, d'après le théorème des restes chinois,<sup>1</sup> il existe un polynôme  $P \in \mathbb{k}[X]$  tel que

$$P \equiv a_i \pmod{(X - a_i)^{k_i}} \text{ pour tout } i \text{ et } P \equiv 0 \pmod{X}.$$

On pose alors  $Q(X) = X - P(X)$ , et  $x_s = P(x)$ ,  $x_n = Q(x)$ . Les polynômes  $P$  et  $Q$  sont sans terme constant,  $x_s$  et  $x_n$  commutent entre eux et à tout endomorphisme qui commute à  $x$  (puisque ce sont des polynômes en  $x$ ), et  $x = x_s + x_n$ . La propriété (3) est également claire pour ces éléments  $x_s$  et  $x_n$ .

1. Rappelons que le théorème des restes chinois affirme que si  $\mathbb{k}$  est un corps quelconque, si  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{k}[X]$  sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, et si  $P = P_1 \cdots P_r$ , alors l'application  $\mathbb{k}[X]/(P) \rightarrow \prod_{i=1}^m \mathbb{k}[X]/(P_i)$  définie par  $Q + (P) \mapsto (Q + (P_1), \dots, Q + (P_r))$  est un isomorphisme d'anneaux.

Montrons maintenant que  $x_s$  est diagonalisable. Comme chaque  $V_i$  est stable par  $x$ , il est également stable par  $x_s$ . De plus, comme  $P \equiv a_i \pmod{(X - a_i)^{k_i}}$ , on a  $x_s|_{V_i} = a_i \cdot \text{id}_{V_i}$ . Comme  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ , ceci montre que  $x_s$  est diagonalisable.

Montrons maintenant que  $x_n$  est nilpotent. Pour cela, soit  $k = \max\{k_i, i = 1, \dots, m\}$ . Alors si  $v \in V_i$  on a

$$(x_n)^k(v) = (x - x_s)^k(v) = (x - a_i)^k(v) = 0$$

puisque  $x_s|_{V_i} = a_i \cdot \text{id}_{V_i}$ ,  $k \geq k_i$  et  $v \in \text{Ker}((x - a_i \cdot \text{id})^{k_i})$ . On a montré que  $(x_n)^k$  est nul sur chaque sous-espace  $V_i$ ; il est donc nul sur  $V$ .

Finalement, il reste à démontrer l'unicité dans (1). Mais si  $x'_s$  et  $x'_n$  sont des endomorphismes qui vérifient les conditions de (1), on a  $x_s + x_n = x = x'_s + x'_n$ , de sorte que

$$x_s - x'_s = x'_n - x_n.$$

De plus, comme  $x'_s$  commute à  $x = x'_s + x'_n$ , il commute également à  $x_s$  par (2). Comme  $x_s$  et  $x'_s$  sont des endomorphismes diagonalisables qui commutent, leur différence  $x_s - x'_s$  est diagonalisable. Par les mêmes arguments,  $x'_n - x_n$  est nilpotent. Comme le seul endomorphisme de  $V$  qui est à la fois diagonalisable et nilpotent est 0, on obtient finalement que  $x_s = x'_s$  et  $x_n = x'_n$ .  $\square$

REMARQUE 1.2. (1) Les sous-espaces  $V_i$  sont appelés les *espaces propres généralisés* de  $x$ .

(2) La décomposition  $x = x_s + x_n$  est appelée la *décomposition de Jordan* de  $x$ .  $x_s$  est appelé la *partie semi-simple* de  $x$ , et  $x_n$  est appelé la *partie nilpotente* de  $x$ .

## 1.2. Décomposition de Jordan de $\text{ad}(x)$ .

LEMME 1.3. Soit  $x$  un endomorphisme de  $V$ .

- (1) Si  $x$  est diagonalisable, alors l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  de  $\mathfrak{gl}(V)$  est diagonalisable.
- (2) Dans le cas général, si  $x = x_s + x_n$  est la décomposition de Jordan de  $x$ , alors la décomposition de Jordan de  $\text{ad}(x)$  est  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ .

DÉMONSTRATION. (1) Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $V$  formée de vecteurs propres de  $x$ , et soient  $a_1, \dots, a_d$  les valeurs propres correspondantes. Pour  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , on note alors  $f_{i,j}$  l'unique endomorphisme de  $V$  qui vérifie

$$f_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_i & \text{si } k = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces endomorphismes forment une base de  $\mathfrak{gl}(V)$ . D'autre part on a

$$(x \circ f_{i,j} - f_{i,j} \circ x)(e_k) = \begin{cases} (a_i - a_j)e_i & \text{si } k = j; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que  $\text{ad}(x)(f_{i,j}) = (a_i - a_j) \cdot f_{i,j}$ . Donc les vecteurs  $f_{i,j} \in \mathfrak{gl}(V)$  forment une base de vecteurs propres pour  $\text{ad}(x)$ , ce qui prouve que  $\text{ad}(x)$  est diagonalisable.

(2) D'après (1) et [Chap. 4, Lemme 3.2],  $\text{ad}(x_s)$  est diagonalisable et  $\text{ad}(x_n)$  est nilpotent. D'autre part, puisque que  $\text{ad} : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$  est un morphisme d'algèbres de Lie, on a

$$[\text{ad}(x_s), \text{ad}(x_n)] = \text{ad}([x_s, x_n]) = 0$$

puisque  $x_s$  et  $x_n$  commutent. Donc  $\text{ad}(x_s)$  et  $\text{ad}(x_n)$  commutent. Finalement on a  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s + x_n) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$ , donc  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$  est bien la décomposition de Jordan de  $\text{ad}(x)$ .  $\square$

**1.3. Décomposition de Jordan des dérivations.** Supposons que  $V$  est muni d'une application bilinéaire  $(-) \star (-) : V \times V \rightarrow V$ , et considérons le sous-espace vectoriel  $\text{Der}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$  des dérivations par rapport à  $\star$ .

LEMME 1.4. *Si  $x \in \text{Der}(V)$  et si  $x = x_s + x_n$  est la décomposition de Jordan de  $x$ , alors  $x_s$  et  $x_n$  appartiennent à  $\text{Der}(V)$ .*

DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord le fait suivant : si  $a, b \in \mathbb{k}$  et si  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tous  $u, v \in V$  on a

$$(1.1) \quad (x - (a + b) \cdot \text{id})^n(u \star v) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - a \cdot \text{id})^k(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n-k}(v).$$

Cette formule est évidente si  $n = 0$ . Vérifions maintenant que si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est également au rang  $n + 1$ . Pour cela, on observe que

$$\begin{aligned} & (x - (a + b) \cdot \text{id})^{n+1}(u \star v) \\ &= (x - (a + b) \cdot \text{id}) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - a \cdot \text{id})^k(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n-k}(v) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x((x - a \cdot \text{id})^k(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n-k}(v)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - a \cdot \text{id})^k(u) \star x((x - b \cdot \text{id})^{n-k}(v)) \\ &\quad - (a + b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - a \cdot \text{id})^k(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n-k}(v). \end{aligned}$$

En réindexant la première somme et en utilisant la bilinéarité de  $\star$ , ceci implique que

$$\begin{aligned} & (x - (a + b) \cdot \text{id})^{n+1}(u \star v) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (x - a \cdot \text{id})^j(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n+1-j}(v) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x - a \cdot \text{id})^j(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n+1-j}(v) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) \cdot (x - a \cdot \text{id})^j(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n+1-j}(v) \\ &\quad + (x - a \cdot \text{id})^{n+1}(u) \star v + u \star (x - b \cdot \text{id})^{n+1}(v) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \cdot (x - a \cdot \text{id})^j(u) \star (x - b \cdot \text{id})^{n+1-j}(v), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Pour tout  $a \in \mathbb{k}$ , on note maintenant

$$V_a = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } (x - a \cdot \text{id})^m(v) = 0\}.$$

Alors la formule (1.1) montre que si  $u \in V_a$  et  $v \in V_b$  alors  $u \star v \in V_{a+b}$ . D'autre part, la preuve de la proposition 1.1 montre que, pour tout  $a \in \mathbb{k}$ ,  $x_s$  stabilise  $V_a$  et coïncide avec  $a \cdot \text{id}$  sur  $V_a$ . Ceci implique, pour  $u \in V_a$  et  $v \in V_b$ , que

$$x_s(u \star v) = (a + b) \cdot (u \star v) = (a \cdot u) \star v + u \star (b \cdot v) = x_s(u) \star v + u \star x_s(v).$$

Comme  $V$  est la somme des espaces  $V_a$  (voir la preuve de la proposition 1.1), on en déduit que

$$x_s(u \star v) = x_s(u) \star v + u \star x_s(v)$$

pour tous  $u, v \in V$ , et donc que  $x_s$  est une dérivation. Puis, comme  $x_n = x - x_s$ , on obtient également que  $x_n$  est une dérivation.  $\square$

## 2. Le critère de Cartan

À partir de maintenant on suppose que  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 0 (et toujours algébriquement clos). En particulier, il existe une injection canonique  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{k}$ . On note toujours  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie.

### 2.1. Lemmes préliminaires.

LEMME 2.1. *Soient  $E \subset F \subset \mathfrak{gl}(V)$  des sous-espaces vectoriels. On note*

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, F] \subset E\}.$$

*Supposons que  $x \in M$  est tel que  $\text{Tr}(xy) = 0$  pour tout  $y \in M$ . Alors  $x$  est nilpotent.*

DÉMONSTRATION. Soit  $x = x_s + x_n$  la décomposition de Jordan de  $x$ . Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $V$  composée de vecteurs propres de  $x_s$ , et soient  $a_1, \dots, a_d$  les valeurs propres correspondantes. Soient également  $f_{i,j}$  (pour  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ ) l'endomorphisme de  $V$  défini comme dans la preuve du lemme 1.3(1) (pour ce choix de base).

Pour montrer le lemme il suffit de montrer que tous les  $a_i$  sont nuls. Pour cela on note  $H$  le  $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbb{k}$  engendré par les  $a_i$ ; il faut alors montrer que  $H = \{0\}$  ou, de façon équivalente (puisque  $H$  est de dimension finie), que le dual  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H, \mathbb{Q})$  est égal à  $\{0\}$ .

Soit donc  $\xi : H \rightarrow \mathbb{Q}$  une application linéaire, et soit  $y \in \mathfrak{gl}(V)$  l'unique application linéaire telle que  $y(e_i) = \xi(a_i) \cdot e_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Tout d'abord, remarquons que

$$(2.1) \quad \text{Tr}(x_n y) = 0.$$

En effet, par construction (voir la preuve de la proposition 1.1), les espaces propres de  $x_s$  sont les espaces propres généralisés de  $x$ . Comme, pour toute valeur propre  $a$  de  $x_s$ ,  $y$  stabilise l'espace propre de  $x_s$  associé à  $a$ , et coïncide avec  $\xi(a) \cdot \text{id}$  ce sous-espace propre, on en déduit que  $xy = yx$  sur chaque sous-espace propre généralisé de  $x$ , et donc sur  $V$ . D'après la proposition 1.1(2), ceci implique que  $x_n y = y x_n$ , donc que  $x_n y$  est un endomorphisme nilpotent, et finalement que  $\text{Tr}(x_n y) = 0$ .

Comme dans la preuve du lemme 1.3(1), pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  on a

$$(2.2) \quad \text{ad}(x_s)(f_{i,j}) = (a_i - a_j) \cdot f_{i,j}, \quad \text{ad}(y)(f_{i,j}) = (\xi(a_i) - \xi(a_j)) \cdot f_{i,j}.$$

Soit maintenant  $R \in \mathbb{k}[X]$  un polynôme tel que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , on a  $R(a_i - a_j) = \xi(a_i) - \xi(a_j)$ . (On peut par exemple construire  $R$  par interpolation de

Lagrange. Notons également que si  $a_i - a_j = a_k - a_l$  alors  $\xi(a_i) - \xi(a_j) = \xi(a_k) - \xi(a_l)$  par linéarité, de sorte que les conditions demandées ne sont pas contradictoires.) Alors (2.2) montre que  $\text{ad}(y) = R(\text{ad}(x_s))$ . D'après le lemme 1.3(2) et la proposition 1.1(2), il existe un polynôme  $P \in \mathbb{k}[X]$  sans terme constant tel que  $\text{ad}(x_s) = P(\text{ad}(x))$ . Alors  $\text{ad}(y) = (PR)(\text{ad}(x))$  et  $PR$  est sans terme constant, d'où  $\text{ad}(y)(F) \subset E$  puisque  $\text{ad}(x)(F) \subset E$ . En d'autres termes  $y \in M$ , de sorte que  $\text{Tr}(xy) = 0$  par hypothèse.

D'autre part, en utilisant (2.1) on voit que  $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(x_s y) = \sum_{i=1}^d \xi(a_i) a_i$ , donc

$$\sum_{i=1}^d \xi(a_i) a_i = 0.$$

On en déduit que

$$0 = \xi(0) = \xi\left(\sum_{i=1}^d \xi(a_i) a_i\right) = \sum_{i=1}^d \xi(a_i)^2.$$

Comme les  $\xi(a_i)$  sont des nombres rationnels, ceci implique que  $\xi(a_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , c'est-à-dire que  $\xi = 0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

LEMME 2.2. *Si  $x, y, z \in \text{End}(V)$ , alors*

$$\text{Tr}([x, y] \circ z) = \text{Tr}(x \circ [y, z]).$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} \text{Tr}([x, y] \circ z) &= \text{Tr}(x \circ y \circ z - y \circ x \circ z) = \text{Tr}(x \circ y \circ z) - \text{Tr}(y \circ x \circ z) \\ &= \text{Tr}(x \circ y \circ z) - \text{Tr}(x \circ z \circ y) = \text{Tr}(x \circ y \circ z - x \circ z \circ y) = \text{Tr}(x \circ [y, z]). \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2. Critère de résolubilité.

THÉORÈME 2.3 (Critère de Cartan). *Soit  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Supposons que  $\text{Tr}(xy) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et tout  $y \in \mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est nilpotente. Et pour cela, d'après [Chap. 4, Théorème 3.5 et Lemme 3.2], il suffit de montrer que tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est nilpotent.

On considère la situation du lemme 2.1 avec  $E = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $F = \mathfrak{g}$ . On a alors  $\mathfrak{g} \subset M$ . Pour appliquer ce lemme il faut vérifier que  $\text{Tr}(xy) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $y \in M$ . Par définition de  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , il existe des éléments  $u_k, v_k$  et des scalaires  $\lambda_k$  tels que  $x = \sum_k \lambda_k \cdot [u_k, v_k]$ . En utilisant le lemme 2.2, on a

$$\text{Tr}(xy) = \sum_k \lambda_k \cdot \text{Tr}([u_k, v_k]y) = \sum_k \lambda_k \cdot \text{Tr}(u_k[v_k, y]) = \sum_k \lambda_k \cdot \text{Tr}([v_k, y]u_k).$$

Pour tout  $k$ , puisque  $y \in M$ , on a  $[v_k, y] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , de sorte que  $\text{Tr}([v_k, y]u_k) = 0$  d'après l'hypothèse. On peut donc appliquer le lemme 2.1, ce qui conclut la preuve.  $\square$

COROLLAIRE 2.4. *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie telle que  $\text{Tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)) = 0$  pour tous  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2.3 appliqué à  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ,  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  est résoluble. Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  est un idéal résoluble, d'après [Chap. 4, Proposition 1.7(1)], on en déduit que  $\mathfrak{g}$  est résoluble.  $\square$

### 3. Forme de Killing

Dans toute cette partie on suppose de nouveau que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos et de caractéristique 0, et on fixe une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie.

#### 3.1. Définition et premières propriétés.

DÉFINITION 3.1. La *forme de Killing* de  $\mathfrak{g}$  est la forme bilinéaire symétrique  $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  définie par

$$\kappa(x, y) := \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)).$$

Si on veut insister sur l'algèbre de Lie considérée, on notera cette forme  $\kappa_{\mathfrak{g}}$ .

La forme de Killing possède une propriété d'“associativité” qui s'exprime de la façon suivante.

LEMME 3.2. *Pour tous  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  on a*

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le lemme 2.2 on voit que

$$\begin{aligned} \kappa([x, y], z) &= \text{Tr}(\text{ad}([x, y]) \circ \text{ad}(z)) = \text{Tr}([\text{ad}(x), \text{ad}(y)] \circ \text{ad}(z)) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ [\text{ad}(y), \text{ad}(z)]) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}([y, z])) = \kappa(x, [y, z]), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule voulue.  $\square$

LEMME 3.3. *Soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. Alors pour tous  $x, y \in \mathfrak{i}$  on a*

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{i}}(x, y).$$

DÉMONSTRATION. Considérons une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $\mathfrak{i}$ . (Ici  $n = \dim(\mathfrak{g})$  et  $r = \dim(\mathfrak{i})$ .) Alors, puisque  $\mathfrak{i}$  est un idéal, les matrices de  $\text{ad}(x)$  et  $\text{ad}(y)$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_y & B_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivement, où  $A_x$  et  $A_y$  sont les matrices de  $\text{ad}(x)|_{\mathfrak{i}}$  et  $\text{ad}(y)|_{\mathfrak{i}}$  dans la base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $\mathfrak{i}$ . On en déduit que

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) = \text{Tr}(A_x A_y) = \text{Tr}(\text{ad}(x)|_{\mathfrak{i}} \circ \text{ad}(y)|_{\mathfrak{i}}) = \kappa_{\mathfrak{i}}(x, y),$$

ce qui prouve la formule voulue.  $\square$

**3.2. Radical de la forme de Killing.** Le *radical* de la forme bilinéaire symétrique  $\kappa$  est par définition

$$\text{Rad}(\kappa) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \kappa(x, y) = 0\}.$$

Cette forme est dite *non dégénérée* si  $\text{Rad}(\kappa) = \{0\}$ . De façon équivalente, cette condition revient à dire que l'application linéaire

$$(3.1) \quad \varphi : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g}^* \\ x & \mapsto & (y \mapsto \kappa(x, y)) \end{cases}$$

est injective, ou (puisque  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*)$ ) qu'elle est bijective.

**PROPOSITION 3.4.** *Le sous-espace vectoriel  $\text{Rad}(\kappa) \subset \mathfrak{g}$  est un idéal résoluble. De plus, il contient tous les idéaux abéliens de  $\mathfrak{g}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \text{Rad}(\kappa)$ . Alors, en utilisant le lemme 3.2, pour tout  $z \in \mathfrak{g}$  on a

$$\kappa([x, y], z) = -\kappa([y, x], z) = -\kappa(y, [x, z]) = 0.$$

Donc  $[x, y] \in \text{Rad}(\kappa)$ , ce qui prouve que  $\text{Rad}(\kappa)$  est un idéal.

En utilisant le lemme 3.3, pour tous  $x \in \mathcal{D}(\text{Rad}(\kappa))$  et  $y \in \text{Rad}(\kappa)$  on a

$$\text{Tr}(\text{ad}_{\text{Rad}(\kappa)}(x) \circ \text{ad}_{\text{Rad}(\kappa)}(y)) = \kappa_{\text{Rad}(\kappa)}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0.$$

D'après le corollaire 2.4, ceci implique que  $\text{Rad}(\kappa)$  est une algèbre de Lie résoluble.

Finalement, soit  $\mathfrak{i}$  un idéal abélien de  $\mathfrak{g}$ . Alors pour tous  $x \in \mathfrak{i}$  et  $y, z \in \mathfrak{g}$  on a

$$(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))^2(z) = [x, [y, [x, [y, z]]]] = 0$$

puisque  $\mathfrak{i}$  est abélien et  $[y, [x, [y, z]]] \in \mathfrak{i}$  (car  $[x, [y, z]] \in \mathfrak{i}$ ). Donc  $\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)$  est nilpotent, et donc  $\kappa(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) = 0$ . Ceci prouve que  $x \in \text{Rad}(\kappa)$ , et donc que  $\mathfrak{i} \subset \text{Rad}(\kappa)$ .  $\square$

### 3.3. Critère de semi-simplicité.

**THÉORÈME 3.5.** *L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple ssi sa forme de Killing  $\kappa$  est non dégénérée.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons tout d'abord que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, c'est-à-dire que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . D'après la proposition 3.4,  $\text{Rad}(\kappa)$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ . Donc  $\text{Rad}(\kappa) \subset \text{Rad}(\mathfrak{g})$ , ce qui implique que  $\text{Rad}(\kappa) = \{0\}$  et donc que  $\kappa$  est non dégénérée.

Réciproquement, supposons que  $\kappa$  est non dégénérée, c'est-à-dire que  $\text{Rad}(\kappa) = \{0\}$ . Alors, d'après la proposition 3.4,  $\mathfrak{g}$  ne possède aucun idéal abélien non nul. Supposons par l'absurde que  $\mathfrak{g}$  n'est pas semi-simple, c'est-à-dire que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Il n'est pas difficile de vérifier (en partant du fait que  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  est un idéal et en raisonnant par récurrence sur  $n$ ) que, pour tout  $n \geq 0$ , le sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}^n(\text{Rad}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{g}$  est un idéal. Soit  $r \geq 0$  l'entier minimal tel que  $\mathcal{D}^{r+1}(\text{Rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ . Alors  $\mathcal{D}^r(\text{Rad}(\mathfrak{g})) \neq \{0\}$ , et on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}^r(\text{Rad}(\mathfrak{g}))) = \mathcal{D}^{r+1}(\text{Rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}.$$

Donc  $\mathcal{D}^r(\text{Rad}(\mathfrak{g}))$  est un idéal abélien non nul de  $\mathfrak{g}$ , ce qui fournit la contradiction voulue.  $\square$

**REMARQUE 3.6.** La preuve du fait que si  $\kappa$  est non dégénérée alors  $\mathfrak{g}$  est semi-simple n'utilise pas les hypothèses sur  $\mathbb{k}$ . En fait, cette implication est vraie sur tout corps  $\mathbb{k}$ .

## 4. Applications

### 4.1. Idéaux et quotients des algèbres de Lie semi-simples.

**LEMME 4.1.** *Soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal, et posons*

$$\mathfrak{i}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{i}, \kappa(x, y) = 0\}.$$

*Alors  $\mathfrak{i}^\perp$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . De plus, si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, l'application linéaire*

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}$$

*définie par  $(x, y) \mapsto x + y$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

DÉMONSTRATION. Soient  $x \in \mathfrak{g}$  et  $y \in \mathfrak{i}^\perp$ . Alors pour tout  $z \in \mathfrak{i}$ , en utilisant le lemme 3.2, on a

$$\kappa([x, y], z) = -\kappa([y, x], z) = -\kappa(y, [x, z]) = 0$$

car  $[x, z] \in \mathfrak{i}$ . Ceci montre que  $[x, y] \in \mathfrak{i}^\perp$ , et donc que  $\mathfrak{i}^\perp$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et montrons que

$$(4.1) \quad \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \{0\}.$$

Le sous-espace  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp \subset \mathfrak{g}$  est un idéal. De plus, pour tous  $x, y \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp$ , en utilisant le lemme 3.3 on voit que

$$\kappa_{\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0.$$

D'après le corollaire 2.4, ceci implique que  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp$  est résoluble. Comme  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, on a donc  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \{0\}$ .

Montrons maintenant que

$$(4.2) \quad \dim(\mathfrak{i}^\perp) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{i}).$$

Remarquons tout d'abord que la surjection naturelle  $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  induit une injection  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^* \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ , dont l'image est  $\{\xi \in \mathfrak{g}^* \mid \xi|_{\mathfrak{i}} = 0\}$ . D'autre part, par définition,  $\mathfrak{i}^\perp$  est l'image inverse de ce sous-espace par l'application  $\varphi$  considérée en (3.1). Comme cette application est un isomorphisme (d'après le théorème 3.5), on en déduit que  $\dim(\mathfrak{i}^\perp) = \dim((\mathfrak{g}/\mathfrak{i})^*) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})$ , ce qui prouve (4.2).

Les propriétés (4.1) et (4.2) montrent que l'application linéaire

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}$$

définie par  $(x, y) \mapsto x + y$  est injective et que  $\dim(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}^\perp) = \dim(\mathfrak{g})$ . Cette application est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à montrer que cette application est un morphisme d'algèbres de Lie. Pour cela on remarque que si  $x, x' \in \mathfrak{i}$  et  $y, y' \in \mathfrak{i}^\perp$  on a

$$[x + y, x' + y'] = [x, x'] + [y, y'] + [x, y'] + [x', y] = [x, x'] + [y, y']$$

car  $[x, y']$  et  $[x', y]$  appartiennent à  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 4.2.** *Supposons que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. Alors pour tout idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ , tout idéal de  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . De plus, tout idéal de  $\mathfrak{g}$ , et tout quotient de  $\mathfrak{g}$  par un idéal, est une algèbre de Lie semi-simple.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathfrak{i}$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ . D'après le lemme 4.1, l'application naturelle  $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Si  $\mathfrak{j}$  est un idéal de  $\mathfrak{i}$ , on a  $[\mathfrak{j}, \mathfrak{i}^\perp] \subset [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}^\perp] = \{0\}$ , donc

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] + [\mathfrak{i}^\perp, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j},$$

ce qui montre que  $\mathfrak{j}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Cette propriété implique que  $\mathfrak{i}$  ne possède pas d'idéal résoluble non nul (puisque  $\mathfrak{g}$  n'en possède pas), donc est semi-simple.

D'après le lemme 4.1 encore, l'application naturelle  $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}^\perp \rightarrow \mathfrak{g}$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie. On a donc  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{i}^\perp$  comme algèbres de Lie. Comme  $\mathfrak{i}^\perp$  est semi-simple (puisque c'est un idéal de  $\mathfrak{g}$ ), il en est de même de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ .  $\square$



**4.2. Idéaux simples.** Un idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  est dit *simple* s'il est simple comme algèbre de Lie (c'est-à-dire si  $\mathfrak{i}$  est non abélien et si les seuls idéaux de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{i}$  sont  $\{0\}$  et  $\mathfrak{i}$ ).

**THÉORÈME 4.3.** *Supposons que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. Alors il existe des idéaux simples  $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_r$  de  $\mathfrak{g}$  tels que l'application linéaire*

$$\mathfrak{i}_1 \times \dots \times \mathfrak{i}_r \rightarrow \mathfrak{g}$$

définie par  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto x_1 + \dots + x_r$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie. De plus, pour tout idéal simple  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ , il existe  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_j$ .

**DÉMONSTRATION.** On démontre l'existence de la décomposition par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ . Si  $\mathfrak{g}$  est simple il n'y a rien à démontrer. Sinon, puisque  $\mathfrak{g}$  n'est pas abélienne, elle possède des idéaux non triviaux. Soit  $\mathfrak{i}_1$  un idéal non trivial de dimension minimale. D'après le corollaire 4.2, tout idéal de  $\mathfrak{i}_1$  est également un idéal de  $\mathfrak{g}$ ; par minimalité,  $\mathfrak{i}_1$  ne possède donc pas d'idéal non trivial. Comme  $\mathfrak{i}_1$  n'est pas abélien (puisque  $\mathfrak{g}$  est semi-simple), c'est donc un idéal simple.

On utilise maintenant l'isomorphisme naturel

$$\mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_1^\perp \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

fourni par le lemme 4.1. D'après le corollaire 4.2,  $\mathfrak{i}_1^\perp$  est une algèbre de Lie semi-simple. Comme  $\dim(\mathfrak{i}_1^\perp) < \dim(\mathfrak{g})$  on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe des idéaux simples  $\mathfrak{i}_2, \dots, \mathfrak{i}_r$  de  $\mathfrak{i}_1^\perp$  tels que l'application naturelle  $\mathfrak{i}_2 \times \dots \times \mathfrak{i}_r \rightarrow \mathfrak{i}_1^\perp$  est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Alors les  $\mathfrak{i}_k$  sont des idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ , et l'application naturelle

$$\mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_2 \times \dots \times \mathfrak{i}_r \rightarrow \mathfrak{g}$$

est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve de l'existence de la décomposition.

Soit finalement  $\mathfrak{i}$  un idéal simple quelconque de  $\mathfrak{g}$ . On a  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \neq \{0\}$  (puisque  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ), et donc  $[\mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}] \neq \{0\}$  pour un  $k$ . Alors  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}_k]$  est un idéal non trivial de  $\mathfrak{i}_k$  et de  $\mathfrak{i}$ ; par simplicité on a donc  $\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_k$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**REMARQUE 4.4.** (1) Le théorème 4.3 montre en particulier que toute algèbre de Lie semi-simple est un produit d'algèbres de Lie simples. Réciproquement, les algèbres de Lie simples sont semi-simples, et tout produit d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple. Donc les algèbres de Lie semi-simples sont exactement les produits d'algèbres de Lie simples.

(2) Le deuxième énoncé dans le théorème 4.3 montre que les idéaux  $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_r$  sont uniquement déterminés : ce sont exactement les idéaux simples de  $\mathfrak{g}$  (qui sont donc en particulier en nombre fini).

On peut décrire explicitement tous les idéaux de  $\mathfrak{i}$  en fonction des idéaux simples, comme suit.

**PROPOSITION 4.5.** *Supposons que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et soient  $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_r$  ses idéaux simples. Pour tout idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ , il existe un sous-ensemble  $K \subset \{1, \dots, r\}$  tel que*

$$\mathfrak{i} = \bigoplus_{k \in K} \mathfrak{i}_k.$$

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 4.2,  $\mathfrak{i}$  est semi-simple comme algèbre de Lie. Soient  $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_s$  ses idéaux simples, de sorte que  $\mathfrak{i} = \bigoplus_{n=1}^s \mathfrak{j}_n$ . Puisque tout idéal de  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  (toujours d'après le corollaire 4.2), les  $\mathfrak{j}_n$  sont des idéaux simples de  $\mathfrak{g}$ . Il existe donc  $K \subset \{1, \dots, r\}$  tel que

$$\{\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_s\} = \{\mathfrak{i}_k, k \in K\},$$

et on a alors  $\mathfrak{i} = \bigoplus_{k \in K} \mathfrak{i}_k$ .  $\square$

EXERCICE 4.6. Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple on a  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ . En déduire que si  $\mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie abélienne, le seul morphisme d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  vers  $\mathfrak{h}$  est le morphisme nul.

**4.3. Dérivations.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  formée par les dérivations de  $\mathfrak{g}$  par rapport au crochet de Lie. On note  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  formé par les endomorphismes  $\text{ad}(x)$  pour  $x \in \mathfrak{g}$ . On rappelle que  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , contenue dans  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ .

LEMME 4.7.  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ .

DÉMONSTRATION. Pour tous  $\delta \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  et  $x \in \mathfrak{g}$ , on a

$$(4.3) \quad [\delta, \text{ad}(x)] = \delta \circ \text{ad}(x) - \text{ad}(x) \circ \delta = \text{ad}(\delta(x))$$

par définition d'une dérivation. Le lemme suit.  $\square$

THÉORÈME 4.8. Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, alors  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$ . En d'autres termes, toute dérivation de  $\mathfrak{g}$  est intérieure.

DÉMONSTRATION. Comme  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, on a  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , donc  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Ceci implique que le morphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \text{ad}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & \text{ad}(x) \end{cases}$$

est injectif (voir [Chap. 2, Exemple 8.4]), donc un isomorphisme. En particulier,  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Lie semi-simple, donc d'après le théorème 3.5 sa forme de Killing est non dégénérée. D'après les lemmes 3.3 et 4.7, cette forme de Killing est la restriction de  $\kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}$  à  $\text{ad}(\mathfrak{g})$ . On a donc démontré que la restriction de  $\kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}$  à  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  est non dégénérée.

Si

$$\mathfrak{i} = \{\delta \in \text{Der}(\mathfrak{g}) \mid \kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}(\delta, \text{ad}(\mathfrak{g})) = \{0\}\},$$

alors, d'après le lemme 4.1,  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ . De plus, le fait que la restriction de  $\kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}$  à  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  est non dégénérée implique que  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{i} = \{0\}$ . Puisque  $\mathfrak{i}$  et  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  sont des idéaux de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ , ceci implique que  $[\text{ad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{i}] = \{0\}$ . Si maintenant  $\delta \in \mathfrak{i}$ , en utilisant cette propriété et (4.3), on obtient que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $\text{ad}(\delta(x)) = 0$ , et donc  $\delta(x) = 0$  puisque  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Ceci montre que  $\delta = 0$ , et donc que  $\mathfrak{i} = \{0\}$ .

Finalement, on peut conclure de la façon suivante. L'idéal  $\mathfrak{i}$  est le noyau de l'application linéaire composée

$$\text{Der}(\mathfrak{g}) \rightarrow (\text{Der}(\mathfrak{g}))^* \rightarrow (\text{ad}(\mathfrak{g}))^*,$$

où la première application est donnée par  $x \mapsto \kappa_{\text{Der}(\mathfrak{g})}(x, -)$ , et la deuxième application est la restriction des formes linéaires. Puisque  $\mathfrak{i} = \{0\}$ , cette application est injective, ce qui prouve que  $\dim(\text{Der}(\mathfrak{g})) \leq \dim((\text{ad}(\mathfrak{g}))^*) = \dim(\text{ad}(\mathfrak{g}))$ , donc que l'inclusion  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \text{Der}(\mathfrak{g})$  est une égalité.  $\square$

**4.4. Décomposition de Jordan dans  $\mathfrak{g}$ .** Le théorème 4.8 permet de définir une décomposition de Jordan dans toute algèbre de Lie semisimple. En fait, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, soit  $x \in \mathfrak{g}$ , et considérons la dérivation  $\text{ad}(x) \in \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . D'après le lemme 1.4, la partie semi-simple  $\text{ad}(x)_s$  et la partie nilpotente  $\text{ad}(x)_n$  de  $\text{ad}(x)$  sont des dérivations. D'après le théorème 4.8, il existe donc  $x_s \in \mathfrak{g}$  et  $x_n \in \mathfrak{g}$  tels que  $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$  et  $\text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n)$ . De plus, comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , les éléments  $x_s$  et  $x_n$  sont uniques. Notons également que

$$(4.4) \quad [x_s, x_n] = 0.$$

En effet, on a

$$\text{ad}([x_s, x_n]) = [\text{ad}(x_s), \text{ad}(x_n)] = [\text{ad}(x)_s, \text{ad}(x)_n] = 0$$

par définition de la décomposition de Jordan des endomorphismes. Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , ceci implique en effet (4.4).

La décomposition  $x = x_s + x_n$  est appelée la *décomposition de Jordan* de  $x$  (dans  $\mathfrak{g}$ ). Un élément  $x \in \mathfrak{g}$  tel que  $x_n = 0$  (c'est-à-dire tel que  $\text{ad}(x)$  est diagonalisable) sera dit *semi-simple*, et un élément  $x \in \mathfrak{g}$  tel que  $x_s = 0$  (c'est-à-dire tel que  $\text{ad}(x)$  est nilpotent) sera dit *nilpotent*.

EXERCICE 4.9. Montrer que si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ , alors pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  la décomposition de Jordan de  $x$  définie ci-dessus coïncide avec la décomposition fournie par la proposition 1.1(1).

EXERCICE 4.10. Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple, et si  $x, y \in \mathfrak{g}$  sont tels que  $[x, y] = 0$ , montrer que  $(x + y)_s = x_s + y_s$  et  $(x + y)_n = x_n + y_n$ .



## Théorème de semi-simplicité de Weyl et représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{k}$  est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .

### 1. Compléments sur les représentations

**1.1. Rappels.** Rappelons qu'une *représentation* de  $\mathfrak{g}$  est la donnée d'un couple  $(V, \varrho)$  où  $V$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Rappelons également que la donnée de  $\varrho$  est équivalente à la donnée d'une application bilinéaire

$$\mathfrak{g} \times V \rightarrow V,$$

qu'on notera  $(x, v) \mapsto x \cdot v$ , et qui doit vérifier

$$x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [x, y] \cdot v$$

pour tous  $x, y \in \mathfrak{g}$  et  $v \in V$ . Nous utiliserons les deux points de vue indifféremment.

On peut définir la somme directe de deux représentations de façon évidente. Si  $V$  est une représentation, une *sous-représentation* est un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  qui est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire que  $x \cdot v \in W$  pour tous  $x \in \mathfrak{g}$  et  $v \in W$ . Les espaces vectoriels  $W$  et  $V/W$  sont alors munis de structures naturelles de représentation de  $\mathfrak{g}$ , telles que l'inclusion  $W \hookrightarrow V$  et la projection  $V \rightarrow V/W$  sont des morphismes de représentations. En utilisant cette terminologie, une représentation  $V$  est simple si  $V \neq \{0\}$  et si ses seules sous-représentations sont  $\{0\}$  et  $V$ .

Rappelons également que si  $V$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , alors on définit la *représentation duale* comme étant la représentation d'espace vectoriel sous-jacent  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ , muni de l'action donnée par

$$(x \cdot \xi)(v) = -\xi(x \cdot v)$$

pour  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\xi \in V^*$  et  $v \in V$ .

Finalement, si  $V$  et  $W$  sont deux représentations de  $\mathfrak{g}$ , rappelons qu'il existe une structure naturelle de représentation de  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $V \otimes W$ , qui vérifie

$$x \cdot (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot w)$$

pour  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ .

**1.2. Représentations et applications linéaires.** Soit  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et supposons que  $V$  est de dimension finie. Alors il existe une application linéaire

$$\varphi : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$$

qui vérifie

$$\varphi(\xi, w)(v) = \xi(v) \cdot w$$

pour tous  $\xi \in V^*$ ,  $w \in W$  et  $v \in V$ . De plus,  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. (En effet, ce fait est une reformulation de la propriété classique disant que, étant donnée une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ , la donnée d'une application linéaire de  $V$  vers  $W$  est équivalente à la donnée des images par cette application des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .)

Si  $V$  et  $W$  sont munies de structures de représentation de  $\mathfrak{g}$ , alors via l'isomorphisme  $\varphi$ , l'action de  $\mathfrak{g}$  sur  $V^* \otimes W$  (donnée par la structure de représentation sur le produit tensoriel de la représentation duale  $V^*$  de  $V$  et de la représentation  $W$  comme ci-dessus) correspond à l'action sur  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  donnée par

$$(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)$$

pour  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ , et  $v \in V$ . (Ceci résulte d'une vérification facile, laissée au lecteur.)

**EXERCICE 1.1.** Montrer que, dans le cadre ci-dessus, si  $f : V \rightarrow W$  est une application linéaire, alors  $f$  est un morphisme de représentations de  $\mathfrak{g}$  ssi on a  $x \cdot f = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .

**1.3. Lemme de Schur.** Soit  $(V, \rho)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie. Le résultat facile mais fondamental ci-dessous (qui possède de nombreuses variantes dans différents cadres) est appelé le *Lemme de Schur*.

**LEMME 1.2 (Lemme de Schur).** *Supposons que  $V$  est une représentation simple. Alors les seuls morphismes de représentations  $f : V \rightarrow V$  sont les applications de la forme  $\lambda \cdot \text{id}_V$  pour  $\lambda \in \mathbb{k}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Clairement, les applications de la forme  $\lambda \cdot \text{id}_V$  sont des morphismes de représentations. Réciproquement, soit  $f : V \rightarrow V$  un morphisme de représentations. Soit également  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Alors il est facile de vérifier que le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V)$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ . Comme il est non nul et comme  $V$  est simple, ceci implique que  $\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) = V$ , et donc que  $f = \lambda \cdot \text{id}_V$ .  $\square$

#### 1.4. Représentations semi-simples.

**LEMME 1.3.** *Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$V$  est isomorphe à une somme directe  $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$  où chaque représentation  $M_i$  est simple ;*
- (2) *il existe des sous-représentations  $V_i \subset V$  ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ) qui sont simples et telles que  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  (comme espace vectoriel, et donc également comme représentation de  $\mathfrak{g}$ ) ;*
- (3) *pour toute sous-représentation  $W \subset V$ , il existe une sous-représentation  $W' \subset V$  telle que  $V = W \oplus W'$  (comme espace vectoriel, et donc également comme représentation de  $\mathfrak{g}$ ).*

**DÉMONSTRATION.** L'équivalence de (1) et (2) est facile, et laissée au lecteur.

On va maintenant montrer que (2)  $\Rightarrow$  (3) par récurrence sur  $\dim(V)$ . Tout d'abord si  $V = \{0\}$  (c'est-à-dire  $r = 0$ ) il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que  $V$  n'est pas nulle, et que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

comme dans l'énoncé. Pour tout  $i$ , comme  $V_i$  est simple on a soit  $W \cap V_i = V_i$  (c'est-à-dire  $V_i \subset W$ ), soit  $W \cap V_i = \{0\}$ . Si  $V_i \subset W$  pour tout  $i$ , alors  $W = V$  et il n'y a rien à démontrer. Sinon, fixons  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $W \cap V_i = \{0\}$ , notons

$$V' := V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_r$$

et considérons la surjection naturelle  $\psi : V \rightarrow V'$ . Notre hypothèse montre que la restriction de  $\psi$  à  $W$  est injective. Notons  $U$  son image (qui est une sous-représentation de  $V'$ ), de sorte que  $\psi$  induit un isomorphisme de représentations de  $W$  vers  $U$ . Par hypothèse de récurrence,  $U$  admet un supplémentaire  $U'$  (dans  $V'$ ) qui est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ . Considérons maintenant l'application

$$\eta : V \xrightarrow{\psi} V' \rightarrow U$$

où la seconde application est la projection associée à la décomposition  $V' = U \oplus U'$ . Alors  $\eta$  est un morphisme de représentations, et sa restriction à  $W$  est un isomorphisme (de  $W$  vers  $U$ ). En posant  $W' := \text{Ker}(\eta)$ , il est facile de vérifier que  $W'$  est une sous-représentation de  $V$ , et que  $V = W \oplus W'$ .

Finalement, montrons que (3)  $\Rightarrow$  (2), encore une fois par récurrence sur  $\dim(V)$ . Si  $V$  est nulle ou simple il n'y a rien à démontrer. Sinon  $V$  possède une sous-représentation  $W$  qui n'est ni  $\{0\}$  ni  $V$ . Soit alors  $W'$  comme dans la propriété (3). Les représentations  $W$  et  $W'$  vérifient la condition (3) : en effet, par exemple si  $U \subset W$  est une sous-représentation, alors d'après (3) pour la représentation  $V$ , il existe une sous-représentation  $U' \subset V$  telle que  $V = U \oplus U'$ ; alors on a  $W = U \oplus (U' \cap W)$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $W$  et  $W'$ , et obtenir que ces représentations sont des sommes directes de sous-représentations simples. Alors il en est de même de  $V = W \oplus W'$ .  $\square$

**DÉFINITION 1.4.** Une représentation qui vérifie les conditions équivalentes du lemme 1.3 est dite *semi-simple*.

**1.5. Élément de Casimir associé à une représentation fidèle.** Soit  $(V, \varrho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Soit également  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  qui est associative, c'est-à-dire telle que

$$\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z])$$

pour tous  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ . Alors il existe des bases  $(x_i, i = 1, \dots, n)$  et  $(y_i, i = 1, \dots, n)$  de  $\mathfrak{g}$  telles que

$$\beta(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(En effet,  $\beta$  induit un isomorphisme  $f_\beta : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ , envoyant  $x \in \mathfrak{g}$  sur la forme linéaire  $y \mapsto \beta(x, y)$ ; on peut alors prendre pour  $(x_i, i = 1, \dots, n)$  une base quelconque, et prendre pour  $(y_i, i = 1, \dots, n)$  la base préduale de la base  $(f_\beta(x_i), i = 1, \dots, n)$  de  $\mathfrak{g}^*$ .) On pose alors

$$c_\varrho(\beta) := \sum_{i=1}^n \varrho(x_i) \circ \varrho(y_i) \in \text{End}(V).$$

LEMME 1.5. *L'application linéaire  $c_\varrho(\beta)$  est un morphisme de représentations.*

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in \mathfrak{g}$ . Écrivons

$$[x, x_i] = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad [x, y_i] = \sum_{j=1}^n b_{i,j} y_j.$$

Alors on a

$$a_{i,j} = \beta([x, x_i], y_j) = -\beta([x_i, x], y_j) = -\beta(x_i, [x, y_j]) = -\beta(x_i, \sum_{k=1}^n b_{j,k} y_k) = -b_{j,i}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \varrho(x) \circ c_\varrho(\beta) &= \sum_{i=1}^n \varrho(x) \circ \varrho(x_i) \circ \varrho(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) + \varrho([x, x_i]) \circ \varrho(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) + \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \varrho(x_j) \circ \varrho(y_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \cdot \varrho(x_j) \circ \varrho(y_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_\varrho(\beta) \circ \varrho(x) &= \sum_{i=1}^n \varrho(x_i) \circ \varrho(y_i) \circ \varrho(x) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) + \varrho(x_i) \circ \varrho([y_i, x])) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) - \sum_{j=1}^n b_{i,j} \varrho(x_i) \circ \varrho(y_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \varrho(x_i) \circ \varrho(x) \circ \varrho(y_i) + \sum_{i,j=1}^n (-b_{i,j}) \varrho(x_i) \circ \varrho(y_j) \end{aligned}$$

pour voir que  $\varrho(x) \circ c_\varrho(\beta) = c_\varrho(\beta) \circ \varrho(x)$ . Comme ceci est vrai pour tout  $x$ , on obtient bien que  $c_\varrho(\beta)$  est un morphisme de représentations.  $\square$

EXERCICE 1.6. Montrer que  $c_\varrho(\beta)$  ne dépend pas du choix des bases  $(x_i, i = 1, \dots, n)$  et  $(y_i, i = 1, \dots, n)$  comme ci-dessus. (Ceci justifie de ne pas faire apparaître ces données dans la notation.)

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et que  $(V, \varrho)$  est fidèle, c'est-à-dire que  $\text{Ker}(\varrho) = \{0\}$ . On définit une forme bilinéaire symétrique  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  en posant

$$\beta_V(x, y) = \text{Tr}(\varrho(x) \circ \varrho(y)).$$

LEMME 1.7. *La forme  $\beta_V$  est associative et non dégénérée.*



DÉMONSTRATION. La preuve de l'associativité est similaire au cas de la forme de Killing ; voir le lemme 3.2 du chapitre 6.

Soit maintenant  $\mathfrak{h}$  le radical de  $\beta_V$  ; en d'autres termes

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \beta_V(x, y) = 0\}.$$

Le même argument que pour la forme de Killing (voir la preuve de la proposition 3.4 du chapitre 6) montre que  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . D'autre part, le critère de Cartan (voir le théorème 2.3 du chapitre 6) montre que la sous-algèbre de Lie  $\varrho(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(V)$  est résoluble. Par hypothèse  $\text{Ker}(\varrho) = \{0\}$ , donc ceci implique que  $\mathfrak{h}$  est résoluble. On a donc montré que  $\mathfrak{h}$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, ceci implique que  $\mathfrak{h} = \{0\}$ , et achève la preuve.  $\square$

L'élément de Casimir associé à  $(V, \varrho)$  est

$$c_\varrho := c_\varrho(\beta_V).$$

Il s'agit d'un morphisme de représentations de  $V$  dans  $V$ .

EXERCICE 1.8. Sous les conditions précédentes, montrer que  $\text{Tr}(c_\varrho) = \dim(\mathfrak{g})$ .

REMARQUE 1.9. On peut définir des éléments de Casimir associés à des représentations non fidèles également. Pour cela, étant donné une représentation  $V$ , on peut la voir comme une représentation fidèle de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\varrho)$ , qui est semi-simple d'après le corollaire 4.2 du chapitre 6. On peut donc associer à cette représentation un élément de Casimir, qui sera un morphisme de représentations de  $\mathfrak{g}$  de  $V$  vers  $V$ .

## 2. Théorème de Weyl

**2.1. Énoncé.** Le "théorème de semi-simplicité de Weyl" est l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.1 (Théorème de Weyl). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple. Alors toute représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.*

Ce théorème montre que, pour comprendre toutes les représentations de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , il suffit de comprendre ses représentations *simples* de dimension finie (puisque toute représentation s'obtient ensuite en faisant des sommes directes de telles représentations).

La preuve utilisera le lemme suivant.

LEMME 2.2. *Supposons que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et soit  $(V, \varrho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ .*

- (1) *Si  $\dim(V) = 1$ , alors  $\varrho(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ .*
- (2) *Dans le cas général,  $\varrho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$ .*

DÉMONSTRATION. (1) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$  est abélienne puisque  $\dim(V) = 1$ . En utilisant l'exercice 4.6 du chapitre 6, on en déduit que  $\varrho$  est l'application linéaire nulle.

(2) Considérons la composition

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\varrho} \mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{k}.$$

Cette application linéaire est un morphisme d'algèbres de Lie. Comme  $\mathbb{k}$  est abélienne, comme dans (1) elle doit être nulle. Donc  $\varrho(\mathfrak{g}) \subset \text{Ker}(\text{Tr}) = \mathfrak{sl}(V)$ .  $\square$

**2.2. Preuve du théorème de Weyl.** On fixe une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . On doit démontrer que pour toute représentation  $(V, \rho)$  de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , et pour toute sous-représentation  $W \subset V$ , il existe une sous-représentation  $W' \subset W$  telle que  $V = W \oplus W'$ .

*Cas 1 :  $W$  est simple et  $\dim(V/W) = 1$ .* On peut supposer que  $V$  est fidèle : en effet, sinon on remplace  $\mathfrak{g}$  par  $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\rho)$ , qui est une algèbre de Lie semi-simple d'après le corollaire 4.2 du chapitre 6, et qui agit naturellement sur  $V$  ; on obtiendra alors un supplémentaire de  $W$  dans  $V$  stable par l'action de  $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\rho)$ , donc par l'action de  $\mathfrak{g}$ . On peut également supposer que  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$  (sinon le résultat est évident).

Soit alors  $c_\rho$  l'élément de Casimir de  $V$ . On a  $c_\rho(W) \subset W$ , et donc  $c_\rho$  induit un morphisme de représentations de  $V/W$  dans  $V/W$ . De plus le lemme 2.2 implique que  $\mathfrak{g}$  agit trivialement sur  $V/W$ , ce qui implique que l'endomorphisme de  $V/W$  induit par  $c_\rho$  est nul ; en d'autres termes  $c_\rho(V) \subset W$ .

Considérons maintenant la restriction de  $c_\rho$  à  $W$ , vue comme endomorphisme de  $W$ . Comme  $W$  est supposée simple, le lemme 1.2 implique qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $(c_\rho)|_W = \lambda \cdot \text{id}_W$ . On a

$$\dim(W) \cdot \lambda = \text{Tr}((c_\rho)|_W) = \text{Tr}(c_\rho) = \dim(\mathfrak{g})$$

d'après l'exercice 1.8 (et le fait que  $c_\rho(V) \subset W$ ). Ceci implique que  $\lambda \neq 0$ , et donc que  $(c_\rho)|_W$  est un isomorphisme. Alors  $W' := \text{Ker}(c_\rho)$  est un supplémentaire de  $W$  qui est une sous-représentation de  $V$ .

*Cas 2 :  $\dim(V/W) = 1$  (et  $W$  quelconque).* On démontre maintenant ce cas par récurrence sur  $\dim(V)$ . Si  $W = \{0\}$  il n'y a rien à démontrer, et le cas où  $W$  est simple a été démontré ci-dessus. Si maintenant  $W$  n'est ni simple ni nulle, il existe une sous-représentation  $U \subset W$  qui n'est ni  $\{0\}$  ni  $W$ . On applique alors l'hypothèse de récurrence à la représentation  $V/U$  est à sa sous-représentation  $W/U$ . Il existe donc une sous-représentation  $X \subset V/U$  telle que  $V/U = W/U \oplus X$ . Soit alors  $Y$  l'image inverse de  $X$  sous la projection  $V \rightarrow V/U$ . On a  $U \subset Y$ ,  $\dim(Y/U) = \dim(X) = 1$ , et  $\dim(Y) < \dim(V)$ . Donc, par récurrence, il existe une sous-représentation  $W' \subset Y$  telle que  $Y = W' \oplus U$ . Alors  $W'$  est une sous-représentation de  $V$ , et le fait que  $Y/U$  est un supplémentaire de  $W/U$  dans  $V/U$  implique que  $W'$  est un supplémentaire de  $W$  dans  $V$ .

*Cas 3 : cas général.* On considère la représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$  considérée au §1.2. Soient

$$M := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \mid \exists \lambda \in \mathbb{k}, \forall w \in W, f(w) = \lambda \cdot w\},$$

$$N := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \mid f|_W = 0\}.$$

Alors  $N \subset M$ . De plus, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $x \cdot M \subset N$ . En effet, si  $f \in M$ , pour tout  $w \in W$  on a

$$(x \cdot f)(w) = x \cdot f(w) - f(x \cdot w) = x \cdot (\lambda \cdot w) - \lambda \cdot (x \cdot w) = 0.$$

En particulier  $M$  et  $N$  sont des sous-représentations de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ , et il n'est pas difficile de vérifier que  $\dim(M/N) = 1$ . On est donc dans la situation du Cas 2, et on obtient qu'il existe une sous-représentation  $N' \subset M$  telle que  $M = N \oplus N'$ . Fixons  $f \in N' \setminus \{0\}$ . Comme  $\dim(N') = 1$ , le lemme 2.2 assure que  $x \cdot f = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , c'est-à-dire (d'après l'exercice 1.1) que  $f$  est un morphisme de

représentations. De plus,  $f|_W$  coïncide avec  $\lambda \cdot \text{id}_W$  pour un  $\lambda \in \mathbb{k}$  (puisque  $f \in M$ ), et  $\lambda \neq 0$  (car  $f \notin N$ ). Ceci implique que  $W' := \text{Ker}(f)$  est une sous-représentation de  $V$  qui vérifie  $V = W \oplus W'$ .

### 2.3. Application à la décomposition de Jordan.

**THÉORÈME 2.3.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie qui est semi-simple. Alors pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , les décompositions de Jordan de  $x$  dans  $\mathfrak{g}$  et comme endomorphisme de  $V$  coïncident. En particulier,  $\mathfrak{g}$  contient les parties semi-simples et nilpotentes de chacun de ses éléments.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $x \in \mathfrak{g}$ , et soit  $x = x_s + x_n$  sa décomposition de Jordan comme endomorphisme de  $V$ , c'est-à-dire celle fournie par la proposition 1.1 du chapitre 6.

Pour tout sous-espace  $W \subset V$  stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , on pose

$$L_W := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W) \subset W \text{ et } \text{Tr}(x|_W) = 0\}.$$

Alors  $L_W$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ , et le Lemme 2.2(2) assure que  $\mathfrak{g} \subset L_W$ . Donc, si on pose

$$\mathfrak{h} := \left( \bigcap_W L_W \right) \cap \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{ad}(x)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}\},$$

où l'intersection est prise sur tous les sous-espaces  $W \subset V$  stables par l'action de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ , on a  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ , et  $\mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{h}$ .

L'inclusion  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$  est en fait une égalité. En effet, considérons  $\mathfrak{h}$  comme une représentation de  $\mathfrak{g}$  (via  $\text{ad}$ ), et soit  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$  une sous-représentation telle que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k}$ . (Une telle sous-représentation existe d'après le théorème 2.1.) Comme  $\mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{h}$ , on a  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}$ , et donc la représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{k}$  est la représentation nulle. En d'autres termes,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}] = \{0\}$ . Soit maintenant  $x \in \mathfrak{k}$ . Pour toute sous-représentation de  $\mathfrak{g}$  simple  $W \subset V$ , on a  $x(W) \subset W$ , et le fait que  $[\mathfrak{g}, x] = \{0\}$  implique que  $x|_W$  est un morphisme de représentations. D'après le lemme 1.2, il existe  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $x|_W = \lambda \cdot \text{id}_W$ . Mais puisque  $\text{Tr}(x|_W) = 0$ , on a nécessairement  $\lambda = 0$ , donc  $x|_W = 0$ . Comme ceci est vrai pour toute sous-représentation simple de  $V$ , et comme  $V$  est une somme directe de sous-représentations simples (d'après le théorème 2.1), ceci implique que  $x = 0$ , et donc finalement que  $\mathfrak{k} = \{0\}$ , en d'autres termes que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ .

On peut maintenant conclure la preuve. D'après le lemme 1.3 du chapitre 6, on sait que  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)_s = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)$  et  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)_n = \text{ad}(x_n)$  comme endomorphismes de  $\mathfrak{gl}(V)$ . La proposition 1.1(3) du chapitre 6 montre alors que  $\text{ad}(x_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  et  $\text{ad}(x_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ . D'autre part, pour tout sous-espace  $W \subset V$  stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , on a également  $x_s(W) \subset W$  et  $x_n(W) \subset W$  (d'après le même résultat). Et puisque  $(x_n)|_W$  est nilpotent on a  $\text{Tr}((x_n)|_W) = 0$ , et donc  $\text{Tr}((x_s)|_W) = \text{Tr}(x|_W) = 0$ . Ceci montre que  $x_s$  et  $x_n$  appartiennent à  $\mathfrak{h}$ , et donc à  $\mathfrak{g}$ . Alors  $x_s$  et  $x_n$  sont des éléments de  $\mathfrak{g}$  tels que  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x) = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s) + \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)$  est la décomposition de Jordan de  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)$  dans  $\text{End}(\mathfrak{gl}(V))$ . Donc  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) + \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  est la décomposition de Jordan de  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$  dans  $\text{End}(\mathfrak{g})$ , ce qui prouve que  $x = x_s + x_n$  est la décomposition de Jordan de  $x$  dans  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, et soit  $(V, \rho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Alors si  $x \in \mathfrak{g}$  et si  $x = x_s + x_n$  est sa*

décomposition de Jordan dans  $\mathfrak{g}$ , alors  $\varrho(x) = \varrho(x_s) + \varrho(x_n)$  est la décomposition de Jordan de  $\varrho(x)$  dans  $\text{End}(V)$ . En particulier, si  $x$  est semi-simple, resp. nilpotent, alors  $\varrho(x)$  est diagonalisable, resp. nilpotent.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 4.2 du chapitre 6, la sous-algèbre de Lie  $\varrho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$  est semi-simple (puisqu'elle est isomorphe à  $\mathfrak{g}/\text{Ker}(\varrho)$ ). En utilisant le fait que  $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \varrho(\mathfrak{g})$  est surjective, il n'est pas difficile de vérifier que  $\varrho(x) = \varrho(x_s) + \varrho(x_n)$  est la décomposition de Jordan de  $\varrho(x)$  dans l'algèbre de Lie semi-simple  $\varrho(\mathfrak{g})$ . Puis on conclut en utilisant le théorème 2.3.  $\square$

### 3. Représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$

Dans cette partie on s'intéresse à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . On notera

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle qu'on a

$$(3.1) \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

#### 3.1. Décomposition en sous-espaces de poids.

LEMME 3.1. Soit  $(V, \varrho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Alors on a

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} V_\lambda \quad \text{où } V_\lambda = \{v \in V \mid \varrho(h)(v) = \lambda \cdot v\}.$$

De plus, pour tout  $\lambda \in \mathbb{k}$  on a

$$\varrho(e)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}, \quad \varrho(f)(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}.$$

DÉMONSTRATION. Les formules (3.1) montrent que  $\text{ad}(h)$  est diagonalisable. Donc  $h$  est un élément semi-simple de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et alors le corollaire 2.4 implique que  $\varrho(h)$  est diagonalisable. Ce qui démontre la décomposition  $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} V_\lambda$ .

Soit maintenant  $v \in V_\lambda$ . Alors

$$\varrho(h)(\varrho(e)(v)) = \varrho(e)(\varrho(h)(v)) + \varrho([h, e])(v) = \varrho(e)(\lambda v) + \varrho(2e)(v) = (\lambda + 2)\varrho(e)(v),$$

donc  $\varrho(e)(v) \in V_{\lambda+2}$ . Ceci prouve que  $\varrho(e)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}$ . La preuve de l'autre inclusion est similaire.  $\square$

Si  $\lambda \in \mathbb{k}$ ,  $V_\lambda$  est appelé le *sous-espace de poids*  $\lambda$  de  $V$ . Si  $V_\lambda \neq \{0\}$ ,  $\lambda$  est appelé un *poids* de  $V$ . On appellera *vecteur maximal* un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$  qui appartient à un sous-espace de poids et tel que  $\varrho(e)(v) = 0$ . Toutes ces notions ont encore un sens si  $V$  est de dimension infinie (mais le lemme 3.1 n'est pas toujours vrai dans ce cadre).

LEMME 3.2. Soit  $(V, \varrho)$  une représentation non nulle de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Alors il existe un vecteur maximal dans  $V$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $V \neq \{0\}$  et comme  $V_\lambda$  ne peut être non nul que pour un nombre fini de valeurs de  $\lambda$  (puisque  $\dim(V) < \infty$ ), il existe un  $\lambda$  tel que  $V_\lambda \neq \{0\}$  et  $V_{\lambda+2} = \{0\}$ . Alors, d'après le lemme 3.1, tout vecteur non nul dans  $V_\lambda$  est un vecteur maximal.  $\square$

**3.2. Vecteurs maximaux et bases associées.** On fixe maintenant une représentation non nulle  $(V, \varrho)$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et on suppose qu'il existe un vecteur maximal  $v \in V$ . (Si  $V$  est de dimension finie, cette condition est automatique d'après le lemme 3.2.) Soit  $\lambda$  son poids, c'est-à-dire le scalaire  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $v \in V_\lambda$ . On pose

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = -1; \\ v & \text{si } i = 0; \\ \frac{1}{i!} \varrho(f)^i(v) & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

LEMME 3.3. *Pour tout  $i \geq 0$ , on a*

$$\varrho(h)(v_i) = (\lambda - 2i)v_i, \quad \varrho(f)(v_i) = (i + 1) \cdot v_{i+1}, \quad \varrho(e)(v_i) = (\lambda - i + 1)v_{i-1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 3.1 on a  $v_i \in V_{\lambda-2i}$ , ce qui prouve la première formule. La deuxième formule découle directement de la définition. (Remarquons que cette formule est également vraie si  $i = -1$ )

Démontrons maintenant la troisième formule par récurrence sur  $i$ . Le cas  $i = 0$  découle du fait que  $v$  est maximal. Soit maintenant  $i > 0$ , et supposons la formule connue au rang  $i - 1$ . Alors

$$\varrho(e)(v_i) = \frac{1}{i} \varrho(e) \circ \varrho(f)(v_{i-1}) = \frac{1}{i} (\varrho(f) \circ \varrho(e)(v_{i-1}) + \varrho(h)(v_{i-1})).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et la première formule de l'énoncé, puis la deuxième formule (appliquée au rang  $i - 2 \geq -1$ ), on en déduit que

$$\begin{aligned} \varrho(e)(v_i) &= \frac{1}{i} ((\lambda - i + 2)\varrho(f)(v_{i-2}) + (\lambda - 2i + 2)v_{i-1}) \\ &= \frac{1}{i} ((\lambda - i + 2)(i - 1)v_{i-1} + (\lambda - 2i + 2)v_{i-1}) \\ &= \frac{1}{i} ((\lambda - i + 2) \cdot i - i) \cdot v_{i-1} = (\lambda - i + 1) \cdot v_{i-1}. \end{aligned}$$

Ceci prouve la formule au rang  $i$ , et achève la preuve.  $\square$

Supposons maintenant que  $V$  est de dimension finie. Les formules du lemme 3.3 montrent en particulier que les  $v_i$  appartiennent à des espaces de poids distincts. Comme seuls un nombre fini de sous-espaces de poids sont non nuls, on en déduit qu'il existe  $i > 0$  tel que  $v_i = 0$ . On note  $m$  le plus petit entier positif ou nul tel que  $v_{m+1} = 0$ . Clairement, on a alors  $v_i = 0$  pour tout  $i > m$ , et  $v_i \neq 0$  si  $i \in \{0, \dots, m\}$ .

LEMME 3.4. *Avec les notations précédentes on a  $\lambda = m$ . (En particulier,  $\lambda \in \mathbb{N}$ .) De plus, les vecteurs  $v_0, \dots, v_m$  forment une base d'un sous-espace de  $V$  stable par l'action de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . En particulier, si  $V$  est simple, ils forment une base de  $V$ , et  $\dim(V) = m + 1 = \lambda + 1$ .*

DÉMONSTRATION. On a  $v_{m+1} = 0$ , donc  $\varrho(e)(v_{m+1}) = 0$ . D'autre part, d'après le lemme 3.3 on a

$$\varrho(e)(v_{m+1}) = (\lambda - m) \cdot v_m,$$

et  $v_m \neq 0$ . Donc  $\lambda - m = 0$ , ce qui montre que  $\lambda = m$ .

Comme expliqué ci-dessus, les vecteurs  $v_i$  sont non nuls, et appartiennent à des sous-espaces de poids distincts. Donc ils sont linéairement indépendants. D'autre part, les formules du lemme 3.3 montrent que le sous-espace vectoriel

$\text{Vect}(v_0, \dots, v_m)$  de  $V$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , ce qui prouve la deuxième assertion.

Si  $V$  est supposée simple, on en déduit que  $\text{Vect}(v_0, \dots, v_m) = V$ , et donc que les vecteurs  $(v_0, \dots, v_m)$  forment une base de  $V$ .  $\square$

Notons également le fait suivant, qui découle des lemmes 3.3 et 3.4.

**COROLLAIRE 3.5.** *Si  $(V, \varrho)$  est une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , alors pour tout poids  $k$  de  $V$  le morphisme  $\varrho(e)|_{V_k} : V_k \rightarrow V_{k+2}$  est surjectif.*

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème 2.1,  $V$  est une somme directe de représentations simples. Donc il suffit de vérifier ce fait quand  $V$  est simple. Dans ce cas, on peut considérer une base de  $V$  comme dans le lemme 3.4, et le résultat découle du fait que, dans la formule pour  $\varrho(e)$  dans le lemme 3.3, pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  on a  $\lambda - i + 1 = m - i + 1 \geq 1$ , donc  $\lambda - i + 1 \neq 0$ .  $\square$

**3.3. Classification des représentations simples de dimension finie.** On peut maintenant classifier (à isomorphisme près) toutes les représentations simples de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

**THÉORÈME 3.6.** *Pour tout  $m \geq 0$ , il existe, à isomorphisme près, exactement une représentation simple  $V(m)$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  de dimension  $m + 1$ . L'ensemble de ses poids est  $\{-m, -m + 2, \dots, m - 2, m\}$ , et pour tout poids  $i$  on a  $\dim(V(m)_i) = 1$ . De plus,  $V(m)$  possède (à multiplication par un scalaire non nul près) un unique vecteur maximal, qui est de poids  $m$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $(V, \varrho)$  et  $(V', \varrho')$  deux représentations simples de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  de dimension  $m + 1$ . Alors, d'après les lemmes 3.3 et 3.4, il existe des bases  $(v_0, \dots, v_m)$  et  $(v'_0, \dots, v'_m)$  de  $V$  et  $V'$  respectivement telles que

$$\begin{aligned} \varrho(h)(v_i) &= (m - 2i)v_i, & \varrho(f)(v_i) &= (i + 1) \cdot v_{i+1}, & \varrho(e)(v_i) &= (m - i + 1)v_{i-1}, \\ \varrho'(h)(v'_i) &= (m - 2i)v'_i, & \varrho'(f)(v'_i) &= (i + 1) \cdot v'_{i+1}, & \varrho'(e)(v'_i) &= (m - i + 1)v'_{i-1} \end{aligned}$$

(où, par convention,  $v_{-1} = v_{m+1} = 0$  et  $v'_{-1} = v'_{m+1} = 0$ ). On considère alors l'application linéaire  $\varphi : V \rightarrow V'$  qui vérifie  $\varphi(v_i) = v'_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ . Cette application linéaire est inversible, et les formules ci-dessus montrent que  $\varphi$  est un morphisme de représentations. Donc  $V$  et  $V'$  sont isomorphes comme représentations de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

L'énoncé concernant les poids est clair d'après l'existence de la base comme ci-dessus. On remarque également que ces formules montrent que  $\text{Ker}(\varrho(e)) = \mathbb{k} \cdot v_0$ , et donc que les multiples non nuls de  $v_0$  sont les seuls vecteurs maximaux.

Pour conclure, il reste à montrer que, pour tout  $m \geq 0$ , il existe bien une représentation simple de dimension  $m + 1$ . Pour cela on note  $V = \mathbb{k}^2$  la représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et on considère la représentation

$$V^{\otimes m} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{m \text{ termes}}.$$

On a

$$\dim((V^{\otimes m})_m) = 1, \quad \dim((V^{\otimes m})_{m+2}) = 0.$$

Donc  $V^{\otimes m}$  possède un vecteur maximal  $v$  de poids  $m$ . On peut alors construire la famille  $(v_0, \dots, v_m)$  comme au §3.2. Et il est facile de voir que  $\text{Vect}(v_0, \dots, v_m)$  est une sous-représentation simple de  $V^{\otimes m}$  de dimension  $m + 1$ . (Les détails sont laissés au lecteur.)  $\square$

REMARQUE 3.7. L'entier  $m$  est appelé le *plus haut poids* de  $V(m)$ , et l'entier  $-m$  est appelé le *plus bas poids* de  $V(m)$ .

EXERCICE 3.8. Avec les notations de la fin de la preuve du théorème 3.6, montrer qu'il existe une unique structure de représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  sur  $\mathcal{S}^m(V)$  telle que la surjection naturelle

$$V^{\otimes m} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^m(V)$$

est un morphisme de représentations, puis que  $\mathcal{S}^m(V) \cong V(m)$ .

COROLLAIRE 3.9. *Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Alors les poids de  $V$  sont des entiers. Si  $m$  est un poids de  $V$ , alors  $-m$  est également un poids de  $V$ , on a  $\dim(V_m) = \dim(V_{-m})$ , et tous les entiers entre  $m$  et  $-m$  de la même parité que  $m$  sont des poids. Enfin, dans toute décomposition de  $V$  en somme de représentations simples, le nombre de facteurs qui apparaît est  $\dim(V_0) + \dim(V_1)$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $V = \{0\}$  il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après le théorème 2.1,  $V$  est une somme de représentations simples. Le théorème 3.6 montre que les propriétés énoncées sur les poids sont vraies pour les représentations simples, et le cas de  $V$  en découle. Finalement, la dernière assertion découle du fait que, pour tout  $m \geq 0$ , on a  $\dim(V(m)_0) + \dim(V(m)_1) = 1$ .  $\square$





## Décomposition radicielle des algèbres de Lie semi-simples

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{k}$  est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple non nulle sur  $\mathbb{k}$ . L'objectif du chapitre est de montrer que  $\mathfrak{g}$  admet une décomposition très utile paramétrée par ce qu'on appellera un "système de racines". Celui-ci sera défini en terme de l'action (adjointe) d'une certaine sous-algèbre de Lie, dite "torale".

### 1. Sous-algèbres de Lie torales et décomposition radicielle

#### 1.1. Définition.

DÉFINITION 1.1. Une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est dite *torale* si tous ses éléments sont semi-simples.

- LEMME 1.2. (1) *Il existe une sous-algèbre de Lie torale non nulle.*  
 (2) *Toute sous-algèbre de Lie torale est abélienne.*

DÉMONSTRATION. (1) Tout d'abord, remarquons qu'il existe  $x \in \mathfrak{g}$  tel que  $x_s \neq 0$ . En effet, sinon tous les éléments  $x \in \mathfrak{g}$  vérifieraient que  $\text{ad}(x)$  est nilpotent. Et alors le théorème d'Engel [Chap. 4, Théorème 3.5] montrerait que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, ce qui est absurde. Si on choisit un tel  $x$ , alors  $x_s$  est un élément semi-simple non nul, et  $\mathbb{k} \cdot x_s$  est une sous-algèbre de Lie torale non nulle.

(2) Soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie torale. Soit  $x \in \mathfrak{h}$ . Alors  $\text{ad}(x)$  est diagonalisable (puisque  $x$  est semi-simple) et stabilise  $\mathfrak{h}$  (puisque  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie). Donc  $\text{ad}(x)|_{\mathfrak{h}}$  est diagonalisable. Pour montrer que  $\text{ad}(x)|_{\mathfrak{h}} = 0$  (et donc conclure la preuve), il suffit de montrer que la seule valeur propre de cet endomorphisme est 0. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas, et soit  $y \in \mathfrak{h}$  un vecteur propre de  $\text{ad}(x)$  pour une valeur propre  $\lambda \neq 0$ . Alors  $[x, y] = \lambda y$ , et donc  $\text{ad}(y) \circ \text{ad}(y)(x) = 0$ . Mais, comme pour  $x$ ,  $\text{ad}(y)$  est diagonalisable. En décomposant  $x$  selon les espaces propres de  $\text{ad}(y)$ , on voit que la condition que  $\text{ad}(y)^2(x) = 0$  implique que  $x$  appartient au sous-espace propre de  $\text{ad}(y)$  associé à la valeur propre 0. En d'autres termes, on a  $\text{ad}(y)(x) = 0$ , c'est-à-dire  $[y, x] = 0$ . Ceci fournit la contradiction voulue.  $\square$

Fixons maintenant une sous-algèbre de Lie torale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  qui est *maximale*, c'est-à-dire qui n'est contenue strictement dans aucune sous-algèbre de Lie torale. D'après le lemme 1.2(1), on a  $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ . D'autre part, par définition les endomorphismes  $\text{ad}(x)$  de  $\mathfrak{g}$ , pour  $x \in \mathfrak{h}$ , sont diagonalisables. D'après le lemme 1.2(2) (et puisque  $\text{ad}$  est un morphisme d'algèbres de Lie), ces endomorphismes commutent deux à

deux. Ils peuvent donc être diagonalisés simultanément. En d'autres termes on a

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{où } \mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{h}, [y, x] = \lambda(y) \cdot x\}.$$

Le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{g}_0$  contient  $\mathfrak{h}$ . On note

$$\Phi := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

Ses éléments sont appelées les *racines* de  $\mathfrak{g}$  (par rapport à  $\mathfrak{h}$ ). On a donc

$$(1.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Cette décomposition est appelée la *décomposition radicielle* de  $\mathfrak{g}$ .

EXERCICE 1.3. Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  et si  $\mathfrak{h}$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  formée des matrices diagonales, montrer que  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale.

## 1.2. Premières propriétés.

LEMME 1.4.  $\Phi$  engendre  $\mathfrak{h}^*$  comme espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que si  $x \in \mathfrak{h}$  est tel que  $\alpha(x) = 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ , alors  $x = 0$ . Soit donc  $x \in \mathfrak{h}$  tel que pour tout  $\alpha \in \Phi$  on a  $\alpha(x) = 0$ . Alors  $[x, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ . Puisque  $[x, \mathfrak{g}_0] = 0$  par définition de  $\mathfrak{g}_0$ , en utilisant (1.1) on voit que  $[x, \mathfrak{g}] = 0$ . Donc  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , ceci termine la preuve.  $\square$

LEMME 1.5. (1) Pour  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ , on a  $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ . En particulier,  $\mathfrak{g}_0$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

(2) Si  $\alpha \in \Phi$  et  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ , alors  $x$  est nilpotent.

(3) Si  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  et  $\lambda + \mu \neq 0$ , alors  $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = \{0\}$ .

(4) La restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{g}_0$  est non dégénérée.

DÉMONSTRATION. (1) Pour tout  $x \in \mathfrak{h}$ , comme  $\text{ad}(x)$  est une dérivation pour le crochet de Lie (voir [Chap. 2, Exemple 7.3]), si  $y \in \mathfrak{g}_\lambda$  et  $z \in \mathfrak{g}_\mu$  on a

$$\begin{aligned} \text{ad}(x)([y, z]) &= [\text{ad}(x)(y), z] + [y, \text{ad}(x)(z)] \\ &= [\lambda(x) \cdot y, z] + [y, \mu(x) \cdot z] = (\lambda + \mu)(x) \cdot [y, z]. \end{aligned}$$

Donc  $[y, z] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ .

(2) Comme  $\Phi$  est un ensemble fini, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $\beta \in \Phi \cup \{0\}$ ,  $\beta + n\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ . Alors en utilisant (1) et la décomposition (1.1) on voit que  $\text{ad}(x)^n = 0$ .

(3) Choisissons  $x \in \mathfrak{h}$  tel que  $(\lambda + \mu)(x) \neq 0$ , c'est-à-dire tel que  $\lambda(x) \neq -\mu(x)$ . Alors pour  $y \in \mathfrak{g}_\lambda$  et  $z \in \mathfrak{g}_\mu$ , en utilisant l'associativité de la forme de Killing on a

$$\lambda(x) \cdot \kappa(y, z) = \kappa([x, y], z) = -\kappa([y, x], z) = -\kappa(y, [x, z]) = -\mu(x)\kappa(y, z).$$

Donc  $\kappa(y, z) = 0$ .

(4) Soit  $x \in \mathfrak{g}_0$  tel que  $\kappa(x, \mathfrak{g}_0) = \{0\}$ . D'après (3), pour tout  $\alpha \in \Phi$  on a  $\kappa(x, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}$ . Donc, en utilisant la décomposition radicielle (1.1), on voit que  $x \in \text{Rad}(\kappa)$ . D'après le théorème 3.5 du chapitre 6, ceci implique que  $x = 0$ .  $\square$

**1.3. Centralisateur d'une sous-algèbre de Lie torale maximale.** Dans la preuve de la proposition ci-dessous on utilisera le résultat suivant.

LEMME 1.6. *Soit  $\mathfrak{k}$  une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{k}$  un idéal non nul. Alors  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \neq \{0\}$ .*

DÉMONSTRATION. On considère l'action (adjointe) de  $\mathfrak{k}$  sur  $\mathfrak{i}$ . D'après le théorème d'Engel [Chap. 4, Théorème 3.5],  $\mathfrak{k}$  agit par endomorphismes nilpotents. D'après le lemme-clé de la preuve du théorème d'Engel [Chap. 4, Proposition 3.4], il existe  $x \in \mathfrak{i}$  qui est annulé par l'action de tous les éléments de  $\mathfrak{k}$ . Alors  $x \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ .  $\square$

PROPOSITION 1.7. *On a  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve procède en 6 étapes.

*Étape 1 :* Si  $x \in \mathfrak{g}_0$ , alors  $x_s$  et  $x_n$  appartiennent à  $\mathfrak{g}_0$ . En effet, dire que  $x$  appartient à  $\mathfrak{g}_0$  revient à dire que  $\text{ad}(x)(\mathfrak{h}) \subset \{0\}$ . D'après la Proposition 1.1(3) du chapitre 6, ceci implique que  $\text{ad}(x)_s(\mathfrak{h}) \subset \{0\}$  et  $\text{ad}(x)_n(\mathfrak{h}) \subset \{0\}$ . Et comme  $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$  et  $\text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n)$  par définition, on en déduit que  $x_s$  et  $x_n$  appartiennent à  $\mathfrak{g}_0$ .

*Étape 2 :* si  $x \in \mathfrak{g}_0$ , alors  $x_s \in \mathfrak{h}$ . Considérons le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathbb{k} \cdot x_s$ . D'après l'étape 1, pour tous  $y, z \in \mathfrak{k}$  on a  $[y, z] = 0$ ; donc  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre de Lie abélienne de  $\mathfrak{g}$ . De plus, il découle de l'exercice 4.10 du chapitre 6 que  $\mathfrak{k}$  est formée d'éléments semi-simples. C'est donc une sous-algèbre de Lie torale de  $\mathfrak{g}$ , et par maximalité ceci entraîne que  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$ ; en d'autres termes,  $x_s \in \mathfrak{h}$ .

*Étape 3 :* la restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée. Soit  $x \in \mathfrak{h}$ , et supposons que  $\kappa(x, \mathfrak{h}) = \{0\}$ . Pour montrer que  $x = 0$ , en utilisant le lemme 1.5(4) il suffit de montrer que  $\kappa(x, \mathfrak{g}_0) = \{0\}$ . Soit donc  $y \in \mathfrak{g}_0$ , et considérons sa décomposition de Jordan  $y = y_s + y_n$ . Comme  $y_s \in \mathfrak{h}$  d'après l'étape 2, on a  $\kappa(x, y_s) = 0$ , et donc  $\kappa(x, y) = \kappa(x, y_n)$ . D'autre part  $\kappa(x, y_n) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y_n))$ . Comme  $y_n \in \mathfrak{g}_0$  d'après l'étape 1, on a  $[x, y_n] = 0$ , ce qui implique que les endomorphismes  $\text{ad}(x)$  et  $\text{ad}(y_n)$  commutent. Comme  $\text{ad}(y_n)$  est nilpotent, ceci implique qu'il en est de même de  $\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y_n)$ . Donc  $\text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y_n)) = 0$ , ce qui montre que  $\kappa(x, y) = 0$ , et achève la preuve de cette étape.

*Étape 4 :* l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$  est nilpotente. D'après le théorème d'Engel [Chap. 4, Théorème 3.5], pour montrer que  $\mathfrak{g}_0$  est nilpotente il suffit de montrer que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x)$  est un endomorphisme nilpotent de  $\mathfrak{g}_0$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}_0$ . Soit donc  $x \in \mathfrak{g}_0$ , et considérons sa décomposition de Jordan  $x = x_s + x_n$ . D'après l'étape 2,  $x_s \in \mathfrak{h}$ , et donc  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_s) = 0$ . D'autre part, par construction l'endomorphisme  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  est nilpotent, et puisque  $x_n \in \mathfrak{g}_0$  (voir l'étape 1), cet endomorphisme stabilise  $\mathfrak{g}_0$ ; donc  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_n) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)|_{\mathfrak{g}_0}$  est également nilpotent. Donc finalement  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) = \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_s) + \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_n) = \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_n)$  est nilpotent, ce qui prouve que  $\mathfrak{g}_0$  est nilpotente.

*Étape 5 :* l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$  est abélienne. Supposons que  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq \{0\}$ . Alors, d'après l'étape 4 et le lemme 1.6, on a  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \neq \{0\}$ . Soit  $z$  un élément non nul dans cette intersection. Alors  $z_n \neq 0$ . En effet, sinon on aurait  $z \in \mathfrak{h}$  d'après l'étape 2, et  $\kappa(z, \mathfrak{h}) = \{0\}$  par associativité de  $\kappa$  (et puisque  $z \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ ), et donc  $z = 0$  d'après l'étape 3. De plus, on a  $\text{ad}(z)(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$ , donc  $\text{ad}(z)_n(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$  d'après la proposition 1.1(3) du chapitre 6, ce qui implique que  $z_n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$  (puisque  $\text{ad}(z_n) = \text{ad}(z)_n$ ). Alors pour tout  $x \in \mathfrak{g}_0$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(x) \circ \text{ad}(z_n)$  est nilpotent (puisque  $\text{ad}(z_n)$  est nilpotent et commute avec  $\text{ad}(x)$ ), donc  $\kappa(x, y_n) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(z_n)) = 0$ , ce qui contredit le lemme 1.5(4).

*Étape 6 : conclusion.* Soit  $x \in \mathfrak{g}_0$ , et considérons sa décomposition de Jordan  $x = x_s + x_n$ . Alors, comme dans la preuve de l'étape 5, puisque  $x_n$  appartient à  $\mathfrak{g}_0$  (d'après l'étape 1) et puisque  $\mathfrak{g}_0$  est abélienne, on a  $\kappa(x_n, \mathfrak{g}_0) = \{0\}$ . Donc  $x_n = 0$  d'après le lemme 1.5(4). Donc  $x = x_s$ , ce qui implique que  $x \in \mathfrak{h}$  d'après l'étape 2.  $\square$

En utilisant la proposition 1.7, on peut réécrire la décomposition (1.1) de la façon suivante :

$$(1.2) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

De plus, comme on l'a vu au cours de la preuve de cette proposition, la restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée. En d'autres termes, l'application

$$\iota : x \mapsto \kappa(x, -)$$

induit un isomorphisme  $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ . Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , on notera  $t_\alpha := \iota^{-1}(\alpha)$ . On a donc

$$\alpha(x) = \kappa(t_\alpha, x)$$

pour tout  $x \in \mathfrak{h}$ .

## 2. Propriétés des racines

**2.1. Racines et leurs opposées.** Nous aurons besoin ci-dessous du lemme suivant, qui est une conséquence facile du théorème de Lie [Chap. 4, Théorème 4.1].

LEMME 2.1. *Soit  $\mathfrak{k}$  une algèbre de Lie résoluble, et soit  $(V, \rho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{k}$ . Alors pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{k})$ , l'endomorphisme  $\rho(x)$  de  $V$  est nilpotent.*

- PROPOSITION 2.2. (1) Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $-\alpha \in \Phi$ . De plus, si  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  et  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , alors  $[x, y] = \kappa(x, y) \cdot t_\alpha$ .
- (2) Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  est de dimension 1, et  $t_\alpha$  en est une base.
- (3) Si  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\kappa(t_\alpha, t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) \neq 0$ .
- (4) Si  $\alpha \in \Phi$ , il existe un unique  $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  tel que  $\alpha(h_\alpha) = 2$ . De plus, on a  $h_{-\alpha} = -h_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ .
- (5) Si  $\alpha \in \Phi$  et  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ , alors il existe  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $\mathbb{k}x_\alpha + \mathbb{k}y_\alpha + \mathbb{k}h_\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que l'application

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de  $\mathbb{k}x_\alpha + \mathbb{k}y_\alpha + \mathbb{k}h_\alpha$  vers  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

DÉMONSTRATION. (1) Si  $-\alpha \notin \Phi$ , alors d'après le lemme 1.5(3), pour tout  $\beta \in \Phi \cup \{0\}$  on a  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ . En utilisant la décomposition (1.1), ceci montre que  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = \{0\}$ , ce qui contredit le fait que  $\kappa$  est non dégénérée.

Soient maintenant  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  et  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Alors d'après le lemme 1.5(1) et la proposition 1.7 on a  $[x, y] \in \mathfrak{h}$ . D'autre part, pour  $z \in \mathfrak{h}$  on a

$$\kappa(z, [x, y]) = \kappa([z, x], y) = \alpha(z)\kappa(x, y) = \kappa(z, t_\alpha)\kappa(x, y) = \kappa(z, \kappa(x, y) \cdot t_\alpha).$$

Donc  $\kappa([x, y] - \kappa(x, y) \cdot t_\alpha, \mathfrak{h}) = \{0\}$ . Puisque la restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée, ceci montre que  $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$ .

(2) D'après (1) on a  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathbb{k} \cdot t_\alpha$ , et pour conclure il suffit de montrer que  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$ . Mais si on avait  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\}$ , alors comme dans la preuve de (1) on aurait  $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = \{0\}$ , ce qui contredirait le fait que  $\kappa$  est non dégénérée.

(3) Par l'absurde, supposons que  $\alpha(t_\alpha) = 0$ . Alors  $[t_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = [t_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \{0\}$ . D'après la preuve de (2), on peut choisir  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  et  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tels que  $\kappa(x, y) \neq 0$ . Alors  $\mathfrak{k} := \mathbb{k}x \oplus \mathbb{k}t_\alpha \oplus \mathbb{k}y$  est une sous-algèbre de Lie résoluble de  $\mathfrak{g}$ , et  $t_\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{k})$ . D'après le lemme 2.1 (appliqué à l'action de  $\mathfrak{k}$  sur  $\mathfrak{g}$  induite par  $\text{ad}$ ), on en déduit que  $\text{ad}(t_\alpha)$  est nilpotent. Comme  $t_\alpha \in \mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}$  est torale, cet endomorphisme est également diagonalisable. Donc  $\text{ad}(t_\alpha) = 0$ , ce qui implique que  $t_\alpha = 0$  puisque  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ . Ceci est absurde, puisque  $\kappa(t_\alpha, -) = \alpha \neq 0$ .

(4) D'après (2) on a  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{k} \cdot t_\alpha$ . Ce qui montre l'unicité de  $h_\alpha$ . D'autre part, d'après (3) on peut poser

$$(2.1) \quad h_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} \cdot t_\alpha = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)} \cdot t_\alpha,$$

et on a bien  $\alpha(h_\alpha) = 2$ . Puisque  $t_{-\alpha} = -t_\alpha$ , cette formule montre que  $h_{-\alpha} = -h_\alpha$ .

(5) Par les mêmes arguments que dans la preuve de (2), on  $\kappa(x_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$ . Donc, en utilisant (3), il existe  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Alors d'après (1) et la formule (2.1) on a  $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ . D'autre part, on a

$$[h_\alpha, x_\alpha] = \alpha(h_\alpha)x_\alpha = 2x_\alpha$$

puisque  $\alpha(h_\alpha) = 2$ . De même on a  $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$ . Donc l'application linéaire  $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{g}$  définie par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto x_\alpha, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto h_\alpha, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto y_\alpha$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. Comme  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  est une algèbre de Lie simple (voir [Chap. 2, Exercice 5.12]) ce morphisme est nécessairement injectif, donc un isomorphisme de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  vers  $\text{Vect}(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)$ .  $\square$

**REMARQUE 2.3.** D'après le lemme 1.4 et leur construction, les vecteurs  $t_\alpha$  engendrent l'espace vectoriel  $\mathfrak{h}$ . La proposition 2.2(2) montre alors que  $\mathfrak{g}$  est engendrée, comme algèbre de Lie, par les sous-espaces radiciels  $\mathfrak{g}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi$ . (En d'autres termes, la plus petite sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  contenant tous les  $\mathfrak{g}_\alpha$  est  $\mathfrak{g}$  elle-même.)

**COROLLAIRE 2.4.** *Soit  $\alpha \in \Phi$ .*

- (1) On a  $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ .
- (2) On a  $\Phi \cap (\mathbb{k} \cdot \alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$ .

**DÉMONSTRATION.** Fixons  $x_\alpha$  et  $y_\alpha$  comme dans la proposition 2.2(5), et notons  $S_\alpha := \text{Vect}(x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha)$ . Alors  $S_\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  (via  $x_\alpha \mapsto e, h_\alpha \mapsto h, y_\alpha \mapsto f$ ), et elle agit naturellement (via  $\text{ad}$ ) sur  $\mathfrak{g}$ .

Notons

$$\mathfrak{m} := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}} \mathfrak{g}_{\lambda \cdot \alpha} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{k}^\times} \mathfrak{g}_{\lambda \cdot \alpha}.$$

D'après le lemme 1.5(1), ce sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  est stable par l'action de  $S_\alpha$ . D'après la proposition 2.2(4),  $h_\alpha$  agit sur  $\mathfrak{g}_{\lambda \cdot \alpha}$  par multiplication par  $2\lambda$ . D'après

le corollaire 3.9 du chapitre 7, si  $\mathfrak{g}_{\lambda \cdot \alpha} \neq \{0\}$  alors  $2\lambda \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire que  $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . D'autre part  $S_\alpha$  agit trivialement sur  $\text{Ker}(\alpha) \subset \mathfrak{h}$ , qui est de codimension 1 dans  $\mathfrak{h}$ , et  $S_\alpha$  est une sous-représentation qui contient  $h_\alpha$ . Puisque que le sous-espace propre de  $\mathfrak{m}$  associé à la valeur propre 0 de l'action de  $h_\alpha$  est  $\mathfrak{h} = \text{Ker}(\alpha) \oplus \mathbb{k} \cdot h_\alpha$ , les seuls sous-espaces propres de l'action de  $h_\alpha$  associés à des valeurs propres paires sont  $\mathfrak{h}$  (pour la valeur propre 0),  $\mathfrak{g}_\alpha$  (pour la valeur propre 2) et  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  (pour la valeur propre -2), voir le théorème 3.6 du chapitre 7. Donc  $\mathfrak{g}_{\lambda \cdot \alpha} = \{0\}$  si  $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . En particulier, notons que  $2\alpha \notin \Phi$ . Si  $\frac{1}{2}\alpha$  était une racine, on pourrait lui appliquer le même résultat, et on obtiendrait que  $2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = \alpha$  n'est pas une racine, ce qui est absurde. Donc  $\frac{1}{2}\alpha$  n'est pas une racine, ce qui prouve que le sous-espace propre de  $\mathfrak{m}$  associé à la valeur propre 1 de l'action de  $h_\alpha$  est nul. En utilisant le corollaire 3.9 du chapitre 7, on obtient finalement que

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h} + S_\alpha.$$

Ceci implique (1) et (2).  $\square$

REMARQUE 2.5. (1) La décomposition 1.2 et le corollaire 2.4(1) montrent que pour tous  $h, h' \in \mathfrak{h}$  on a

$$(2.2) \quad \kappa(h, h') = \text{Tr}(\text{ad}(h) \circ \text{ad}(h')) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h) \cdot \alpha(h').$$

(2) Si  $S_\alpha$  est comme dans la preuve du corollaire 2.4, alors le point (1) de ce corollaire montre que  $S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{k} \cdot h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . En particulier, cette sous-algèbre de Lie est indépendante du choix de  $x_\alpha$  et  $y_\alpha$ . De plus, si  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  est fixé, alors l'élément  $y_\alpha$  de la proposition 2.2(5) est unique.

## 2.2. Propriétés des paires de racines non opposées.

PROPOSITION 2.6. Soient  $\alpha, \beta \in \Phi$ , et supposons que  $\beta \notin \{\alpha, -\alpha\}$ .

- (1) On a  $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ , et  $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$ .
- (2) Si  $r$ , respectivement  $q$ , est l'entier le plus grand tel que  $\beta - r\alpha \in \Phi$ , respectivement  $\beta + q\alpha \in \Phi$ , alors on a  $r - q = \beta(h_\alpha)$ , et tous les éléments de la forme  $\beta + i \cdot \alpha$  avec  $i \in \{-r, -r + 1, \dots, q - 1, q\}$  appartiennent à  $\Phi$ .
- (3) Si  $\alpha + \beta \in \Phi$ , alors  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons la sous-algèbre de Lie  $S_\alpha$  comme dans la preuve du corollaire 2.4, et son action sur  $\mathfrak{g}$ . On pose

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}.$$

D'après le lemme 1.5(1), ce sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  est stable par l'action de  $S_\alpha$ . Comme  $h_\alpha$  agit sur  $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$  par multiplication par  $\beta(h_\alpha) + 2i$ , on déduit (1) du corollaire 3.9 du chapitre 7.

D'après le corollaire 2.4, on a  $\beta + i \cdot \alpha \neq 0$  pour tout  $i$ , et chaque  $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$  est de dimension au plus 1. Donc les espaces propres de l'action de  $h_\alpha$  sur  $\mathfrak{k}$  sont de dimension 1. De plus, les valeurs propres correspondantes sont toutes de même parité. Le corollaire 3.9 du chapitre 7 montre alors que  $\mathfrak{k}$  est une représentation simple de  $S_\alpha$ . Avec les notations de (2), son plus haut poids est  $\beta(h_\alpha) + 2q$ , et son plus bas poids est  $\beta(h_\alpha) - 2r$ . On doit donc avoir

$$\beta(h_\alpha) - 2r = -(\beta(h_\alpha) + 2q),$$

c'est-à-dire  $\beta(h_\alpha) = r - q$ . De plus, tous les entiers  $\beta(h_\alpha) + 2i$  avec  $i \in \{-r, -r + 1, \dots, q-1, q\}$  doivent être des valeurs propres de l'action de  $h_\alpha$  sur  $\mathfrak{k}$ , ce qui montre que les éléments  $\beta + i\alpha$  sont dans  $\Phi$ , et achève la preuve de (2).

Finalement, (3) découle du corollaire 3.5 du chapitre 7.  $\square$

**2.3. Propriétés de rationalité.** Comme vu au §1.3, la restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée. Elle induit donc un isomorphisme  $\iota : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ . On peut alors définir une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $(-, -)$  sur  $\mathfrak{h}^*$  en posant

$$(\varphi, \psi) := \kappa(\iota^{-1}(\varphi), \iota^{-1}(\psi)) = \varphi(\iota^{-1}(\psi)) = \psi(\iota^{-1}(\varphi)).$$

Puisque  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 0, il existe une injection canonique  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{k}$ .

LEMME 2.7. *Si  $\alpha, \beta \in \Phi$  alors  $(\alpha, \alpha) \neq 0$  et  $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ .*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, puisque  $\iota^{-1}(\alpha) = t_\alpha$  par définition, on a  $(\alpha, \alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha)$ , et ce scalaire est non nul d'après la proposition 2.2(3). D'autre part, par construction, on a

$$\iota^{-1}\left(\frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}\right) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} \cdot t_\alpha = h_\alpha$$

(voir (2.1)). Donc

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \beta(h_\alpha),$$

donc le résultat découle de la proposition 2.6(1).  $\square$

D'après le lemme 1.4, on peut choisir  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Phi$  qui forment une base de  $\mathfrak{h}^*$ .

LEMME 2.8. *On a  $\Phi \subset \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Q} \cdot \alpha_i$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\beta \in \Phi$ . Alors il existe  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{k}$  (uniques) tels que  $\beta = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \alpha_i$ , et ce qu'on doit montrer est que  $c_i \in \mathbb{Q}$  pour tout  $i$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , on a

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot (\alpha_i, \alpha_j),$$

et donc

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

Si on note :

- $A \in M_n(\mathbb{k})$  la matrice dont le terme en position  $(i, j)$  est  $\frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ ,
- $X \in \mathbb{k}^n$  le vecteur de  $i$ -ème coordonnée  $c_i$ ,
- $Y \in \mathbb{k}^n$  le vecteur de  $i$ -ème coordonnée  $\frac{2(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ ,

on a donc

$$Y = A \cdot X.$$

Comme la forme  $(-, -)$  est non dégénérée, la matrice  $A$  est inversible, et donc  $X = A^{-1} \cdot Y$ . D'autre part, le lemme 2.7 implique que les coefficients de  $A$  sont entiers; donc les coefficients de  $A^{-1}$  sont dans  $\mathbb{Q}$ . De même, les coefficients de  $Y$  sont dans  $\mathbb{Q}$ . Donc les coefficients de  $X = A^{-1} \cdot Y$  sont également dans  $\mathbb{Q}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

On pose

$$V_{\mathbb{Q}} := \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Q} \cdot \alpha \subset \mathfrak{h}^*.$$

Alors  $V_{\mathbb{Q}}$  est un sous- $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de  $\mathfrak{h}^*$ , et le lemme 2.8 montre qu'on a  $\dim_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}}) = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}^*)$ .

LEMME 2.9. *Pour tous  $\varphi, \psi \in V_{\mathbb{Q}}$ , on a  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{Q}$ . De plus, si  $\varphi \in V_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ , on a  $(\varphi, \varphi) > 0$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tous  $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}^*$ , en utilisant (2.2) on a

$$(\varphi, \psi) = \kappa(\iota^{-1}(\varphi), \iota^{-1}(\psi)) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(\iota^{-1}(\varphi)) \cdot \alpha(\iota^{-1}(\psi)) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \varphi) \cdot (\alpha, \psi).$$

En particulier, si  $\beta \in \Phi$  on a  $(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2$ , et ce terme est non nul d'après le lemme 2.7. Donc

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right)^2.$$

D'après le lemme 2.7 le membre de droite est dans  $\mathbb{Q}$ , donc  $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$ . Et en utilisant encore une fois le lemme 2.7 on obtient finalement que pour tous  $\beta, \gamma \in \Phi$  on a  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{Q}$ , et donc que pour tous  $\varphi, \psi \in V_{\mathbb{Q}}$  on a  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{Q}$ .

Si  $\varphi \in V_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ , comme ci-dessus on a

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \varphi)^2.$$

Comme tous les  $(\alpha, \varphi)$  sont rationnels, ce terme est rationnel et positif. S'il est nul alors  $(\alpha, \varphi) = 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ , ce qui prouve que  $\varphi = 0$  puisque la forme  $(-, -)$  sur  $\mathfrak{h}^*$  est non dégénérée et  $\Phi$  engendre  $\mathfrak{h}^*$  (voir le lemme 1.4).  $\square$

Finalement, on pose

$$E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}.$$

Alors  $E$  a une structure naturelle de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel telle que

$$x \cdot (y \otimes \varphi) = (xy) \otimes \varphi$$

pour  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in V_{\mathbb{Q}}$ . De plus, on a  $\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}}) = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}^*)$ . Il existe une unique forme bilinéaire (réelle) symétrique non dégénérée  $(-, -)$  sur  $E$  telle que

$$(x \otimes \varphi, y \otimes \psi) = xy \cdot (\varphi, \psi).$$

De plus, pour tous  $\xi, \eta \in E$ , comme dans la preuve du lemme 2.9 on a

$$(\xi, \eta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \xi) \cdot (\alpha, \eta).$$

On en déduit que pour tout  $\xi \in E$  on a  $(\xi, \xi) > 0$ , et donc que  $(-, -)$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive. En d'autres termes,  $(E, (-, -))$  est un espace euclidien.

Pour résumer, on peut donc voir  $\Phi$  comme une partie de l'espace euclidien  $E$  telle que :

- (1)  $\Phi$  engendre  $E$  et ne contient pas 0.
- (2) Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $\Phi \cap (\mathbb{R} \cdot \alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$ .



(3) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , alors

$$\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha \in \Phi.$$

(4) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , alors

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

(Pour (1), voir le lemme 1.4. Pour (2), voir le corollaire 2.4(2). Pour (3) et (4), voir la proposition 2.6(1) et la preuve du lemme 2.7.)

### 3. Remarque sur l'unicité

La construction du système de racines  $\Phi$  dépend du choix initial de la sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . Nous ne traiterons pas ceci en détail, mais on peut montrer que si  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$  est une autre sous-algèbre torale maximale, alors il existe un automorphisme d'algèbre de Lie  $\varphi$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ . Alors  $\varphi$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{h}')^*$  qui envoie le système de racines  $\Phi$  construit à partir de  $\mathfrak{h}$  sur le système de racines  $\Phi'$  construit à partir de  $\mathfrak{h}'$ . Si  $E$  est construit comme ci-dessus, et  $E'$  est construit de la même façon mais en utilisant  $\mathfrak{h}'$  au lieu de  $\mathfrak{h}$ , alors  $\varphi$  induit un isomorphisme d'espaces euclidiens  $E \xrightarrow{\sim} E'$ . Donc les systèmes de racine  $\Phi$  (dans  $E$ ) et  $\Phi'$  (dans  $E'$ ) sont isomorphes, au sens du chapitre 9.



## Systèmes de racines et groupes de Weyl

### 1. Définitions et premières propriétés

**1.1. Réflexions dans un espace euclidien.** Soit  $(E, (-, -))$  un espace euclidien. Si  $\alpha \in E \setminus \{0\}$ , on définit

$$\alpha^\vee : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \beta & \mapsto & \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \end{cases} .$$

Alors  $\alpha^\vee$  est une forme linéaire sur  $E$  qui vérifie  $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ , où  $\langle -, - \rangle$  désigne l'accouplement naturel  $E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note également  $s_\alpha : E \rightarrow E$  l'application définie par

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \cdot \alpha.$$

Cette application coïncide avec l'identité sur l'hyperplan  $H_\alpha = \{\beta \in E \mid (\alpha, \beta) = 0\}$  (c'est-à-dire l'hyperplan orthogonal à  $\alpha$ ), et vérifie  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ . Donc  $s_\alpha$  est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan  $H_\alpha$ . En particulier, c'est une isométrie qui vérifie  $(s_\alpha)^2 = \text{id}$ .

EXERCICE 1.1. Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$  on a  $s_{\lambda \cdot \alpha} = s_\alpha$ , et que pour toute isométrie  $\varphi : E \xrightarrow{\sim} E$  on a  $\varphi \circ s_\alpha \circ \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$ .

### 1.2. Systèmes de racines.

DÉFINITION 1.2. Un sous-ensemble  $\Phi \subset E$  est appelé un *système de racines* s'il vérifie les axiomes suivants :

- (1)  $\Phi$  est fini, engendre  $E$ , et ne contient pas 0.
- (2) Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $\Phi \cap (\mathbb{R} \cdot \alpha) = \{\alpha, -\alpha\}$ .
- (3) Si  $\alpha \in \Phi$ , alors  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ .
- (4) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , alors  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ .

La dimension de  $E$  est appelée le *rang* de  $\Phi$ .

Si  $\Phi$  est un système de racines, on note  $W$  le sous-groupe de  $\text{GL}(E)$  (ou, de façon équivalente, du groupe des isométries de  $E$ ) engendré par les réflexions  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi$ . D'après l'axiome (3), pour tout  $w \in W$  on a  $w(\Phi) = \Phi$ , donc  $w$  induit une bijection de  $\Phi$  vers lui-même. Et comme, d'après (1),  $\Phi$  engendre  $E$ , cette bijection détermine  $w$  entièrement. Donc, si  $\mathfrak{S}(\Phi)$  désigne le groupe des bijections de  $\Phi$  vers lui-même, alors la restriction à  $\Phi$  induit un morphisme de groupes injectif de  $W$  vers  $\mathfrak{S}(\Phi)$ . En particulier,  $W$  est un groupe *fini*.

Soit  $\Phi$  un système de racines dans  $E$ , et soit  $\Phi'$  un système de racines dans un (autre) espace euclidien  $E'$ . On dit que les systèmes de racines  $\Phi$  (dans  $E$ )

et  $\Phi'$  (dans  $E'$ ) sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\psi : E \rightarrow E'$  tel que  $\psi(\Phi) = \Phi'$  et tel que pour tous  $\alpha, \beta \in \Phi$  on a

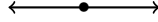
$$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \langle (\psi(\alpha))^\vee, \psi(\beta) \rangle, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\psi(\beta), \psi(\alpha))}{(\psi(\alpha), \psi(\alpha))}.$$

(Notons qu'on ne demande pas à  $\psi$  d'être une isométrie.) Tout élément de  $W$  est un isomorphisme de systèmes de racines de  $\Phi$  vers lui-même.

**EXERCICE 1.3.** Montrer que si  $\Phi \subset E$  et  $\Phi' \subset E'$  sont des systèmes de racines, de groupes de Weyl respectifs  $W$  et  $W'$ , et si  $\psi : E \rightarrow E'$  est un isomorphisme de systèmes de racines, alors l'application  $f \mapsto \psi \circ f \circ \psi^{-1}$  induit un isomorphisme de  $W$  vers  $W'$ .

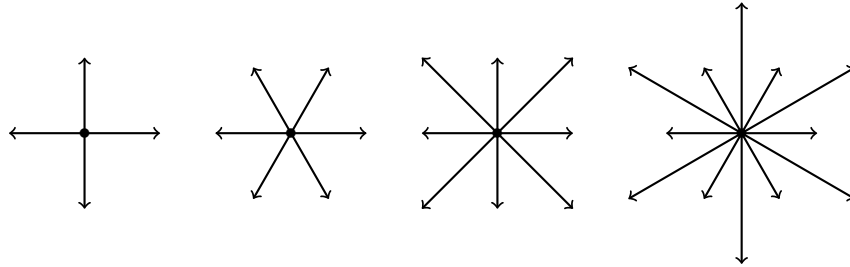
**EXERCICE 1.4.** Si  $(E, (-, -))$  est un espace euclidien, alors l'application  $x \mapsto (x, -)$  définit un isomorphisme  $E \xrightarrow{\sim} E^*$ , ce qui permet de "transférer" le produit scalaire  $(-, -)$  à  $E^*$ , donc de voir cet espace vectoriel comme un espace euclidien. Montrer que si  $\Phi$  est un système de racines dans  $\Phi$ , alors  $\Phi^\vee := \{\alpha^\vee, \alpha \in \Phi\}$  est un système de racines dans  $E^*$ . Montrer que le groupe de Weyl de  $\Phi^\vee$  est canoniquement isomorphe à celui de  $\Phi$ .

**1.3. Exemples.** Si  $\dim(E) = 1$ , les conditions (1) et (2) assurent que le seul système de racine (à isomorphisme près) est le suivant :



Ce système de racines est appelé le système de racines *de type  $\mathbf{A}_1$* . Notons que les 2 racines ont la même longueur, mais que cette longueur n'importe pas : tous les systèmes de racines de cette forme (quelle que soit la longueur des racines) sont isomorphes.

Les sous-ensembles suivants de vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  (muni du produit scalaire usuel) sont des systèmes de racines :



Ces systèmes de racines sont appelés respectivement *de type  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$* , *de type  $\mathbf{A}_2$* , *de type  $\mathbf{B}_2$* , et *de type  $\mathbf{G}_2$* .

**1.4. Angles entre deux racines.** Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ , et soient  $\alpha, \beta \in \Phi$  des racines telles que  $\beta \notin \{\alpha, -\alpha\}$ . Alors  $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2, qui est muni d'une structure d'espace euclidien par restriction du produit scalaire de  $E$ . Dans cet espace on peut parler de *l'angle  $\theta$*  (non orienté) entre  $\alpha$  et  $\beta$  : par définition, cet angle est l'unique  $\theta \in [0, \pi[$  tel que

$$(1.1) \quad (\alpha, \beta) = \sqrt{(\alpha, \alpha)} \cdot \sqrt{(\beta, \beta)} \cdot \cos(\theta).$$

**LEMME 1.5.** Si  $\theta$  est l'angle entre  $\alpha$  et  $\beta$ , on a  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \cdot \langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 4(\cos(\theta))^2$ .

DÉMONSTRATION. On calcule en utilisant (1.1) :

$$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \cdot \langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 4 \cdot \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta)} = 4(\cos(\theta))^2,$$

ce qui donne la formule voulue.  $\square$

COROLLAIRE 1.6. *Pour fixer les notations, supposons que  $(\alpha, \alpha) \geq (\beta, \beta)$ . Alors les seules valeurs possibles de  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$ ,  $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle$ ,  $\theta$  et  $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$  sont les suivantes :*

$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$	$\langle \beta^\vee, \alpha \rangle$	$\theta$	$\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$
0	0	$\pi/2$	?
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

DÉMONSTRATION. En comparant le lemme 1.5 et l'axiome (4) de la définition d'un système de racines, on voit que  $4(\cos(\theta))^2 \in \mathbb{Z}$ . D'autre part on a  $(\cos(\theta))^2 < 1$ , puisque  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas colinéaires. Donc les seules valeurs possibles de  $4(\cos(\theta))^2$  sont 0, 1, 2, 3. Ceci fixe les valeurs possibles de  $\theta$ . Si  $\cos(\theta) = 0$ , on a  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 0$ . Sinon, une fois la valeur de  $\theta$  fixée, les entiers  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$  et  $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle$  sont du signe de  $\cos(\theta)$  (d'après (1.1)), doivent vérifier l'égalité du lemme 1.5, et vérifient également

$$|\langle \alpha^\vee, \beta \rangle| \leq |\langle \beta^\vee, \alpha \rangle|$$

(puisque  $(\alpha, \alpha) \geq (\beta, \beta)$ ). Ces conditions déterminent ces entiers uniquement. Finalement, si  $(\alpha, \beta) \neq 0$ , la valeur du quotient  $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$  est fixée par l'égalité

$$\frac{\langle \beta^\vee, \alpha \rangle}{\langle \alpha^\vee, \beta \rangle} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)},$$

qui découle directement des définitions.  $\square$

EXERCICE 1.7. En utilisant les exemples du §1.3, montrer que toutes les possibilités considérées dans le tableau du corollaire 1.6 peuvent effectivement arriver dans un système de racines.

**1.5. Application.** On fixe comme précédemment un système de racines  $\Phi$  dans un espace euclidien  $E$ .

LEMME 1.8. *Soient  $\alpha, \beta \in \Phi$  deux racines non colinéaires. Si  $(\alpha, \beta) > 0$ , alors  $\alpha - \beta \in \Phi$ . Si  $(\alpha, \beta) < 0$ , alors  $\alpha + \beta \in \Phi$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $(\alpha, \beta) > 0$ . Le corollaire 1.6 montre que soit  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 1$ , soit  $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 1$ . Dans le premier cas on a  $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha$ , donc  $\alpha - \beta = -s_\alpha(\beta) \in \Phi$ . Dans le deuxième cas, on a  $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$ , donc ce vecteur appartient à  $\Phi$ .

Si  $(\alpha, \beta) < 0$ , alors  $(\alpha, -\beta) > 0$ , donc  $\alpha - (-\beta)$  appartient à  $\Phi$  d'après le premier cas, ce qui prouve le fait voulu.  $\square$

## 2. Bases, racines simples, et chambres de Weyl

Dans cette partie on fixe un système de racines  $\Phi$  dans un espace euclidien  $E$ .

### 2.1. Base d'un système de racines.

DÉFINITION 2.1. Une *base* de  $\Phi$  est un sous-ensemble  $\Delta \subset \Phi$  tel que :

- (1)  $\Delta$  est une base de  $E$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ;
- (2) toute racine  $\beta \in \Phi$  s'écrit  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha$  avec des coefficients  $k_\alpha$  qui sont des entiers soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.

Notons que, sous la condition (1), les coefficients  $k_\alpha$  qui apparaissent dans (2) sont uniques. Les racines  $\beta$  telles que ces coefficients sont tous positifs ou nuls seront appelées *positives*, et on notera alors  $\beta \succ 0$ , et celles telles que ces coefficients sont tous négatifs ou nuls seront appelées *négatives*, et on notera alors  $\beta \prec 0$ . Les racines appartenant à  $\Delta$  seront appelées *simples*. On notera également

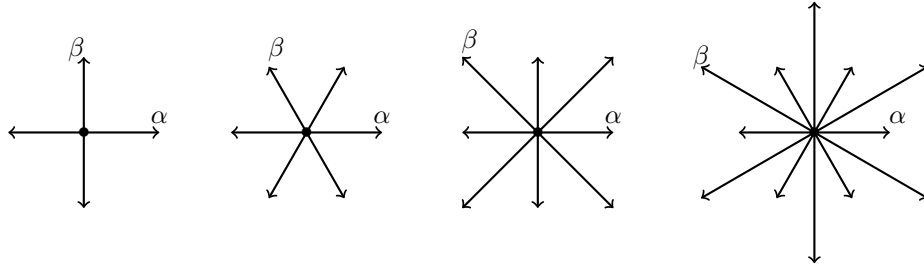
$$\Phi^+ := \{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0\}, \quad \Phi^- := \{\beta \in \Phi \mid \beta \prec 0\}.$$

On a alors

$$(2.1) \quad \Phi^- = -\Phi^+ \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-.$$

On peut définir un ordre partiel sur  $E$  en déclarant que  $\lambda \preceq \mu$  si et seulement si  $\mu - \lambda$  est une somme de racines positives, ou de façon équivalente une somme de racines simples. On écrira parfois  $\mu \succeq \lambda$  au lieu de  $\lambda \preceq \mu$ , et on notera  $\lambda \prec \mu$  si  $\lambda \preceq \mu$  et  $\lambda \neq \mu$ . Notons que ces définitions ne sont pas en contradiction avec les notations  $\beta \prec 0$  et  $\beta \succ 0$  introduites précédemment. (Remarquons que toutes ces notations et définitions dépendent du choix initial de la base  $\Delta$ .)

EXERCICE 2.2. Vérifier que les vecteurs notés  $\alpha$  et  $\beta$  ci-dessous forment une base dans chacun des systèmes de racines suivants :



LEMME 2.3. Si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$  et si  $\alpha, \beta \in \Delta$  avec  $\alpha \neq \beta$ , alors  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

DÉMONSTRATION. Si  $(\alpha, \beta) > 0$ , d'après le lemme 1.8,  $\alpha - \beta$  est une racine, ce qui contredit la condition (2) de la définition d'une base.  $\square$

LEMME 2.4. Soit  $\Delta$  une base quelconque de  $E$ . Alors il existe  $\gamma \in E$  tel que  $(\gamma, \alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ .

DÉMONSTRATION. Pour chaque  $\alpha \in \Delta$  on note  $\gamma_\alpha$  la projection orthogonale de  $\alpha$  sur la droite orthogonale à l'hyperplan  $\text{Vect}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ . Alors on a

$$(\alpha, \gamma_\alpha) = (\gamma_\alpha, \gamma_\alpha)$$

puisque  $\alpha - \gamma_\alpha \in \text{Vect}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ , de sorte que  $(\alpha - \gamma_\alpha, \gamma_\alpha) = 0$ . D'autre part  $\gamma_\alpha \neq 0$ , puisque  $\alpha \notin \text{Vect}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ . Donc  $(\alpha, \gamma_\alpha) > 0$ .

On pose finalement  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} \gamma_\alpha$ , et pour tout  $\alpha \in \Delta$  on observe que

$$(\gamma, \alpha) = (\gamma_\alpha, \alpha) > 0,$$

de sorte que  $\gamma$  vérifie la condition voulue.  $\square$

**2.2. Construction des bases de  $\Phi$ .** Maintenant nous allons expliquer comment on peut construire toutes les bases possibles de  $\Phi$ . Ceci montrera en particulier qu'il existe au moins une base, ce qui n'est pas clair d'après la définition.

LEMME 2.5. *Soit  $\xi \in E^*$ , et soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  tels que  $\xi(v_i) > 0$  pour tout  $i$ , et tels que  $(v_i, v_j) \leq 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$ . Alors les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  sont tels que  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i = 0$ . Soient  $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \geq 0\}$  et  $J = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i < 0\}$ . Alors on a

$$\sum_{i \in I} x_i \cdot v_i = \sum_{j \in J} (-x_j) \cdot v_j.$$

Si on note  $v$  ce vecteur, on a

$$(v, v) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i \cdot (-x_j) \cdot (v_i, v_j) \leq 0$$

puisque chaque  $x_i \cdot (-x_j)$  est positif ou nul et chaque  $(v_i, v_j)$  est négatif ou nul. Ceci implique que  $v = 0$ . Puis on observe que

$$0 = \xi(v) = \sum_{i \in I} x_i \cdot \xi(v_i) = \sum_{j \in J} (-x_j) \cdot \xi(v_j),$$

ce qui implique que  $J = \emptyset$  et que chaque  $x_i$  est nul.  $\square$

Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , rappelons qu'on note  $H_\alpha \subset E$  l'hyperplan orthogonal à  $\alpha$ . On note alors

$$E_{\text{reg}} := E \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha \right).$$

Cet ensemble est un ouvert non vide<sup>1</sup> de  $E$  pour la topologie induite par la norme euclidienne. Si  $\gamma \in E_{\text{reg}}$ , on note

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}.$$

On a alors

$$(2.2) \quad \Phi = \Phi^+(\gamma) \sqcup (-\Phi^+(\gamma)).$$

On dira qu'une racine  $\beta \in \Phi^+(\gamma)$  est *décomposable* s'il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$  tels que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . On dira que  $\beta$  est *indécomposable* si elle n'est pas décomposable, et on notera  $\Delta(\gamma)$  l'ensemble des racines indécomposables dans  $\Phi^+(\gamma)$ .

THÉORÈME 2.6. *Le sous-ensemble  $\Delta(\gamma) \subset \Phi$  est une base de  $\Phi$ . De plus, pour toute base  $\Delta$  de  $\Phi$  il existe  $\gamma \in E_{\text{reg}}$  tel que  $\Delta = \Delta(\gamma)$ .*

DÉMONSTRATION. On procède en 4 étapes.

*Étape 1 :* tout élément de  $\Phi^+(\gamma)$  est une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{N}$  de vecteurs de  $\Delta(\gamma)$ . En effet, supposons que ce n'est pas le cas, et choisissons  $\beta \in \Phi^+(\gamma)$  qui ne vérifie pas cette propriété et tel que la valeur de  $(\gamma, \beta)$  est minimale parmi les racines qui ne la vérifient pas. Alors  $\beta \notin \Delta(\gamma)$ , donc  $\beta$  est décomposable : il existe  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$  tels que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . Alors  $(\gamma, \beta) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$ , donc  $(\gamma, \beta_1) < (\gamma, \beta)$  et  $(\gamma, \beta_2) < (\gamma, \beta)$ . Par minimalité, ceci implique que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont

1. Rappelons que, plus généralement, si  $\mathbb{F}$  est un corps infini, si  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}$ , et si  $V_1, \dots, V_n$  sont des sous-espaces vectoriels stricts de  $V$ , alors  $\bigcup_{i=1}^n V_i \neq V$ .

des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{N}$  de vecteurs de  $\Delta(\gamma)$ . Donc il en est de même de  $\beta$ , ce qui fournit la contradiction voulue.

*Étape 2 :* pour tous  $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$  avec  $\alpha \neq \beta$ , on a  $(\alpha, \beta) \leq 0$ . En effet, si  $(\alpha, \beta) > 0$  alors, d'après le lemme 1.8,  $\alpha - \beta$  est une racine. Si cette racine appartient à  $\Phi^+(\gamma)$  alors le fait que  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$  contredit l'hypothèse que  $\alpha$  est indécomposable. Et sinon  $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$ , et le fait que  $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$  contredit l'hypothèse que  $\beta$  est indécomposable.

*Étape 3 :*  $\Delta(\gamma)$  est une base de  $\Phi$ . D'après le lemme 2.5 et l'étape 2, les vecteurs dans  $\Delta(\gamma)$  sont linéairement indépendants. Et comme  $\Phi$  engendre  $E$ , il en est de même de  $\Phi^+(\gamma)$  d'après (2.2), et alors l'étape 1 montre que  $\Delta(\gamma)$  engendre  $E$ , donc est une base de  $E$ . La condition (2) de la définition d'une base de  $\Phi$  découle également de l'étape 1 et de (2.2).

*Étape 4 :* pour toute base  $\Delta$  de  $\Phi$ , il existe  $\gamma \in E_{\text{reg}}$  tel que  $\Delta = \Delta(\gamma)$ . Fixons une base  $\Delta$ , et considérons un vecteur  $\gamma$  comme dans le lemme 2.4. La condition (2) de la définition d'une base assure alors que  $\gamma \in E_{\text{reg}}$ . Et il est clair que  $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$  et  $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ . En comparant (2.1) et (2.2), ceci montre que  $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ . De cette égalité on déduit que les racines dans  $\Delta$  sont indécomposables, donc que  $\Delta \subset \Delta(\gamma)$ . Finalement, puisque  $\Delta$  et  $\Delta(\gamma)$  sont des bases de  $E$ , elles ont même cardinal, de sorte que  $\Delta = \Delta(\gamma)$ .  $\square$

**2.3. Correspondance entre bases et chambres de Weyl.** Les composantes connexes de l'ouvert  $E_{\text{reg}} \subset E$  sont appelées les *chambres de Weyl* de  $\Phi$ . Ce sont des intersections de demi-espaces ouverts.

Étant donnée une base  $\Delta$  de  $\Phi$ , on pose

$$\mathcal{C}(\Delta) = \{\gamma \in E \mid \forall \alpha \in \Delta, (\gamma, \alpha) > 0\}.$$

D'après le lemme 2.4,  $\mathcal{C}(\Delta)$  est un ouvert non vide de  $E$ . De plus, pour tout  $\beta \in \Phi^+$ , on a  $\mathcal{C}(\Delta) \subset \{\gamma \in E \mid (\gamma, \beta) > 0\}$ , et pour tout  $\beta \in \Phi^-$  on a  $\mathcal{C}(\Delta) \subset \{\gamma \in E \mid (\gamma, \beta) < 0\}$ . Donc  $\mathcal{C}(\Delta)$  est une intersection non vide de demi-plans délimités par des hyperplans de la forme  $H_\beta$  avec  $\beta \in \Phi$ , et est inclus dans  $E_{\text{reg}}$ . Donc  $\mathcal{C}(\Delta)$  est une composante connexe de  $E_{\text{reg}}$ , c'est-à-dire une chambre de Weyl.

Réciproquement, soit  $\mathcal{C}$  une chambre de Weyl, et soient  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}$ . Comme  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont du même côté de chaque hyperplan  $H_\beta$  ( $\beta \in \Phi$ ), il est clair que  $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ , et donc que  $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ . On peut donc définir  $\Delta(\mathcal{C})$  comme étant  $\Delta(\gamma)$  pour n'importe que  $\gamma \in \mathcal{C}$ .

Avec ces définitions, il est facile de vérifier que les opérations

$$\Delta \mapsto \mathcal{C}(\Delta), \quad \mathcal{C} \mapsto \Delta(\mathcal{C})$$

définissent des bijections réciproques l'une de l'autre entre les chambres de Weyl et les bases de  $\Phi$ .

Notons que si  $\Delta$  est une base et si  $w \in W$ , alors  $w(\Delta) = \{w(\alpha), \alpha \in \Delta\}$  est également une base. En d'autres termes,  $W$  agit sur l'ensemble des bases de  $\Phi$ . D'autre part, l'action de  $W$  sur  $E$  stabilise  $E_{\text{reg}}$ , de sorte que  $W$  agit également sur l'ensemble des chambres de Weyl. Il est facile de vérifier que ces deux actions de  $W$  se correspondent via la bijection entre bases et chambres de Weyl considérée ci-dessus.

**EXERCICE 2.7.** (1) Montrer que si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$ , alors on a

$$\overline{\mathcal{C}(\Delta)} = \{\gamma \in E \mid \forall \alpha \in \Delta, (\gamma, \alpha) \geq 0\}$$



(où  $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$  est l'adhérence de  $\mathcal{C}(\Delta)$ ).

- (2) Montrer que si  $\beta \in \Phi$ , alors  $H_\beta \cap \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$  engendre  $H_\beta$  ssi  $\beta \in \Delta \cup (-\Delta)$ .
- (3) Montrer que si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$ , alors  $\Delta^\vee := \{\alpha^\vee, \alpha \in \Delta\}$  est une base du système de racines  $\Phi^\vee$  de l'exercice 1.4. (*Indication* : on pourra comparer les chambres de Weyl de  $\Phi$  avec les images inverses sous l'isomorphisme  $E \xrightarrow{\sim} E^*$  des chambres de Weyl de  $\Phi^\vee$ .)

EXERCICE 2.8. Montrer que si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$  et si  $\beta \in \Phi$  est une racine positive mais non simple, il existe  $\alpha \in \Delta$  tel que  $\beta - \alpha$  est une racine positive. (*Indication* : en utilisant le lemme 2.5, on pourra montrer qu'il existe  $\alpha \in \Delta$  tel que  $(\beta, \alpha) > 0$ , puis utiliser le lemme 1.8.)

### 3. Étude du groupe de Weyl

Dans cette partie on fixe un système de racines  $\Phi$  dans un espace euclidien  $E$ , et une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

#### 3.1. Quelques lemmes sur les racines simples.

LEMME 3.1. Soit  $\alpha \in \Delta$ . Alors  $s_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ , et écrivons  $\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \cdot \beta$ . Alors comme  $\gamma \neq \alpha$ , il existe  $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$  tel que  $k_\beta > 0$ . On a

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \cdot \alpha = \sum_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}} k_\beta \cdot \beta + (k_\alpha - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle) \cdot \alpha.$$

Donc un des coefficients de la racine  $s_\alpha(\beta)$  sur la base  $\Delta$  est positif, ce qui montre que  $s_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ . Cette racine ne peut pas être égale à  $\alpha$  car sinon on aurait  $\beta = s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ , ce qui est absurde puisque  $\beta$  est positive.  $\square$

On pose maintenant

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 3.1.

COROLLAIRE 3.2. Pour tout  $\alpha \in \Delta$  on a  $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ , et donc  $\langle \alpha^\vee, \rho \rangle = 1$ .

LEMME 3.3. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des racines simples (non nécessairement distinctes), et posons  $s_i = s_{\alpha_i}$  pour tout  $i$ . Si  $s_1 \cdots s_{n-1}(\alpha_n) \prec 0$ , alors il existe  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que

$$s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{n-1}.$$

DÉMONSTRATION. Pour  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ , on pose  $\beta_i = s_{i+1} \cdots s_{n-1}(\alpha_n)$ , et pour  $i = n-1$  on pose  $\beta_i = \alpha_n$ . Par hypothèse on a  $\beta_{n-1} \succ 0$ , et  $\beta_0 \prec 0$ . Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\beta_i \succ 0$ . Alors  $i > 0$ , et  $s_i(\beta_i) = \beta_{i-1} \prec 0$ . Donc, d'après le lemme 3.1, on a  $\beta_i = \alpha_i$ . En utilisant l'exercice 1.1 on en déduit que

$$s_i = s_{\beta_i} = (s_{i+1} \cdots s_{n-1}) s_n (s_{n-1} \cdots s_{i+1}).$$

Ceci implique que

$$s_i \cdots s_n = s_{i+1} \cdots s_{n-1},$$

et donc l'égalité voulue.  $\square$

**COROLLAIRE 3.4.** *Si  $w \in W$ , et si  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$  et  $n$  minimal parmi les décompositions de  $w$  comme produit de réflexions  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$ , alors  $w(\alpha_n) \prec 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Le lemme 3.3 et notre hypothèse de minimalité assurent que  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{n-1}}(\alpha_n) \succ 0$ . Donc  $w(\alpha_n) = -s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{n-1}}(\alpha_n) \prec 0$ .  $\square$

### 3.2. Groupe de Weyl et racines simples.

**THÉORÈME 3.5.** (1) *Pour tout  $\gamma \in E_{\text{reg}}$  il existe  $w \in W$  tel que  $w(\gamma) \in \mathcal{C}(\Delta)$ .*

(2) *Si  $\Delta'$  est une autre base de  $\Phi$ , il existe  $w \in W$  tel que  $w(\Delta') = \Delta$ .*

(3) *Si  $\alpha \in \Phi$ , il existe  $w \in W$  tel que  $w(\alpha) \in \Delta$ .*

(4)  *$W$  est engendré par les réflexions  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ .*

(5) *Si  $w \in W$  et  $w(\Delta) = \Delta$ , alors  $w = \text{id}$ .*

**REMARQUE 3.6.** Les propriétés (2) et (5) s'expriment en disant que l'action de  $W$  sur l'ensemble des bases de  $\Phi$  est *simplement transitive*.

**DÉMONSTRATION.** On note  $W'$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$ . On va démontrer les propriétés (1), (2) et (3) pour le groupe  $W'$  au lieu de  $W$ , puis utiliser ces résultats pour montrer que  $W' = W$  (c'est-à-dire pour démontrer (4)).

(1) Choisissons  $w \in W'$  tel que la valeur de  $(w(\gamma), \rho)$  est maximale (parmi les valeurs pour tous les choix de  $w \in W'$ ). Alors si  $\alpha \in \Delta$ , par maximalité on a

$$(w(\gamma), \rho) \geq (s_\alpha w(\gamma), \rho) = (w(\gamma), s_\alpha(\rho)) = (w(\gamma), \rho) - (w(\gamma), \alpha)$$

d'après le corollaire 3.2. Donc on a  $(w(\gamma), \alpha) \geq 0$ . De plus, puisque  $w(\gamma) \in E_{\text{reg}}$ , on a  $(w(\gamma), \alpha) \neq 0$ ; on a donc  $(w(\gamma), \alpha) > 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a donc  $w(\gamma) \in \mathcal{C}(\Delta)$ .

(2) D'après le théorème 2.6, il existe  $\gamma \in E_{\text{reg}}$  tel que  $\Delta' = \Delta(\gamma)$ . D'après (1) il existe  $w \in W'$  tel que  $w(\gamma) \in \mathcal{C}(\Delta)$ . Alors

$$w(\Delta') = w(\Delta(\gamma)) = \Delta(w(\gamma)) = \Delta(\mathcal{C}(\Delta)) = \Delta.$$

(3) D'après (2), il suffit de montrer que  $\alpha$  appartient à une base de  $\Phi$ . Pour tout  $\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}$ , on a  $H_\beta \cap H_\alpha \neq H_\alpha$ . Donc la réunion

$$\bigcup_{\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}} H_\beta \cap H_\alpha$$

n'est pas égale à  $H_\alpha$  (voir la note de bas de page 1). Choisissons donc  $\gamma \in H_\alpha$ , qui n'appartient à aucun  $H_\beta$  pour  $\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}$ . Alors on peut choisir un vecteur  $\gamma' \in E_{\text{reg}}$  suffisamment proche de  $\gamma$  de sorte que  $(\gamma', \alpha) > 0$  et  $|(\gamma', \beta)| > (\gamma', \alpha)$  pour tout  $\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}$ . Par définition  $\alpha \in \Phi^+(\gamma')$ , et la condition sur  $\gamma'$  assure que  $\alpha$  est indécomposable, donc appartient à  $\Delta(\gamma')$ .

(4) Pour démontrer que  $W' = W$ , il suffit de démontrer que toute réflexion  $s_\beta$  avec  $\beta \in \Phi$  appartient à  $W'$ . Fixons donc  $\beta \in \Phi$ . D'après (3), il existe  $w \in W'$  tel que  $\alpha := w(\beta) \in \Delta$ . Alors, d'après l'exercice 1.1, on a

$$s_\beta = s_{w^{-1}(\alpha)} = w^{-1} s_\alpha w,$$

ce qui prouve que  $s_\beta \in W'$ .

(5) Supposons par l'absurde que  $w \neq \text{id}$ . D'après (4) on peut écrire  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$ . Choisissons une telle écriture avec  $n$  minimal. (Puisque  $w \neq \text{id}$ , on a  $n \geq 1$ .) Alors d'après le corollaire 3.4 on a  $w(\alpha_n) \prec 0$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $w(\Delta) = \Delta$ .  $\square$

REMARQUE 3.7. Le même argument que dans la preuve de (1) et l'exercice 2.7 montrent que pour tout  $\gamma \in E$  il existe  $w \in W$  tel que  $w(\gamma) \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ .

**3.3. Fonction de longueur.** D'après le théorème 3.5(4), pour tout élément  $w \in W$  il existe des racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  telles que  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ . Si  $n$  est minimal parmi toutes les telles écritures de  $w$ , on dit que  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  est une *expression réduite*, et on appelle  $n$  la *longueur* de  $w$ ; on notera  $n = \ell(w)$ . (Notons que ces notions dépendent du choix de  $\Delta$ .) Par définition, on a  $\ell(\text{id}) = 0$ , et  $\text{id}$  est le seul élément de longueur 0.

LEMME 3.8. *Pour tout  $w \in W$ , on a*

$$\ell(w) = \#\{\beta \in \Phi^+ \mid w(\beta) \in \Phi^-\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons pour l'instant  $n(w) = \#\{\beta \in \Phi^+ \mid w(\beta) \in \Phi^-\}$ . On va démontrer que  $\ell(w) = n(w)$  par récurrence sur  $\ell(w)$ . Si  $\ell(w) = 0$  alors  $w = \text{id}$ , et alors  $n(w) = 0$ , de sorte que l'égalité est bien vraie.

Fixons maintenant  $w \in W$  tel que  $\ell(w) > 0$ , et supposons que l'égalité est vraie pour tout  $v \in W$  tel que  $\ell(v) < \ell(w)$ . Choisissons une expression réduite  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$  (avec  $k = \ell(w)$ ). Alors il n'est pas difficile de vérifier que si  $v = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{k-1}}$ , alors  $\ell(v) = k - 1$ . Donc par hypothèse de récurrence,  $n(v) = k - 1$ . D'autre part, d'après le corollaire 3.4 on a  $w(\alpha_k) \prec 0$ . Comme, d'après le lemme 3.1,  $s_{\alpha_k}$  permute l'ensemble  $\Phi^+ \setminus \{\alpha_k\}$ , on a

$$\{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_k\} \mid w(\beta) \prec 0\} = s_{\alpha_k}(\{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_k\} \mid v(\beta) \prec 0\}).$$

Et le fait que  $w(\alpha_k) \prec 0$  montre que  $v(\alpha_k) = -w(\alpha_k) \succ 0$ . On a donc

$$\{\beta \in \Phi^+ \mid w(\beta) \prec 0\} = s_{\alpha_k}(\{\beta \in \Phi^+ \mid v(\beta) \prec 0\}) \sqcup \{\alpha_k\}.$$

Ceci montre que  $n(w) = n(v) + 1 = \ell(v) + 1$ , et donc que  $\ell(w) = n(w)$ , et achève la récurrence.  $\square$

EXERCICE 3.9. Montrer (par récurrence sur  $\ell(w)$ ) que si  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$  est une expression réduite, alors

$$\{\beta \in \Phi^+ \mid w(\beta) \prec 0\} = \{\alpha_k, s_{\alpha_k}(\alpha_{k-1}), s_{\alpha_k} s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_{k-2}), \dots, s_{\alpha_k} \cdots s_{\alpha_2}(\alpha_1)\}.$$

**3.4. Domaine fondamental de l'action de  $W$  sur  $E$ .** D'après la Remarque 3.7, pour tout vecteur  $\gamma$  de  $E$ , l'orbite  $W \cdot \gamma$  intersecte  $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ . Le lemme suivant montre que cette intersection est réduite à un point. On dit alors que  $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$  est un *domaine fondamental* pour l'action de  $W$  sur  $E$ .

LEMME 3.10. *Soient  $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ , et soit  $w \in W$  tel que  $w(\lambda) = \mu$ . Alors  $w$  est un produit de réflexions simples  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$  tel que  $(\lambda, \alpha) = 0$ . En particulier, on a  $\lambda = \mu$ .*

DÉMONSTRATION. Le deuxième énoncé du lemme est clairement une conséquence du premier, puisque si  $(\lambda, \alpha) = 0$  alors  $s_\alpha(\lambda) = \lambda$ .

On démontre le premier énoncé du lemme par récurrence sur  $\ell(w)$ . Si  $\ell(w) = 0$  il n'y a rien à démontrer. Sinon, choisissons une expression réduite  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ .

Alors d'après le corollaire 3.4 on a  $w(\alpha_k) \prec 0$ . On a alors  $(\mu, w(\alpha_k)) \leq 0$ , donc  $(w^{-1}(\mu), \alpha_k) \leq 0$ , donc  $(\lambda, \alpha_k) \leq 0$ . Puisque  $\lambda \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ , ceci implique que  $(\lambda, \alpha_k) = 0$ , et donc que  $s_{\alpha_k}(\lambda) = \lambda$ . Alors  $\mu = ws_{\alpha_k}(\lambda)$ , et  $\ell(ws_{\alpha_k}) < \ell(w)$ , donc on peut conclure par récurrence que  $ws_{\alpha_k}$  est un produit de réflexions simples  $s_\beta$  ( $\beta \in \Delta$ ) fixant  $\lambda$ , puis finalement que  $w$  satisfait la même propriété.  $\square$

REMARQUE 3.11. Le lemme 3.10 montre que si  $\lambda \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ , alors le sous-groupe  $\{w \in W \mid w(\lambda) = \lambda\}$  de  $W$  est engendré par les réflexions  $s_\beta$  avec  $\beta \in \Phi$  tel que  $(\beta, \lambda) = 0$ , c'est-à-dire telles que  $s_\beta(\lambda) = \lambda$ . Puisque tout vecteur de  $E$  appartient à l'orbite (sous  $W$ ) d'un vecteur de  $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ , il n'est pas difficile d'en déduire que cet énoncé est en fait vrai pour tout  $\lambda \in E$ .

#### 4. Poids entiers

Dans cette partie on fixe un système de racines  $\Phi$  dans un espace euclidien  $E$ , et une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

##### 4.1. Définitions.

DÉFINITION 4.1. Un élément  $\lambda \in E$  est appelé un *poids entier* de  $\Phi$  si pour tout  $\alpha \in \Phi$  on a  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ . On notera  $P \subset E$  le sous-ensemble formé des poids entiers de  $\Phi$ . Clairement ce sous-ensemble est un sous-groupe de  $E$  (pour l'addition) qui contient l'ensemble  $Q$  des combinaisons linéaires à coefficients entiers de racines.

D'après l'exercice 2.7,  $\Delta^\vee$  est une base de  $\Phi^\vee$ . Ceci implique que  $\lambda$  est un poids entier si et seulement si  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Un poids entier  $\lambda$  sera dit *dominant* si  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{N}$  pour tout  $\alpha \in \Phi^+$  (ou, de façon équivalente, pour tout  $\alpha \in \Delta$ ). Le sous-ensemble de  $P$  formé des poids entiers dominants sera noté  $P^+$ .

Le fait suivant montre que  $P$  est un réseau<sup>2</sup> dans  $E$ .

LEMME 4.2. *Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , il existe un unique poids entier  $\omega_\alpha$  tel que pour tout  $\beta \in \Delta$  on a*

$$\langle \beta^\vee, \omega_\alpha \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, on a

$$P = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \cdot \omega_\alpha, \quad P^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N} \cdot \omega_\alpha.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'exercice 2.7,  $\Delta^\vee$  est une base de  $\Phi^\vee$ . On peut alors définir la famille  $(\omega_\alpha, \alpha \in \Delta)$  comme la base antédual de la base de  $E^*$  formée par les vecteurs  $(\alpha^\vee, \alpha \in \Delta)$ . Alors si  $\lambda \in E$  et si  $\lambda = \sum_{\alpha} k_\alpha \cdot \omega_\alpha$ , pour tout  $\beta \in \Delta$  on a

$$\langle \beta^\vee, \lambda \rangle = k_\beta.$$

Donc  $\lambda$  appartient à  $P$  si et seulement si chaque  $k_\alpha$  est entier, ce qui prouve que  $P = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \cdot \omega_\alpha$ . De même,  $\lambda$  appartient à  $P^+$  si et seulement si chaque  $k_\alpha$  est un entier positif ou nul, ce qui prouve que  $P^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N} \cdot \omega_\alpha$ .  $\square$

DÉFINITION 4.3. Les poids entiers  $\omega_\alpha$  sont appelés les *poids fondamentaux* de  $\Phi$ .

EXERCICE 4.4. Montrer que si  $\rho$  est comme au §3.1, on a  $\rho = \sum_{\alpha \in \Delta} \omega_\alpha$ .

2. Un *réseau* dans un espace vectoriel est un sous- $\mathbb{Z}$ -module engendré par une base de l'espace vectoriel.

**4.2. Poids dominants.** Pour tous  $w \in W$ ,  $\lambda \in E$  et  $\alpha \in \Phi$ , on a

$$\langle \alpha^\vee, w(\lambda) \rangle = \frac{(\alpha, w(\lambda))}{(\alpha, \alpha)} = \frac{(w^{-1}(\alpha), \lambda)}{(w^{-1}(\alpha), w^{-1}(\alpha))}.$$

Donc, puisque  $w$  permute  $\Phi$ ,  $\lambda$  est un poids entier de  $\Phi$  si et seulement si  $w(\lambda)$  est un poids entier de  $\Phi$ . En particulier,  $W$  agit naturellement sur  $P$ .

EXERCICE 4.5. Montrer que l'action de  $W$  sur  $P$  stabilise  $Q$ , et que l'action induite sur  $P/Q$  est triviale.

LEMME 4.6. (1) Pour tout  $\lambda \in P$ , il existe un unique  $\mu \in P^+$  tel que  $\lambda \in W \cdot \mu$ .

(2) Si  $\lambda \in P^+$ , alors  $w(\lambda) \preceq \lambda$  pour tout  $w \in W$ .

DÉMONSTRATION. (1) Puisque  $P^+ = P \cap \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ , cet énoncé découle du fait que  $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$  est un domaine fondamental pour l'action de  $W$  sur  $E$ ; voir le §3.4.

(2) Considérons un élément  $\mu$  de l'ensemble  $W \cdot \lambda$  qui est maximal pour l'ordre  $\preceq$  (ou plus précisément pour la restriction de  $\preceq$  à l'ensemble  $W \cdot \lambda$ ). Si  $\alpha \in \Delta$  on a  $s_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha^\vee, \mu \rangle \cdot \alpha$ . Donc  $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle \geq 0$  (car sinon on aurait  $s_\alpha(\mu) \succ \mu$ , ce qui contredirait la maximalité de  $\mu$ ). Donc  $\mu$  est dominant, ce qui implique que  $\mu = \lambda$  d'après l'unicité dans (1). Si maintenant  $w \in W$ , il doit exister un élément  $\mu$  de  $W \cdot \lambda$  tel que  $w(\lambda) \preceq \mu$  et  $\mu$  est maximal pour  $\preceq$ ; d'après ce qu'on vient de voir on a nécessairement  $\mu = \lambda$ , et donc  $w(\lambda) \preceq \lambda$ .  $\square$

LEMME 4.7. Soit  $\lambda \in P^+$ . Alors il n'existe qu'un nombre fini d'éléments  $\mu \in P^+$  tels que  $\mu \preceq \lambda$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\mu \in P^+$  et  $\mu \preceq \lambda$ , on a  $(\lambda + \mu, \lambda - \mu) \geq 0$ . D'autre part,  $(\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$ . Donc  $(\mu, \mu) \leq (\lambda, \lambda)$ . On en déduit que l'ensemble considéré est inclus dans l'intersection du réseau  $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \cdot \omega_\alpha$  avec la boule de centre 0 et de rayon  $\sqrt{(\lambda, \lambda)}$ . Une telle intersection est nécessairement finie, ce qui implique que notre ensemble est fini également.  $\square$

**4.3. Ensembles saturés de poids entiers.** Un sous-ensemble  $\Pi \subset P$  est dit *saturé* si pour tout  $\lambda \in \Pi$  et tout  $\alpha \in \Phi$ , les poids entiers  $\lambda - i\alpha$  appartiennent à  $\Pi$  pour tout entier  $i$  entre 0 et  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$  (c'est-à-dire pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$  si  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \geq 0$ , et pour tout entier  $i$  tel que  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \leq i \leq 0$  si  $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \leq 0$ ). En particulier, un tel ensemble est nécessairement stable par l'action de  $W$ .

Si  $\lambda \in P^+$ , on dira qu'un ensemble saturé  $\Pi$  est *de plus haut poids*  $\lambda$  si  $\lambda \in \Pi$  et si tout  $\mu \in \Pi$  vérifie  $\mu \preceq \lambda$ . Il n'est pas difficile de déduire des lemmes 4.6(1) et 4.7 (et du fait que  $W$  est un groupe fini) que tout ensemble saturé de plus haut poids  $\lambda$  est fini.

Si  $\lambda \in P^+$ , on définit

$$\Pi_\lambda = \bigcup_{\substack{\mu \in P^+ \\ \mu \preceq \lambda}} W \cdot \mu.$$

PROPOSITION 4.8. Pour tout  $\lambda \in P^+$ , il existe un unique ensemble saturé de plus haut poids  $\lambda$ , qui est égal à  $\Pi_\lambda$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\Pi$  est un ensemble saturé de plus haut poids  $\lambda$ . Alors, si  $\mu \in \Pi$ , puisque  $\Pi$  est stable par l'action de  $W$ , l'unique poids entier dominant  $\nu$  dans  $W \cdot \mu$  appartient à  $\Pi$ , donc doit vérifier  $\nu \preceq \lambda$ . Ceci montre que  $\Pi \subset \Pi_\lambda$ .

Réciproquement, pour montrer que  $\Pi_\lambda \subset \Pi$ , il suffit de montrer que tout poids entier dominant  $\mu$  tel que  $\mu \preceq \lambda$  appartient à  $\Pi$ . Pour cela on va fixer un tel  $\mu$ , et montrer que si un poids entier  $\mu' = \mu + \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha$  avec chaque  $k_\alpha$  dans  $\mathbb{N}$  appartient à  $\Pi$ , et si  $\mu' \neq \mu$ , alors il existe  $\beta \in \Delta$  tel que  $k_\beta > 0$  et

$$\mu'' := \mu' - \beta = \mu + (k_\beta - 1) \cdot \beta + \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}} k_\alpha \cdot \alpha$$

appartient encore à  $\Pi$ . On pourra alors partir du fait que  $\lambda$  appartient à  $\Pi$ , et utiliser ce fait de façon répétée pour en déduire que  $\mu$  appartient à  $\Pi$ , comme souhaité. Soit donc  $\mu'$  comme ci-dessus. Puisque

$$\left( \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha, \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha \right) > 0,$$

il existe  $\beta \in \Delta$  avec  $k_\beta > 0$  tel que

$$\left( \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha, \beta \right) > 0.$$

Alors  $\langle \beta^\vee, \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha \rangle > 0$ , et comme  $\langle \beta^\vee, \mu \rangle \geq 0$ , ceci implique que  $\langle \beta^\vee, \mu' \rangle > 0$ . Comme  $\Pi$  est saturé, on en déduit que  $\mu' - \beta \in \Pi$ , et donc le fait souhaité.

Pour terminer la démonstration, il reste à voir que chaque  $\Pi_\lambda$  est saturé et de plus haut poids  $\lambda$ . Le fait que  $\Pi_\lambda$  est de plus haut poids  $\lambda$  découle de la définition et du lemme 4.6(2). Pour voir qu'il est saturé, prenons  $\mu \in \Pi_\lambda$  et  $\alpha \in \Phi$ , et vérifions que chaque  $\mu - i\alpha$  avec  $i$  entre 0 et  $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle$  appartient à  $\Pi_\lambda$ . Quitte à remplacer  $\mu$  par  $s_\alpha(\mu)$  (ce qui ne change rien au problème), on peut supposer  $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle \geq 0$ . On va alors démontrer que pour tout  $i \in \{0, \dots, \langle \alpha^\vee, \mu \rangle\}$  et tout  $w \in W$  on a  $w(\mu - i\alpha) \preceq \lambda$ , ce qui impliquera bien le fait voulu. On considère donc  $w(\mu - i\alpha) = w(\mu) - iw(\alpha)$ . Si  $w(\alpha) \in \Phi^+$ , alors on a

$$w(\mu) - iw(\alpha) \preceq w(\mu) \preceq \lambda$$

puisque  $w(\mu) \in \Pi_\lambda$  et  $\Pi_\lambda$  est de plus haut poids  $\lambda$ . Et si  $w(\alpha) \in \Phi^-$ , on a

$$\begin{aligned} w(\mu - i\alpha) &= ws_\alpha(\mu - (\langle \alpha^\vee, \mu \rangle - i)\alpha) \\ &= ws_\alpha(\mu) + (\langle \alpha^\vee, \mu \rangle - i)w(\alpha) \preceq ws_\alpha(\mu) \preceq \lambda \end{aligned}$$

pour des raisons similaires. Donc dans tous les cas on a  $w(\mu - i\alpha) \preceq \lambda$ , et la démonstration est complète.  $\square$

## Représentations de plus haut poids

Dans ce chapitre on fixe un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos de caractéristique 0, et une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{k}$ . On fixe également une sous-algèbre de Lie torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , et on note  $\Phi$  le système de racines associé dans l'espace euclidien  $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$ , où  $V_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Q} \cdot \alpha \subset \mathfrak{h}^*$ . Finalement, on choisit une base  $\Delta$  de  $\Phi$ , et on note  $\Phi^+$  et  $\Phi^-$  les sous-ensembles de  $\Phi$  formés des racines positives et négatives associées, respectivement.

### 1. Sous-algèbres de Borel et décomposition triangulaire

**1.1. Sous-algèbre de Borel.** On pose

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

LEMME 1.1. (1) *Les sous-espaces  $\mathfrak{n}^+$  et  $\mathfrak{n}^-$  sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de  $\mathfrak{g}$ .*

(2) *Le sous-espace  $\mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de Lie résoluble de  $\mathfrak{g}$ .*

DÉMONSTRATION. (1) En utilisant le lemme 1.5(1) du chapitre 8 et le fait que si une racine est une somme de racines positives, alors elle est positive également, on voit que  $[\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+$ , et donc que  $\mathfrak{n}^+$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . De façon plus précise, si on note  $\Phi_n^+$  le sous-ensemble de  $\Phi^+$  formé des racines positives qui peuvent s'écrire comme somme de  $n$  racines positives, on a

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{n}^+) \subset \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{n+1}^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

pour tout  $n \geq 0$ . Comme  $\Phi_n^+ = \emptyset$  pour  $n$  assez grand, on en déduit que  $\mathcal{C}^n(\mathfrak{n}^+) = \{0\}$  pour  $n$  assez grand, et donc que  $\mathfrak{n}^+$  est nilpotente.

Le cas de  $\mathfrak{n}^-$  est similaire.

(2) Puisque  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$  et  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+$ , on a

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] + [\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+.$$

Donc  $\mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , et sa sous-algèbre dérivée  $\mathcal{D}(\mathfrak{b})$  est nilpotente d'après (1). Donc  $\mathfrak{b}$  est résoluble.  $\square$

La sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est appelée une *sous-algèbre (de Lie) de Borel*. Bien sûr, cette sous-algèbre dépend du choix de  $\mathfrak{h}$ , et également du choix de  $\Delta$ .

**1.2. Décomposition triangulaire.** En utilisant la décomposition radicielle (voir l'équation (1.2) du chapitre 8) et le fait que  $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ , on voit que

$$(1.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

(comme espace vectoriel). Cette décomposition est appelée la *décomposition triangulaire* de  $\mathfrak{g}$ .

LEMME 1.2. *L'unique application linéaire*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

qui envoie un tenseur pur  $u \otimes x \otimes v$  sur  $u \cdot x \cdot v$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

DÉMONSTRATION. Choisissons une base  $y_1, \dots, y_n$  de  $\mathfrak{n}^-$ , une base  $h_1, \dots, h_r$  de  $\mathfrak{h}$ , et une base  $x_1, \dots, x_n$  de  $\mathfrak{n}^+$ . Alors la famille

$$(y_1, \dots, y_n, h_1, \dots, h_r, x_1, \dots, x_n)$$

est une base de  $\mathfrak{g}$  d'après (1.1). D'après un corollaire du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt [Chap. 5, Corollaire 4.1], les éléments de la forme

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$$

avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ , les éléments de la forme

$$h_1^{i_1} \cdots h_r^{i_r}$$

avec  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ , les éléments de la forme

$$x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

avec  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ , et finalement les éléments de la forme

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot h_1^{i_1} \cdots h_r^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Donc l'application considérée envoie une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$  sur une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ; c'est donc un isomorphisme.  $\square$

REMARQUE 1.3. L'application considérée dans le lemme 1.2 n'est *pas* un morphisme d'algèbres.

## 2. Représentations cycliques de plus haut poids

**2.1. Poids des représentations.** Si  $(V, \varphi)$  est une représentation de  $\mathfrak{h}$ , pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  on note

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}, \varphi(h)(v) = \lambda(h) \cdot v\}.$$

Ce sous-espace est appelé l'*espace de poids*  $\lambda$  de  $V$ . S'il est non nul, on dit que  $\lambda$  est un *poids* de  $V$ . Si  $v \in V_\lambda$ , on dira que  $v$  est un vecteur de poids  $\lambda$ . Si  $V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ , on dira que  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids.

LEMME 2.1. *Soit  $(V, \varphi)$  une représentation de  $\mathfrak{h}$ .*

- (1) *La somme  $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$  est directe.*
- (2) *Si  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids et si  $V' \subset V$  est une sous-représentation, alors  $V'$  est somme de ses sous-espaces de poids.*



DÉMONSTRATION. (1) Par l'absurde, supposons qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathfrak{h}^*$  distincts et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, k\}$ , un vecteur non nul  $v_i \in V_{\lambda_i}$ , tels que  $\sum_{i=1}^k v_i = 0$ . Choisissons une telle donnée qui est telle que  $k$  est minimal parmi les entiers tels que de tels éléments existent. Comme  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , il existe  $h \in \mathfrak{h}$  tel que  $\lambda_1(h) \neq \lambda_2(h)$ . Alors on a

$$0 = \varphi(h) \left( \sum_{i=1}^k v_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(h) \cdot v_i,$$

donc

$$0 = \lambda_1(h) \cdot \left( \sum_{i=1}^k v_i \right) - \sum_{i=1}^k \lambda_i(h) \cdot v_i = \sum_{i=2}^k (\lambda_1(h) - \lambda_i(h)) \cdot v_i.$$

Comme  $\lambda_1(h) \neq \lambda_2(h)$ , les vecteurs dans la somme de droite ne sont pas tous nuls, ce qui contredit la minimalité de  $k$ .

(2) Supposons par l'absurde qu'il existe  $u \in V'$ , avec  $u = u_1 + \dots + u_k$ , les vecteurs  $u_1, \dots, u_k$  appartenant à des sous-espaces de poids  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$  distincts de  $V$ , tels qu'au moins l'un des  $u_i$  n'appartient pas à  $V'$ . Choisissons une telle donnée qui est telle que  $k$  est minimal parmi les entiers tels que de tels éléments existent. Choisissons également  $h$  tel que  $\lambda_1(h) \neq \lambda_2(h)$ . Alors le vecteur

$$(\varphi(h) - \lambda_1(h) \cdot \text{id}_V)(u) = \sum_{i=2}^k (\lambda_i(h) - \lambda_1(h)) \cdot u_i$$

appartient à  $V'$ . Par minimalité chacun des vecteurs  $(\lambda_i(h) - \lambda_1(h)) \cdot u_i$  appartient à  $V'$ ; en particulier,  $u_2 \in V'$ . Alors le vecteur  $u_1 + u_3 + \dots + u_k$  appartient à  $V'$ , ce qui contredit la minimalité de  $k$ .  $\square$

En particulier, si  $(V, \varphi)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ , la notion de poids considérée ci-dessus a un sens (en considérant la restriction de  $V$  à  $\mathfrak{h}$ ).

LEMME 2.2. *Soit  $(V, \varphi)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ .*

- (1) *Si  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  et  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+\alpha}$ .*
- (2) *Le sous-espace vectoriel  $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \subset V$  est une sous-représentation.*
- (3) *Si  $V$  est de dimension finie, on a  $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda = V$ .*

DÉMONSTRATION. (1) Si  $x \in \mathfrak{g}_\alpha$  et  $v \in V_\lambda$ , pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  on a

$$\begin{aligned} \varphi(h) \circ \varphi(x)(v) &= \varphi(x) \circ \varphi(h)(v) + \varphi([h, x])(v) \\ &= \lambda(h) \cdot \varphi(x)(v) + \varphi(\alpha(h) \cdot x)(v) = (\lambda + \alpha)(h) \cdot \varphi(x)(v), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\varphi(x)(v) \in V_{\lambda+\alpha}$ .

(2) Comme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$  et comme le sous-espace vectoriel  $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \subset V$  est stable par l'action de  $\mathfrak{h}$  et celle de chaque  $\mathfrak{g}_\alpha$  (d'après (1)), c'est une sous-représentation de  $V$ .

(3) D'après le corollaire 2.4 du chapitre 7, chaque  $\varphi(h)$  est un endomorphisme diagonalisable de  $V$ . Comme ces endomorphismes (pour toutes les valeurs possibles de  $h$ ) commutent 2 à 2, ils peuvent être diagonalisés simultanément, et le résultat énoncé suit.  $\square$

REMARQUE 2.3. Considérons le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et la matrice

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathfrak{h} := \mathbb{k} \cdot h$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale dans  $\mathfrak{g}$  (voir l'exercice 1.3 du chapitre 8). De plus on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{cases} \mathfrak{h}^* & \rightarrow & \mathbb{k} \\ \lambda & \mapsto & \lambda(h) \end{cases}.$$

Donc la notion de poids considérée ici généralise la notion de poids pour les représentations de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  considérée au chapitre 7.

**2.2. Représentations cycliques de plus haut poids.** Soit  $(V, \varphi)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , un *vecteur maximal* de poids  $\lambda$  est un vecteur  $v \in V_\lambda$  non nul et tel que  $\varphi(x)(v) = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{n}^+$ . On dira que  $V$  est une *représentation cyclique de plus haut poids*  $\lambda$  s'il existe un vecteur maximal  $v$  de poids  $\lambda$  dans  $V$  tel que  $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v$ .

EXERCICE 2.4. Si  $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ , montrer que  $v$  est un vecteur maximal ssi  $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)(v) = \{0\}$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . (*Indication* : on pourra utiliser la proposition 2.6(3) du chapitre 8 et l'exercice 2.8 du chapitre 9.)

On définit un ordre  $\preceq$  sur  $\mathfrak{h}^*$  en posant

$$\lambda \preceq \mu \quad \text{si et seulement si} \quad \mu - \lambda \text{ est une somme de racines positives.}$$

Choisissons une énumération  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  des racines positives, et pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  choisissons  $y_i \in \mathfrak{g}_{-\beta_i} \setminus \{0\}$ .

PROPOSITION 2.5. *Supposons que  $(V, \varphi)$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ , et soit  $v$  un vecteur maximal de poids  $\lambda$ .*

(1)  *$V$  est engendré, comme espace vectoriel, par les vecteurs de la forme*

$$\varphi(y_1)^{k_1} \circ \dots \circ \varphi(y_n)^{k_n}(v)$$

*avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ .*

(2)  *$V$  est somme de ses sous-espaces de poids, et si  $\mu$  est un poids de  $V$  on a  $\mu \preceq \lambda$ .*

(3) *Pour tout  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ,  $V_\mu$  est de dimension finie. De plus,  $\dim_{\mathbb{k}}(V_\lambda) = 1$ .*

(4)  *$V$  admet une unique sous-représentation propre maximale, et donc un unique quotient simple.*

(5) *Si  $(V', \varphi')$  est une représentation non nulle de  $\mathfrak{g}$  et s'il existe un morphisme de représentations surjectif  $f : V \rightarrow V'$ , alors  $V'$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION. (1) Le lemme 1.2 implique que  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{b})$ . On a donc

$$V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{b}) \cdot v = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \cdot (\mathbb{k} \cdot v)$$

puisque  $\mathcal{U}(\mathfrak{b}) \cdot v = \mathbb{k} \cdot v$ . Comme les vecteurs de la forme  $y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  (voir la preuve du lemme 1.2), on en déduit le résultat énoncé.

(2) D'après le lemme 2.2(1), pour tous  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  le vecteur  $\varphi(y_1)^{k_1} \circ \dots \circ \varphi(y_n)^{k_n}(v)$  appartient à  $V_{\lambda - \sum_{i=1}^n k_i \beta_i}$ . Comme ces vecteurs engendrent  $V$ , on en déduit le résultat énoncé.

(3) D'après la preuve de (2), si  $\mu$  est un poids de  $V$  alors  $V_\mu$  est engendré par les vecteurs  $\varphi(y_1)^{k_1} \circ \dots \circ \varphi(y_n)^{k_n}(v)$  avec  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  tels que  $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^n k_i \beta_i$ . Si  $\mu$  est fixé, cette condition ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de collections d'entiers  $(k_i, i = 1, \dots, n)$ , donc  $\dim_{\mathbb{k}}(V_\mu) < \infty$ . De plus si  $\mu = \lambda$  la seule possibilité est  $k_1 = \dots = k_n = 0$ , ce qui montre que  $V_\lambda = \mathbb{k} \cdot v$ , et donc que  $\dim_{\mathbb{k}}(V_\lambda) = 1$ .

(4) Si  $V'$  est une sous-représentation propre de  $V$ , alors elle est somme de ses sous-espaces de poids d'après (2) et le lemme 2.1(2). De plus elle ne contient aucun vecteur de  $V_\lambda$ . Donc  $V'$  est inclus dans le sous-espace

$$\bigoplus_{\mu \prec \lambda} V_\mu.$$

Donc la somme  $U$  de toutes les sous-représentations propres de  $V$  est incluse dans ce sous-espace, ce qui montre que  $U$  est une sous-représentation propre de  $V$ . Elle contient toutes les sous-représentations propres de  $V$ , donc c'est l'unique sous-représentation propre maximale de  $V$ .

Si  $(U, \psi)$  est une représentation quelconque de  $\mathfrak{g}$ , l'application qui à une sous-représentation maximale  $U' \subset U$  associe le quotient  $U/U'$  définit une bijection entre l'ensemble des sous-représentations maximales de  $U$  et l'ensemble de ses quotients simples. Si  $U$  admet une unique sous-représentation maximale, elle admet donc également un unique quotient simple.

(5) Le vecteur  $f(v) \in V'$  est soit nul soit un vecteur maximal dans  $V'_\lambda$ . De plus, comme  $f$  est surjectif on a

$$V' = f(V) = f(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot f(v),$$

donc  $f(v) \neq 0$  et  $V'$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ .  $\square$

**EXERCICE 2.6.** Sous les hypothèses de la proposition 2.5, montrer que pour tout  $\alpha \in \Delta$  et tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $\dim_{\mathbb{k}}(V_{\lambda - k\alpha}) \leq 1$ .

On dira que  $(V, \varphi)$  est cyclique de plus haut poids s'il existe  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  tel que  $(V, \varphi)$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ . Alors  $\lambda$  sera appelé le *plus haut poids* de  $(V, \varphi)$ . Cette notion est bien définie grâce au corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.7.** *Si  $(V, \varphi)$  est cyclique de plus haut poids, alors son plus haut poids est unique. De plus, si  $V$  est simple, alors  $v$  est l'unique vecteur maximal dans  $V$  (à multiplication par un scalaire non nul près).*

**DÉMONSTRATION.** Si  $(V, \varphi)$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$  et de plus haut poids  $\mu$ , on peut appliquer la proposition 2.5(2) avec ces deux poids, et on obtient que  $\lambda \preceq \mu$  et  $\mu \preceq \lambda$ . Donc  $\lambda = \mu$ .

Supposons maintenant que  $V$  est simple, et soit  $w \in V$  un vecteur maximal, de poids  $\mu$ . Par simplicité on a  $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot w$ , donc  $V$  est cyclique de plus haut poids  $\mu$ . D'après la première partie de la preuve, ceci implique que  $\lambda = \mu$ . D'après la proposition 2.5(3),  $w$  est donc un multiple de  $v$ .  $\square$

**2.3. Exemple : les représentations simples de dimension finie.** Le lemme suivant montre que toutes les représentations simples de dimension finie de  $\mathfrak{g}$  sont cycliques de plus haut poids, ce qui justifie l'intérêt de cette notion.

**LEMME 2.8.** *Si  $V$  est simple et de dimension finie, et si  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  est un poids de  $V$  qui est maximal parmi les poids de  $V$  pour l'ordre  $\preceq$ , alors  $V$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $v \in V_\lambda$ , alors le lemme 2.2(1) et la maximalité de  $\lambda$  montrent que  $v$  est un vecteur maximal de poids  $\lambda$ . De plus  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v$  est une sous-représentation non nulle de  $V$ . Comme  $V$  est simple, elle doit être égale à  $V$ .  $\square$

**2.4. Modules de Verma.** Fixons  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , et notons  $I(\lambda)$  l'idéal à gauche de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  engendré par  $\mathfrak{n}^+$  et par les vecteurs de la forme  $h - \lambda(h)$  avec  $h \in \mathfrak{h}$ . On note alors

$$M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda).$$

Cet espace vectoriel est muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module à gauche, et donc de représentation de  $\mathfrak{g}$ . On notera  $v_\lambda \in M(\lambda)$  le "point de base"  $1 + I(\lambda)$ . Alors

$$(2.1) \quad v_\lambda \in M(\lambda)_\lambda \quad \text{et} \quad M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_\lambda.$$

Choisissons comme au §2.2 une énumération  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  des racines positives, et pour chaque  $p \in \{1, \dots, n\}$  choisissons  $y_p \in \mathfrak{g}_{-\beta_p} \setminus \{0\}$ .

LEMME 2.9. *Les vecteurs de la forme*

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot v_\lambda$$

avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $M(\lambda)$ .

DÉMONSTRATION. Choisissons une base  $h_1, \dots, h_r$  de  $\mathfrak{h}$  et pour chaque  $p \in \{1, \dots, n\}$  choisissons  $x_p \in \mathfrak{g}_{\beta_p} \setminus \{0\}$ . Alors les vecteurs

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$$

avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ , et les vecteurs

$$x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

avec  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$  (voir la preuve du lemme 1.2). Il n'est pas difficile de voir que les vecteurs de la forme

$$(h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r}$$

avec  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ . Le lemme 1.2 montre alors que les vecteurs de la forme

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Notons  $I'(\lambda)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  engendré par les vecteurs de cette forme avec au moins l'un des  $i_p$  ou l'un des  $j_p$  qui est non nul. Alors les vecteurs

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} + I'(\lambda)$$

avec  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I'(\lambda)$ . Donc pour conclure il suffit de montrer que  $I(\lambda) = I'(\lambda)$ .

Tout d'abord, il est clair que  $I'(\lambda) \subset I(\lambda)$ . Donc pour conclure il suffit de montrer que si  $h \in \mathfrak{h}$ ,  $x \in \mathfrak{n}^+$  et  $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , on a  $a \cdot (h - \lambda(h)) \in I'(\lambda)$  et  $a \cdot x \in I'(\lambda)$ . De plus, par linéarité il suffit de considérer le cas où

$$a = y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}.$$

Si tous les  $j_n$  sont nuls l'assertion est évidente. Et sinon on a

$$\begin{aligned} & y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \cdot (h - \lambda(h)) = \\ & y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot (h - \lambda(h)) \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} - \\ & (j_1 \beta_1 + \cdots + j_n \beta_n)(h) \cdot y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que chacun des termes de droite appartient à  $I'(\lambda)$ , ce qui prouve l'énoncé dans le cas. Considérons d'autre part le vecteur

$$y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \cdot (h_1 - \lambda(h_1))^{i_1} \cdots (h_r - \lambda(h_r))^{i_r} \cdot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \cdot x.$$

Le vecteur  $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \cdot x \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$  agit par 0 sur le module trivial de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ . Donc c'est une combinaison linéaire de termes  $x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$  où l'un au moins des  $j_p$  est non nul. Ceci montre que notre vecteur appartient à  $I'(\lambda)$ , et termine la preuve.  $\square$

Le lemme 2.9 montre en particulier que  $v_\lambda \neq 0$ . Les propriétés (2.1) montrent alors que  $M(\lambda)$  est une représentation cyclique de plus haut poids  $\lambda$ . Cette représentation est appelée *module de Verma de plus haut poids  $\lambda$* . Ces représentations sont "universelles" parmi les représentations cycliques de plus haut poids, au sens suivant.

**PROPOSITION 2.10.** *Si  $V$  est une représentation cyclique de plus haut poids  $\lambda$ , alors il existe un morphisme de représentations surjectif  $f : M(\lambda) \rightarrow V$ .*

**DÉMONSTRATION.** Choisissons un vecteur maximal  $v \in V$  de poids  $\lambda$ , et considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \rightarrow & V \\ u & \mapsto & u \cdot v \end{cases}.$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\varphi$  est un morphisme de représentations, et le fait que  $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v$  implique que  $\varphi$  est surjectif. D'autre part, comme  $v$  est annulé par l'action de  $\mathfrak{n}^+$  et celle des vecteurs de la forme  $h - \lambda(h)$  pour  $h \in \mathfrak{h}$ , cette application linéaire est nulle sur  $I(\lambda)$ , donc se factorise via une application linéaire

$$f : M(\lambda) \rightarrow V.$$

Il n'est pas difficile de voir que  $f$  est encore un morphisme de représentations surjectif.  $\square$

**2.5. Représentations simples de plus haut poids.** On appellera *représentation simple de plus haut poids  $\lambda$*  une représentation cyclique de plus haut poids  $\lambda$  qui est simple.

**PROPOSITION 2.11.** *Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , il existe une unique (à isomorphisme près) représentation simple de plus haut poids  $\lambda$ ; on la notera  $L(\lambda)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , le module de Verma  $M(\lambda)$  admet un unique quotient simple  $L(\lambda)$  d'après la proposition 2.5(4). Réciproquement, si  $V$  est une représentation simple de plus haut poids  $\lambda$ , la proposition 2.10 montre qu'il existe un morphisme surjectif

$$f : M(\lambda) \rightarrow V.$$

Comme l'image par  $f$  de l'unique sous-représentation maximale de  $M(\lambda)$  est incluse dans  $\bigoplus_{\mu < \lambda} V_\mu$ , elle n'est pas égale à  $V$ , et est donc égale à  $\{0\}$  par simplicité. Donc

$f$  se factorise via un morphisme surjectif  $f' : L(\lambda) \rightarrow V$ . Comme  $L(\lambda)$  est simple,  $\ker(f') = \{0\}$ , donc  $f'$  est un isomorphisme.  $\square$

### 3. Critère de finitude

Au §2.5 on a construit une famille  $\{L(\lambda) : \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$  de représentations simples de  $\mathfrak{g}$  paramétrée par  $\mathfrak{h}^*$ . (D'après le corollaire 2.7, ces représentations sont deux à deux non isomorphes.) Le lemme 2.8 montre que cette famille contient toutes les représentations simples de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Notre objectif maintenant est de déterminer à quels paramètres  $\lambda$  ces représentations correspondent, c'est-à-dire pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  la représentations  $L(\lambda)$  est de dimension finie.

**3.1. Condition nécessaire.** Rappelons qu'on a défini au §4.1 du chapitre 9 le réseau  $P$  des poids de  $\Phi$ . Ce réseau a été défini comme un sous-ensemble de  $E$ . Mais on peut également le voir comme un sous-ensemble de  $\mathfrak{h}^*$  de la façon suivante.

LEMME 3.1. *Pour tout  $\lambda \in P$ , il existe un unique élément  $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$  tel que*

$$\langle \tilde{\lambda}, h_\alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$$

pour tout  $\alpha \in \Phi$ .

L'application  $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$  définit un morphisme injectif de groupes abéliens  $P \rightarrow \mathfrak{h}^*$ . L'image de ce morphisme est l'ensemble des formes linéaires  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  telles que  $\langle \mu, h_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ .

DÉMONSTRATION. Comme les vecteurs  $\{h_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  forment une base de  $\mathfrak{h}$ , il existe une unique forme linéaire  $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$  telle que  $\langle \tilde{\lambda}, h_\alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Si maintenant  $\beta \in \Phi$  est quelconque, les définitions montrent que les coefficients de  $h_\beta$  dans la base  $\{h_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  de  $\mathfrak{h}$  et ceux de  $\beta^\vee$  dans la base  $\{\alpha^\vee : \alpha \in \Delta\}$  de  $E^*$  appartiennent à  $\mathbb{Q}$ , et sont égaux. En utilisant l'égalité pour les racines simples, on en déduit que  $\langle \tilde{\lambda}, h_\beta \rangle = \langle \lambda, \beta^\vee \rangle$ .

L'application  $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$  est clairement un morphisme de groupes abélien injectif, et son image est incluse dans  $\{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi, \langle \mu, h_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}$ . Soit maintenant  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  telle que  $\langle \mu, h_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ . On peut alors considérer l'unique élément  $\lambda \in E$  tel que

$$\langle \mu, h_\alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$$

pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Le même argument que ci-dessus montre que cette égalité est alors vraie pour tout  $\alpha \in \Phi$ . Donc  $\lambda$  est bien un élément de  $P$  tel que  $\tilde{\lambda} = \mu$ .  $\square$

À partir de maintenant, on n'utilisera plus la notation  $\tilde{\lambda}$ , et on identifiera simplement  $P$  au réseau  $\{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi, \langle \mu, h_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}\}$  de  $\mathfrak{h}^*$ . Le sous-ensemble  $P^+$  des poids entiers dominants s'identifie alors au sous-ensemble de  $\mathfrak{h}^*$  défini par  $\{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \forall \alpha \in \Phi^+, \langle \mu, h_\alpha \rangle \in \mathbb{N}\}$ .

THÉORÈME 3.2. *Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Si  $L(\lambda)$  est de dimension finie, alors  $\lambda \in P^+$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\alpha \in \Phi^+$ . Considérons la sous-algèbre de Lie  $S_\alpha \subset \mathfrak{g}$  définie au §2.1 du chapitre 8. En restreignant l'action de  $\mathfrak{g}$  à  $S_\alpha$  on obtient sur  $L(\lambda)$  une structure de représentation de  $S_\alpha$ . Puis, en identifiant  $S_\alpha$  à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  comme dans la proposition 2.2(5) du chapitre 8 (après avoir choisi un vecteur non nul arbitraire dans  $\mathfrak{g}_\alpha$ ), on obtient une structure de représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . De plus, si  $v \in L(\lambda)_\lambda$  est un vecteur maximal pour l'action de  $\mathfrak{g}$ , alors c'est également un vecteur maximal pour l'action de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  au sens du §3.1 du chapitre 7, de poids  $\langle \lambda, h_\alpha \rangle$ . D'après le lemme 3.4 du chapitre 7, ceci implique que  $\langle \lambda, h_\alpha \rangle \in \mathbb{N}$ , et conclut la preuve.  $\square$

**3.2. Un lemme préparatoire.** Au §3.1, on a identifié  $P$  à un sous-ensemble de  $\mathfrak{h}^*$ . Comme l'action du groupe de Weyl  $W$  de  $\Phi$  sur  $E$  stabilise  $P$ , on peut voir ce groupe comme un sous-groupe du groupe des automorphismes de  $P$  (comme groupe abélien). Il est clair que tout automorphisme de  $P$  peut s'étendre de façon unique en un automorphisme de  $\mathfrak{h}^*$  (comme espace vectoriel). Donc, de cette façon, on peut voir  $W$  comme un sous-groupe de  $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ . Pour cette action, pour  $\alpha \in \Phi$  et  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  on a

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, h_\alpha \rangle \cdot \alpha.$$

Par dualité,  $W$  agit également sur  $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}^*)^*$ . Pour cette action, pour  $\alpha \in \Phi$  et  $h \in \mathfrak{h}$  on a

$$s_\alpha(h) = h - \langle \alpha, h \rangle \cdot h_\alpha.$$

Soit maintenant  $\alpha \in \Phi^+$ , et soit  $T_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Alors  $T_\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , qui contient  $S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{k} \cdot h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ .

**LEMME 3.3.** *Soit  $(V, \varphi)$  une représentation de  $T_\alpha$  de dimension finie qui est somme de ses sous-espaces de poids. Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , on a  $\dim(V_\lambda) = \dim(V_{s_\alpha(\lambda)})$ . En particulier,  $\lambda$  est un poids de  $V$  si et seulement si  $s_\alpha(\lambda)$  est un poids de  $V$ .*

**DÉMONSTRATION.** Fixons  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ , et soit  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  l'unique vecteur tel que  $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$  (voir la proposition 2.2(5) du chapitre 8). Comme au lemme 2.2(1), pour tout  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  on a  $\varphi(x_\alpha)(V_\mu) \subset V_{\mu+\alpha}$ . Comme l'ensemble des  $\mu$  tels que  $V_\mu \neq \{0\}$  est fini, on en déduit que  $\varphi(x_\alpha)$  est un endomorphisme nilpotent de  $V$ . On peut donc considérer

$$\exp(\varphi(x_\alpha)) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!} \varphi(x_\alpha)^i \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cet endomorphisme est inversible, d'inverse  $\exp(-\varphi(x_\alpha))$ .

Pour tout  $z \in T_\alpha$ , on a

$$(3.1) \quad \exp(\varphi(x_\alpha)) \circ \varphi(z) \circ \exp(-\varphi(x_\alpha)) = \varphi \left( z + [x_\alpha, z] + \frac{1}{2} [x_\alpha, [x_\alpha, z]] \right).$$

En effet, si pour tout  $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$  on note

$$\ell_f : \begin{cases} \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V) & \rightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{cases} \quad \text{et} \quad r_f : \begin{cases} \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V) & \rightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{cases},$$

alors  $\ell_{\varphi(x_\alpha)}$  et  $r_{-\varphi(x_\alpha)}$  sont nilpotents, et commutent, donc  $\ell_{\varphi(x_\alpha)} + r_{-\varphi(x_\alpha)} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\varphi(x_\alpha))$  est nilpotent, et on a

$$\exp(\ell_{\varphi(x_\alpha)}) \circ \exp(r_{-\varphi(x_\alpha)}) = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\varphi(x_\alpha))).$$

D'autre part on a  $\exp(\ell_{\varphi(x_\alpha)}) = \ell_{\exp(\varphi(x_\alpha))}$  et  $\exp(r_{-\varphi(x_\alpha)}) = r_{\exp(-\varphi(x_\alpha))}$ , d'où

$$\begin{aligned} \exp(\varphi(x_\alpha)) \circ \varphi(z) \circ \exp(-\varphi(x_\alpha)) &= \exp(\ell_{\varphi(x_\alpha)}) \circ \exp(r_{-\varphi(x_\alpha)})(\varphi(z)) \\ &= \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\varphi(x_\alpha)))(\varphi(z)) = \varphi(\exp(\mathrm{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha))(z)). \end{aligned}$$

Comme  $\mathrm{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha)^3 = 0$ , on en déduit la formule (3.1).

De même, on peut considérer l'endomorphisme  $\exp(-\varphi(y_\alpha))$ , et pour tout  $z \in T_\alpha$  on a

$$(3.2) \quad \exp(-\varphi(y_\alpha)) \circ \varphi(z) \circ \exp(\varphi(y_\alpha)) = \varphi \left( z - [y_\alpha, z] + \frac{1}{2} [y_\alpha, [y_\alpha, z]] \right).$$

Maintenant, un calcul direct montre que pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  on a

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{T_\alpha} + \text{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha) + \frac{1}{2}\text{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha)^2) \circ (\text{id}_{T_\alpha} - \text{ad}_{T_\alpha}(y_\alpha) + \frac{1}{2}\text{ad}_{T_\alpha}(y_\alpha)^2) \\ & \circ (\text{id}_{T_\alpha} + \text{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha) + \frac{1}{2}\text{ad}_{T_\alpha}(x_\alpha)^2)(h) = h - \alpha(h) \cdot h_\alpha = s_\alpha(h). \end{aligned}$$

En utilisant cette formule, ainsi que les formules (3.1) et (3.2), on voit que si on pose  $\sigma_\alpha := \exp(\varphi(x_\alpha)) \circ \exp(-\varphi(y_\alpha)) \circ \exp(\varphi(x_\alpha)) \in \text{GL}(V)$ , alors pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  on a

$$(3.3) \quad \sigma_\alpha \circ \varphi(h) \circ \sigma_\alpha^{-1} = \varphi(s_\alpha(h)).$$

Finalement, considérons  $v \in V_\lambda$ . Alors la formule (3.3) implique que pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  on a

$$\varphi(h)(\sigma_\alpha(v)) = \sigma_\alpha \circ \varphi(s_\alpha(h))(v) = \sigma_\alpha(\langle \lambda, s_\alpha(h) \rangle \cdot v) = \langle s_\alpha(\lambda), h \rangle \cdot \sigma_\alpha(v),$$

c'est-à-dire que  $\sigma_\alpha(v) \in V_{s_\alpha(\lambda)}$ . Donc  $\sigma_\alpha(V_\lambda) \subset V_{s_\alpha(\lambda)}$ . Un calcul similaire montre que  $(\sigma_\alpha)^{-1}(V_{s_\alpha(\lambda)}) \subset V_\lambda$ , donc finalement que  $\sigma_\alpha$  induit un isomorphisme de  $V_\lambda$  vers  $V_{s_\alpha(\lambda)}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**3.3. Condition suffisante.** On peut maintenant démontrer que la condition nécessaire du théorème 3.2 est en fait une condition suffisante.

**THÉORÈME 3.4.** *Si  $\lambda \in P^+$ , alors la représentation  $L(\lambda)$  est de dimension finie. De plus, pour tous  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  et  $w \in W$  on a  $\dim(L(\lambda)_\mu) = \dim(L(\lambda)_{w(\mu)})$ .*

**DÉMONSTRATION.** On procède en 6 étapes. On fixe un vecteur maximal  $v \in L(\lambda)_\lambda$ . Pour tout  $\alpha \in \Delta$  on note  $m_\alpha := \langle \lambda, h_\alpha \rangle \in \mathbb{N}$ . Enfin on fixe, pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ , un vecteur  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ , et on note  $y_\alpha$  l'unique vecteur de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$  (voir la proposition 2.2(5) du chapitre 8).

*Étape 1 :* pour tout  $\alpha \in \Delta$ , on a  $y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot v = 0$ . Par restriction on peut considérer  $L(\lambda)$  comme une représentation de  $S_\alpha$ , puis comme une représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  (comme dans la preuve du théorème 3.2). Alors  $v$  est un vecteur maximal pour cette représentation, de poids  $m_\alpha$ . Les formules du lemme 3.3 du chapitre 7 montrent que  $x_\alpha \cdot (y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot v) = 0$ . D'autre part si  $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ ,  $\beta - \alpha$  n'est pas une racine, donc  $[x_\beta, y_\alpha] = 0$ . Donc  $x_\beta$  et  $y_\alpha$  commutent dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , ce qui implique que

$$x_\beta \cdot (y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot v) = y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot (x_\beta \cdot v) = 0$$

puisque  $v$  est maximal. Enfin, le lemme 2.2(1) montre que  $y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot v$  appartient à  $L(\lambda)_{\lambda - (m_\alpha+1)\alpha}$ . Si ce vecteur est non nul, c'est donc un vecteur maximal, dont le poids est différent de  $\lambda$ . Ceci contredit le corollaire 2.7, et donc  $y_\alpha^{m_\alpha+1} \cdot v = 0$ .

*Étape 2 :* pour tout  $\alpha \in \Delta$ , le sous-espace vectoriel de  $L(\lambda)$  engendré par les vecteurs  $v, y_\alpha \cdot v, \dots, y_\alpha^{m_\alpha} \cdot v$  est stable par l'action de  $T_\alpha$ . Il découle de l'étape 1 et des formules du lemme 3.3 du chapitre 7 que  $\text{Vect}(v, y_\alpha \cdot v, \dots, y_\alpha^{m_\alpha} \cdot v)$  est stable par l'action de  $x_\alpha$  et de  $y_\alpha$ . D'autre part, le lemme 2.2(1) montre que ce sous-espace est également stable par l'action de  $\mathfrak{h}$ , donc finalement de  $T_\alpha$ .

*Étape 3 :* pour tout  $\alpha \in \Delta$ , tout vecteur de  $L(\lambda)$  appartient à une sous- $T_\alpha$ -représentation de  $L(\lambda)$  de dimension finie. Soit  $V$  la somme de toutes les sous- $T_\alpha$ -représentations de dimension finie de  $L(\lambda)$  (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs dans  $L(\lambda)$  qui appartiennent à une sous- $T_\alpha$ -représentation de dimension finie). On va montrer que  $V$  est une sous- $\mathfrak{g}$ -représentation non nulle de  $L(\lambda)$ . Par simplicité, on en déduira que  $V = L(\lambda)$ , puis le résultat énoncé.



L'étape 2 montre que  $V \neq \{0\}$ . D'autre part, si  $U \subset L(\lambda)$  est une sous- $T_\alpha$ -représentation de dimension finie, et si  $v \in U$ , alors

$$U + \sum_{\beta \in \Phi^+} x_\beta \cdot U + \sum_{\beta \in \Phi^+} y_\beta \cdot U$$

est une sous- $T_\alpha$ -représentation de  $L(\lambda)$  de dimension finie, qui contient tous les vecteurs de la forme  $x \cdot v$  avec  $x \in \mathfrak{g}$ . Donc chacun de ces vecteurs appartient à  $V$ , ce qui termine la preuve de cette étape.

*Étape 4* : pour tout  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  et tout  $w \in W$  on a  $\dim(L(\lambda)_\mu) = \dim(L(\lambda)_{w(\mu)})$ . Puisque  $W$  est engendré par les réflexions  $s_\alpha$  (avec  $\alpha \in \Delta$ ), il suffit de démontrer l'égalité dans le cas où  $w$  est de cette forme. Fixons donc  $\alpha \in \Delta$ . D'après l'étape 3, il existe une sous- $T_\alpha$ -représentation  $U$  de  $L(\lambda)$  de dimension finie qui contient  $L(\lambda)_\mu$  et  $L(\lambda)_{s_\alpha(\mu)}$ . En appliquant le lemme 3.3 à  $U$ , on voit que

$$\dim(L(\lambda)_\mu) = \dim(U_\mu) = \dim(U_{s_\alpha(\mu)}) = \dim(L(\lambda)_{s_\alpha(\mu)}),$$

ce qui prouve l'égalité voulue.

*Étape 5* : l'ensemble des poids de  $L(\lambda)$  est stable par  $W$  et fini. L'étape 4 montre que l'ensemble des poids de  $L(\lambda)$  est stable par l'action de  $W$ . De plus, d'après la proposition 2.5(2), chaque poids  $\mu$  de  $L(\lambda)$  vérifie  $\mu \preceq \lambda$ ; en particulier  $\mu$  appartient à  $P$ . Le lemme 4.6(1) du chapitre 9 montre alors que l'ensemble de ces poids est inclus dans

$$\bigcup_{\substack{\mu \in P^+ \\ \mu \preceq \lambda}} W \cdot \mu.$$

Cet ensemble est fini d'après le lemme 4.7 du chapitre 9, donc l'ensemble des poids de  $L(\lambda)$  est fini également.

*Étape 6* : conclusion. Il découle maintenant de l'étape 5 et de la proposition 2.5(3) que  $V$  est de dimension finie. L'énoncé sur les dimensions des sous-espaces de poids a été démontré à l'étape 4.  $\square$

**3.4. Poids de  $L(\lambda)$  quand  $\lambda \in P^+$ .** Rappelons qu'au §4.3 du chapitre 9, pour tout  $\lambda \in P^+$  on a posé

$$\Pi_\lambda = \bigcup_{\substack{\mu \in P^+ \\ \mu \preceq \lambda}} W \cdot \mu \subset P.$$

PROPOSITION 3.5. Pour tout  $\lambda \in P^+$ , l'ensemble des poids de  $L(\lambda)$  est  $\Pi_\lambda$ .

DÉMONSTRATION. Notons  $\Pi$  l'ensemble des poids de  $\lambda$ . D'après la proposition 4.8 du chapitre 9, pour montrer que  $\Pi = \Pi_\lambda$  il suffit de montrer que  $\Pi$  est saturé et de plus haut poids  $\lambda$ . Le fait que  $\Pi$  est de plus haut poids  $\lambda$  découle de la proposition 2.5(2).

Montrons maintenant que  $\Pi$  est saturé. Pour cela on fixe  $\mu \in \Pi$  et  $\alpha \in \Phi$ , et on considère

$$V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L(\lambda)_{\mu+i\alpha}.$$

Le lemme 2.2(1) montre que  $V$  est stable par l'action de  $S_\alpha$ , et le théorème 3.4 implique qu'il est de dimension finie. En identifiant  $S_\alpha$  à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  comme dans la preuve du théorème 3.2, on peut considérer  $V$  comme une représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Comme  $\langle \mu, h_\alpha \rangle$  est un poids de cette représentation, le corollaire 3.9 du chapitre 7

implique que tous les entiers compris entre  $\langle \mu, h_\alpha \rangle$  et  $-\langle \mu, h_\alpha \rangle$  et de même parité que  $\langle \mu, h_\alpha \rangle$  sont des poids de  $V$ . Comme les poids de  $V$  sont les entiers  $\langle \mu, h_\alpha \rangle + 2i$  pour  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\mu + i \cdot \alpha \in \Pi$ , et comme

$$-\langle \mu, h_\alpha \rangle = \langle \mu, h_\alpha \rangle + 2 \cdot (-\langle \mu, h_\alpha \rangle),$$

on en déduit que tous les éléments de la forme  $\mu + i \cdot \alpha$  avec  $i$  entre 0 et  $-\langle \mu, h_\alpha \rangle$  appartiennent à  $\Pi$ . Ceci montre que  $\Pi$  est saturé, et termine la preuve.  $\square$

## Formules de caractères

Dans tout le chapitre on fixe une algèbre de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  sur un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos, et une sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . On note  $\Phi$  le système de racines associé. On fixe également une base  $\Delta$  de  $\Phi$ , et on note  $\Phi^+$  l'ensemble des racines positives (pour ce choix de base).

### 1. Élément de Casimir universel

**1.1. Définition.** Rappelons que la forme de Killing  $\kappa$  de  $\mathfrak{g}$  est non dégénérée, et que sa restriction à  $\mathfrak{h}$  est également non dégénérée (voir le §1.3 du chapitre 8). Choisissons une base  $(h_1, \dots, h_r)$  de  $\mathfrak{h}$ , et notons  $(k_1, \dots, k_r)$  la base duale par rapport à la restriction de  $\kappa$  à  $\mathfrak{h}$ , c'est-à-dire l'unique base de  $\mathfrak{h}$  telle que pour  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  on a

$$\kappa(h_i, k_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Choisissons également, pour tout  $\alpha \in \Phi$ , un vecteur non nul  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ , et notons  $z_\alpha$  l'unique vecteur de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $\kappa(x_\alpha, z_\alpha) = 1$ . (Pour l'existence d'un tel vecteur, voir la preuve de la proposition 2.2(2) du chapitre 8.) Il découle du lemme 1.5(3) du chapitre 8 que la base  $(k_1, \dots, k_r; z_\alpha, \alpha \in \Phi)$  de  $\mathfrak{g}$  est la base duale de la base  $(h_1, \dots, h_r; x_\alpha, \alpha \in \Phi)$  par rapport à  $\kappa$ . Il découle également de la proposition 2.2(1) du chapitre 8 que pour tout  $\alpha \in \Phi$  on a

$$(1.1) \quad [x_\alpha, z_\alpha] = t_\alpha,$$

où  $t_\alpha$  est l'unique élément de  $\mathfrak{h}$  tel que  $\kappa(t_\alpha, -) = \alpha$ .

DÉFINITION 1.1. L'élément de Casimir universel  $c_{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$  est l'élément

$$c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^r h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha z_\alpha \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

EXERCICE 1.2. Montrer que  $c_{\mathfrak{g}}$  ne dépend ni du choix de la base  $(h_1, \dots, h_r)$  de  $\mathfrak{h}$ , ni de celui des éléments  $x_\alpha$ .

LEMME 1.3. L'élément  $c_{\mathfrak{g}}$  appartient au centre de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est très similaire à celle du lemme 1.5 du chapitre 7. Puisque  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est engendrée (comme algèbre) par l'image de  $\mathfrak{g}$ , il suffit de montrer que pour tout  $y \in \mathfrak{g}$  on a  $y \cdot c_{\mathfrak{g}} = c_{\mathfrak{g}} \cdot y$ . Pour cela, écrivons

$$[y, h_i] = \sum_{j=1}^r a_{i,j} h_j + \sum_{\beta \in \Phi} a_{i,\beta} x_\beta, \quad [y, x_\alpha] = \sum_{j=1}^r a_{\alpha,j} h_j + \sum_{\beta \in \Phi} a_{\alpha,\beta} x_\beta$$

et

$$[y, k_i] = \sum_{j=1}^r b_{i,j} k_j + \sum_{\beta \in \Phi} b_{i,\beta} z_\beta, \quad [y, z_\alpha] = \sum_{j=1}^r b_{\alpha,j} k_j + \sum_{\beta \in \Phi} b_{\alpha,\beta} z_\beta.$$

Alors l'associativité de  $\kappa$  implique que

$$a_{i,j} = -b_{j,i}, \quad a_{i,\beta} = -b_{\beta,i}, \quad a_{\alpha,j} = -b_{j,\alpha}, \quad a_{\alpha,\beta} = -b_{\beta,\alpha}$$

pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  et  $\alpha, \beta \in \Phi$ . Puis on calcule :

$$\begin{aligned} y \cdot c_{\mathfrak{g}} &= \sum_{i=1}^r y h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} y x_\alpha z_\alpha \\ &= \sum_{i=1}^r (h_i y k_i + [y, h_i] k_i) + \sum_{\alpha \in \Phi} (x_\alpha y z_\alpha + [y, x_\alpha] z_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i y k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha y z_\alpha + \sum_{i,j=1}^r a_{i,j} h_j k_i + \sum_{i=1}^r \sum_{\beta \in \Phi} a_{i,\beta} x_\beta k_i \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^r a_{\alpha,j} h_j z_\alpha + \sum_{\alpha, \beta \in \Phi} a_{\alpha,\beta} x_\beta z_\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{\mathfrak{g}} \cdot y &= \sum_{i=1}^r h_i k_i y + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha z_\alpha y \\ &= \sum_{i=1}^r (h_i y k_i - h_i [y, k_i]) + \sum_{\alpha \in \Phi} (x_\alpha y z_\alpha - x_\alpha [y, z_\alpha]) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i y k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha y z_\alpha - \sum_{i,j=1}^r b_{i,j} h_i k_j - \sum_{i=1}^r \sum_{\beta \in \Phi} b_{i,\beta} h_i z_\beta \\ &\quad - \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^r b_{\alpha,j} x_\alpha k_j - \sum_{\alpha, \beta \in \Phi} b_{\alpha,\beta} x_\alpha z_\beta. \end{aligned}$$

En comparant ces formules on voit que  $y \cdot c_{\mathfrak{g}} = c_{\mathfrak{g}} \cdot y$ , comme souhaité.  $\square$

### 1.2. Action sur les représentations cycliques de plus haut poids.

Fixons maintenant  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , et une représentation  $(V, \varphi)$  de  $\mathfrak{g}$  qui est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ . Alors  $V$  admet une structure naturelle de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module, et on s'intéresse à l'action de l'élément  $c_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  sur ce module.

LEMME 1.4. *L'élément  $c_{\mathfrak{g}}$  agit sur  $V$  par multiplication par le scalaire  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$ .*

DÉMONSTRATION. Notons  $v$  un vecteur maximal de  $V$  de poids  $\lambda$ . Alors on a

$$\left( \sum_{i=1}^r h_i k_i \right) \cdot v = \left( \sum_{i=1}^r \lambda(h_i) \lambda(k_i) \right) \cdot v.$$

Soit  $t_\lambda \in \mathfrak{h}$  l'unique élément tel que  $\kappa(t_\lambda, -) = \lambda$ , et notons  $t_\lambda = \sum_{i=1}^r s_i \cdot h_i$  (avec  $s_i \in \mathbb{k}$ ). Alors on a  $\lambda(k_i) = \kappa(t_\lambda, k_i) = s_i$ , et donc

$$(\lambda, \lambda) = \kappa(t_\lambda, t_\lambda) = \sum_{i=1}^r s_i \cdot \kappa(h_i, t_\lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda(h_i) \lambda(k_i).$$

On en déduit que

$$\left( \sum_{i=1}^r h_i k_i \right) \cdot v = (\lambda, \lambda) \cdot v.$$

D'autre part, si  $\alpha \in -\Phi^+$  alors  $-\alpha \in \Phi^+$ , et donc

$$x_\alpha z_\alpha \cdot v = 0$$

puisque  $z_\alpha \cdot v = 0$ . Et si  $\alpha \in \Phi^+$  on a

$$x_\alpha z_\alpha \cdot v = ([x_\alpha, z_\alpha] + z_\alpha x_\alpha) \cdot v = t_\alpha \cdot v = \lambda(t_\alpha) \cdot v = (\lambda, \alpha) \cdot v$$

d'après (1.1) et puisque  $x_\alpha \cdot v = 0$ .

En sommant toutes ces égalités, on voit que

$$\begin{aligned} c_{\mathfrak{g}} \cdot v &= \left( (\lambda, \lambda) + \sum_{\alpha \in \Phi^+} (\lambda, \alpha) \right) \cdot v = ((\lambda, \lambda) + 2(\lambda, \rho)) \cdot v \\ &= ((\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)) \cdot v. \end{aligned}$$

Donc  $c_{\mathfrak{g}}$  agit sur  $v$  par multiplication par  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$ .

Enfin, puisque tout élément de  $V$  est une combinaison linéaire de vecteurs de la forme  $y \cdot v$  avec  $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , et puisque  $c_{\mathfrak{g}}$  commute avec tout élément de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  d'après le lemme 1.3, on obtient que  $c_{\mathfrak{g}}$  agit sur tout vecteur de  $V$  par multiplication par  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$ .  $\square$

## 2. Caractères

### 2.1. Caractères des représentations de dimension finie.

LEMME 2.1. *Si  $(V, \varphi)$  est une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , alors  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids, et tous ses poids appartiennent à  $P$ .*

DÉMONSTRATION. Le premier énoncé a été démontré au lemme 2.2(3) du chapitre 10.

Soit maintenant  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  un poids de  $V$ , et soit  $\alpha \in \Phi$ . Par restriction on peut considérer  $V$  comme une représentation de  $S_\alpha$ , qu'on peut identifier à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  comme dans la proposition 2.2(5) du chapitre 8. Alors  $\langle \lambda, h_\alpha \rangle$  est un poids de cette représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Donc, d'après le corollaire 3.9 du chapitre 7, c'est un entier. Comme ceci est vrai pour tout  $\alpha \in \Phi$ ,  $\lambda$  appartient à  $P$ .  $\square$

Soit  $(V, \varphi)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . D'après le lemme 2.2(3) et le lemme 2.1, on a

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda \quad \text{où} \quad V_\lambda = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}, \varphi(h)(v) = \lambda(h) \cdot v\}.$$

On définit alors le *caractère* de  $V$  (ou plus précisément de  $(V, \varphi)$ ) par

$$\text{ch}(V) := \sum_{\lambda \in P} \dim(V_\lambda) \cdot e^\lambda \in \mathbb{Z}[P],$$

où  $\mathbb{Z}[P]$  est l'algèbre de groupe de  $P$  sur  $\mathbb{Z}$ , dont on note la base canonique  $(e^\lambda, \lambda \in P)$ . (Notons que cette somme est finie.) Comme son nom l'indique, l'algèbre de groupe  $\mathbb{Z}[P]$  a une structure naturelle d'anneau, telle que  $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$  pour  $\lambda, \mu \in P$ . Ce produit est clairement commutatif, et son élément neutre est  $e^0$  (qu'on notera 1 dans la suite).

LEMME 2.2. Si  $(V, \varphi)$  et  $(V', \varphi')$  sont des représentations de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , on a

$$\text{ch}(V \otimes V') = \text{ch}(V) \cdot \text{ch}(V').$$

DÉMONSTRATION. On a

$$V \otimes V' = \left( \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda \right) \otimes \left( \bigoplus_{\mu \in P} V'_\mu \right) = \bigoplus_{\lambda, \mu \in P} V_\lambda \otimes V'_\mu.$$

Il est clair que tout  $h \in \mathfrak{h}$  agit sur  $V_\lambda \otimes V'_\mu$  par multiplication par  $(\lambda + \mu)(h)$ , ce qui montre que

$$(V \otimes V')_\nu = \bigoplus_{\substack{\lambda, \mu \in P \\ \lambda + \mu = \nu}} V_\lambda \otimes V'_\mu,$$

puis que

$$\dim((V \otimes V')_\nu) = \sum_{\substack{\lambda, \mu \in P \\ \lambda + \mu = \nu}} \dim(V_\lambda) \cdot \dim(V'_\mu),$$

et donc que

$$\begin{aligned} \text{ch}(V \otimes V') &= \sum_{\nu \in P} \left( \sum_{\substack{\lambda, \mu \in P \\ \lambda + \mu = \nu}} \dim(V_\lambda) \cdot \dim(V'_\mu) \right) \cdot e^\nu \\ &= \left( \sum_{\lambda \in P} \dim(V_\lambda) \cdot e^\lambda \right) \cdot \left( \sum_{\mu \in P} \dim(V'_\mu) \cdot e^\mu \right) = \text{ch}(V) \cdot \text{ch}(V'), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**2.2. Caractères des modules de Verma.** Il sera utile dans la suite de considérer les “caractères” de certaines représentations de  $\mathfrak{g}$  qui ne sont pas de dimension finie. Pour cela, on notera  $\mathfrak{X}$  l’ensemble des fonctions  $f : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  dont le support (c’est-à-dire l’ensemble des  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  tels que  $f(\lambda) \neq 0$ ) est inclus dans une réunion finie d’ensembles de la forme

$$\mathcal{A}_\lambda := \{ \mu \in \mathfrak{h}^* \mid \mu \preceq \lambda \} = \left\{ \lambda - \sum_{\alpha \in \Phi^+} k_\alpha \cdot \alpha, k_\alpha \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut voir  $\mathbb{Z}[P]$  comme un sous-ensemble de  $\mathfrak{X}$  de la façon suivante : on identifie l’élément  $x = \sum_{\lambda \in P} n_\lambda \cdot e^\lambda$  (où  $n_\lambda$  est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de  $\lambda$ ) à la fonction  $f_x : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que

$$f_x(\mu) = \begin{cases} n_\mu & \text{si } \mu \in P; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Dans la suite, on n’utilisera pas la notation  $f_x$ ; cette fonction sera notée simplement  $x$ .)

On définit une structure d’anneau (commutatif) sur  $\mathfrak{X}$  en posant, pour  $f, g \in \mathfrak{X}$  et  $\nu \in \mathfrak{h}^*$ ,

$$(f \star g)(\nu) = \sum_{\substack{\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda + \mu = \nu}} f(\lambda) \cdot g(\mu).$$

Il est facile de voir que la définition de  $\mathfrak{X}$  assure que, dans la somme considérée, seul un nombre fini de termes est non nul, de sorte que cette somme a bien un sens. Il n'est pas difficile non plus de voir que la fonction  $f \star g$  appartient bien à  $\mathfrak{X}$ ; par exemple si  $f$  a son support inclus dans  $\mathcal{A}_{\lambda_1}$  et  $g$  a son support inclus dans  $\mathcal{A}_{\lambda_2}$ , alors  $f \star g$  a son support inclus dans  $\mathcal{A}_{\lambda_1 + \lambda_2}$ . Enfin, il est clair que l'inclusion  $\mathbb{Z}[P] \hookrightarrow \mathfrak{X}$  considérée ci-dessus est un morphisme d'anneaux.

Un exemple important de fonction qui appartient à  $\mathfrak{X}$  mais pas à  $\mathbb{Z}[P]$  est la *fonction de Kostant*  $\mathcal{P} : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  qui est telle que, pour  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ,  $\mathcal{P}(\lambda)$  est le cardinal de l'ensemble des collections d'entiers positifs ou nuls  $(k_\alpha, \alpha \in \Phi^+)$  tels que

$$-\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi^+} k_\alpha \cdot \alpha.$$

(Il est clair que le support de  $\mathcal{P}$  est  $\mathcal{A}_0$ .)

Si  $(V, \varphi)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  qui est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ , alors d'après la proposition 2.5(2)–(3) du chapitre 10, on a

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu,$$

et chaque  $V_\mu$  est de dimension finie. On peut donc définir la fonction  $\text{ch}(V) : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  en posant

$$\text{ch}(V)(\mu) = \dim(V_\mu).$$

Cette même proposition montre que le support de  $\text{ch}(V)$  est inclus dans  $\mathcal{A}_\lambda$ , donc en particulier que cette fonction appartient à  $\mathfrak{X}$ .

LEMME 2.3. *Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , on a*

$$\text{ch}(M(\lambda)) = \mathcal{P} \star e^\lambda.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ,  $(\mathcal{P} \star e^\lambda)(\mu)$  est le cardinal de l'ensemble des collections d'entiers positifs ou nuls  $(k_\alpha, \alpha \in \Phi^+)$  tels que

$$\mu = \lambda - \sum_{\alpha \in \Phi^+} k_\alpha \cdot \alpha.$$

Le lemme 2.9 du chapitre 10 montre que cet entier est égal à  $\dim(M(\lambda)_\mu)$ .  $\square$

**2.3. La fonction  $\mathcal{Q}$ .** On pose maintenant

$$\mathcal{Q} := \prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \in \mathbb{Z}[P] \subset \mathfrak{X}.$$

Puisque  $W$  agit sur  $P$ , il agit également sur  $\mathbb{Z}[P]$ , de sorte que  $w \cdot e^\lambda = e^{w(\lambda)}$ . Il est clair que cette action est compatible avec la structure d'anneau.

LEMME 2.4. *Pour tout  $w \in W$ , on a  $w \cdot \mathcal{Q} = (-1)^{\ell(w)} \cdot \mathcal{Q}$ .*

DÉMONSTRATION. Puisque  $w$  est engendré par les réflexions  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$  (voir le Théorème 3.5(4) du chapitre 9), et par définition de  $\ell$ , il suffit de montrer que pour tout  $\alpha \in \Delta$  on a  $s_\alpha \cdot \mathcal{Q} = -\mathcal{Q}$ . Mais, par définition, on a

$$s_\alpha \cdot \mathcal{Q} = \prod_{\beta \in s_\alpha(\Phi^+)} (e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}).$$

Et puisque  $s_\alpha(\Phi^+) = (\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) \sqcup \{-\alpha\}$  (voir le lemme 3.1 du chapitre 9), on en déduit que

$$s_\alpha \cdot \mathcal{Q} = \left( \prod_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}} (e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}) \right) \cdot (e^{-\alpha/2} - e^{\alpha/2}) = -\mathcal{Q},$$

comme souhaité.  $\square$

REMARQUE 2.5. Le lemme 2.4 montre que l'application  $W \rightarrow \{\pm 1\}$  définie par  $w \mapsto (-1)^{\ell(w)}$  est un morphisme de groupes. (Ceci peut également se montrer directement en utilisant les résultats du chapitre 9.) Ce morphisme est appelé le *caractère signe* de  $W$ , et est souvent noté  $\varepsilon$ .

LEMME 2.6. *On a  $\mathcal{P} \star \mathcal{Q} = e^\rho$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ , notons  $f_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  la fonction qui vaut 1 sur chaque élément  $-k\alpha$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , et 0 sur tous les autres éléments. Alors  $f_\alpha \in \mathfrak{X}$ , et il est clair que

$$\mathcal{P} = \prod_{\alpha \in \Phi^+} f_\alpha.$$

D'autre part, pour tout  $\alpha \in \Phi^+$  et  $\nu \in \mathfrak{h}^*$  on a

$$((1 - e^{-\alpha}) \star f_\alpha)(\nu) = f_\alpha(\nu) - f_\alpha(\nu + \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc  $(1 - e^{-\alpha}) \star f_\alpha = 1$ .

On obtient finalement que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \star \mathcal{Q} &= \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} f_\alpha \right) \star \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \right) \\ &= \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} f_\alpha \right) \star \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \right) \star e^\rho \\ &= \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} (f_\alpha \star (1 - e^{-\alpha})) \right) \star e^\rho = e^\rho, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule voulue.  $\square$

### 3. Formules de Kostant et de Weyl

**3.1. Facteurs de composition des modules cycliques de plus haut poids entier.** Si  $\lambda \in P$ , on pose

$$Z_\lambda := \{\mu \in P \mid (\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)\}.$$

Par les mêmes considérations que dans la preuve du lemme 4.7 du chapitre 9, cet ensemble est fini.

PROPOSITION 3.1. *Soit  $\lambda \in P$ , et soit  $(V, \varphi)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  qui est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ . Alors il existe une suite  $V_0, \dots, V_s$  de sous-représentations de  $V$  telles que*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{s-1} \subset V_s = V$$



et telles que pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$  il existe  $\mu_i \in P$  tel que  $\mu_i \preceq \lambda$  et  $\mu_i \in Z_\lambda$  et un isomorphisme de représentations  $V_i/V_{i-1} \cong L(\mu_i)$ .

DÉMONSTRATION. On va démontrer la proposition par récurrence sur

$$d_V := \sum_{\mu \in Z_\lambda} \dim(V_\mu).$$

Supposons que  $d_V = 1$ . Dans ce cas on va montrer que  $V$  est simple. Ceci impliquera que  $V$  est isomorphe à  $L(\lambda)$  d'après la proposition 2.11 du chapitre 10, et conclura la preuve dans ce cas. Supposons que  $V' \subset V$  est un sous-module non nul. D'après le lemme 2.1(2) du chapitre 10,  $V'$  est la somme de ses sous-espaces de poids, et l'ensemble de ses poids est inclus dans l'ensemble des poids de  $V$ , qui est lui-même inclus dans  $\mathcal{A}_\lambda$  (voir la proposition 2.5(2) du chapitre 10). Donc  $V'$  possède un poids  $\mu$  qui est maximal parmi tous ses poids, et donc un vecteur maximal  $v_\mu$  de poids  $\mu$ . De plus, on a  $\mu \preceq \lambda$ . D'après le lemme 1.4, l'élément de Casimir  $c_{\mathfrak{g}}$  agit sur  $V$  par multiplication par  $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$ , et sur  $v_\mu$  par multiplication par  $(\mu + \rho, \mu + \rho) - (\rho, \rho)$ . On a donc

$$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\mu + \rho, \mu + \rho),$$

c'est-à-dire que  $\mu \in Z_\lambda$ . L'hypothèse que  $d_V = 1$  implique alors que  $\mu = \lambda$  et que  $\mathbb{k} \cdot v_\mu = V_\lambda$ , donc finalement que  $V' = V$  puisque  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot V_\lambda = V$ .

Considérons maintenant le cas général. Comme ci-dessus, si  $V$  est simple il n'y a rien à démontrer. Sinon, considérons une sous-représentation  $V' \subset V$  non triviale. Comme ci-dessus,  $V'$  possède un vecteur maximal  $v_\mu$  de plus haut poids  $\mu$  tel que  $\mu \in Z_\lambda$  et  $\mu \prec \lambda$  (puisque'on suppose maintenant que  $V' \neq V$ ). Soit  $V'' := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot v_\mu$ . Alors  $V''$  est une sous-représentation de  $V$ , qui est cyclique de plus haut poids  $\mu$ . La représentation  $V/V''$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$  d'après la proposition 2.5(5) du chapitre 10. De plus, comme  $Z_\lambda = Z_\mu$ , on a

$$d_V = d_{V''} + d_{V/V''},$$

et  $d_{V''}$  et  $d_{V/V''}$  sont tous deux non nuls. Ils sont donc tous deux strictement inférieurs à  $d_V$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $V''$  et à  $V/V''$ , puis recoller les filtrations pour obtenir la filtration de  $V$  souhaitée.  $\square$

### 3.2. Application aux caractères.

LEMME 3.2. *Pour tout  $\lambda \in P^+$ , il existe des coefficients  $c_\mu \in \mathbb{Z}$  (pour  $\mu \in Z_\lambda$ , avec  $\mu \preceq \lambda$ ) tels que  $c_\lambda = 1$  et*

$$\text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\substack{\mu \in Z_\lambda \\ \mu \preceq \lambda}} c_\mu \cdot \text{ch}(M(\mu)).$$

DÉMONSTRATION. Choisissons une énumération  $\nu_1, \dots, \nu_s$  des éléments de  $Z_\lambda$  telle que si  $\nu_i \prec \nu_j$ , alors  $i < j$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , en appliquant la proposition 3.1 à  $M(\nu_i)$ , on obtient qu'il existe des coefficients  $(a_{i,j})_{j \leq i}$  dans  $\mathbb{N}$  tels que

$$\text{ch}(M(\nu_i)) = \sum_{j=1}^i a_{i,j} \cdot \text{ch}(L(\nu_j)).$$

De plus, comme  $\text{ch}(M(\nu_i))(\nu_i) = \text{ch}(L(\nu_i))(\nu_i) = 1$  et  $\text{ch}(L(\nu_j))(\nu_i) = 0$  si  $j < i$ , on a  $a_{i,i} = 1$ .

Considérons maintenant les coefficients  $a_{i,j}$  pour toutes les valeurs de  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $j \leq i$ , et posons  $a_{i,j} = 0$  si  $i > j$ . Alors la matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, s\}}$  est triangulaire supérieure, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , avec des 1 sur la diagonale. Elle est donc inversible, et son inverse est également triangulaire supérieure, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , avec des 1 sur la diagonale. Si on note  $B = (b_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, s\}}$  cette matrice inverse, pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$  on a alors

$$\text{ch}(L(\nu_i)) = \sum_{j=1}^i b_{i,j} \cdot \text{ch}(M(\nu_j)),$$

avec  $b_{i,i} = 1$  et  $b_{i,j} = 0$  si  $i > j$ .

En appliquant ce fait à  $\lambda$  (qui est l'un des  $\nu_i$ ), on obtient que

$$(3.1) \quad \text{ch}(L(\lambda)) = \text{ch}(M(\lambda)) + \sum_{\substack{\mu \in Z_\lambda \\ \mu \neq \lambda}} c_\mu \cdot \text{ch}(M(\mu))$$

pour certains coefficients  $c_\mu \in \mathbb{Z}$ . Pour conclure, il reste à voir que  $c_\mu = 0$  si  $\mu \not\leq \lambda$ . Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas, et choisissons  $\mu \not\leq \lambda$  tel que  $c_\mu \neq 0$  et qui est maximal (pour l'ordre  $\preceq$ ) parmi les poids possédant ces propriétés. Alors  $\text{ch}(M(\mu))(\mu) = 1$ ,  $\text{ch}(L(\lambda))(\mu) = \text{ch}(M(\lambda))(\mu) = 0$ , et  $\text{ch}(M(\nu))(\mu) = 0$  si  $c_\nu \neq 0$  et  $\nu \neq \mu$ , puisque dans ce cas  $\mu \not\leq \nu$  (voir la proposition 2.5(2)–(3) du chapitre 10). Ceci contredit l'égalité (3.1), et conclut la preuve.  $\square$

### 3.3. Formule de Kostant.

LEMME 3.3. *Soit  $\lambda \in P^+$ . Soit  $\mu \in P$  tel que  $\mu \preceq \lambda$ ,  $\mu + \rho \in P^+$ , et  $\mu \in Z_\lambda$ . Alors  $\mu = \lambda$ .*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on a  $(\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + \rho, \mu + \rho) &= (\lambda + \rho, (\lambda - \mu) + (\mu + \rho)) - (\mu + \rho, \mu + \rho) \\ &= (\lambda + \rho, \lambda - \mu) + (\lambda - \mu, \mu + \rho). \end{aligned}$$

On a  $(\lambda - \mu, \mu + \rho) \geq 0$  puisque  $\mu \preceq \lambda$  et  $\mu + \rho \in P^+$ , et de même  $(\lambda + \rho, \lambda - \mu) \geq 0$ . Ceci implique donc en particulier que

$$(\lambda + \rho, \lambda - \mu) = 0.$$

Puisque  $\lambda \in P^+$ , cette égalité force  $\lambda - \mu = 0$ , et conclut la preuve.  $\square$

THÉORÈME 3.4 (Formule de multiplicité de Kostant). *Pour tout  $\lambda \in P^+$  et tout  $\mu \in P$ , on a*

$$\text{ch}(L(\lambda))(\mu) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot \mathcal{P}(\mu + \rho - w(\lambda + \rho)).$$

DÉMONSTRATION. On va démontrer que

$$(3.2) \quad \text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot \text{ch}(M(w(\lambda + \rho) - \rho)).$$

Le théorème découlera de cette égalité et du lemme 2.3.

D'après le lemme 3.2, on peut écrire

$$(3.3) \quad \text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\mu \in P} c_\mu^\lambda \cdot \text{ch}(M(\mu))$$

avec des coefficients  $c_\mu^\lambda \in \mathbb{Z}$  tels que  $c_\lambda^\lambda = 1$  et

$$(3.4) \quad c_\mu^\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (\mu \preceq \lambda \text{ et } \mu \in Z_\lambda).$$

En multipliant l'égalité (3.3) par  $\mathcal{Q}$ , et en utilisant les lemmes 2.3 et 2.6, on obtient que

$$(3.5) \quad \mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\mu \in P} c_\mu^\lambda \cdot e^{\mu+\rho}.$$

Il découle du théorème 3.4 du chapitre 10 que pour tout  $w \in W$  on a  $w \cdot \text{ch}(L(\lambda)) = \text{ch}(L(\lambda))$ . D'autre part, d'après le lemme 2.4, pour tout  $w \in W$  on a  $w \cdot \mathcal{Q} = (-1)^{\ell(w)} \cdot \mathcal{Q}$ . Donc on a

$$w \cdot (\mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda))) = (-1)^{\ell(w)} \cdot (\mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda)))$$

pour tout  $w \in W$ . En comparant avec l'égalité (3.5), on en déduit que

$$\sum_{\mu \in P} c_\mu^\lambda \cdot e^{w(\mu+\rho)} = (-1)^{\ell(w)} \cdot \left( \sum_{\mu \in P} c_\mu^\lambda \cdot e^{\mu+\rho} \right)$$

pour tout  $w \in W$ , et donc que

$$(3.6) \quad c_{w^{-1}(\mu+\rho)-\rho}^\lambda = (-1)^{\ell(w)} \cdot c_\mu^\lambda \quad \text{pour tous } \mu \in P \text{ et } w \in W.$$

Soit maintenant  $\mu \in P$  tel que  $c_\mu^\lambda \neq 0$ . Choisissons  $w \in W$  tel que  $\nu := w^{-1}(\mu + \rho) \in P^+$ . Alors  $c_{\nu-\rho}^\lambda \neq 0$  d'après (3.6), ce qui implique que  $\nu - \rho \preceq \lambda$  et  $\nu - \rho \in Z_\lambda$  d'après (3.4). Le lemme 3.3 montre alors que  $\nu - \rho = \lambda$ , et donc que  $\mu \in W(\lambda + \rho) - \rho$ . En d'autres termes, dans la somme 3.3, seuls les termes correspondant à  $\mu \in W(\lambda + \rho) - \rho$  peuvent être non nuls.

D'autre part, puisque  $c_\lambda^\lambda = 1$ , et puisque  $\ell(w) = \ell(w^{-1})$  pour tout  $w \in W$ , l'égalité (3.6) montre que

$$c_{w(\lambda+\rho)-\rho}^\lambda = (-1)^{\ell(w)} \quad \text{pour tout } w \in W.$$

Ces considérations prouvent la formule (3.2), et donc le théorème.  $\square$

### 3.4. Formules de Weyl.

THÉORÈME 3.5 (Formule de caractère de Weyl). *Pour tout  $\lambda \in P^+$ , on a*

$$\left( \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\rho)} \right) \star \text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\lambda+\rho)}.$$

DÉMONSTRATION. La formule (3.5) et les informations sur les coefficients  $c_\mu^\lambda$  obtenus au cours de la preuve du théorème 3.4 montrent que

$$(3.7) \quad \mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\lambda+\rho)}.$$

Donc pour conclure il suffit de démontrer la formule

$$(3.8) \quad \mathcal{Q} = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\rho)}.$$

Pour cela, considérons la représentation triviale  $\mathbb{k}$  de  $\mathfrak{g}$ . Cette représentation est clairement simple, de plus haut poids 0. Donc  $L(0) = \mathbb{k}$ , et  $\text{ch}(L(0)) = 1$ . En appliquant la formule (3.7) dans le cas particulier  $\lambda = 0$ , on obtient donc (3.8), et la preuve est complète.  $\square$

COROLLAIRE 3.6 (Formule de dimension de Weyl). *Pour tout  $\lambda \in P^+$ , on a*

$$\dim(L(\lambda)) = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \lambda + \rho \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \rho \rangle}.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ , on considère le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\partial_\alpha : \mathbb{Z}[P] \rightarrow \mathbb{Z}[P]$$

qui vérifie  $\partial_\alpha(e^\lambda) = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \cdot e^\lambda$  pour tout  $\lambda \in P$ . Il est facile de vérifier que ce morphisme est une dérivation, au sens où il vérifie  $\partial_\alpha(x \cdot y) = \partial_\alpha(x) \cdot y + x \cdot \partial_\alpha(y)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}[P]$ . On pose maintenant

$$\partial := \prod_{\alpha \in \Phi^+} \partial_\alpha.$$

(Ici le produit désigne la composition des applications, prise dans un ordre arbitraire – les applications  $\partial_\alpha$  commutent deux à deux.) On note également  $v : \mathbb{Z}[P] \rightarrow \mathbb{Z}$  le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules tel que  $v(e^\lambda) = 1$  pour tout  $\lambda \in P$ . Ce morphisme est clairement un morphisme d'anneaux.

On va tout d'abord démontrer que

$$(3.9) \quad v\left(\partial(\mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda)))\right) = v(\partial(\mathcal{Q})) \cdot \dim(L(\lambda)).$$

En effet, en utilisant le fait que les  $\partial_\alpha$  sont des dérivations, on peut écrire  $\partial(\mathcal{Q} \star \text{ch}(L(\lambda)))$  comme une somme de termes de la forme  $\partial_1(\mathcal{Q}) \star \partial_2(\text{ch}(L(\lambda)))$  où  $\partial_1$  et  $\partial_2$  sont des composées de dérivations  $\partial_\alpha$  distinctes. Puisque  $\mathcal{Q} = \prod_{\alpha \in \Phi^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ , et puisque  $v$  annule chaque facteur de ce produit, dans ces termes on a  $v(\partial_1(\mathcal{Q})) = 0$  sauf si  $\partial_1 = \partial$  (auquel cas on a  $\partial_2 = \text{id}$ ). Puisque  $v(\text{ch}(L(\lambda))) = \dim(L(\lambda))$ , ceci implique la formule (3.9).

Montrons maintenant que pour tout  $\mu \in P$  et tout  $w \in W$  on a

$$(3.10) \quad v(\partial(e^{w(\mu)})) = (-1)^{\ell(w)} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \mu \rangle.$$

En effet, par définition on a

$$\partial(e^{w(\mu)}) = \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, w(\mu) \rangle \right) \cdot e^{w(\mu)} = \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle (w^{-1}(\alpha))^\vee, \mu \rangle \right) \cdot e^{w(\mu)},$$

et donc

$$v(\partial(e^{w(\mu)})) = \prod_{\beta \in w^{-1}(\Phi^+)} \langle \beta^\vee, \mu \rangle.$$

Maintenant on remarque que l'ensemble  $w^{-1}(\Phi^+)$  contient, pour chaque  $\alpha \in \Phi^+$ , exactement une des racines  $\alpha$  ou  $-\alpha$ . De plus, le nombre de fois où cette racine est  $-\alpha$  est

$$\#(w^{-1}(\Phi^+) \cap (-\Phi^+)) = \#(w^{-1}(-\Phi^+) \cap \Phi^+) = \ell(w)$$

d'après le lemme 3.8 du chapitre 9. Donc

$$\prod_{\beta \in w^{-1}(\Phi^+)} \langle \beta^\vee, \mu \rangle = (-1)^{\ell(w)} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \mu \rangle,$$

et on a démontré la formule (3.10).

En appliquant la formule (3.10) on voit que

$$v \left( \partial \left( \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\lambda + \rho)} \right) \right) = \#(W) \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \lambda + \rho \rangle$$

et que, en utilisant (3.8),

$$v(\partial(\mathcal{Q})) = v \left( \partial \left( \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \cdot e^{w(\rho)} \right) \right) = \#(W) \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha^\vee, \rho \rangle.$$

En utilisant ces formules, la formule (3.9), et la formule de Weyl (Théorème 3.5), on obtient finalement la formule du corollaire.  $\square$



Troisième partie

**Exercices et examens**





## Exercices

La plupart des exercices sont tirés des références suivantes :

- (1) K. Erdmann, M. Wildon, *Introduction to Lie algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, 2006.
- (2) A. Henderson, *Representations of Lie algebras – An introduction through  $\mathfrak{gl}_n$* , Australian Mathematical Society Lecture Series 22, Cambridge University Press, 2012.
- (3) J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Second printing, revised, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer-Verlag, 1978.

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  désigne un corps,  $p$  désigne la caractéristique de  $\mathbb{k}$ , et  $\mathfrak{g}$  est une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie.

### 1. Chapitre 2

EXERCICE 1.1. Soit  $n \geq 1$  un entier.

- (1) Considérons la base canonique  $(E_{i,j}, i, j \in \{1, \dots, n\})$  de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ . Calculer les commutateurs  $[E_{i,j}, E_{k,l}]$  pour toutes les valeurs de  $i, j, k, l$ .
- (2) Déterminer les dimensions des algèbres de Lie  $\mathfrak{d}_n(\mathbb{k})$ ,  $\mathfrak{u}_n^\pm(\mathbb{k})$ ,  $\mathfrak{h}_n^\pm(\mathbb{k})$ .
- (3) Soit  $x \in M_n(\mathbb{k})$  un endomorphisme diagonalisable, de valeurs propres (non nécessairement distinctes)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrer que l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  de  $M_n(\mathbb{k})$  est diagonalisable, et déterminer ses valeurs propres.

EXERCICE 1.2. Supposons que  $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ , et que  $(x_1, x_2, x_3)$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . On suppose qu'il existe  $a, b \in \mathbb{k}$  tels que

$$[x_1, x_2] = x_1 + x_2, \quad [x_1, x_3] = ax_1 + x_3, \quad [x_2, x_3] = x_2 + bx_3.$$

Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ .

EXERCICE 1.3. Supposons  $p \neq 2$ , et que  $\mathfrak{g}$  est abélienne. Montrer que le seul morphisme d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  vers  $\mathfrak{g}$  est l'application linéaire nulle.

Que peut-on dire si  $p = 2$  ?

EXERCICE 1.4. Considérons la base canonique  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$ . Déterminer les sous-ensembles de la base canonique dont le sous-espace engendré est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$ .

Déterminer, parmi les telles sous-algèbres de Lie, lesquelles sont isomorphes.

EXERCICE 1.5. Soit  $n \geq 1$  un entier. On pose

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{k}) = \{x \in M_n(\mathbb{k}) \mid {}^t x = -x\}.$$

- (1) Montrer que  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ , de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- (2) Si  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , construire un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$  tel que  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est un multiple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 1.6. Soit  $n \geq 1$  un entier.

- (1) Montrer que pour tout  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ , l'application  $x \mapsto gxg^{-1}$  est un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ , qui laisse stable la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ .
- (2) Montrer que l'application  $x \mapsto -^t x$  est un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ , qui laisse stable la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ .
- (3) On suppose que  $p \neq 2$ , et soit  $d \in \mathbb{k}^\times$ . Déterminer tous les automorphismes  $\varphi$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  tels que

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

- (4) On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos et  $p \neq 2$ . En déduire que tout automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  est de la forme  $x \mapsto gxg^{-1}$  pour un  $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 1.7. Soit  $n \geq 1$  un entier, et supposons que  $p$  ne divise pas  $n$ . Montrer qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) \times \mathbb{k}.$$

EXERCICE 1.8. Soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  un idéal de codimension  $k$ .

- (1) Montrer que si  $k \in \{1, 2\}$  alors  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$ .
- (2) Si  $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , montrer que  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) \leq \frac{k(k-1)}{2}$ .
- (3) En déduire qu'on ne peut pas avoir  $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$ .

EXERCICE 1.9. Pour toute partie  $S \subset \mathfrak{g}$ , on définit le *centralisateur* de  $S$  par

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(S) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in S, [x, y] = 0\}.$$

- (1) Montrer que  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(S)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .
- (2) Montrer que si  $\mathfrak{h}$  est un idéal,  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .
- (3) Si  $n \geq 1$  est un entier, déterminer  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})}(\mathfrak{d}_n(\mathbb{k}))$ .

EXERCICE 1.10. Pour toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , on définit son *normalisateur* par

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}\}.$$

- (1) Montrer que  $\mathfrak{h}$  est un idéal si et seulement si  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ .
- (2) Montrer que  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .
- (3) Montrer que  $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  et que  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .
- (4) Montrer que  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  et que  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est un idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

(5) Construire un morphisme injectif d'algèbres de Lie

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}).$$

(6) Si  $n \geq 1$  est un entier, déterminer  $N_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})}(\mathfrak{u}_n^+(\mathbb{k}))$ .

EXERCICE 1.11. Soit  $x \in \mathfrak{g}$ . Montrer que le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  engendré par les vecteurs propres de  $\text{ad}(x)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

EXERCICE 1.12. Considérons l'algèbre de Lie  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  des dérivations de  $\mathfrak{g}$  (par rapport à l'application bilinéaire  $[-, -]$ ). Montrer que le sous-espace de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  formé des dérivations intérieures est un idéal de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ .

EXERCICE 1.13. Montrer que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{k})$  est simple ssi  $p \neq 3$ . *Indication* : si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{k})$  est un idéal, on pourra considérer les endomorphismes  $\text{ad}(h)|_{\mathfrak{h}}$  pour

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Chapitre 3

EXERCICE 2.1. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2. Déterminer tous les automorphismes d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

EXERCICE 2.2. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension  $m \geq 4$  telle que  $\dim(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) = 1$  et  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Montrer que  $\mathfrak{g}$  est isomorphe au produit d'une algèbre de Lie abélienne de dimension  $m - 2$  et d'une algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2.

EXERCICE 2.3. Montrer que, sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , il existe, à isomorphisme près, exactement 2 algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension 3 telles que  $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  : l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  et l'algèbre de Lie  $\mathbb{R}^3$  munie du produit vectoriel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2.4. Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de Heisenberg sur  $\mathbb{k}$ , c'est-à-dire l'algèbre de Lie de dimension 3, et de base  $(x, y, z)$  qui vérifie

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = [y, z] = 0.$$

Montrer que l'algèbre de Lie  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  des dérivations de  $\mathfrak{g}$  (pour l'application bilinéaire  $[-, -]$ ) est de dimension 6, et que son quotient par l'idéal des dérivations intérieures est isomorphe à  $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 2.5. (1) Soient  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{i}$  des algèbres de Lie, et soit  $\theta : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{i})$  un morphisme d'algèbres de Lie. Montrer que si on pose  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{i}$  et qu'on munit cet espace vectoriel du crochet

$$[(h_1, i_1), (h_2, i_2)] = ([h_1, h_2], [i_1, i_2] + \theta(h_1)(i_2) - \theta(h_2)(i_1))$$

pour  $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$  et  $i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$ , alors  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie,  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , et  $\mathfrak{i}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . (L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est alors appelée le *produit semi-direct* de  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{i}$ , et notée  $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{i}$ .)

- (2) Réciproquement, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. On suppose qu'il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}$  (comme espaces vectoriels). Montrer que l'application

$$\theta : \begin{cases} \mathfrak{h} & \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{i}) \\ x & \mapsto \text{ad}(x)|_{\mathfrak{i}} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, et que  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{i}$ .

EXERCICE 2.6. Déterminer, à isomorphisme près, toutes les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  telles que  $\dim(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) = 1$ .

EXERCICE 2.7. On suppose que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . Déterminer à quelles algèbres de Lie apparaissant dans la classification (en dimension 3) sont isomorphes les algèbres de Lie suivantes :

- (1) l'algèbre de Lie engendrée (comme espace vectoriel) par les matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(où  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$  sont fixés) ;

- (2) la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$  formée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- (3) la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$  formée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3. Chapitre 4

EXERCICE 3.1. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie.

- (1) Montrer que si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h} \Leftrightarrow (\mathfrak{h} \text{ est un idéal et } \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ est une algèbre de Lie abélienne})$ .
- (2) Montrer que  $\mathfrak{g}$  est résoluble ssi il existe une famille  $\mathfrak{h}_0, \dots, \mathfrak{h}_r$  de sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_{r-1} \supset \mathfrak{h}_r = \{0\},$$

chaque  $\mathfrak{h}_{i+1}$  est un idéal de  $\mathfrak{h}_i$ , et chaque quotient  $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$  est une algèbre de Lie abélienne.

EXERCICE 3.2. Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie nilpotente, alors  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Montrer que cette implication n'est pas vraie pour les algèbres de Lie résolubles.

EXERCICE 3.3. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est résoluble (resp. nilpotente) ssi la sous-algèbre de Lie  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  est résoluble (resp. nilpotente).

EXERCICE 3.4. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Montrer que la somme de deux idéaux nilpotents de  $\mathfrak{g}$  est un idéal nilpotent. En déduire que si  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, elle possède un unique idéal nilpotent maximal.

EXERCICE 3.5. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal non nul. Montrer que  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . (*Indication* : on pourra considérer l'action de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{i}$  induite par l'action adjointe.)

EXERCICE 3.6. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie propre. Montrer que l'inclusion  $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est stricte.

EXERCICE 3.7. Le but de cet exercice est de démontrer que toute algèbre de Lie nilpotente admet une dérivation (pour  $[-, -]$ ) qui n'est pas intérieure. Soit donc  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente.

- (1) Montrer qu'il existe un idéal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  de codimension 1. (Dans la suite de l'exercice, on fixe un tel idéal.)
- (2) Montrer que  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{i}) \neq \{0\}$ .
- (3) On fixe  $x \in \mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathbb{k} \cdot x$ , et on note  $n \in \mathbb{N}$  l'entier maximal tel que  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{i}) \subset \mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ . Soit alors  $z \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{i}) \setminus \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$ . Montrer que l'unique application linéaire  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui est nulle sur  $\mathfrak{i}$  et qui vérifie  $D(x) = z$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$ , et qu'elle n'est pas une dérivation intérieure.

EXERCICE 3.8. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie, et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal tel que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  est nilpotente et que  $\text{ad}(x)|_{\mathfrak{i}}$  est un endomorphisme nilpotent de  $\mathfrak{i}$  pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ . Montrer que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente.

EXERCICE 3.9. On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos. Montrer qu'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{k}$  est nilpotente ssi toute sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  de dimension 2 est abélienne.

EXERCICE 3.10. Supposons que  $p > 0$ , et considérons les matrices suivantes dans  $\mathfrak{gl}_p(\mathbb{k})$  :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p-2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{gl}_p(\mathbb{k})$  engendré par  $x$  et  $y$  est une sous-algèbre de Lie résoluble, mais que  $x$  et  $y$  n'ont aucun vecteur propre commun (de sorte que l'énoncé du théorème de Lie est faux dans ce cas).

EXERCICE 3.11. On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Montrer qu'une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie est résoluble ssi  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est nilpotente.

EXERCICE 3.12. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Montrer que  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  est inclus dans toute sous-algèbre de Lie résoluble maximale de  $\mathfrak{g}$ .

EXERCICE 3.13. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple ssi elle ne possède aucun idéal abélien non nul.

EXERCICE 3.14. On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0.

Soit  $n \geq 1$ . Montrer que si  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  (resp.  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ ) est une sous-algèbre de Lie, alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble ssi il existe  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  tel que  $\mathfrak{g} \subset g \cdot \mathfrak{b}_n^+ \cdot g^{-1}$  (resp.  $\mathfrak{g} \subset g \cdot (\mathfrak{b}_n^+ \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})) \cdot g^{-1}$ ).

En déduire que les sous-algèbres de Lie résolubles maximales de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  (resp. de  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ ) sont exactement les sous-algèbres de la forme  $g \cdot \mathfrak{b}_n^+ \cdot g^{-1}$  (resp.  $g \cdot (\mathfrak{b}_n^+ \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})) \cdot g^{-1}$ ) avec  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 3.15. On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Montrer que

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})) = \mathbb{k} \cdot I_n, \quad \mathrm{Rad}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})) = \{0\}.$$

(On pourra utiliser les exercices 3.12 et 3.14.)

EXERCICE 3.16. On suppose que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, de caractéristique 0. Montrer que si  $V$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie et si  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  est une sous-algèbre de Lie résoluble, alors  $\mathrm{Tr}(xy) = 0$  pour tous  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathfrak{g}$ .

(La réciproque de cette propriété est vraie également, mais beaucoup plus difficile ; elle s'appelle le *critère de Cartan*, et sera vue ultérieurement.)

## 4. Chapitre 5

EXERCICE 4.1. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie et  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal. Montrer que

$$\mathfrak{i} \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \{x \cdot u, x \in \mathfrak{i}, u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\}$$

est un idéal bilatère, et qu'il existe un isomorphisme naturel d'algèbres

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})/(\mathfrak{i} \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}).$$

(On donnera 2 preuves de cet isomorphisme : une utilisant le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, et l'autre utilisant la propriété universelle de l'algèbre enveloppante.)

EXERCICE 4.2. Soit  $X$  un ensemble fini, et soit  $V$  l'espace vectoriel dont une base est formée par les symboles  $\{e_x, x \in X\}$ . Considérons l'algèbre tensorielle  $\mathcal{T}(V)$ , et soit  $\mathfrak{g}_X$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{T}(V)$  engendré par tous les vecteurs qui peuvent s'écrire comme des commutateurs successifs d'éléments de  $V \subset \mathcal{T}(V)$ .

- (1) Montrer que  $\mathfrak{g}_X$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{T}(V)$ . (Cette algèbre de Lie est appelée l'*algèbre de Lie libre* associée à  $X$ .)
- (2) Montrer que  $\mathfrak{g}_X$  possède la "propriété universelle" suivante : pour toute algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de dimension finie et toute application  $\varphi : X \rightarrow \mathfrak{h}$ , il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie  $\psi : \mathfrak{g}_X \rightarrow \mathfrak{h}$  tel que  $\psi(e_x) = \varphi(x)$  pour tout  $x \in X$ .
- (3) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel d'algèbres  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(V)$ . (*Indication* : on pourra comparer les propriétés universelles des algèbres  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_X)$  et  $\mathcal{T}(V)$ .)
- (4) Décrire l'algèbre  $\mathfrak{g}_X$  dans le cas où  $X$  n'a qu'un élément.

EXERCICE 4.3. Si  $A$  est un anneau, on définit l'anneau  $A^{\mathrm{op}}$  dont le groupe abélien sous-jacent est  $(A, +)$ , et dont la multiplication est donnée par  $\mu^{\mathrm{op}}(a, b) := b \cdot a$  pour  $a, b \in A^{\mathrm{op}} = A$ .

Montrer que, si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie, il existe un isomorphisme d'anneaux  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{op}}$ . (*Indication* : on pourra considérer l'endomorphisme de  $\mathfrak{g}$  donné par  $x \mapsto -x$ .)

EXERCICE 4.4. On rappelle que si  $A$  est un anneau, un *diviseur de 0* de  $A$  est un élément  $a \in A \setminus \{0\}$  tel qu'il existe  $b \in A \setminus \{0\}$  tel que  $a \cdot b = 0$  ou  $b \cdot a = 0$ .

Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie, l'anneau  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est intègre, c'est-à-dire n'a pas de diviseur de 0. (*Indication* : on pourra commencer par vérifier que  $\text{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  n'a pas de diviseur de 0.)

EXERCICE 4.5. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Pour  $x \in \mathfrak{g}$ , on définit l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  par

$$\text{ad}(x)(y) = x \cdot y - y \cdot x$$

pour tout  $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}(x)$  stabilise le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , et que sa restriction à ce sous-espace est l'endomorphisme de  $\mathfrak{g}$  noté habituellement  $\text{ad}(x)$ .
- (2) Montrer que  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .
- (3) Montrer que si  $x, x_1, \dots, x_m$  sont des éléments de  $\mathfrak{g}$ , alors

$$\text{ad}(x)(x_1 \cdots x_m) = \sum_{i=1}^m x_1 \cdots x_{i-1} \cdot \text{ad}(x)(x_i) \cdot x_{i+1} \cdots x_m.$$

- (4) Montrer que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , il existe un sous-espace vectoriel  $V \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  de dimension finie contenant  $y$  et stable par  $\text{ad}(x)$ .

EXERCICE 4.6. On rappelle qu'un anneau  $A$  est dit *noethérien à gauche* si tout idéal à gauche de  $A$  est de type fini (c'est-à-dire engendré, comme  $A$ -module à gauche, par un nombre fini d'éléments). On rappelle également que pour tout entier  $r \geq 1$ , l'anneau  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$  est noethérien à gauche.

Le but de cet exercice est de montrer que, si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie<sup>1</sup>,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est un anneau noethérien à gauche.

- (1) Soit  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$  un anneau gradué. Un idéal à gauche  $I$  est dit *gradué* si  $I = \bigoplus_{n \geq 0} (A^n \cap I)$ . Montrer que si  $A$  est noethérien à gauche et si  $I$  est un idéal à gauche gradué, alors  $I$  est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes (c'est-à-dire des éléments qui appartiennent à des sous-espaces  $A^n$ ).
- (2) Soit  $A$  un anneau filtré tel que  $\text{gr}A$  est noethérien à gauche. Montrer que  $A$  est noethérien à gauche.
- (3) Montrer que, si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie, l'anneau  $\mathcal{S}(V)$  est noethérien à gauche.
- (4) En déduire que, si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est un anneau noethérien à gauche.

---

1. Notons que dans cet exercice, contrairement aux autres, cette hypothèse est essentielle.

## 5. Chapitre 6

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0.

EXERCICE 5.1. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, et soient  $x, y$  des endomorphismes de  $V$  qui commutent. Montrer que

$$(x + y)_s = x_s + y_s \quad \text{et} \quad (x + y)_n = x_n + y_n.$$

Montrer que ceci n'est pas vrai en général si  $x$  et  $y$  ne commutent pas.

EXERCICE 5.2. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, soit  $x$  un endomorphisme de  $V$ , et soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel stable par  $x$ , de sorte qu'on peut considérer la restriction  $x|_W$  comme un endomorphisme de  $W$ . Montrer que  $x_s$  et  $x_n$  stabilisent  $W$ , et que la décomposition de Jordan de  $x|_W$  est

$$x|_W = (x_s)|_W + (x_n)|_W.$$

EXERCICE 5.3. Montrer que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}^+(\mathbb{k})$  est résoluble en utilisant le critère de Cartan.

EXERCICE 5.4. (1) Calculer explicitement la forme de Killing des algèbres de Lie de dimension 1, 2 ou 3. Vérifier les critères de résolubilité et de semi-simplicité sur ces exemples.

(2) Montrer que pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\kappa(x, y) = 2n \cdot \text{Tr}(xy)$$

pour tous  $x, y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ . (*Indication* : on pourra montrer qu'il suffit de vérifier cette formule quand  $x$  est une matrice diagonale, puis la vérifier explicitement dans ce cas.)

(3) En déduire une formule pour la forme de Killing de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

EXERCICE 5.5. Montrer que la forme de Killing d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie est nulle.

EXERCICE 5.6. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple, et soit  $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$  une forme bilinéaire qui vérifie

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z) \quad \text{pour tous } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $\beta = \lambda \cdot \kappa$ . En déduire que  $\beta$  est symétrique.

*Indication* : on pourra montrer que le morphisme  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  envoyant  $x$  sur la forme linéaire  $y \mapsto \beta(x, y)$  est un morphisme de  $\mathfrak{g}$ -modules (où  $\mathfrak{g}$  agit sur  $\mathfrak{g}^*$  via la représentation duale de la représentation adjointe). Puis on pourra vérifier que si  $V$  et  $W$  sont des représentations simples d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ , l'espace vectoriel des morphismes de  $\mathfrak{h}$ -représentations de  $V$  vers  $W$  est de dimension au plus un.

EXERCICE 5.7. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, et soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_k$  sa décomposition en idéaux simples. Soit  $x \in \mathfrak{g}$ , et soit  $x = x_1 + \cdots + x_k$  sa décomposition selon cette somme directe. Montrer que si  $x = x_s + x_n$  est la décomposition de Jordan de  $x$  dans  $\mathfrak{g}$ , on a

$$x_s = (x_1)_s + \cdots + (x_k)_s \quad \text{et} \quad x_n = (x_1)_n + \cdots + (x_k)_n$$

où, pour tout  $j$ ,  $x_j = (x_j)_s + (x_j)_n$  est la décomposition de Jordan de  $x_j$  dans  $\mathfrak{i}_j$ .



EXERCICE 5.8. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  des algèbres de Lie semi-simples, et soit  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie surjectif. Montrer que si  $x \in \mathfrak{g}$  on a

$$\varphi(x)_s = \varphi(x_s) \quad \text{et} \quad \varphi(x)_n = \varphi(x_n).$$

*Indication* : on pourra soit utiliser l'exercice 5.7, soit raisonner directement à partir de la définition de la décomposition de Jordan dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$ .

## 6. Chapitre 7

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0, et  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .

EXERCICE 6.1. Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Montrer que  $V$  est simple (respectivement semi-simple) ssi  $V^*$  est simple (respectivement semi-simple).

EXERCICE 6.2. Soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ , soit  $W \subset V$  une sous-représentation, et soit  $i : W \rightarrow V$  l'inclusion naturelle. Montrer qu'il existe une sous-représentation  $W' \subset W$  telle que  $V = W \oplus W'$  ssi il existe un morphisme de représentations  $p : V \rightarrow W$  tel que  $p \circ i = \text{id}_W$ .

EXERCICE 6.3. Calculer explicitement l'élément de Casimir associé à la représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  sur  $\mathbb{k}^2$ , puis à sa représentation adjointe.

EXERCICE 6.4. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est réductive ssi la représentation  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$  de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.

EXERCICE 6.5. Supposons que  $\mathfrak{g}$  est réductive.

- (1) Montrer qu'on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ , et que l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$  est semi-simple. (*Indication* : on pourra considérer  $\mathfrak{g}$  comme une représentation de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  via  $\text{ad}$ , et considérer un supplémentaire stable de  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .)
- (2) Montrer qu'une représentation de dimension finie  $(V, \rho)$  de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple ssi pour tout  $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  l'endomorphisme  $\rho(x)$  de  $V$  est diagonalisable. (*Indication* : on pourra utiliser le lemme de Schur.)

EXERCICE 6.6. Supposons que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie qui est également semi-simple. Montrer que si  $x \in \mathfrak{h}$ , alors les décompositions de Jordan de  $x$  dans  $\mathfrak{h}$  et dans  $\mathfrak{g}$  coïncident.

EXERCICE 6.7. Redémontrer le fait que, si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, alors toute dérivation de  $\mathfrak{g}$  est intérieure, en utilisant le théorème de Weyl. Plus précisément, étant donné  $\delta \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ , on pourra définir une structure de représentation de  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{k}$  en posant  $x \cdot (y, a) = (a\delta(x) + [x, y], 0)$ , puis considérer un supplémentaire de la sous-représentation  $\mathfrak{g} \oplus \{0\}$ .

EXERCICE 6.8. Si  $V$  est une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , on rappelle qu'on a

$$V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m \quad \text{où} \quad V_m = \{v \in V \mid h \cdot v = mv\}.$$

Le caractère de  $V$  est alors défini par

$$\text{ch}(V) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dim(V_m) \cdot X^m \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}].$$

- (1) Montrer que si  $V$  et  $W$  sont deux représentations de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , on a

$$\text{ch}(V \otimes W) = \text{ch}(V) \cdot \text{ch}(W).$$

- (2) Si on note  $V(m)$  la représentation simple de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  de plus haut poids  $m \in \mathbb{N}$ , montrer que

$$\text{ch}(V(m)) = \sum_{i=0}^m X^{m-2i}.$$

- (3) Montrer que les vecteurs  $\text{ch}(V(m))$  (pour  $m \in \mathbb{N}$ ) sont linéairement indépendants dans le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ .
- (4) En déduire que si  $V$  et  $W$  sont deux représentations de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , alors  $V$  et  $W$  sont isomorphes ssi  $\text{ch}(V) = \text{ch}(W)$ .
- (5) Montrer que si  $m, n \in \mathbb{N}$  et si  $m \leq n$ , alors

$$V(n) \otimes V(m) \cong \bigoplus_{i=0}^m V(m+n-2i)$$

EXERCICE 6.9. (1) Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$  une sous-algèbre de Lie semi-simple. Si  $x \in \mathfrak{h}$  est un élément qui est nilpotent comme endomorphisme de  $V$ , on peut considérer

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \in \text{End}(V)$$

(puisque cette somme est en fait finie). De même,  $\text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$  est nilpotent, donc on peut considérer  $\exp(\text{ad}(x)) \in \text{End}(\mathfrak{h})$ . Montrer que pour tout  $y \in \mathfrak{h}$  on a

$$\exp(x) \circ y \circ \exp(-x) = (\exp(\text{ad}(x)))(y).$$

(*Indication* : on pourra décomposer  $\text{ad}(x) = \lambda_x - \rho_x$  dans  $\text{End}(\mathfrak{gl}(V))$ , où  $\lambda_x$ , resp.  $\rho_x$ , est la multiplication à gauche, resp. à droite, par  $x$ .)

- (2) Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, et soit  $(V, \varrho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Montrer que si  $x \in \mathfrak{g}$  est nilpotent, alors pour tout  $y \in \mathfrak{g}$  on a

$$\exp(\varrho(x)) \circ \varrho(y) \circ \exp(-\varrho(x)) = \varrho(\exp(\text{ad}(x))(y)).$$

- (3) Supposons que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et soit  $(e, h, f)$  sa base usuelle. Montrer que

$$\left( \exp(\text{ad}(e)) \circ \exp(\text{ad}(-f)) \circ \exp(\text{ad}(e)) \right)(h) = -h.$$

- (4) Soit  $(V, \varrho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ . Montrer que

$$\tau := \exp(\varrho(e)) \circ \exp(\varrho(-f)) \circ \exp(\varrho(e))$$

est un endomorphisme inversible de  $V$ , qui vérifie

$$\tau(V_m) = V_{-m}$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . (*Indication* : on pourra considérer  $\tau \circ \varrho(h) \circ \tau^{-1}$ .)

EXERCICE 6.10. (1) Soit  $\lambda \in \mathbb{k}$ . On considère un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $M(\lambda)$  de base  $(v_i, i \in \mathbb{N})$ . On définit des applications linéaires

$$E, H, F : M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)$$

en posant

$$E(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0; \\ (\lambda - i + 1)v_{i-1} & \text{si } i > 0, \end{cases} \quad H(v_i) = (\lambda - 2i)v_i, \quad F(v_i) = (i + 1)v_{i+1}.$$

Montrer que l'application linéaire  $\varrho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{gl}(M(\lambda))$  définie par

$$\varrho(e) = E, \quad \varrho(h) = H, \quad \varrho(f) = F$$

définit sur  $M(\lambda)$  une structure de représentation (de dimension infinie) de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

- (2) Montrer que si  $\lambda \notin \mathbb{N}$ , alors  $M(\lambda)$  est une représentation simple.  
 (3) Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{N}$ , alors il existe un morphisme de représentations non nul  $\varphi : M(-\lambda - 2) \rightarrow M(\lambda)$ , et que ce morphisme est injectif. Montrer qu'il existe un isomorphisme  $M(\lambda)/\text{Im}(\varphi) \cong V(\lambda)$ , et que la représentation  $M(\lambda)$  n'est pas isomorphe à la somme directe  $V(\lambda) \oplus M(-\lambda - 2)$ .

EXERCICE 6.11. Soit  $\iota : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{sl}_3(\mathbb{k})$  l'inclusion naturelle, définie par

$$\iota \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Décomposer la représentation  $(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{k}), \text{ad} \circ \iota)$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  en somme directe de représentations simples.

## 7. Chapitre 8

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0, et  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .

EXERCICE 7.1. Dans cet exercice on suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  pour un  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On note  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  la sous-algèbre de Lie formée des matrices diagonales (de trace nulle).

- (1) Montrer que les sous-algèbres de Lie torales maximales sont exactement les sous-algèbres de la forme  $g\mathfrak{t}g^{-1}$  avec  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ .  
 (2) Montrer que l'ensemble  $\Phi$  des racines de  $\mathfrak{g}$  (par rapport à  $\mathfrak{t}$ ) est l'ensemble des formes linéaires  $\chi_{i,j} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{k}$  définies par

$$\chi_{i,j}(M) = M_{i,i} - M_{j,j}$$

pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$ .

- (3) Pour chaque  $\alpha \in \Phi$ , décrire le sous-espace  $\mathfrak{g}_\alpha$  correspondant.  
 (4) Pour chaque racine  $\alpha \in \Phi$ , déterminer explicitement  $t_\alpha$  et  $h_\alpha$ .  
 (5) Calculer  $\beta(h_\alpha)$  pour tout couple  $\alpha, \beta \in \Phi$ .

EXERCICE 7.2. Dans cet exercice on suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ . (On rappelle que cette algèbre de Lie est semi-simple.) On note  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  la sous-algèbre de Lie formée des matrices diagonales. Montrer que  $\mathfrak{t}$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale, et déterminer l'ensemble des racines  $\Phi$  correspondant.

- EXERCICE 7.3. (1) Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple non simple, il existe une sous-algèbre de Lie torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  telle que le système de racines correspondant  $\Phi$  admet une décomposition  $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$  avec  $\Phi_1 \neq \emptyset$ ,  $\Phi_2 \neq \emptyset$ , et  $\beta(h_\alpha) = 0$  pour tous  $\alpha \in \Phi_1$  et  $\beta \in \Phi_2$ .
- (2) En utilisant les résultats de l'exercice 7.1, en déduire que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  est simple si  $n \geq 2$ .

EXERCICE 7.4. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, et soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre torale maximale. Montrer que si  $x \in \mathfrak{g}$  est tel que  $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ , alors  $x \in \mathfrak{h}$ . (En d'autres termes, le normalisateur de  $\mathfrak{h}$  est  $\mathfrak{h}$  elle-même.)

EXERCICE 7.5. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple de dimension 3. Montrer que si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale, alors le système de racines  $\Phi$  correspondant est de cardinal 2. En déduire qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

EXERCICE 7.6. Montrer que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale, et  $\Phi$  est le système de racines correspondant, alors

$$\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}) + \#\Phi, \quad \#\Phi \text{ est pair, et } \frac{\#\Phi}{2} \geq \dim(\mathfrak{h}).$$

En déduire qu'il n'existe pas d'algèbres de Lie semi-simples de dimension 4, 5 ou 7.

EXERCICE 7.7. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie torale maximale. Montrer que si  $x \in \mathfrak{h}$ , alors

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$$

est une algèbre de Lie réductive.

En déduire que pour tout élément semi-simple  $x \in \mathfrak{g}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$  est réductive.

EXERCICE 7.8. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie torale maximale, et  $\Phi$  le système de racines correspondant. Montrer que si pour tout  $\alpha \in \Phi$  et tout  $\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}$  on a  $\beta(h_\alpha) = 0$ , alors  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à un produit de copies de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ .

## 8. Chapitre 9

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0.

- EXERCICE 8.1. (1) Montrer que, à isomorphisme près, les seuls systèmes de racines dans un espace euclidien de dimension 2 sont les systèmes de type  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  et  $\mathbf{G}_2$ .
- (2) Montrer que ces systèmes de racines sont deux à deux non isomorphes.
- (3) Pour chaque système de racine  $\Phi$  considéré ci-dessus, montrer que  $\Phi^\vee$  est isomorphe à  $\Phi$ . (Notons que cette propriété n'est *pas* vraie en général pour un système de racines quelconque.)

EXERCICE 8.2. Montrer le groupe de Weyl du système de racines de type  $\mathbf{A}_1$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Montrer que le groupe de Weyl du système de racines de type  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$ , respectivement  $\mathbf{A}_2$ , respectivement  $\mathbf{B}_2$ , respectivement  $\mathbf{G}_2$ , est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , respectivement à  $\mathfrak{S}_3$ , respectivement au groupe diédral d'ordre 8, respectivement au groupe diédral d'ordre 12.

- EXERCICE 8.3. (1) On considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et sa sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h}$  formée des matrices diagonales. Montrer que le système de racines associé est isomorphe au système de type  $\mathbf{A}_1$ .
- (2) On considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{k})$ , et sa sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h}$  formée des matrices diagonales. Montrer que le système de racines associé est isomorphe au système de type  $\mathbf{A}_2$ .
- (3) On considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4(\mathbb{k})$ , et sa sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h}$  formée des matrices diagonales. Montrer que le système de racines associé est isomorphe au système de type  $\mathbf{B}_2$ .
- (4) On considère l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ , et sa sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h}$  formée des matrices diagonales. Montrer que le groupe de Weyl du système de racines associé est isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .

EXERCICE 8.4. On reprend les notations de l'exercice 7.1.

- (1) Montrer que les formes linéaires  $\chi_{i+1,i}$  (avec  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) forment une base du système de racines  $\Phi$ . Déterminer les racines positives et négatives associées, et les exprimer comme combinaisons linéaires de racines simples.
- (2) On rappelle que le groupe de Weyl de  $\Phi$  est canoniquement isomorphe à  $\mathfrak{S}_n$  (voir l'exercice 8.3). Pour le choix de base considéré dans la question précédente, déterminer les images dans  $\mathfrak{S}_n$  des réflexions simples.
- (3) Déterminer les réseaux  $P$  et  $Q$ , et montrer que  $P/Q \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

EXERCICE 8.5. Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ , et soient  $\alpha, \beta$  deux racines non colinéaires. On note  $r$ , respectivement  $q$ , le plus grand entier tel que  $\beta - r\alpha$  est dans  $\Phi$ , respectivement tel que  $\beta + q\alpha$  est dans  $\Phi$ .

- (1) Montrer que les éléments de  $\Phi$  de la forme  $\beta + i\alpha$  avec  $i \in \mathbb{Z}$  sont exactement les vecteurs  $\beta + i\alpha$  avec  $i \in \{-r, -r+1, \dots, q-1, q\}$ .
- (2) Montrer que  $r - q = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle$ .
- (3) Montrer qu'il existe au plus 4 éléments de  $\Phi$  de la forme  $\beta + i\alpha$ .
- (4) Calculer  $r$  et  $q$  explicitement pour tous les couples de racines non colinéaires dans le système de racines de type  $\mathbf{G}_2$ .

EXERCICE 8.6. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple, soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre torale maximale, et soit  $\Phi$  le système de racines associé. Montrer que pour tous  $\alpha, \beta \in \Phi$  on a

$$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \beta(h_\alpha).$$

EXERCICE 8.7. Dans chaque système de racines de rang 2, déterminer les chambres de Weyl, les bases, et la bijection entre chambres de Weyl et bases.

EXERCICE 8.8. Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ , soit  $W$  son groupe de Weyl, et soit  $\Delta$  une base de  $\Phi$ . Soit  $\ell$  la fonction de longueur sur  $W$  associée au choix de  $\Delta$ .

- (1) Montrer que si  $w \in W$  et  $\alpha \in \Delta$ , on a

$$\ell(ws_\alpha) = \begin{cases} \ell(w) + 1 & \text{si } w(\alpha) \succ 0; \\ \ell(w) - 1 & \text{si } w(\alpha) \prec 0. \end{cases}$$

- (2) Montrer que pour tout  $w \in W$  on a  $\ell(w) = \ell(w^{-1})$ .
- (3) Montrer que si  $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , alors  $w(\Phi^+) = \Phi^-$ . En déduire qu'il existe un unique élément de  $W$  qui vérifie cette propriété, et qu'il est de longueur  $\frac{1}{2}\#\Phi$ . Cet élément sera noté  $w_0$ .
- (4) Montrer que dans toute expression réduite de  $w_0$ , toutes les réflexions  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$  doivent apparaître au moins une fois.
- (5) Montrer que  $(w_0)^{-1} = w_0$ .
- (6) Montrer que pour tout  $w \in W$  il existe  $v \in W$  tel que  $wv = w_0$  et  $\ell(w) + \ell(v) = \ell(w_0)$ .
- (7) Déterminer  $w_0$  explicitement dans tous les systèmes de racines de rang 2, puis dans le cas considéré à l'exercice 7.1.

EXERCICE 8.9. Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ , et soit  $W$  son groupe de Weyl. Montrer que si  $s$  est une réflexion orthogonale (par rapport à un hyperplan de  $E$ ) tel que  $s \in W$ , alors il existe  $\beta \in \Phi$  telle que  $s = s_\beta$ . (*Indication* : on pourra considérer le stabilisateur dans  $W$  des vecteurs dans l'hyperplan de réflexion de  $s$ .)

EXERCICE 8.10. Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ . Montrer que le groupe quotient  $P/Q$  est fini.

EXERCICE 8.11. Soit  $\Phi$  un système de racines de rang 2, et considérons la base  $(\alpha, \beta)$  de  $\Phi$  vue en cours. Calculer explicitement les poids fondamentaux correspondants (en les exprimant sur la base  $\{\alpha, \beta\}$  de  $E$ .) En déduire la structure du groupe  $P/Q$  dans chaque cas.

## 9. Chapitre 10

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0, et on fixe une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{k}$ . On fixe également une sous-algèbre de Lie torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , et on note  $\Phi$  le système de racines associé. Enfin, on choisit une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

EXERCICE 9.1. Montrer que la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de Lie résoluble maximale dans  $\mathfrak{g}$ .

EXERCICE 9.2. Montrer que  $\mathfrak{g}$  est engendrée, comme algèbre de Lie, par les sous-espaces vectoriels  $\mathfrak{g}_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta \cup (-\Delta)$ .

EXERCICE 9.3. On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ , et on choisit pour sous-algèbre torale maximale  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre notée  $\mathfrak{t}$  dans l'exercice 7.1, et pour base  $\Delta$  de  $\Phi$  la base considérée dans l'exercice 8.4.

- (1) Déterminer  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{n}^+$  et  $\mathfrak{n}^-$  explicitement.
- (2) On considère la représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$  sur  $\mathbb{k}^n$ . Déterminer les poids de cette représentation, et son plus haut poids.

EXERCICE 9.4. On considère  $\lambda \in P^+$ , et un vecteur maximal  $v \in L(\lambda)_\lambda$ . On fixe également, pour chaque  $\alpha \in \Phi^+$ , un élément  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ .

On note  $J(\lambda)$  le noyau du morphisme

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \rightarrow L(\lambda) \\ x & \mapsto x \cdot v \end{cases}$$

et  $J'(\lambda)$  l'idéal à gauche de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $y_\alpha^{\langle \lambda, h_\alpha \rangle + 1}$  pour  $\alpha \in \Delta$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $J(\lambda) = J'(\lambda)$ .

- (1) Montrer que  $J'(\lambda) \subset J(\lambda)$ , et en déduire que  $\varphi$  se factorise via un morphisme de représentations surjectif  $L'(\lambda) \rightarrow L(\lambda)$ , où  $L'(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g})/J'(\lambda)$ .
- (2) Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre associative, et soient  $y, z \in A$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$[y^k, z] = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \text{ad}(y)^j(z) \cdot y^{k-j}.$$

- (3) En utilisant l'exercice 8.5, montrer que si  $\alpha, \beta \in \Phi^+$ , alors  $\text{ad}(y_\alpha)^4(y_\beta) = 0$ .
- (4) Fixons  $\alpha \in \Delta$ . Montrer par récurrence sur  $j$  que pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \Phi^+$  (non nécessairement distincts), il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$y_\alpha^N \cdot (y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_j} + J'(\lambda)) = 0$$

dans  $L'(\lambda)$ .

- (5) Montrer que tout vecteur de  $L'(\lambda)$  appartient à une sous- $T_\alpha$ -représentation de  $L'(\lambda)$  de dimension finie.
- (6) En déduire que  $L'(\lambda)$  est de dimension finie. (*Indication* : on pourra copier la fin de la preuve du fait que  $L(\lambda)$  est de dimension finie.)
- (7) Conclure.

EXERCICE 9.5. Soient  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  et  $\alpha \in \Delta$ , et supposons que  $\langle \lambda, h_\alpha \rangle \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $y_\alpha^{\langle \lambda, h_\alpha \rangle + 1} \cdot v_\lambda$  est un vecteur maximal dans  $M(\lambda)$ .

EXERCICE 9.6. On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ , et on note

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit  $\mathfrak{h} = \mathbb{k} \cdot h$ , et  $\Delta$  de sorte que  $\mathfrak{n}^+ = \mathbb{k} \cdot e$ . On identifie  $P$  à  $\mathbb{Z}$  via  $\lambda \mapsto \langle \lambda, h \rangle$ . Montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{Z}$  le module de Verma  $M(\lambda)$  s'identifie à la représentation  $M(\lambda)$  considérée dans l'exercice 6.10.

- EXERCICE 9.7. (1) Soit  $\lambda \in P^+$ . Montrer que si  $w \in W$  et si on considère la base de  $\Phi$  formée des vecteurs  $\{w(\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ , le plus haut poids de  $L(\lambda)$  par rapport à ce choix de base est  $w(\lambda)$ .
- (2) Montrer que si  $\lambda \in P^+$  on a  $L(\lambda)^* \cong L(-w_0(\lambda))$ , où  $w_0 \in W$  est comme dans l'exercice 8.8.
  - (3) Montrer que si  $\lambda, \mu \in P^+$  alors il existe une représentation  $V$  de  $\mathfrak{g}$  et un isomorphisme de représentations  $L(\lambda) \otimes L(\mu) \cong L(\lambda + \mu) \oplus V$ .

EXERCICE 9.8. (1) Soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ , et soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Montrer qu'il existe un morphisme de représentations non nul  $M(\lambda) \rightarrow V$  ssi  $V$  possède un vecteur maximal de poids  $\lambda$ .

- (2) Montrer que si  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ , tout morphisme de représentations non nul de  $M(\lambda)$  vers  $M(\mu)$  est injectif.

EXERCICE 9.9. Montrer que pour tout  $d \geq 0$ ,  $\mathfrak{g}$  ne possède qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations de dimension  $\leq d$ . (*Indication* : on pourra remarquer que si  $\lambda \in P^+$  et  $\alpha \in \Delta$ ,  $L(\lambda)$  possède une sous- $S_\alpha$ -représentation de dimension  $\langle \lambda, h_\alpha \rangle + 1$ .)

EXERCICE 9.10. Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , et fixons un vecteur non nul  $v \in L(\lambda)_\lambda$ . On fixe également une énumération  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  des racines dans  $\Phi^+$  et, pour tout  $i$ , un vecteur non nul  $x_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$ .

- (1) Montrer que si  $\mu \preceq \lambda$  et si  $u \in L(\lambda)_\mu \setminus \{0\}$ , il existe des entiers  $k_i \geq 0$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) tels que  $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \beta_i$  et que  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \cdot u$  est un multiple non nul de  $v$ . (*Indication* : on pourra appliquer le théorème d'Engel à l'action de  $\mathfrak{n}^+$  sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+) \cdot u$ .)
- (2) Pour tout  $\mu \preceq \lambda$ , on note  $Y(\lambda, \mu)$  le sous-espace vectoriel de  $M(\lambda)_\mu$  formé des vecteurs  $u$  tels que pour toutes les familles d'entiers positifs ou nuls  $(k_1, \dots, k_n)$  telles que  $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \beta_i$  on a  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \cdot u = 0$ . Montrer que

$$Y(\lambda) := \bigoplus_{\mu \preceq \lambda} Y(\lambda, \mu)$$

est l'unique sous-représentation propre maximale de  $M(\lambda)$ .

## 10. Chapitre 11

Dans tous les exercices,  $\mathbb{k}$  est supposé algébriquement clos et de caractéristique 0, et on fixe une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathbb{k}$ . On fixe également une sous-algèbre de Lie torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , et on note  $\Phi$  le système de racines associé. Enfin, on choisit une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

EXERCICE 10.1. Rappelons que le groupe de Weyl  $W$  agit sur  $\mathbb{Z}[P]$  par  $w \cdot e^\lambda = e^{w(\lambda)}$ . On note  $(\mathbb{Z}[P])^W \subset \mathbb{Z}[P]$  le sous-ensemble formé des éléments invariants pour cette action.

- (1) Montrer que les éléments  $\text{ch}(L(\lambda))$  (pour  $\lambda \in P^+$ ) forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $(\mathbb{Z}[P])^W$ .
- (2) Montrer que si  $x \in (\mathbb{Z}[P])^W$ , alors les coefficients de  $x$  dans la base

$$(\text{ch}(L(\lambda)), \lambda \in P^+)$$

appartiennent tous à  $\mathbb{N}$  si et seulement si il existe une représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $x = \text{ch}(V)$ . Montrer également que, dans ce cas,  $V$  est unique à isomorphisme près.

- (3) Montrer que pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $P^+$ , les coefficients du produit

$$\text{ch}(L(\lambda_1)) \cdots \text{ch}(L(\lambda_n))$$

dans la base  $(\text{ch}(L(\lambda)), \lambda \in P^+)$  appartiennent à  $\mathbb{N}$ .

- (4) On considère l'involution d'anneaux  $x \mapsto \bar{x}$  de  $\mathbb{Z}[P]$  telle que  $\overline{e^\lambda} = e^{-\lambda}$ . Calculer, pour tout  $\lambda \in P^+$ ,  $\overline{\text{ch}(L(\lambda))}$ .



(5) Notons maintenant

$$(\mathbb{Z}[P])^\varepsilon := \{x \in \mathbb{Z}[P] \mid \forall w \in W, w \cdot x = (-1)^{\ell(w)} \cdot x\}.$$

Montrer que l'application  $x \mapsto \mathcal{Q} \cdot x$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$(\mathbb{Z}[P])^W \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[P])^\varepsilon.$$

*Indication* : pour montrer la surjectivité, on pourra tout d'abord remarquer que  $(\mathbb{Z}[P])^\varepsilon$  est engendré (comme  $\mathbb{Z}$ -module) par les éléments

$$A_\lambda := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda)} \quad \text{pour } \lambda \in P^+.$$

Puis on montrera que  $A_\lambda = 0$  si  $\lambda \in P^+ \setminus (\rho + P^+)$ , et pour  $\lambda \in \rho + P^+$  on utilisera la formule de Weyl.

EXERCICE 10.2. Écrire explicitement la formule de caractère de Weyl dans le cas de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  (pour tous les plus haut poids possibles), et comparer le résultat avec l'exercice 6.8.

EXERCICE 10.3. (1) On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{k})$ , de sorte que  $\Phi$  est de type  $\mathbf{A}_2$ . On note  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , et on pose  $\omega_1 := \omega_{\alpha_1}$  et  $\omega_2 = \omega_{\alpha_2}$ . Montrer que pour tous  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  on a

$$\dim(L(m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2)) = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)}{2}.$$

(2) On suppose que  $\Phi$  est de type  $\mathbf{B}_2$ . On note  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , avec  $(\alpha_1, \alpha_1) < (\alpha_2, \alpha_2)$ , et on pose  $\omega_1 := \omega_{\alpha_1}$  et  $\omega_2 = \omega_{\alpha_2}$ . Montrer que pour tous  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  on a

$$\dim(L(m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2)) = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + 2m_2 + 3)}{3!}.$$

(3) On suppose que  $\Phi$  est de type  $\mathbf{G}_2$ . On note  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , avec  $(\alpha_1, \alpha_1) < (\alpha_2, \alpha_2)$ , et on pose  $\omega_1 := \omega_{\alpha_1}$  et  $\omega_2 = \omega_{\alpha_2}$ . Montrer que pour tous  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  on a

$$\dim(L(m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2)) = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + 2m_2 + 3)(m_1 + 3m_2 + 4)(2m_1 + 3m_2 + 5)}{5!}.$$



## Examen du premier semestre

PROBLÈME. Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME (Théorème de Levi). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos de caractéristique 0. Alors il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$  qui est semi-simple et telle que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \text{Rad}(\mathfrak{g})$$

(comme espaces vectoriels).

La démonstration utilisera le résultat suivant, qu'on admettra<sup>1</sup>.

THÉORÈME (Théorème de Weyl). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple sur un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos de caractéristique 0. Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , et soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ . Alors il existe un sous-espace vectoriel  $W' \subset V$  stable par l'action de  $\mathfrak{g}$  et tel que*

$$V = W \oplus W'.$$

Dans la suite du problème, on fixe un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos de caractéristique 0, et une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .

- (1) On suppose dans cette question que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \text{Rad}(\mathfrak{g})$  (c'est-à-dire que  $\mathfrak{g}$  est réductive).

- (a) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{g} & \rightarrow \mathfrak{g} \\ (x + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), y) & \mapsto [x, y] \end{cases}$$

est bien définie, et définit une représentation de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  sur  $\mathfrak{g}$ .

- (b) Montrer que le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  définie ci-dessus.

- (c) En utilisant le théorème de Weyl, en déduire le théorème de Levi dans ce cas.

- (2) On suppose dans cette question que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ , que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \text{Rad}(\mathfrak{g})$ , et que  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  ne contient aucun idéal de  $\mathfrak{g}$  différent de  $\{0\}$  et  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ .

- (a) Montrer que  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ .

- (b) Montrer que  $[\text{Rad}(\mathfrak{g}), \text{Rad}(\mathfrak{g})] = \{0\}$ .

- (c) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{g} \times \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) & \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) \\ (x, f) & \mapsto \text{ad}(x) \circ f - f \circ \text{ad}(x) \end{cases}$$

définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ .

---

1. Voir le chapitre 7 pour une preuve de ce théorème.

(d) Considérons le sous-espace vectoriel

$$M = \{f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}) \mid f(\mathfrak{g}) \subset \text{Rad}(\mathfrak{g}) \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{k} \text{ tel que } f|_{\text{Rad}(\mathfrak{g})} = \lambda \cdot \text{id}_{\text{Rad}(\mathfrak{g})}\}.$$

Montrer que  $M$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ .

(e) Montrer que l'application linéaire  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{k}$  qui, à  $f \in M$ , associe l'unique  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $f|_{\text{Rad}(\mathfrak{g})} = \lambda \cdot \text{id}_{\text{Rad}(\mathfrak{g})}$ , est un morphisme surjectif de représentations (où  $\mathbb{k}$  est muni de la représentation triviale, c'est-à-dire telle que  $x \cdot \mu = 0$  pour tous  $x \in \mathfrak{g}$  et  $\mu \in \mathbb{k}$ ).

(f) On pose maintenant

$$P = \{\text{ad}(y) : y \in \text{Rad}(\mathfrak{g})\} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}).$$

Montrer que  $P$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$  sur  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ , et que  $P \subset M$ .

(g) Montrer que si  $y \in \text{Rad}(\mathfrak{g})$  et  $f \in M$ , alors  $y \cdot f = \text{ad}(-\varphi(f)y)$ .

(h) En déduire que l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g}) \times M/P & \rightarrow & M/P \\ (x + \text{Rad}(\mathfrak{g}), f + P) & \mapsto & (x \cdot f) + P \end{cases}$$

est bien définie, et qu'elle définit une représentation de  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  sur  $M/P$ .

(i) Montrer qu'il existe  $f_0 \in M$  tel que  $\varphi(f_0) = 1$  et tel que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  on a  $x \cdot f_0 \in P$ . (*Indication* : on pourra vérifier que  $\varphi$  induit un morphisme surjectif  $\varphi' : M/P \rightarrow \mathbb{k}$  de représentations de  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$ , où  $\mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  agit trivialement sur  $\mathbb{k}$ , et utiliser le théorème de Weyl.)

(j) On pose maintenant

$$\mathfrak{s} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \cdot f_0 = 0\}.$$

Montrer que  $\mathfrak{s}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

(k) Montrer que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \text{Rad}(\mathfrak{g})$ .

(l) En déduire le théorème de Levi dans ce cas.

(3) Le but de cette question est de démontrer finalement le cas général du théorème de Levi, par récurrence sur  $\dim(\text{Rad}(\mathfrak{g}))$ .

(a) Démontrer le théorème de Levi dans le cas où  $\dim(\text{Rad}(\mathfrak{g})) = 0$ .

(b) On suppose maintenant que  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Si  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  ne contient aucun idéal de  $\mathfrak{g}$  différent de  $\{0\}$  et  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ , le théorème de Levi est démontré dans les questions (1) et (2). On suppose donc dans la suite de cette question qu'il existe un idéal  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  tel que  $\{0\} \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \text{Rad}(\mathfrak{g})$ . Montrer (en utilisant l'hypothèse de récurrence) qu'il existe une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{h}$  telle que  $\mathfrak{t}/\mathfrak{h}$  est semi-simple et telle que

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{t}/\mathfrak{h} \oplus \text{Rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}.$$

(c) Montrer que  $\text{Rad}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{h}$ .

(d) En déduire le théorème de Levi pour  $\mathfrak{g}$ .

(4) Dans cette question, on pourra utiliser sans démonstration les faits suivants :

— Pour tout  $m \geq 1$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{k})$  est semi-simple.

— Si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des algèbres de Lie semi-simples, alors  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  est semi-simple.

On fixe  $m, n \geq 1$ , et on considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathfrak{gl}_{m+n}(\mathbb{k})$  (où toutes les matrices sont découpées en blocs de taille  $m$  puis  $n$ ) :

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{k}), C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}), B \in M_{m,n}(\mathbb{k}) \right\},$$

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{sl}_m(\mathbb{k}), C \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) \right\},$$

$$\mathfrak{k} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_m & B \\ 0 & \mu \cdot I_n \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{k}, \mu \in \mathbb{k}, B \in M_{m,n}(\mathbb{k}) \right\}.$$

- Montrer que  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_{m+n}(\mathbb{k})$ .
- Montrer que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ .
- Montrer que  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , et qu'elle est semi-simple.
- Montrer que  $\mathfrak{k}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , et qu'il est résoluble.
- En déduire que  $\mathfrak{k} = \text{Rad}(\mathfrak{g})$ .

Ces questions montrent que la décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$  satisfait les conditions du théorème de Levi (dans ce cas particulier).

EXERCICE 1. Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit  $n \geq 1$ , et considérons la matrice  $S \in M_{2n}(\mathbb{k})$  définie par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que l'algèbre de Lie symplectique est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$  définie par

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}) \mid SX = -{}^tXS\}.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit effectivement d'une sous-algèbre de Lie.)

- Soit  $X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ , et écrivons

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{k})$ . Montrer que  $X$  appartient à  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  ssi on a

$${}^tB = B, \quad {}^tC = C \quad \text{et} \quad {}^tA = -D.$$

- Montrer que si  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{k}^{2n}$  qui est non nul et stable par l'action de tout élément de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) \subset \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ , alors  $V = \mathbb{k}^{2n}$ . (*Indication* : on pourra considérer les valeurs propres et espaces propres des matrices diagonales qui appartiennent à  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ .)
- En déduire que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  est semi-simple.

EXERCICE 2. (1) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ , de morphisme associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Soit également  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par l'action de tout élément de  $\mathfrak{g}$ . Si  $x \in \mathfrak{g}$ , en restreignant  $\rho(x)$  à  $W$  on obtient un endomorphisme  $\rho_W(x)$  de  $W$ . Montrer que l'application linéaire

$$\rho_W : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(W) \\ x & \mapsto & \rho_W(x) \end{cases}$$

définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $W$ .

- (2) Soit encore  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ , de morphisme associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , et  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par l'action de tout élément de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\pi : V \rightarrow V/W$  la surjection canonique. Montrer que pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  il existe un unique endomorphisme  $\rho_{V/W}(x)$  de  $V/W$  tel que

$$\rho_{V/W}(x) \circ \pi = \pi \circ \rho(x),$$

et que l'application linéaire

$$\rho_{V/W} : \begin{cases} \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{gl}(V/W) \\ x & \mapsto & \rho_{V/W}(x) \end{cases}$$

définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $V/W$ .

- (3) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie non nulle, de morphisme associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

stables par l'action de  $\mathfrak{g}$  et tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la représentation  $(\rho_{V_i})_{V_i/V_{i-1}}$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V_i/V_{i-1}$  construite comme ci-dessus est une représentation simple.

- (4) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, soit  $V$  une représentation simple de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ , de morphisme associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , et soit  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  un idéal tel que  $\rho(x)$  est nilpotent pour tout  $x \in \mathfrak{i}$ . Montrer que  $\rho(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{i}$ .
- (5) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. En déduire une preuve (différente de celle vue en cours) du fait que si  $\mathfrak{i}$  et  $\mathfrak{j}$  sont des idéaux nilpotents de  $\mathfrak{g}$  alors  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . (*Indication* : on pourra appliquer le résultat de la question (3) à la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ .)

**EXERCICE 3.** Dans cet exercice on utilise la notation  $\rho_W$  introduite dans l'exercice 2. On utilisera également le résultat suivant.

**THÉORÈME (Théorème de Burnside).** *Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos, soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $A$  une sous-algèbre de l'algèbre associative  $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Supposons que les seuls sous-espaces vectoriels de  $V$  stables par tous les éléments de  $A$  sont  $\{0\}$  et  $V$ . Alors  $A = \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ .*

- (1) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  tel que la représentation  $\rho_W$  est simple. (*Indication* : on pourra soit utiliser la question (3) de l'exercice 2, soit raisonner directement par récurrence.)
- (2) Supposons  $\mathbb{k}$  algébriquement clos. Soient  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie sur  $\mathbb{k}$ , soit  $V$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie, de morphisme associé  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , et soit  $W$  une représentation de  $\mathfrak{h}$  de dimension finie, de morphisme associé  $\sigma : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ . Il existe alors une unique structure de représentation de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  sur l'espace vectoriel  $V \otimes W$  telle que

$$(X, Y) \cdot v \otimes w = \rho(X)(v) \otimes w + v \otimes \sigma(Y)(w)$$

pour tous  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y \in \mathfrak{h}$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ . (On ne demande pas de vérifier ce fait.) Montrer que si  $V$  et  $W$  sont des représentations simples, alors  $V \otimes W$  est une représentation simple de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ . (*Indication* : on pourra appliquer le théorème de Burnside.)

- (3) On suppose encore  $\mathbb{k}$  algébriquement clos, et on considère deux algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathbb{k}$ . Soit également  $U$  une représentation simple de dimension finie de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ , de morphisme associé  $\eta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(U)$ .

- (a) On considère  $U$  comme une représentation de  $\mathfrak{g}$  via le morphisme

$$\rho : \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \{0\} \hookrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\eta} \mathfrak{gl}(U).$$

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $U$  stable par l'action de  $\mathfrak{g}$  et tel que  $\rho_V$  est une représentation simple, et soit  $W'$  l'espace vectoriel des morphismes de représentations de  $\mathfrak{g}$  de  $V$  vers  $U$ . Montrer qu'en posant

$$\sigma(Y)(f) : \begin{cases} V & \rightarrow & U \\ v & \mapsto & (0, Y) \cdot f(v) \end{cases}$$

pour  $Y \in \mathfrak{h}$  et  $f \in W'$ , on définit une représentation de  $\mathfrak{h}$  sur  $W'$ .

- (b) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $W'$  stable par l'action de  $\mathfrak{h}$  et tel que  $\sigma_W$  est simple. Il existe alors une unique application linéaire

$$\varphi : V \otimes W \rightarrow U$$

telle que  $\varphi(v \otimes f) = f(v)$  pour tout  $v \in V$  et tout  $f \in W \subset W'$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de représentations de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  (où l'action sur  $V \otimes W$  est comme dans la question 2).

EXERCICE 4. Soit  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique 0, et soit  $\mathbb{k}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes en une indéterminée  $X$ , à coefficients dans  $\mathbb{k}$ . Soit  $A$  la sous-algèbre de l'algèbre associative  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[X])$  engendrée par les endomorphismes

$$f : \begin{cases} \mathbb{k}[X] & \rightarrow & \mathbb{k}[X] \\ P & \mapsto & X \cdot P \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{k}[X] & \rightarrow & \mathbb{k}[X] \\ P & \mapsto & X \cdot P' \end{cases} .$$

- (1) Le but de cette question est de montrer que les vecteurs de la forme  $(f^n \cdot g^m : n, m \in \mathbb{N})$  forment une base de  $A$ .
- (a) Montrer que les vecteurs  $(g^m : m \in \mathbb{N})$  forment une famille libre dans  $A$ .
- (b) Montrer que les vecteurs de la forme  $(f^n \cdot g^m : n, m \in \mathbb{N})$  forment une famille libre dans  $A$ .
- (c) Conclure.
- (2) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{k}$  qui est non abélienne et de dimension 2. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'algèbres

$$\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} A.$$





## Examen du deuxième semestre

EXERCICE 0.1. Soit  $\Phi$  un système de racines dans un espace euclidien  $E$ . On dit que  $\Phi$  est *réductible* s'il existe une décomposition  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  non vides telle que  $(\alpha, \beta) = 0$  pour tous  $\alpha \in \Phi_1$  et  $\beta \in \Phi_2$ . On dit que  $\Phi$  est *irréductible* s'il n'est pas réductible.

- (1) Montrer que si  $\Phi$  est réductible et si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont comme dans la définition ci-dessus, alors  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ .
- (2) Supposons que  $\Phi$  est réductible, et soit  $\Delta$  une base de  $\Phi$ . Montrer qu'il existe une décomposition  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  avec  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  non vides telle que  $(\alpha, \beta) = 0$  pour tous  $\alpha \in \Delta_1$  et  $\beta \in \Delta_2$ .
- (3) Soit  $\Delta$  une base de  $\Phi$ , et supposons qu'il existe une décomposition  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  avec  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  non vides telle que  $(\alpha, \beta) = 0$  pour tous  $\alpha \in \Delta_1$  et  $\beta \in \Delta_2$ . On notera  $\Phi_1$ , respectivement  $\Phi_2$ , l'ensemble des racines dans  $\Phi$  dont un conjugué par  $W$  appartient à  $\Delta_1$ , respectivement  $\Delta_2$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ .
  - (b) Montrer que

$$\Phi_1 \subset \bigoplus_{\alpha \in \Delta_1} \mathbb{R} \cdot \alpha \quad \text{et} \quad \Phi_2 \subset \bigoplus_{\beta \in \Delta_2} \mathbb{R} \cdot \beta.$$

(*Indication* : on pourra étudier l'action des réflexions simples sur les vecteurs de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .)

- (c) En déduire que  $\Phi$  est réductible.
- (4) On suppose dans cette question que  $\Phi$  est irréductible. On fixe une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .
  - (a) Soit  $\beta \in \Phi$  une racine qui est maximale pour l'ordre  $\preceq$ . Montrer que  $(\beta, \alpha) \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ , avec une inégalité stricte pour au moins un  $\alpha$ .
  - (b) Soit  $\beta \in \Phi$  une racine qui est maximale pour l'ordre  $\preceq$ . Écrivons

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \cdot \alpha.$$

Montrer que  $k_\alpha > 0$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . (*Indication* : on pourra poser  $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha > 0\}$  et  $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha = 0\}$ , montrer que  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ , et utiliser l'irréductibilité.)

- (c) Soient  $\beta, \beta' \in \Phi$  deux racines qui sont maximales pour l'ordre  $\preceq$ . Montrer que  $(\beta, \beta') > 0$ . En déduire que  $\beta = \beta'$ .

- (5) Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie *simple* sur  $\mathbb{k}$ . Soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre torale maximale, et soit  $\Phi$  le système de racines de  $\mathfrak{g}$  associé à  $\mathfrak{h}$ . Le but de cette question est de montrer (par l'absurde) que  $\Phi$  est irréductible.
- (a) Fixons une décomposition  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  avec  $(\alpha, \beta) = 0$  pour tous  $\alpha \in \Phi_1$  et  $\beta \in \Phi_2$ . Montrer que si  $\alpha \in \Phi_1$  et  $\beta \in \Phi_2$  alors  $\alpha + \beta \notin \Phi$ .
- (b) Supposons que  $\Phi_1 \neq \emptyset$  et  $\Phi_2 \neq \emptyset$ , et notons  $\mathfrak{k}$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les  $\mathfrak{g}_\alpha$  avec  $\alpha \in \Phi_1$ . Montrer que  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$  pour tout  $\beta \in \Phi_2$ .
- (c) En déduire que  $\mathfrak{k}$  est un idéal non trivial de  $\mathfrak{g}$ , et conclure.
- (6) On continue avec les notations de la question (5). D'après cette question et la question (4), si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$ , alors il existe une unique racine  $\beta_0$  dans  $\Phi$  qui est maximale pour l'ordre  $\preceq$ . Montrer que  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$  est une représentation simple de  $\mathfrak{g}$ , et que son plus haut poids est  $\beta_0$ .

EXERCICE 0.2. Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple sur  $\mathbb{k}$ . On fixe une sous-algèbre de Lie torale maximale  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , et une base  $\Delta$  du système de racines  $\Phi$  associé.

Si  $M$  et  $N$  sont des représentations de  $\mathfrak{g}$ , on notera  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N)$  l'espace vectoriel des morphismes de représentations de  $M$  vers  $N$ .

- (1) Montrer que si  $V$  est une représentation cyclique de plus haut poids de  $\mathfrak{g}$ , alors

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \mathbb{k} \cdot \text{id}_V.$$

- (2) Soient  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ , et soit  $V$  une représentation cyclique de plus haut poids  $\lambda$  de  $\mathfrak{g}$ . Montrer que

$$\dim_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, L(\mu))) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (3) Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , il existe un isomorphisme de représentations de  $\mathfrak{n}^-$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \xrightarrow{\sim} M(\lambda)$$

(où le terme de gauche est muni de sa structure naturelle de représentation de  $\mathfrak{n}^-$ , et le terme de droite est muni de la structure de représentation de  $\mathfrak{n}^-$  par restriction).

- (4) Dans cette question on pourra utiliser (sans preuve) le fait que si  $\mathfrak{k}$  est une algèbre de Lie de dimension finie et si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux à gauche non nuls de l'anneau  $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$ , alors  $I \cap J \neq \{0\}$ .<sup>1</sup> On fixe  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ .
- (a) Montrer que si  $L$  et  $L'$  sont deux sous-représentations de  $M(\lambda)$  qui sont simples et distinctes, alors  $L \cap L' = \{0\}$ .
- (b) En déduire que  $M(\lambda)$  admet une unique sous-représentation simple.
- (c) Montrer que l'unique sous-représentation simple de  $M(\lambda)$  est isomorphe à une représentation  $L(\mu)$  pour un certain  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  (qui dépend de  $\lambda$ ).

1. En fait, cette propriété est vraie dans tout anneau noethérien à gauche et intègre. Ces propriétés sont vraies pour l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie, voir les exercices 4.4 et 4.6.

(5) Dans cette question on pourra utiliser le fait que pour toute algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$ , l'anneau  $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$  est intègre (c'est-à-dire que le produit de deux éléments non nuls est toujours non nul).

(a) Montrer que si  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ , alors tout morphisme de représentations de  $M(\lambda)$  vers  $M(\mu)$  qui est non nul est injectif.

(b) En déduire que si  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  alors

$$\dim_{\mathbb{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), M(\mu))) \leq 1.$$

(Indication : si  $f$  et  $g$  sont deux morphismes non nuls de  $M(\lambda)$  vers  $M(\mu)$ , on pourra considérer leur restriction à l'unique sous-représentation simple de  $M(\lambda)$  (cf. question (4)), et utiliser la question (2).)

(c) Montrer que si  $\dim_{\mathbb{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), M(\mu))) = 1$ , alors  $\lambda \preceq \mu$ .

(d) Soient  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  et  $\alpha \in \Delta$  tels que  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ . Montrer que

$$\dim_{\mathbb{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(s_\alpha(\lambda + \rho) - \rho), M(\lambda))) = 1.$$

(Indication : on pourra s'inspirer des arguments utilisés dans l'étape 1 de la preuve du théorème 3.4 du chapitre 5.)

(e) En déduire que si  $\lambda \in P$  et si  $M(\lambda)$  est une représentation simple, alors  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq -1$  pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ .

EXERCICE 0.3. On fixe un corps algébriquement clos  $\mathbb{k}$  de caractéristique 0.

(1) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , et notons  $\mathfrak{d}_n(\mathbb{k})$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$  formée des matrices diagonales. Montrer que

$$\begin{aligned} \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \mid \forall D \in \mathfrak{d}_n(\mathbb{k}), [D, M] = 0\} &= \mathfrak{d}_n(\mathbb{k}) \\ \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \mid \forall D \in \mathfrak{d}_n(\mathbb{k}), DM + MD = 0\} &= \{0\}. \end{aligned}$$

(2) À partir de maintenant on fixe  $n \geq 2$ , et on note  $S \in M_{2n}(\mathbb{k})$  la matrice définie par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que l'algèbre de Lie symplectique  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$  définie par

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}) \mid SX = -{}^tXS\}.$$

On rappelle également que si  $X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ , et si on écrit

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{k})$ , alors  $X$  appartient à  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  ssi on a

$${}^tB = B, \quad {}^tC = C \quad \text{et} \quad {}^tA = -D.$$

On admettra que  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  est une algèbre de Lie semi-simple<sup>2</sup>.

(a) On note

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}, D \in \mathfrak{d}_n(\mathbb{k}) \right\}.$$

Montrer que

$$\{X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) \mid \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = 0\} = \mathfrak{h}.$$

<sup>2</sup> Voir l'annexe B.

- (b) En déduire que  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie torale maximale de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ .
- (3) L'objectif de cette question est de décrire explicitement le système de racines  $\Phi$  de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  associé à  $\mathfrak{h}$ , et une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

- (a) Montrer que les matrices

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= E_{i,j} - E_{n+j,n+i} \quad (1 \leq i, j \leq n), \\ p_{i,j} &= E_{i,n+j} + E_{j,n+i} \quad (1 \leq i \leq j \leq n), \\ q_{j,i} &= E_{n+j,i} + E_{n+i,j} \quad (1 \leq i \leq j \leq n) \end{aligned}$$

forment une base de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ .

- (b) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on notera  $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$  la forme linéaire qui envoie une matrice

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$$

sur le coefficient de  $D$  en position  $(i, i)$ . En considérant la base de la question (3a), montrer que  $\Phi$  est constitué des formes linéaires suivantes (où  $i$  et  $j$  appartiennent à  $\{1, \dots, n\}$  dans tous les cas) :

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j \quad (i \neq j), \quad \varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (i < j), \quad -(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \quad (i < j), \quad 2\varepsilon_i, \quad -2\varepsilon_i.$$

- (c) Pour chaque racine  $\alpha \in \Phi$ , déterminer le sous-espace radiciel de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  correspondant.

- (d) Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{si } i \neq n; \\ 2\varepsilon_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Montrer que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est une base de  $\Phi$ .

- (e) Déterminer les racines positives  $\Phi^+$  associées à ce choix de base.
- (f) Pour chaque racine  $\alpha \in \Delta$ , déterminer le vecteur  $h_\alpha$  correspondant.
- (g) Montrer que pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  on a

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| = 1 \text{ ou si } i = n \text{ et } j = n-1; \\ -2 & \text{si } i = n-1 \text{ et } j = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (4) On considère la représentation naturelle de  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^{2n}$ . On admettra que cette représentation est simple<sup>3</sup>. Déterminer son plus haut poids (pour le choix de base de la question (3d)).

---

3. Voir encore l'annexe B.