

Introduction à la théorie du contrôle

ARNAUD MÜNCH

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Cours dans le cadre de l'école doctorale - Hiver 2016

Partie I - Introduction

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné !

Soit $X = X(t)$ une variable dynamique solution d'un système dynamique :

$$\begin{cases} F(X(t), X'(t), X''(t), \dots) = 0, & t > 0 \\ X(t=0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (1)$$

A l'instant $t=T$,

$$X(T) = X_T$$

Soit maintenant $X_{cible} \neq X_T$. On souhaite agir sur le système de façon à ce que

$$X(t = T) = X_{cible}$$

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné !

Soit $X = X(t)$ une variable dynamique solution d'un système dynamique :

$$\begin{cases} F(X(t), X'(t), X''(t), \dots) = 0, & t > 0 \\ X(t = 0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (1)$$

A l'instant $t=T$,

$$X(T) = X_T$$

Soit maintenant $X_{cible} \neq X_T$. On souhaite agir sur le système de façon à ce que

$$X(t = T) = X_{cible}$$

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné !

Soit $X = X(t)$ une variable dynamique solution d'un système dynamique :

$$\begin{cases} F(X(t), X'(t), X''(t), \dots) = 0, & t > 0 \\ X(t=0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (1)$$

A l'instant $t=T$,

$$X(T) = X_T$$

Soit maintenant $X_{cible} \neq X_T$. On souhaite agir sur le système de façon à ce que

$$X(t = T) = X_{cible}$$

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné !

Soit $X = X(t)$ une variable dynamique solution d'un système dynamique :

$$\begin{cases} F(X(t), X'(t), X''(t), \dots) = 0, & t > 0 \\ X(t=0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (1)$$

A l'instant $t=T$,

$$X(T) = X_T$$

Soit maintenant $X_{cible} \neq X_T$. On souhaite agir sur le système de façon à ce que

$$X(t = T) = X_{cible}$$

Introduction générale

Pour cela, on modifie l'équation et on rajoute une fonction contrôle v

$$\begin{cases} F(X_v(t), X_v'(t), X_v''(t), \dots) = v, & t > 0 \\ X_v(t = 0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (2)$$

de solution dépendante de v .

Question

Peut-on trouver au moins un contrôle v tel que

$$X_v(t = T) = X_{cible} \quad ???$$

Si oui, on dit que le système en X est **contrôlable** de façon exacte au temps $t = T$.

Question

Si le système est contrôlable au temps T , peut-t-on déterminer parmi tous les contrôles possibles celui de norme minimale.

Introduction générale

Pour cela, on modifie l'équation et on rajoute une fonction contrôle v

$$\begin{cases} F(X_v(t), X_v'(t), X_v''(t), \dots) = v, & t > 0 \\ X_v(t = 0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (2)$$

de solution dépendante de v .

Question

Peut-on trouver au moins un contrôle v tel que

$$X_v(t = T) = X_{cible} \quad ???$$

Si oui, on dit que le système en X est **contrôlable** de façon exacte au temps $t = T$.

Question

Si le système est contrôlable au temps T , peut-t-on déterminer parmi tous les contrôles possibles celui de norme minimale.

Introduction générale

Pour cela, on modifie l'équation et on rajoute une fonction contrôle v

$$\begin{cases} F(X_v(t), X_v'(t), X_v''(t), \dots) = v, & t > 0 \\ X_v(t = 0) = X_0 & \text{donnée initiale} \end{cases} \quad (2)$$

de solution dépendante de v .

Question

Peut-on trouver au moins un contrôle v tel que

$$X_v(t = T) = X_{cible} \quad ???$$

Si oui, on dit que le système en X est **contrôlable** de façon exacte au temps $t = T$.

Question

Si le système est contrôlable au temps T , peut-t-on déterminer parmi tous les contrôles possibles celui de norme minimale.

Introduction générale

Question

Si le système n'est pas contrôlable exactement au temps T , le système est-il contrôlable approximativement au temps T : pour tout $\epsilon > 0$, peut-t-on trouver un contrôle v tel que :

$$\|X(t = T) - X_{cible}\| \leq \epsilon? \quad (3)$$

Question

Si le système n'est pas contrôlable au temps T , est-il contrôlable en temps long, c'est-à-dire:

$$\|X(t) - X_{cible}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \quad (4)$$

La notion de Stabilisation du système apparaît.

Introduction générale

Question

Si le système n'est pas contrôlable exactement au temps T , le système est-il contrôlable approximativement au temps T : pour tout $\epsilon > 0$, peut-t-on trouver un contrôle v tel que :

$$\|X(t = T) - X_{cible}\| \leq \epsilon? \quad (3)$$

Question

Si le système n'est pas contrôlable au temps T , est-il contrôlable en temps long, c'est-à-dire:

$$\|X(t) - X_{cible}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \quad (4)$$

La notion de Stabilisation du système apparaît.

Exemple 1: Le système masse-ressort

Le système masse-ressort s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = 0, t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

m - masse du ressort, R - coefficient de raideur - $x(t)$ - position
 $x'(t)$ - vitesse

On note l'énergie du système:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right)$$

Proposition

$\frac{dE(t)}{dt} = 0$, pour tout $t > 0$.

Question

Comment stabiliser le système ?

Exemple 1: Le système masse-ressort

Le système masse-ressort s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = 0, t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

m - masse du ressort, R - coefficient de raideur - $x(t)$ - position
 $x'(t)$ - vitesse

On note l'énergie du système:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right)$$

Proposition

$\frac{dE(t)}{dt} = 0$, pour tout $t > 0$.

Question

Comment stabiliser le système ?

Exemple 1: Le système masse-ressort

Le système masse-ressort s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = 0, t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

m - masse du ressort, R - coefficient de raideur - $x(t)$ - position
 $x'(t)$ - vitesse

On note l'énergie du système:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right)$$

Proposition

$\frac{dE(t)}{dt} = 0$, pour tout $t > 0$.

Question

Comment stabiliser le système ?

Exemple 1: Le système masse-ressort

Le système masse-ressort s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = 0, t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

m - masse du ressort, R - coefficient de raideur - $x(t)$ - position
 $x'(t)$ - vitesse

On note l'énergie du système:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right)$$

Proposition

$\frac{dE(t)}{dt} = 0$, pour tout $t > 0$.

Question

Comment stabiliser le système ?

Exemple 2: Le système du pendule

Le système du pendule de masse m et de longueur L est donné par:

$$\begin{cases} m\theta''(t) + mg \sin \theta(t) = 0, & t > 0 \\ \theta(t = 0) = \theta_0, & \theta'(t = 0) = \theta_1 \end{cases} \quad (6)$$

θ est l'angle du pendule formé avec la verticale; θ' est la vitesse angulaire.

Question

Comment stabiliser ce système non linéaire ?

Contrôle optimal

La notion de contrôle optimal est un peu différente, mais très liée à la notion de contrôlabilité. Elle apparaît lorsque l'on minimise une certaine fonctionnelle

$$J(v) = \alpha \|X_v\|_1^2 + \beta \|v\|_2^2$$

où X_v est solution du système dynamique associé au contrôle v .

Ici, il n'y a pas nécessairement de contrainte sur la variable X_v à un instant $T > 0$!

Exemple 3: Le problème de la barque

Le mouvement d'une barque se déplaçant a vitesse constante sur une rivière où il y a un courant $c(y)$ est modélisé par

$$\begin{cases} x'(t) = v \cos(u(t)) + c(y(t)), & x(0) = 0, \\ y'(t) = v \sin(u(t)), & y(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où v est la vitesse et $u(t)$, l'angle de la barque par rapport à l'axe (O, x) , est le contrôle.

Question

Comment atteindre un point donné sur l'autre berge ?

Comment l'atteindre en un temps minimal ?

Exemple 4: Un problème optimal de pêche

L'évolution d'une population de poisson $x(t)$ et modélisée par

$$\begin{cases} x'(t) = 0.08x(t)(1 - 10^{-6}x(t)) - u(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (8)$$

Question

Politique optimale de pêche, de manière à maximiser la quantité

$$\int_0^T e^{-0.03t} \ln(u(t)) dt$$

et telle que $x(T) > 0$?

Exemple 5: Contrôle optimal d'un réservoir

On veut ajouter de l'eau dans un réservoir de façon à atteindre le niveau d'eau h_1 , en tenant compte du fait qu'il faut compenser une perte d'eau linéaire en temps. La modélisation est

$$h'(t) = u(t) - t, h(0) = 0 \quad (9)$$

où u est le contrôle.

Question

Quelle est la loi optimale permettant d'atteindre l'objectif en minimisant

$$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt \quad (10)$$

le temps t_f final n'étant pas fixé ?

Exemple 6: Contrôle optimal d'une réaction chimique

Une réaction chimique est modélisée par

$$\begin{cases} x_1'(t) = -ux_1 + u^2x_2, x_1(0) = 1, \\ x_2'(t) = ux_1 - 3u^2x_2, x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

où x_1 et x_2 sont les concentrations des réactifs, et le contrôle $0 \leq u(t) \leq 1$.

Question

Quelle est la politique optimale permettant de maximiser la quantité finale $x_2(1)$ du second réactif ?

Le problème est :

$$\max_{u, 0 \leq u(t) \leq 1} x_2(1) \quad (12)$$

Exemple 7: Contrôle optimal d'une épidémie par vaccination

On considère une population de N individus soumis à une épidémie qu'on veut contrôler par vaccination. Par simplicité, on suppose qu'un individu qui a été malade et soigné peut à nouveau tomber malade.

Le modèle est le suivant. On note $\alpha > 0$ le taux de contamination, $u(t)$ (contrôle) le taux de vaccination et $x(t)$ le nombre d'individus infectés. On a:

$$x' = \alpha x(t)(N - x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

où $0 \leq x_0 \leq N$ et où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq C, \quad (14)$$

où $C > 0$ est une constante. Soit $T > 0$. On cherche à minimiser le critère:

$$C_T(u) = \int_0^T (x(t) + \beta u(t)) dt + \gamma x(T) \quad (15)$$

où $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ sont des **constantes de pondération** (compromis entre économie de vaccins dépensés et minimisation du nombre d'individus infectés).

Exemple 7: Contrôle optimal d'une épidémie par vaccination

On considère une population de N individus soumis à une épidémie qu'on veut contrôler par vaccination. Par simplicité, on suppose qu'un individu qui a été malade et soigné peut à nouveau tomber malade.

Le modèle est le suivant. On note $\alpha > 0$ le taux de contamination, $u(t)$ (contrôle) le taux de vaccination et $x(t)$ le nombre d'individus infectés. On a:

$$x' = \alpha x(t)(N - x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

où $0 \leq x_0 \leq N$ et où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq C, \quad (14)$$

où $C > 0$ est une constante. Soit $T > 0$. On cherche à minimiser le critère:

$$C_T(u) = \int_0^T (x(t) + \beta u(t)) dt + \gamma x(T) \quad (15)$$

où $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ sont des constantes de pondération (compromis entre économie de vaccins dépensés et minimisation du nombre d'individus infectés).

Exemple 7: Contrôle optimal d'une épidémie par vaccination

On considère une population de N individus soumis à une épidémie qu'on veut contrôler par vaccination. Par simplicité, on suppose qu'un individu qui a été malade et soigné peut à nouveau tomber malade.

Le modèle est le suivant. On note $\alpha > 0$ le taux de contamination, $u(t)$ (contrôle) le taux de vaccination et $x(t)$ le nombre d'individus infectés. On a:

$$x' = \alpha x(t)(N - x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

où $0 \leq x_0 \leq N$ et où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq C, \quad (14)$$

où $C > 0$ est une constante. Soit $T > 0$. On cherche à minimiser le critère:

$$C_T(u) = \int_0^T (x(t) + \beta u(t)) dt + \gamma x(T) \quad (15)$$

où $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ sont des **constantes de pondération** (compromis entre économie de vaccins dépensés et minimisation du nombre d'individus infectés).

Exemple 8: Contrôle optimal d'un procédé de fermentation

Considérons le procédé de fermentation :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + u(t)(1 - x(t)), x(0) = x_0, \\ y'(t) = x(t) - u(t)y(t), y(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

où $x(t)$ représente la concentration de sucre, $y(t)$ la concentration d'éthanol, et $u(t)$, le contrôle, est le taux d'évaporation. On suppose $0 \leq u(t) \leq M$, et $0 < x_0 < 1$. Soit y_1 tel que $y_1 > 1/M$ et $y_1 > x_0$; on veut résoudre le problème du temps minimal pour rejoindre $y(t_f) = y_1$

Exemple 9: Contrôle optimal d'un avion

Considérons le mouvement d'un avion, modélisé par :

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = \frac{u(t)}{mv(t)} - \mu g - \frac{c}{m}v(t)^2 \quad (17)$$

où $x(t)$ est la distance au sol parcourue, $v(t)$ est le module de la vitesse, le contrôle $u(t)$ est l'apport d'énergie, m est la masse, et μ, c sont des coefficients aérodynamiques. Le contrôle vérifie la contrainte :

$$0 < a \leq u(t) \leq b \quad (18)$$

Le but est de déterminer une trajectoire menant du point initial $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ au point final $x(t_f) = x_f, v(t_f) = v_f$ et minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{t_f} u(t) dt$$

Exemple 9: Contrôle optimal d'un avion

Considérons le mouvement d'un avion, modélisé par :

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = \frac{u(t)}{mv(t)} - \mu g - \frac{c}{m}v(t)^2 \quad (17)$$

où $x(t)$ est la distance au sol parcourue, $v(t)$ est le module de la vitesse, le contrôle $u(t)$ est l'apport d'énergie, m est la masse, et μ, c sont des coefficients aérodynamiques. Le contrôle vérifie la contrainte :

$$0 < a \leq u(t) \leq b \quad (18)$$

Le but est de déterminer une trajectoire menant du point initial $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ au point final $x(t_f) = x_f, v(t_f) = v_f$ et minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{t_f} u(t) dt$$

Exemple 10: Système proies-prédateurs

[dynamique des populations; système de Lotka-Volterra]

On considère le système proies-prédateurs

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)), x(0) = x_0 \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (19)$$

où $x(t)$ est l'effectif des proies, $y(t)$ l'effectif des prédateurs, α est le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies du aux prédateurs rencontrés, γ le taux de mortalité des prédateurs, et δ le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées

Les deux points d'équilibres sont : $x(t) = 0, y(t) = 0$ (extinction définitive de l'espèce) et $x(t) = \frac{\alpha}{\beta}, y(t) = \frac{\gamma}{\delta}$.

La matrice jacobienne est donnée par

$$J(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \delta y(t) & \delta x(t) - \gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

$J(0, 0)$ admet α et $-\gamma$ pour valeur propres donc l'équilibre est instable. $J(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta})$ admet $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ pour valeurs propres. Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

Exemple 10: Système proies-prédateurs

[dynamique des populations; système de Lotka-Volterra]

On considère le système proies-prédateurs

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)), x(0) = x_0 \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (19)$$

où $x(t)$ est l'effectif des proies, $y(t)$ l'effectif des prédateurs, α est le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies du aux prédateurs rencontrés, γ le taux de mortalité des prédateurs, et δ le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées

Les deux points d'équilibres sont : $x(t) = 0, y(t) = 0$ (extinction définitive de l'espèce) et $x(t) = \frac{\alpha}{\beta}, y(t) = \frac{\gamma}{\delta}$.

La matrice jacobienne est donnée par

$$J(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \delta y(t) & \delta x(t) - \gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

$J(0, 0)$ admet α et $-\gamma$ pour valeur propres donc l'équilibre est instable. $J(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta})$ admet $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ pour valeurs propres. Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

Exemple 10: Système proies-prédateurs

[dynamique des populations; système de Lotka-Volterra]

On considère le système proies-prédateurs

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)), x(0) = x_0 \\ y'(t) = -y(t)(\gamma - \delta x(t)), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (19)$$

où $x(t)$ est l'effectif des proies, $y(t)$ l'effectif des prédateurs, α est le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies du aux prédateurs rencontrés, γ le taux de mortalité des prédateurs, et δ le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées

Les deux points d'équilibres sont : $x(t) = 0, y(t) = 0$ (extinction définitive de l'espèce) et $x(t) = \frac{\alpha}{\beta}, y(t) = \frac{\gamma}{\delta}$.

La matrice jacobienne est donnée par

$$J(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \delta y(t) & \delta x(t) - \gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

$J(0, 0)$ admet α et $-\gamma$ pour valeur propres donc l'équilibre est instable. $J(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta})$ admet $\pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ pour valeurs propres. Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

Exemple 11: Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population $x_0 > 0$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'éco-système une population $y_0 > 0$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles.

On suppose que les insectes prédateurs sont stériles. Le contrôle consiste en l'introduction, régulière d'insectes prédateurs. Le modèle s'écrit:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)), x(0) = x_0, \\ y'(t) = -cy(t) + u(t), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (21)$$

où $a > 0$ est le taux de reproduction naturelle des nuisibles, $b > 0$ est un taux de prédation, $c > 0$ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t , il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M, \quad (M > 0)$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits:

$$x(T) + \int_0^T u(t)dt \quad (22)$$

Exemple 11: Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population $x_0 > 0$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'éco-système une population $y_0 > 0$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles.

On suppose que les insectes prédateurs sont stériles. Le contrôle consiste en l'introduction, régulière d'insectes prédateurs. Le modèle s'écrit:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)), x(0) = x_0, \\ y'(t) = -cy(t) + u(t), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (21)$$

où $a > 0$ est le taux de reproduction naturelle des nuisibles, $b > 0$ est un taux de prédation, $c > 0$ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t , il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M, \quad (M > 0)$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits:

$$x(T) + \int_0^T u(t)dt \quad (22)$$

Exemple 11: Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population $x_0 > 0$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'éco-système une population $y_0 > 0$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles.

On suppose que les insectes prédateurs sont stériles. Le contrôle consiste en l'introduction, régulière d'insectes prédateurs. Le modèle s'écrit:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)), x(0) = x_0, \\ y'(t) = -cy(t) + u(t), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (21)$$

où $a > 0$ est le taux de reproduction naturelle des nuisibles, $b > 0$ est un taux de prédation, $c > 0$ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t , il vérifie la contrainte

$$0 \leq u(t) \leq M, \quad (M > 0)$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ fixé, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits:

$$x(T) + \int_0^T u(t)dt \quad (22)$$

Exemple 12: Contrôle optimal d'insectes nuisibles par des prédateurs (suite)

On suppose que les prédateurs que l'on introduit se reproduisent, de manière proportionnelle au nombre de nuisibles. Le contrôle est cette fois le taux de disparition des prédateurs. Le modèle normalisé est:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)), x(0) = x_0, \\ y'(t) = -y(t)(u(t) - x(t)), y(0) = y_0 \end{cases} \quad (23)$$

où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte:

$$0 < \alpha \leq u(t) \leq \beta. \quad (24)$$

Cette fois, on cherche à résoudre le problème de joindre en temps minimal le point d'équilibre $x(t_f) = a, y(t_f) = 1$

Exemple 11: Contrôle des vibrations d'une corde

On se donne une corde homogène élastique de longueur un. Le déplacement transversal est donné par l'équation aux dérivées partielles (équation des ondes) :

$$\begin{cases} y''(x, t) - c^2 y_{xx}(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (25)$$

Sans force extérieure ($f = 0$), l'énergie du système (non contrôlé) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|y'(x, t)|^2 + |y_x(x, t)|^2) dx \quad (26)$$

et est constante au cours du temps; $E(t) = E(0)$. Le système est **conservatif**.

On cherche un contrôle v tel que $y(1, t) = v(t)$ tel que $E(T) = 0$ pour $T > 0$ suffisamment grand. (T est le temps de contrôlabilité).

Exemple 12: Contrôle des vibrations d'une corde soumise à un contact unilatéral

On se donne une corde homogène élastique de longueur un. Le déplacement transversal est donné par l'équation aux dérivées partielles (équation des ondes):

$$\begin{cases} y''(x, t) - c^2 y_{xx}(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, 1), \\ y(0, t) \geq 0, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (27)$$

On cherche un contrôle v tel que $y(1, t) = v(t)$ tel que $E(T) = 0$ pour $T > 0$ suffisamment grand. (T est le temps de contrôlabilité).

Exemple 13: Contrôle de la chaleur au sein d'une poutre

On se donne une corde homogène élastique de longueur un. La température de la poutre est régie par l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \theta'(x, t) - c^2 \theta_{xx}(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (28)$$

Contrairement à l'équation des ondes, ce système est

naturellement dissipatif: $\theta(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

On cherche un contrôle v tel que $\theta(1, t) = v(t)$ de façon à rendre la chaleur homogène au sein de la corde ?

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3 y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3 y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Exemple 14: Système de réaction-diffusion en dynamique du cancer

$$y_1 = y_1(x, t), y_2 = y_2(x, t), y_3 = y_3(x, t)$$

On considère le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} y_1' = d_1 \Delta y_1 + a_1(1 - y_1 \setminus k_1)y_1 - (\alpha_{1,2}y_2 + k_{1,3}y_3)y_1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_2' = d_2 \Delta y_2 + a_2(1 - y_2 \setminus k_2)y_2 - (\alpha_{2,1}y_1 + k_{2,3}y_3)y_2, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_3' = d_3 \Delta y_3 - a_3 y_3 + u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y_i(x, 0) = y_{i,0}(x), & x \in \Omega, \\ \nabla y_i \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (29)$$

avec

- ▶ y_1 la densité de cellules cancéreuses,
- ▶ y_2 la densité de cellules saines,
- ▶ y_3 la concentration de médicament,
- ▶ u le taux d'injection du médicament, variable de contrôle.

On cherche u de façon à augmenter la durée de vie des cellules saines:

$$\max_u \int_0^\infty \left(\int_\Omega y_1(x, t) dx \right) dt \quad (30)$$

Retour sur le système masse-ressort

Le système masse-ressort sans contrôle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = 0, t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (31)$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant. Le polynôme caractéristique est

$$p(r) = mr^2 + R; \quad p(r) = 0 \rightarrow \Delta = -4mR < 0$$

donc les racines sont

$$r_1, r_2 = \pm i \frac{\sqrt{4mR}}{2m} = \pm i \sqrt{\frac{R}{m}}$$

donc la solution est donnée par:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{R}{m}}t\right) + x_1 \sqrt{\frac{m}{R}} \sin\left(\sqrt{\frac{R}{m}}t\right), t > 0$$

Energie du système masse-ressort

On définit l'énergie du système par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right), t > 0 \quad (32)$$

Proposition

L'énergie est constante: $E(t) = E(0)$

Pour cela, on multiplie l'équation par $x'(t)$ soit

$$(mx''(t) + Rx(t))x'(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (33)$$

Mais

$$x'(t)x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2, \quad x''(t)x'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x'(t)|^2$$

ce qui donne

$$0 = m \frac{d}{dt} |x'(t)|^2 + R \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = \frac{d}{dt} E(t).$$

Energie du système masse-ressort

On définit l'énergie du système par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right), \quad t > 0 \quad (32)$$

Proposition

L'énergie est constante: $E(t) = E(0)$

Pour cela, on multiplie l'équation par $x'(t)$ soit

$$(mx''(t) + Rx(t))x'(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (33)$$

Mais

$$x'(t)x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2, \quad x''(t)x'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x'(t)|^2$$

ce qui donne

$$0 = m \frac{d}{dt} |x'(t)|^2 + R \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = \frac{d}{dt} E(t).$$

Energie du système masse-ressort

On définit l'énergie du système par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(m|x'(t)|^2 + R|x(t)|^2 \right), t > 0 \quad (32)$$

Proposition

L'énergie est constante: $E(t) = E(0)$

Pour cela, on multiplie l'équation par $x'(t)$ soit

$$(mx''(t) + Rx(t))x'(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (33)$$

Mais

$$x'(t)x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2, \quad x''(t)x'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x'(t)|^2$$

ce qui donne

$$0 = m \frac{d}{dt} |x'(t)|^2 + R \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = \frac{d}{dt} E(t).$$

Contrôle du système masse-ressort

Le système masse-ressort avec contrôle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} mx''(t) + Rx(t) = v(t), t > 0 \\ x(t=0) = x_0, \quad x'(t=0) = x_1 \end{cases} \quad (34)$$

On cherche un contrôle v tel que $x(T) = x'(T) = 0$??
Ici, on peut construire facilement un tel contrôle v ! On cherche x tel que

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, x(T) = 0, x'(T) = 0$$

soit 4 contraintes à satisfaire. On cherche x de la forme

$$x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = (T-t)^2(\alpha t + \beta)$$

puis $\beta = \frac{x_0}{T^2}$ puis $\alpha = \frac{x_1 + 2T\beta}{T^2} = \frac{2x_0 + x_1 T}{T^3}$.

Retour sur le système masse-ressort

$$x(t) = \frac{(T-t)^2(2tx_0 + tx_1 T + x_0 T)}{T^3}$$

Il reste à définir $v := mx''(t) + Rx(t)$ soit

$$v(t) = m \left(\frac{2(2x_0 + x_1 T)t}{T^3} + \frac{2x_0}{T^2} - \frac{4(T-t)(2x_0 + x_1 T)}{T^3} \right) + R \left(\frac{(T-t)^2((2x_0 + x_1 T)t}{T^3} + \frac{x_0}{T^2} \right) \quad (35)$$

Question

Comment calculer le contrôle de norme minimale

$$\min_v \int_0^T v^2(t) dt \quad ? \quad (36)$$

Question

Comment faire si on rajoute la contrainte $-1 \leq v(t) \leq 1$?

Retour sur le système masse-ressort

$$x(t) = \frac{(T-t)^2(2tx_0 + tx_1 T + x_0 T)}{T^3}$$

Il reste à définir $v := mx''(t) + Rx(t)$ soit

$$v(t) = m \left(\frac{2(2x_0 + x_1 T)t}{T^3} + \frac{2x_0}{T^2} - \frac{4(T-t)(2x_0 + x_1 T)}{T^3} \right) + R \left(\frac{(T-t)^2((2x_0 + x_1 T)t)}{T^3} + \frac{x_0}{T^2} \right) \quad (35)$$

Question

Comment calculer le contrôle de norme minimale

$$\min_v \int_0^T v^2(t) dt \quad ? \quad (36)$$

Question

Comment faire si on rajoute la contrainte $-1 \leq v(t) \leq 1$?

Retour sur le système masse-ressort

$$x(t) = \frac{(T-t)^2(2tx_0 + tx_1 T + x_0 T)}{T^3}$$

Il reste à définir $v := mx''(t) + Rx(t)$ soit

$$v(t) = m \left(\frac{2(2x_0 + x_1 T)t}{T^3} + \frac{2x_0}{T^2} - \frac{4(T-t)(2x_0 + x_1 T)}{T^3} \right) + R \left(\frac{(T-t)^2((2x_0 + x_1 T)t}{T^3} + \frac{x_0}{T^2} \right) \quad (35)$$

Question

Comment calculer le contrôle de norme minimale

$$\min_v \int_0^T v^2(t) dt \quad ? \quad (36)$$

Question

Comment faire si on rajoute la contrainte $-1 \leq v(t) \leq 1$?

Stabilisation du système masse-ressort

On cherche un contrôle v **explicitement** en fonction de $x(t)$!

On pose

$$v(t) = -kx'(t), \quad k > 0$$

donc l'équation en x devient

$$mx''(t) + Rx(t) = -kx'(t)$$

Proposition

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k|x'(t)|^2 < 0!!$$

Question

L'énergie tend-elle vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Stabilisation du système masse-ressort

On cherche un contrôle v **explicitement** en fonction de $x(t)$!

On pose

$$v(t) = -kx'(t), \quad k > 0$$

donc l'équation en x devient

$$mx''(t) + Rx(t) = -kx'(t)$$

Proposition

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k|x'(t)|^2 < 0!!$$

Question

L'énergie tend-elle vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Stabilisation du système masse-ressort

On cherche un contrôle v **explicitement** en fonction de $x(t)$!

On pose

$$v(t) = -kx'(t), \quad k > 0$$

donc l'équation en x devient

$$mx''(t) + Rx(t) = -kx'(t)$$

Proposition

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k|x'(t)|^2 < 0!!$$

Question

L'énergie tend-elle vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Stabilisation du système masse-ressort

On cherche un contrôle v **explicitement** en fonction de $x(t)$!

On pose

$$v(t) = -kx'(t), \quad k > 0$$

donc l'équation en x devient

$$mx''(t) + Rx(t) = -kx'(t)$$

Proposition

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k|x'(t)|^2 < 0!!$$

Question

L'énergie tend -t-elle vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Stabilisation du système masse-ressort

$$p(r) = mr^2 + kr + R; \quad p(r) = 0 \rightarrow \Delta = k^2 - 4mR < 0$$

donc

$$r_1(k), r_2(k) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mR}}{2}$$

- Si $k^2 - 4mR > 0$, les racines sont réelles négatives et

$$x(t) = Ae^{\frac{(-k + \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t} + Be^{\frac{(-k - \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t}$$

avec A, B solution de $A + B = x_0$ et $Ar_1 + Br_2 = x_1$ soit,

$$A = \frac{m(x_1 - x_0 r_2(k))}{\sqrt{k^2 - 4mR}}; \quad B = \frac{m(x_0 r_1(k) - x_1)}{\sqrt{k^2 - 4mR}}$$

et on a

$$X(t), X'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Stabilisation du système masse-ressort

$$p(r) = mr^2 + kr + R; \quad p(r) = 0 \rightarrow \Delta = k^2 - 4mR < 0$$

donc

$$r_1(k), r_2(k) = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mR}}{2}$$

- Si $k^2 - 4mR > 0$, les racines sont réelles négatives et

$$x(t) = Ae^{\frac{(-k + \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t} + Be^{\frac{(-k - \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t}$$

avec A, B solution de $A + B = x_0$ et $Ar_1 + Br_2 = x_1$ soit,

$$A = \frac{m(x_1 - x_0 r_2(k))}{\sqrt{k^2 - 4mR}}; \quad B = \frac{m(x_0 r_1(k) - x_1)}{\sqrt{k^2 - 4mR}}$$

et on a

$$X(t), X'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Stabilisation du système masse-ressort

- Si $k^2 - 4mR = 0$, racine double $r_1 = \frac{k}{2}$ et

$$x(t) = \left(x_0 + \left(x_1 + \frac{kx_0}{2m} \right) t \right) e^{-\frac{k}{2m}t}$$

et à nouveau $x(t), x'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

- Si $k^2 - 4mR < 0$, $r_1, r_2 = \frac{-k \pm i\sqrt{4mR - k^2}}{2m}$ et

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2m}t} \left(x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) \right)$$

et à nouveau, $E(t) \rightarrow 0$.

Conclusion: Pour tout $k > 0$, décroissance exponentielle de l'énergie en temps.

Stabilisation du système masse-ressort

- Si $k^2 - 4mR = 0$, racine double $r_1 = \frac{k}{2}$ et

$$x(t) = \left(x_0 + \left(x_1 + \frac{kx_0}{2m} \right) t \right) e^{-\frac{k}{2m}t}$$

et à nouveau $x(t), x'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

- Si $k^2 - 4mR < 0$, $r_1, r_2 = \frac{-k \pm i\sqrt{4mR - k^2}}{2m}$ et

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2m}t} \left(x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) \right)$$

et à nouveau, $E(t) \rightarrow 0$.

Conclusion: Pour tout $k > 0$, décroissance exponentielle de l'énergie en temps.

Stabilisation du système masse-ressort

- Si $k^2 - 4mR = 0$, racine double $r_1 = \frac{k}{2}$ et

$$x(t) = \left(x_0 + \left(x_1 + \frac{kx_0}{2m} \right) t \right) e^{-\frac{k}{2m}t}$$

et à nouveau $x(t), x'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

- Si $k^2 - 4mR < 0$, $r_1, r_2 = \frac{-k \pm i\sqrt{4mR - k^2}}{2m}$ et

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2m}t} \left(x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4mR - k^2}}{2m}t\right) \right)$$

et à nouveau, $E(t) \rightarrow 0$.

Conclusion: Pour tout $k > 0$, décroissance exponentielle de l'énergie en temps.

Valeur optimale de k ?

- Si $k^2 - 4mR > 0$, les racines sont réelles négatives et

$$x(t) = Ae^{\frac{(-k + \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t} + Be^{\frac{(-k - \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t}$$

avec

$$A = \frac{m(x_1 - x_0 r_2(k))}{\sqrt{k^2 - 4mR}}; \quad B = \frac{m(x_0 r_1(k) - x_1)}{\sqrt{k^2 - 4mR}}.$$

$$x(t) = x_0 + \frac{(x_1 m - x_0 R t)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{k} e^{-\frac{tk}{m}} \left(-x_1 m + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$x'(t) = -\frac{x_0 R}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + e^{-\frac{tk}{m}} \left(x_1 + \frac{x_1 R t + x_0 R}{k} + O(k^{-2})\right),$$

$$E(t) = E(0) - O\left(\frac{t^2}{k^2}\right);$$

La valeur de k optimale est donnée par k tel que $k^2 - 4mR = 0$ soit $k = 2\sqrt{mR}$ et le taux de décroissance exponentielle vaut alors

$$-\frac{k}{2m} = -\sqrt{\frac{R}{m}}$$

Valeur optimale de k ?

- Si $k^2 - 4mR > 0$, les racines sont réelles négatives et

$$x(t) = Ae^{\frac{(-k + \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t} + Be^{\frac{(-k - \sqrt{k^2 - 4mR})}{2m}t}$$

avec

$$A = \frac{m(x_1 - x_0 r_2(k))}{\sqrt{k^2 - 4mR}}; \quad B = \frac{m(x_0 r_1(k) - x_1)}{\sqrt{k^2 - 4mR}}.$$

$$x(t) = x_0 + \frac{(x_1 m - x_0 R t)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{k} e^{-\frac{tk}{m}} \left(-x_1 m + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

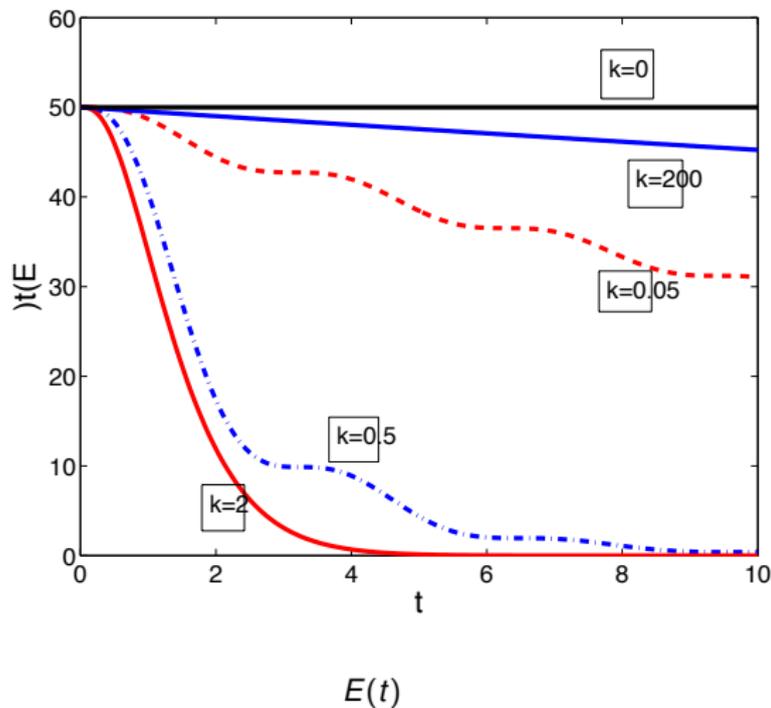
$$x'(t) = -\frac{x_0 R}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + e^{-\frac{tk}{m}} \left(x_1 + \frac{x_1 R t + x_0 R}{k} + O(k^{-2})\right),$$

$$E(t) = E(0) - O\left(\frac{t^2}{k^2}\right);$$

La valeur de k optimale est donnée par k tel que $k^2 - 4mR = 0$ soit $k = 2\sqrt{mR}$ et le taux de décroissance exponentielle vaut alors

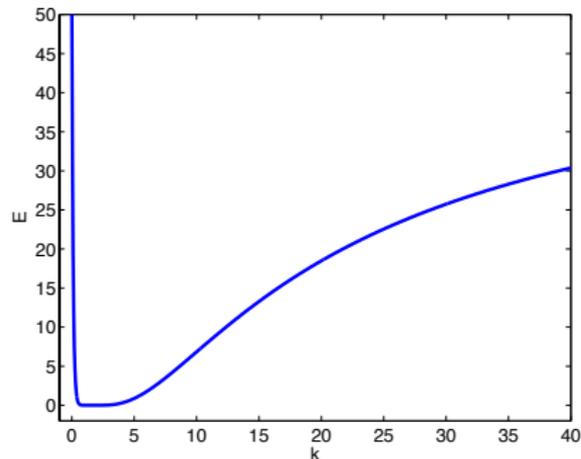
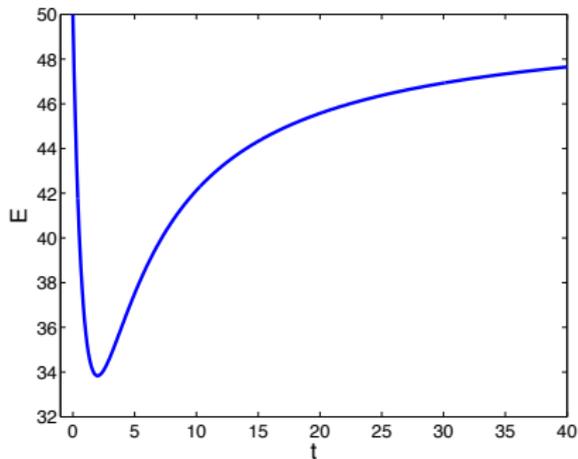
$$-\frac{k}{2m} = -\sqrt{\frac{R}{m}}$$

Application numérique du système masse-ressort : $m = R = 1$



Application numérique du système masse-ressort :

$m = R = 1$



$E(t = 1)$ et $E(t = 10)$ en fonction de k

Remarque: Problème masse-ressort - Reformulation

L'équation du masse ressort $mx''(t) + Rx(t) = 0$ prend la forme du système différentielle linéaire

$$X'(t) = AX(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{\frac{m}{R}}x'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}$$

De même, l'équation $mx''(t) + Rx(t) = v(t)$ prend la forme

$$X'(t) = AX(t) + Bv(t) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} \end{pmatrix};$$

Remarque: Problème masse-ressort - Reformulation

L'équation du masse ressort $mx''(t) + Rx(t) = 0$ prend la forme du système différentielle linéaire

$$X'(t) = AX(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{\frac{m}{R}}x'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}$$

De même, l'équation $mx''(t) + Rx(t) = v(t)$ prend la forme

$$X'(t) = AX(t) + Bv(t) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} \end{pmatrix};$$

Partie II - Contrôlabilité des systèmes différentielles linéaires de la forme

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. On considère le système de dimension finie:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (37)$$

avec A une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times m$. **On utilise donc m contrôle(s) pour n états.** En pratique, $m \leq n$.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

Si $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, i.e. $\int_0^T u_i^2(t) dt < \infty$, $i \in \{1, \dots, m\}$, alors le système (37) est bien posé: il existe une solution unique $X \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ donnée par la méthode de variation de la constante :

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. On considère le système de dimension finie:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (37)$$

avec A une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times m$. **On utilise donc m contrôle(s) pour n états.** En pratique, $m \leq n$.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

Si $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, i.e. $\int_0^T u_i^2(t) dt < \infty$, $i \in \{1, \dots, m\}$, alors le système (37) est bien posé: il existe une solution unique $X \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ donnée par la méthode de variation de la constante :

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **exactement contrôlable** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 et finale X_T , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = X_T$.

Remarque

On peut supposer par linéarité que $X_T = 0$. Si $X_T \neq 0$, on peut définir la solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), t \in (0, T), \\ Y(T) = X_T \end{cases} \quad (38)$$

et $Z = X - Y$ solution de

$$\begin{cases} Z'(t) = AZ(t) + Bu(t), t \in (0, T), \\ Z(0) = X_0 - Y(0) \end{cases} \quad (39)$$

$X(T) = X_T$ si et seulement si $Z(T) = 0$!

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **contrôlable à zéro** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = 0$.

Contrôlabilité à zéro \iff Contrôlabilité exacte

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **contrôlable à zéro** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = 0$.

Contrôlabilité à zéro \iff Contrôlabilité exacte

Contrôlabilité de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$

Definition

Le système (37) est **contrôlable à zéro** au temps $T > 0$ ssi pour toute donnée initiale X_0 , il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $X(T) = 0$.

Contrôlabilité à zéro \iff Contrôlabilité exacte

Caractérisation des contrôles

Lemme

u est un contrôle à zéro pour la donnée initiale X_0 si et seulement si

$$\int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle = 0 \quad (40)$$

pour tout φ solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^* \varphi(t), & t \in (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (41)$$

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

X est solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t) = 0$ donc en multipliant par φ ,

$$\langle X', \varphi \rangle = \langle AX, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle$$

φ est solution de $-\varphi'(t) = A^*\varphi(t)$ donc en multipliant par X ,

$$\langle -\varphi', X \rangle = \langle A^*\varphi, X \rangle = \langle \varphi, AX \rangle = \langle AX, \varphi \rangle$$

donc

$$\langle X', \varphi \rangle + \langle \varphi', X \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc

$$\frac{d}{dt} \langle X, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

donc en intégrant sur $(0, T)$

$$\langle X(T), \varphi(T) \rangle - \langle X_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt$$

u est un nul contrôle si et seulement $X(T) = 0$ donc on obtient

Caractérisation des contrôles: démonstration

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad (42)$$

pour tout φ solution du problème adjoint, et en fait pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ car la solution φ est entièrement déterminée par φ_T !

(42) caractérise les points critiques de la fonctionnelle

$$J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle$$

Lemme

Supposons que J admet un minimum $\hat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ et soit $\hat{\varphi}$ la solution adjointe correspondante. Alors

$$u = B^* \hat{\varphi}$$

est un contrôle à zéro pour X .

Caractérisation des contrôles: démonstration

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad (42)$$

pour tout φ solution du problème adjoint, et en fait pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ car la solution φ est entièrement déterminée par φ_T !
(42) caractérise les points critiques de la fonctionnelle
 $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle$$

Lemme

Supposons que J admet un minimum $\hat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ et soit $\hat{\varphi}$ la solution adjointe correspondante. Alors

$$u = B^* \hat{\varphi}$$

est un contrôle à zéro pour X .

Caractérisation des contrôles: démonstration

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad (42)$$

pour tout φ solution du problème adjoint, et en fait pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ car la solution φ est entièrement déterminée par φ_T !
(42) caractérise les points critiques de la fonctionnelle
 $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle$$

Lemme

Supposons que J admet un minimum $\hat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ et soit $\hat{\varphi}$ la solution adjointe correspondante. Alors

$$u = B^* \hat{\varphi}$$

est un contrôle à zéro pour X .

lien avec J : démonstration

Si $\hat{\varphi}_T$ est un minimum de J , alors

$$DJ(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\hat{\varphi}_T + h\varphi_T) - J(\hat{\varphi}_T)}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

Après calculs, on obtient que

$$DJ(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = \int_0^T \langle B^* \hat{\varphi}, B^* \varphi \rangle dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

Il en résulte que si $\hat{\varphi}_T$ est un minimum de J , alors $B^* \hat{\varphi}$ vérifie la caractérisation des contrôles pour X et est donc un contrôle pour X .

Observabilité pour le système adjoint

Definition

Le système adjoint en φ est dit observable au temps $T > 0$ ssi il existe $c > 0$ tel que

$$c|\varphi(0)|^2 \leq \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (43)$$

Remarque

Si le système adjoint est observable, alors

$$B^*\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \implies \varphi = 0$$

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi le système adjoint en φ est observable :

Contrôlabilité du système en $X \iff$ Observabilité du système adjoint en φ

Observabilité pour le système adjoint

Definition

Le système adjoint en φ est dit observable au temps $T > 0$ ssi il existe $c > 0$ tel que

$$c|\varphi(0)|^2 \leq \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (43)$$

Remarque

Si le système adjoint est observable, alors

$$B^*\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \implies \varphi = 0$$

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi le système adjoint en φ est observable :

Contrôlabilité du système en $X \iff$ Observabilité du système adjoint en φ

Observabilité pour le système adjoint

Definition

Le système adjoint en φ est dit observable au temps $T > 0$ ssi il existe $c > 0$ tel que

$$c|\varphi(0)|^2 \leq \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (43)$$

Remarque

Si le système adjoint est observable, alors

$$B^*\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \implies \varphi = 0$$

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi le système adjoint en φ est observable :

Contrôlabilité du système en $X \iff$ Observabilité du système adjoint en φ

Remarque sur la démonstration de l'équivalence

La propriété d'observabilité entraîne que la fonctionnelle J est **coercive**, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} J(\varphi_T) = +\infty.$$

Comme la fonctionnelle J est **continue**, c'est-à-dire

$$J(\phi_{T,1}) \rightarrow J(\phi_{T,2}) \quad \text{lorsque} \quad \phi_{T,1} \rightarrow \phi_{T,2}$$

et **convexe**, c'est-à-dire

$$J''(\phi_T) \geq 0,$$

il en résulte que J admet au moins un minimum: il existe au moins un $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J'(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque sur la démonstration de l'équivalence

La propriété d'observabilité entraîne que la fonctionnelle J est **coercive**, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} J(\varphi_T) = +\infty.$$

Comme la fonctionnelle J est **continue**, c'est-à-dire

$$J(\phi_{T,1}) \rightarrow J(\phi_{T,2}) \quad \text{lorsque} \quad \phi_{T,1} \rightarrow \phi_{T,2}$$

et **convexe**, c'est-à-dire

$$J''(\phi_T) \geq 0,$$

il en résulte que J admet au moins un minimum: il existe au moins un $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J'(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Condition de contrôlabilité de Kalman

R.E. Kalman, 1930-

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

Remarque

La contrôlabilité dépend de A et de B mais pas de $T > 0$. Le temps de contrôlabilité T peut donc être arbitrairement petit.

Condition de contrôlabilité de Kalman

R.E. Kalman, 1930-

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

Remarque

La contrôlabilité dépend de A et de B mais pas de $T > 0$. Le temps de contrôlabilité T peut donc être arbitrairement petit.

Condition de contrôlabilité de Kalman

R.E. Kalman, 1930-

Theoreme

Le système en X est exactement contrôlable au temps T ssi

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

Remarque

La contrôlabilité depend de A et de B mais pas de $T > 0$. Le temps de contrôlabilité T peut donc etre arbitrairement petit.

Retour sur le système masse-ressort

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{\frac{m}{R}}x'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} & 0 \end{pmatrix};$$

et on a bien que $\text{rang}[B, AB] = 2 = n$ donc le système masse-ressort est contrôlable.

Retour sur le système masse-ressort

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{\frac{m}{R}}x'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} \end{pmatrix};$$

$$\implies AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} & 0 \end{pmatrix};$$

et on a bien que $\text{rang}[B, AB] = 2 = n$ donc le système masse-ressort est contrôlable.

Retour sur le système masse-ressort

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sqrt{\frac{m}{R}}x'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} \end{pmatrix};$$

$$\implies AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \sqrt{\frac{1}{mR}} & 0 \end{pmatrix};$$

et on a bien que $\text{rang}[B, AB] = 2 = n$ donc le système masse-ressort est contrôlable.

Un autre exemple plus trivial

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ce système est-il contrôlable ?

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

et on a $\text{rang}[B, AB] = 1 \neq n$ donc ce système n'est pas contrôlable.

Un autre exemple plus trivial

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ce système est-il contrôlable ?

$$\implies AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

et on a $\text{rang}[B, AB] = 1 \neq n$ donc ce système n'est pas contrôlable.

Un autre exemple plus trivial

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Ce système est-il contrôlable ?

$$\implies AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

et on a $\text{rang}[B, AB] = 1 \neq n$ donc ce système n'est pas contrôlable.

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$n = 2$, $\varphi_T = (\varphi_{1,T}, \varphi_{2,T})^T \in \mathbb{R}^2$.

On minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J(\varphi_T) &= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_2(t)|^2 dt + X_{1,0} \varphi_1(0) + X_{2,0} \varphi_2(0) \end{aligned}$$

où φ est solution de $-\varphi'(t) = A^* \varphi(t)$ soit $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)} \varphi_T$ avec

$$\begin{aligned} A^*(T-t) &= \begin{pmatrix} 0 & -(T-t) \\ (T-t) & 0 \end{pmatrix} \\ \implies e^{A^*(T-t)} &= \begin{pmatrix} \cos(T-t) & -\sin(T-t) \\ \sin(T-t) & \cos(T-t) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$n = 2$, $\varphi_T = (\varphi_{1,T}, \varphi_{2,T})^T \in \mathbb{R}^2$.

On minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J(\varphi_T) &= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_2(t)|^2 dt + X_{1,0} \varphi_1(0) + X_{2,0} \varphi_2(0) \end{aligned}$$

où φ est solution de $-\varphi'(t) = A^* \varphi(t)$ soit $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)} \varphi_T$
avec

$$\begin{aligned} A^*(T-t) &= \begin{pmatrix} 0 & -(T-t) \\ (T-t) & 0 \end{pmatrix} \\ \implies e^{A^*(T-t)} &= \begin{pmatrix} \cos(T-t) & -\sin(T-t) \\ \sin(T-t) & \cos(T-t) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$n = 2$, $\varphi_T = (\varphi_{1,T}, \varphi_{2,T})^T \in \mathbb{R}^2$.

On minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J(\varphi_T) &= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_2(t)|^2 dt + X_{1,0} \varphi_1(0) + X_{2,0} \varphi_2(0) \end{aligned}$$

où φ est solution de $-\varphi'(t) = A^* \varphi(t)$ soit $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)} \varphi_T$
avec

$$A^*(T-t) = \begin{pmatrix} 0 & -(T-t) \\ (T-t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A^*(T-t)} = \begin{pmatrix} \cos(T-t) & -\sin(T-t) \\ \sin(T-t) & \cos(T-t) \end{pmatrix};$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$n = 2$, $\varphi_T = (\varphi_{1,T}, \varphi_{2,T})^T \in \mathbb{R}^2$.

On minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J(\varphi_T) &= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle X_0, \varphi(0) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_2(t)|^2 dt + X_{1,0} \varphi_1(0) + X_{2,0} \varphi_2(0) \end{aligned}$$

où φ est solution de $-\varphi'(t) = A^* \varphi(t)$ soit $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)} \varphi_T$
avec

$$\begin{aligned} A^*(T-t) &= \begin{pmatrix} 0 & -(T-t) \\ (T-t) & 0 \end{pmatrix} \\ \implies e^{A^*(T-t)} &= \begin{pmatrix} \cos(T-t) & -\sin(T-t) \\ \sin(T-t) & \cos(T-t) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

donc

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \sin(T-t)\varphi_1(T) + \cos(T-t)\varphi_2(T), \\ \varphi_1(0) &= \cos(T)\varphi_1(T) - \sin(T)\varphi_2(T), \\ \varphi_2(0) &= \sin(T)\varphi_1(T) + \cos(T)\varphi_2(T)\end{aligned}\tag{44}$$

soit finalement $J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ avec

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T - \cos(T)\sin(T) & \sin^2(T) \\ \sin^2(T) & T + \cos(T)\sin(T) \end{pmatrix}; \tag{45}$$

et

$$N(X_0) = \begin{pmatrix} X_{1,0} \cos(T) + X_{2,0} \sin(T) \\ -X_{1,0} \sin(T) + X_{2,0} \cos(T) \end{pmatrix}; \tag{46}$$

$\implies \det(M) = T^2 + \cos^2(T) - 1 > 0$ pour tout $T > 0$.

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

donc

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \sin(T-t)\varphi_1(T) + \cos(T-t)\varphi_2(T), \\ \varphi_1(0) &= \cos(T)\varphi_1(T) - \sin(T)\varphi_2(T), \\ \varphi_2(0) &= \sin(T)\varphi_1(T) + \cos(T)\varphi_2(T)\end{aligned}\tag{44}$$

soit finalement $J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ avec

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T - \cos(T)\sin(T) & \sin^2(T) \\ \sin^2(T) & T + \cos(T)\sin(T) \end{pmatrix}; \tag{45}$$

et

$$N(X_0) = \begin{pmatrix} X_{1,0} \cos(T) + X_{2,0} \sin(T) \\ -X_{1,0} \sin(T) + X_{2,0} \cos(T) \end{pmatrix}; \tag{46}$$

$\implies \det(M) = T^2 + \cos^2(T) - 1 > 0$ pour tout $T > 0$.

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ atteint son unique minimum en

$$\hat{\varphi}_T = -M^{-1}N(x_0)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,T} \\ \hat{\varphi}_{2,T} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det(M)} \begin{pmatrix} T + \cos(T) \sin(T) & -\sin^2(T) \\ -\sin^2(T) & T - \cos(T) \sin(T) \end{pmatrix} N(X_0) \quad (47)$$

Finalement, un contrôle est donné par $u(t) = B^* \hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ avec $\hat{\varphi}$ solution de $\hat{\varphi}'(t) = A^* \hat{\varphi}(t)$ tel que $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}_T$ soit

$$u(t) = \sin(T-t) \hat{\varphi}_{1,T} + \cos(T-t) \hat{\varphi}_{2,T}$$

Si la vitesse initiale $X_{2,0}$ est nulle, il vient simplement,

$$u(t) = \frac{1}{\det(M)} \left(\sin(T-t) T \cos(T) + \sin(T-t) \sin(T) - \cos(T-t) T \sin(T) \right) X_{1,0}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ atteint son unique minimum en

$$\hat{\varphi}_T = -M^{-1}N(x_0)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,T} \\ \hat{\varphi}_{2,T} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det(M)} \begin{pmatrix} T + \cos(T) \sin(T) & -\sin^2(T) \\ -\sin^2(T) & T - \cos(T) \sin(T) \end{pmatrix} N(X_0) \quad (47)$$

Finalement, un contrôle est donné par $u(t) = B^* \hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ avec $\hat{\varphi}$ solution de $\hat{\varphi}'(t) = A^* \hat{\varphi}(t)$ tel que $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}_T$ soit

$$u(t) = \sin(T-t) \hat{\varphi}_{1,T} + \cos(T-t) \hat{\varphi}_{2,T}$$

Si la vitesse initiale $X_{2,0}$ est nulle, il vient simplement,

$$u(t) = \frac{1}{\det(M)} \left(\sin(T-t) T \cos(T) + \sin(T-t) \sin(T) - \cos(T-t) T \sin(T) \right) X_{1,0}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ atteint son unique minimum en

$$\hat{\varphi}_T = -M^{-1}N(x_0)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,T} \\ \hat{\varphi}_{2,T} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det(M)} \begin{pmatrix} T + \cos(T) \sin(T) & -\sin^2(T) \\ -\sin^2(T) & T - \cos(T) \sin(T) \end{pmatrix} N(X_0) \quad (47)$$

Finalement, un contrôle est donné par $u(t) = B^* \hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ avec $\hat{\varphi}$ solution de $\hat{\varphi}'(t) = A^* \hat{\varphi}(t)$ tel que $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}_T$ soit

$$u(t) = \sin(T-t) \hat{\varphi}_{1,T} + \cos(T-t) \hat{\varphi}_{2,T}$$

Si la vitesse initiale $X_{2,0}$ est nulle, il vient simplement,

$$u(t) = \frac{1}{\det(M)} \left(\sin(T-t) T \cos(T) + \sin(T-t) \sin(T) - \cos(T-t) T \sin(T) \right) X_{1,0}$$

Calcul du contrôle pour le système masse-ressort

$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \langle M\varphi_T, \varphi_T \rangle + \langle N(X_0), \varphi_T \rangle$ atteint son unique minimum en

$$\hat{\varphi}_T = -M^{-1}N(x_0)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,T} \\ \hat{\varphi}_{2,T} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det(M)} \begin{pmatrix} T + \cos(T) \sin(T) & -\sin^2(T) \\ -\sin^2(T) & T - \cos(T) \sin(T) \end{pmatrix} N(X_0) \quad (47)$$

Finalement, un contrôle est donné par $u(t) = B^* \hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ avec $\hat{\varphi}$ solution de $\hat{\varphi}'(t) = A^* \hat{\varphi}(t)$ tel que $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}_T$ soit

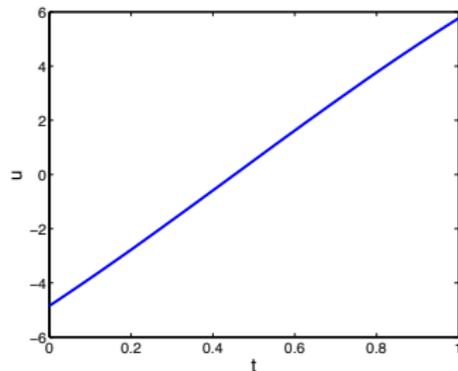
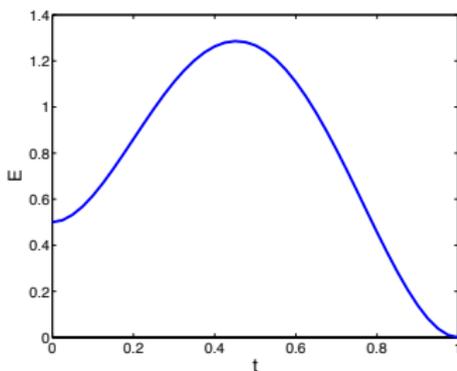
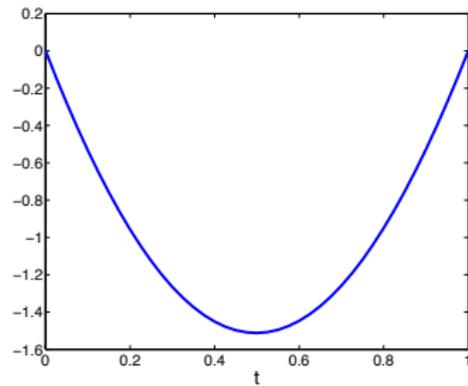
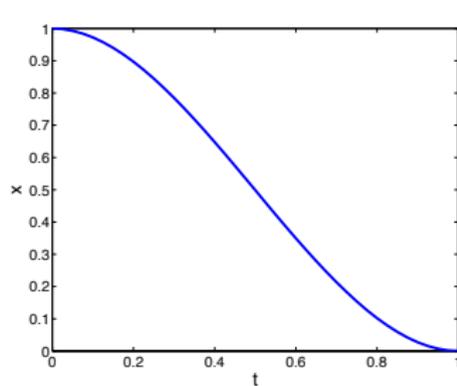
$$u(t) = \sin(T-t) \hat{\varphi}_{1,T} + \cos(T-t) \hat{\varphi}_{2,T}$$

Si la vitesse initiale $X_{2,0}$ est nulle, il vient simplement,

$$u(t) = \frac{1}{\det(M)} \left(\sin(T-t) T \cos(T) + \sin(T-t) \sin(T) - \cos(T-t) T \sin(T) \right) X_{1,0}$$

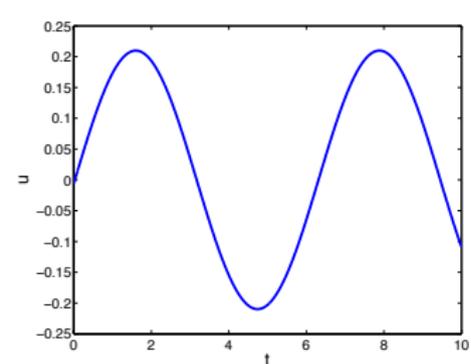
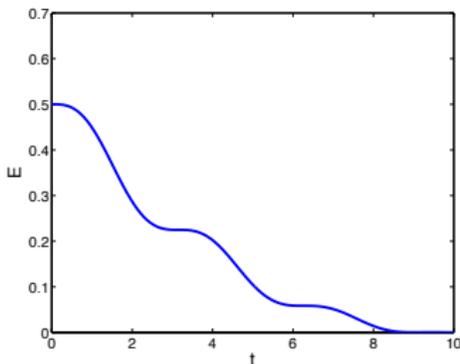
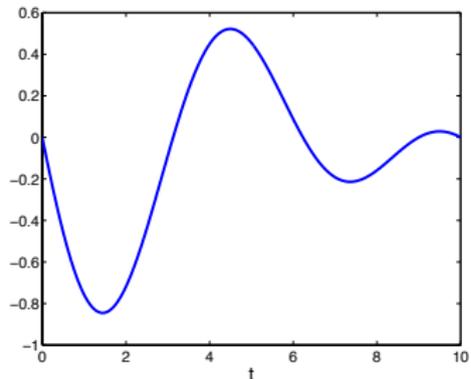
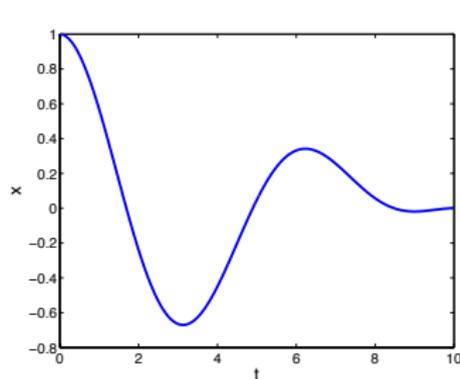
Application numérique du système masse-ressort :

$m = R = T = 1$



Application numérique du système masse-ressort :

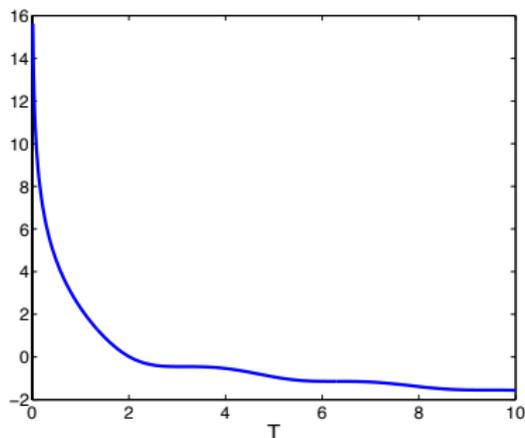
$m = R = 1; T = 10$



Norme $L^2(0, T)$ en fonction de T

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T)}^2 = \int_0^T u^2(t) dt = \frac{2(T + \cos(T) \sin(T))}{T^2 - 1 + \cos^2(T)}$$

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T)}^2 \approx e^{1/T} \quad (T \ll 1); \quad \|u(t)\|_{L^2(0,T)}^2 \approx \frac{1}{T} \quad (T \gg 1)$$



$\log(\|u(t)\|_{L^2(0,T)}^2)$ v.s. $T > 0$

\implies Plus le temps de contrôlabilité $T > 0$ est petit, plus le coût du contrôle est important.

Propriété du contrôle $B^* \hat{\varphi}$

Theoreme

Le contrôle $u = B^* \hat{\varphi}$ obtenu en minimisant la fonction J est **le contrôle de norme $L^2(0, T)$ minimale** parmi tous les contrôles possibles pour X : si u_2 est un autre contrôle pour X , on a

$$\int_0^T |B^* \hat{\varphi}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_2(t)|^2 dt$$

Démonstration: u et u_2 sont des contrôles donc ils vérifient tous les deux la caractérisation des contrôles:

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

et

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u_2, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

Propriété du contrôle $B^* \hat{\varphi}$

Theoreme

Le contrôle $u = B^* \hat{\varphi}$ obtenu en minimisant la fonction J est **le contrôle de norme $L^2(0, T)$ minimale** parmi tous les contrôles possibles pour X : si u_2 est un autre contrôle pour X , on a

$$\int_0^T |B^* \hat{\varphi}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_2(t)|^2 dt$$

Démonstration: u et u_2 sont des contrôles donc ils vérifient tous les deux la caractérisation des contrôles:

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

et

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u_2, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

Propriété du contrôle $B^* \hat{\varphi}$

Theoreme

Le contrôle $u = B^* \hat{\varphi}$ obtenu en minimisant la fonction J est **le contrôle de norme $L^2(0, T)$ minimale** parmi tous les contrôles possibles pour X : si u_2 est un autre contrôle pour X , on a

$$\int_0^T |B^* \hat{\varphi}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_2(t)|^2 dt$$

Démonstration: u et u_2 sont des contrôles donc ils vérifient tous les deux la caractérisation des contrôles:

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

et

$$\langle X(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u_2, B^* \varphi \rangle dt = 0 \quad \forall \varphi$$

Propriété du contrôle $B^* \hat{\varphi}$

donc en particulier avec $\varphi = \hat{\varphi}$

$$\langle X(0), \hat{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle B^* \hat{\varphi}, B^* \hat{\varphi} \rangle dt = 0$$

et

$$\langle X(0), \hat{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle u_2, B^* \hat{\varphi} \rangle dt = 0$$

donc

$$\|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)}^2 = \int_0^T \langle u_2(t), B^* \hat{\varphi}(t) \rangle dt \leq \|u_2\|_{L^2(0,T)} \|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)}$$

donc $\|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)} \leq \|u_2\|_{L^2(0,T)}$.

Propriété du contrôle $B^* \hat{\varphi}$

donc en particulier avec $\varphi = \hat{\varphi}$

$$\langle X(0), \hat{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle B^* \hat{\varphi}, B^* \hat{\varphi} \rangle dt = 0$$

et

$$\langle X(0), \hat{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle u_2, B^* \hat{\varphi} \rangle dt = 0$$

donc

$$\|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)}^2 = \int_0^T \langle u_2(t), B^* \hat{\varphi}(t) \rangle dt \leq \|u_2\|_{L^2(0,T)} \|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)}$$

donc $\|B^* \hat{\varphi}\|_{L^2(0,T)} \leq \|u_2\|_{L^2(0,T)}$.

Exercice : le double ressort

Le système suivant du double ressort est-il contrôlable ?

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(x_1 - x_2) + u, \\ m_2 x_2'' = k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \end{cases} \quad (48)$$

Le système suivant du double ressort amorti est-il contrôlable ?

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - d_1(x_1' - x_2') + u, \\ m_2 x_2'' = k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 + d_1(x_1' - x_2') - d_2 x_2' \end{cases} \quad (49)$$

Exercice : le double ressort

Le système suivant du double ressort est-il contrôlable ?

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(x_1 - x_2) + u, \\ m_2 x_2'' = k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \end{cases} \quad (48)$$

Le système suivant du double ressort amorti est-il contrôlable ?

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - d_1(x_1' - x_2') + u, \\ m_2 x_2'' = k_1(x_1 - x_2) - k_2 x_2 + d_1(x_1' - x_2') - d_2 x_2' \end{cases} \quad (49)$$

Stabilisation exponentielle

Theoreme

Si la paire $[A, B]$ satisfait la condition de Kalman et si $A^* = -A$, alors la solution X du système

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) - BB^*X(t), & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (50)$$

décroit exponentiellement: $\exists C > 0, \exists \alpha > 0$ tels que

$$\|X(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ce^{-\alpha t} \|X(0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t > 0$$

Contrôle bang-bang

On prend $m = 1$ donc un seul contrôle pour n états. On considère la fonctionnelle

$$J_{bb}(\varphi_T) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |B^* \varphi(t)| dt \right)^2 + \langle X(0), \varphi(0) \rangle, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (51)$$

avec, comme précédemment, φ solution du problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^* \varphi(t), & t \in (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (52)$$

En écrivant que $\hat{\varphi}_T$ minimise J_{bb} , soit $DJ_{bb}(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = 0$ pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, on obtient l'équation

$$\int_0^T \left(\int_0^T |B^*(s)\hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^*\hat{\varphi}(t)) \right) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0$$

Contrôle bang-bang

On prend $m = 1$ donc un seul contrôle pour n états. On considère la fonctionnelle

$$J_{bb}(\varphi_T) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |B^* \varphi(t)| dt \right)^2 + \langle X(0), \varphi(0) \rangle, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (51)$$

avec, comme précédemment, φ solution du problème adjoint:

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^* \varphi(t), & t \in (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (52)$$

En écrivant que $\hat{\varphi}_T$ minimise J_{bb} , soit $DJ_{bb}(\hat{\varphi}_T) \cdot \varphi_T = 0$ pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, on obtient l'équation

$$\int_0^T \left(\int_0^T |B^*(s) \hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t)) \right) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0$$

Contrôle bang-bang

soit la caractérisation des contrôles

$$\int_0^T v(t) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$v(t) = \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t))$$

avec

$$\operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0, \\ \in [-1, 1] & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) = 0, \\ +1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0 \end{cases} \quad (53)$$

Lemme

L'ensemble $\{t \in [0, T], B^ \hat{\varphi}(t) = 0\}$ est de mesure nulle.*

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0, \\ - \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \quad (54)$$

C'est un **contrôle bang-bang** ! v est constant par morceaux au cours du temps et ne prend que deux valeurs.

Contrôle bang-bang

soit la caractérisation des contrôles

$$\int_0^T v(t) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$v(t) = \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t))$$

avec

$$\operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0, \\ \in [-1, 1] & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) = 0, \\ +1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0 \end{cases} \quad (53)$$

Lemme

L'ensemble $\{t \in [0, T], B^* \hat{\varphi}(t) = 0\}$ est de mesure nulle.

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0, \\ - \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \quad (54)$$

C'est un **contrôle bang-bang** ! v est constant par morceaux au cours du temps et ne prend que deux valeurs.

Contrôle bang-bang

soit la caractérisation des contrôles

$$\int_0^T v(t) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$v(t) = \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t))$$

avec

$$\operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0, \\ \in [-1, 1] & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) = 0, \\ +1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0 \end{cases} \quad (53)$$

Lemme

L'ensemble $\{t \in [0, T], B^* \hat{\varphi}(t) = 0\}$ est de mesure nulle.

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0, \\ - \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \quad (54)$$

C'est un **contrôle bang-bang** ! v est constant par morceaux au cours du temps et ne prend que deux valeurs.

Contrôle bang-bang

soit la caractérisation des contrôles

$$\int_0^T v(t) B^* \varphi(t) dt + \langle X(0), \varphi(0) \rangle = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$v(t) = \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds \operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t))$$

avec

$$\operatorname{sign}(B^* \hat{\varphi}(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0, \\ \in [-1, 1] & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) = 0, \\ +1 & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0 \end{cases} \quad (53)$$

Lemme

L'ensemble $\{t \in [0, T], B^* \hat{\varphi}(t) = 0\}$ est de mesure nulle.

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) > 0, \\ - \int_0^T |B^* \hat{\varphi}(s)| ds & \text{si } B^* \hat{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \quad (54)$$

C'est un **contrôle bang-bang** ! v est constant par morceaux au cours du temps et ne prend que deux valeurs.

Propriété du contrôle bang-bang

Theoreme

Le contrôle $u = \pm \int_0^T |B^* \hat{\varphi}| dt$ obtenu en minimisant la fonction J_{bb} est **le contrôle de norme $L^\infty(0, T)$ minimale** parmi tous les contrôles possibles pour X : si u_2 est un autre contrôle pour X , on a

$$\|u\|_{L^\infty(0, T)} \leq \|u_2\|_{L^\infty(0, T)}$$

c'est à dire $\sup_{t \in [0, T]} |u(t)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |u_2(t)|$. \square

La démonstration est identique à celle du cas L^2 .

Cas du système masse-ressort

$$n = 2, m = 1$$

$$J_{bb}(\varphi_T) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |\varphi_2(t)| dt \right)^2 + \langle X(0), \varphi(0) \rangle$$

avec $\varphi_2(t) = \sin(T-t)\varphi_1(T) + \cos(T-t)\varphi_2(T)$.

Le calcul explicite (à la main) est plus compliqué ici !

Construisons une suite minimisante pour la fonctionnelle J_{bb} :

on part de l'initialisation $\hat{\varphi}_T^0 \in \mathbb{R}^n$ et on construit une suite

$\hat{\varphi}_T^k \in \mathbb{R}^n$ telle que $J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) \leq J_{bb}(\varphi_T^k)$.

Partant de φ_T^k , on suppose que $\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T$, avec $\eta > 0$, et on cherche $\bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) = J_{bb}(\varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T) \leq J_{bb}(\varphi_T^k), \quad \forall k > 0$$

Cas du système masse-ressort

$$n = 2, m = 1$$

$$J_{bb}(\varphi_T) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |\varphi_2(t)| dt \right)^2 + \langle X(0), \varphi(0) \rangle$$

avec $\varphi_2(t) = \sin(T-t)\varphi_1(T) + \cos(T-t)\varphi_2(T)$.

Le calcul explicite (à la main) est plus compliqué ici !

Construisons une suite minimisante pour la fonctionnelle J_{bb} :

on part de l'initialisation $\hat{\varphi}_T^0 \in \mathbb{R}^n$ et on construit une suite

$\hat{\varphi}_T^k \in \mathbb{R}^n$ telle que $J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) \leq J_{bb}(\varphi_T^k)$.

Partant de φ_T^k , on suppose que $\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T$, avec $\eta > 0$,
et on cherche $\bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) = J_{bb}(\varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T) \leq J_{bb}(\varphi_T^k), \quad \forall k > 0$$

Cas du système masse-ressort

$$n = 2, m = 1$$

$$J_{bb}(\varphi_T) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |\varphi_2(t)| dt \right)^2 + \langle X(0), \varphi(0) \rangle$$

avec $\varphi_2(t) = \sin(T-t)\varphi_1(T) + \cos(T-t)\varphi_2(T)$.

Le calcul explicite (à la main) est plus compliqué ici !

Construisons **une suite minimisante pour la fonctionnelle J_{bb}** :

on part de l'initialisation $\hat{\varphi}_T^0 \in \mathbb{R}^n$ et on construit une suite

$\hat{\varphi}_T^k \in \mathbb{R}^n$ telle que $J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) \leq J_{bb}(\varphi_T^k)$.

Partant de φ_T^k , on suppose que $\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T$, avec $\eta > 0$,
et on cherche $\bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) = J_{bb}(\varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T) \leq J_{bb}(\varphi_T^k), \quad \forall k > 0$$

Contrôle bang-bang

On a, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$J_{bb}(\varphi_T^{k+1}) = J_{bb}(\varphi_T^k + \eta \bar{\varphi}_T) = J_{bb}(\varphi_T^k) + \eta DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T + O(\eta^2)$$

avec

$$\begin{cases} DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle, \\ v_k(t) = \text{signe}(B^* \varphi^k(t)) \int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \end{cases}$$

Question

$\bar{\varphi}_T$ tel que $DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T \leq 0$???

Cas du système masse-ressort

Theoreme

On a

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle, \quad \forall \bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$$

avec $\lambda^k \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ solution de

$$\begin{cases} (\lambda^k)'(t) + A\lambda^k(t) = Bv^k(t), & t \in [0, T], \\ \lambda^k(0) = X(0) \end{cases} \quad (55)$$

Conclusion: Pour garantir $DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T \leq 0$, il suffit de prendre $\bar{\varphi}_T = -\lambda^k(T)$!

Remarque

A l'optimalité, $\lambda = X$, la solution contrôlée recherchée !

Cas du système masse-ressort

Theoreme

On a

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle, \quad \forall \bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$$

avec $\lambda^k \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ solution de

$$\begin{cases} (\lambda^k)'(t) + A\lambda^k(t) = Bv^k(t), & t \in [0, T], \\ \lambda^k(0) = X(0) \end{cases} \quad (55)$$

Conclusion: Pour garantir $DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T \leq 0$, il suffit de prendre $\bar{\varphi}_T = -\lambda^k(T)$!

Remarque

A l'optimalité, $\lambda = X$, la solution contrôlée recherchée !

Cas du système masse-ressort

Theoreme

On a

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle, \quad \forall \bar{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$$

avec $\lambda^k \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ solution de

$$\begin{cases} (\lambda^k)'(t) + A\lambda^k(t) = Bv^k(t), & t \in [0, T], \\ \lambda^k(0) = X(0) \end{cases} \quad (55)$$

Conclusion: Pour garantir $DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T \leq 0$, il suffit de prendre $\bar{\varphi}_T = -\lambda^k(T)$!

Remarque

A l'optimalité, $\lambda = X$, la solution contrôlée recherchée !

Preuve du théorème

On multiplie l'équation principale en λ par $\bar{\varphi}$ soit

$$\langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle + \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle = \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle$$

puis on intègre sur $[0, T]$, soit

$$\int_0^T \langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle dt + \int_0^T \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, -\bar{\varphi}' \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \lambda^k(0), \bar{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle \lambda^k, A^* \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, \underbrace{-\bar{\varphi}' - A^* \bar{\varphi}}_{=0} \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \underbrace{\lambda^k(0), \bar{\varphi}(0)}_{=X(0)} \rangle = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

de sorte que

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle$$

Preuve du théorème

On multiplie l'équation principale en λ par $\bar{\varphi}$ soit

$$\langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle + \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle = \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle$$

puis on intègre sur $[0, T]$, soit

$$\int_0^T \langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle dt + \int_0^T \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, -\bar{\varphi}' \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \lambda^k(0), \bar{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle \lambda^k, A^* \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, \underbrace{-\bar{\varphi}' - A^* \bar{\varphi}}_{=0} \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \underbrace{\lambda^k(0), \bar{\varphi}(0)}_{=X(0)} \rangle = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

de sorte que

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle$$

Preuve du théorème

On multiplie l'équation principale en λ par $\bar{\varphi}$ soit

$$\langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle + \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle = \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle$$

puis on intègre sur $[0, T]$, soit

$$\int_0^T \langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle dt + \int_0^T \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, -\bar{\varphi}' \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \lambda^k(0), \bar{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle \lambda^k, A^* \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, \underbrace{-\bar{\varphi}' - A^* \bar{\varphi}}_{=0} \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \underbrace{\lambda^k(0), \bar{\varphi}(0)}_{=X(0)} \rangle = \int_0^T \langle v^k, B^* \bar{\varphi} \rangle dt$$

de sorte que

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle$$

Preuve du théorème

On multiplie l'équation principale en λ par $\bar{\varphi}$ soit

$$\langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle + \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle = \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle$$

puis on intègre sur $[0, T]$, soit

$$\int_0^T \langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle dt + \int_0^T \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, -\bar{\varphi}' \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \lambda^k(0), \bar{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle \lambda^k, A^*\bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle v^k, B^*\bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, \underbrace{-\bar{\varphi}' - A^*\bar{\varphi}}_{=0} \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \underbrace{\lambda^k(0), \bar{\varphi}(0)}_{=X(0)} \rangle = \int_0^T \langle v^k, B^*\bar{\varphi} \rangle dt$$

de sorte que

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle$$

Preuve du théorème

On multiplie l'équation principale en λ par $\bar{\varphi}$ soit

$$\langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle + \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle = \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle$$

puis on intègre sur $[0, T]$, soit

$$\int_0^T \langle (\lambda^k)'(t), \bar{\varphi} \rangle dt + \int_0^T \langle A\lambda^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle Bv^k(t), \bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, -\bar{\varphi}' \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \lambda^k(0), \bar{\varphi}(0) \rangle + \int_0^T \langle \lambda^k, A^*\bar{\varphi} \rangle dt = \int_0^T \langle v^k, B^*\bar{\varphi} \rangle dt$$

soit

$$\int_0^T \langle \lambda^k, \underbrace{-\bar{\varphi}' - A^*\bar{\varphi}}_{=0} \rangle dt + \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle - \langle \underbrace{\lambda^k(0), \bar{\varphi}(0)}_{=X(0)} \rangle = \int_0^T \langle v^k, B^*\bar{\varphi} \rangle dt$$

de sorte que

$$DJ_{bb}(\varphi_T^k) \cdot \bar{\varphi}_T = \int_0^T v_k(t) B^* \bar{\varphi}(t) dt + \langle X(0), \bar{\varphi}(0) \rangle = \langle \lambda^k(T), \bar{\varphi}_T \rangle$$

Algorithme itératif de descente

Entrée: $T > 0$, $X(0) \in \mathbb{R}^n$, φ_T^0 , $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

1. Calcul de φ^k solution de

$$-(\varphi^k)'(t) = A^* \varphi^k, \quad \varphi^k(T) = \varphi_T^k;$$

2. Calcul de

$$v^k(t) = \left(\int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \right) \text{signe}(B^* \varphi^k(t));$$

3. Calcul de λ^k solution de

$$(\lambda^k)'(t) = A \lambda^k(t) + B v^k(t), \quad \lambda^k(0) = X(0);$$

4. Mise à jour de φ_T^k :

$$\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \lambda^k(T)$$

5. Si $\|\lambda^k(T)\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$, retour au 1. Sinon, stop.

Sortie: Solution contrôlée λ^k par le contrôle v^k .

Algorithme itératif de descente

Entrée: $T > 0$, $X(0) \in \mathbb{R}^n$, φ_T^0 , $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

1. Calcul de φ^k solution de

$$-(\varphi^k)'(t) = A^* \varphi^k, \quad \varphi^k(T) = \varphi_T^k;$$

2. Calcul de

$$v^k(t) = \left(\int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \right) \text{signe}(B^* \varphi^k(t));$$

3. Calcul de λ^k solution de

$$(\lambda^k)'(t) = A \lambda^k(t) + B v^k(t), \quad \lambda^k(0) = X(0);$$

4. Mise à jour de φ_T^k :

$$\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \lambda^k(T)$$

5. Si $\|\lambda^k(T)\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$, retour au 1. Sinon, stop.

Sortie: Solution contrôlée λ^k par le contrôle v^k .

Algorithme itératif de descente

Entrée: $T > 0$, $X(0) \in \mathbb{R}^n$, φ_T^0 , $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

1. Calcul de φ^k solution de

$$-(\varphi^k)'(t) = A^* \varphi^k, \quad \varphi^k(T) = \varphi_T^k;$$

2. Calcul de

$$v^k(t) = \left(\int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \right) \text{signe}(B^* \varphi^k(t));$$

3. Calcul de λ^k solution de

$$(\lambda^k)'(t) = A \lambda^k(t) + B v^k(t), \quad \lambda^k(0) = X(0);$$

4. Mise à jour de φ_T^k :

$$\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \lambda^k(T)$$

5. Si $\|\lambda^k(T)\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$, retour au 1. Sinon, stop.

Sortie: Solution contrôlée λ^k par le contrôle v^k .

Algorithme itératif de descente

Entrée: $T > 0$, $X(0) \in \mathbb{R}^n$, φ_T^0 , $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

1. Calcul de φ^k solution de

$$-(\varphi^k)'(t) = A^* \varphi^k, \quad \varphi^k(T) = \varphi_T^k;$$

2. Calcul de

$$v^k(t) = \left(\int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \right) \text{signe}(B^* \varphi^k(t));$$

3. Calcul de λ^k solution de

$$(\lambda^k)'(t) = A \lambda^k(t) + B v^k(t), \quad \lambda^k(0) = X(0);$$

4. Mise à jour de φ_T^k :

$$\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \lambda^k(T)$$

5. Si $\|\lambda^k(T)\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$, retour au 1. Sinon, stop.

Sortie: Solution contrôlée λ^k par le contrôle v^k .

Algorithme itératif de descente

Entrée: $T > 0$, $X(0) \in \mathbb{R}^n$, φ_T^0 , $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

1. Calcul de φ^k solution de

$$-(\varphi^k)'(t) = A^* \varphi^k, \quad \varphi^k(T) = \varphi_T^k;$$

2. Calcul de

$$v^k(t) = \left(\int_0^T |B^* \varphi^k(t)| dt \right) \text{signe}(B^* \varphi^k(t));$$

3. Calcul de λ^k solution de

$$(\lambda^k)'(t) = A \lambda^k(t) + B v^k(t), \quad \lambda^k(0) = X(0);$$

4. Mise à jour de φ_T^k :

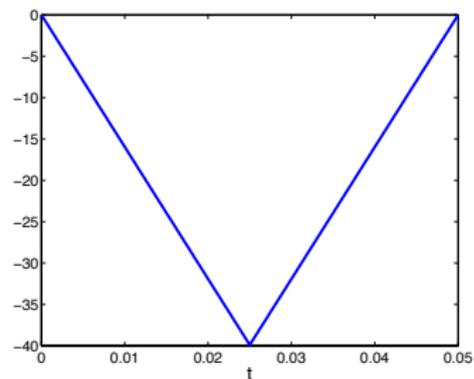
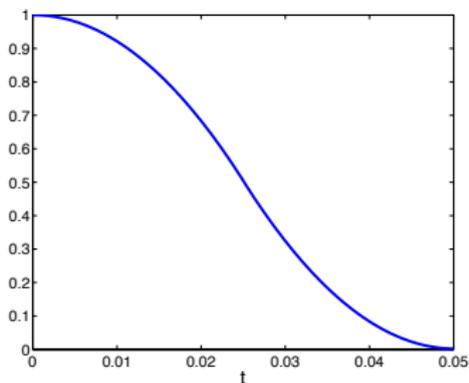
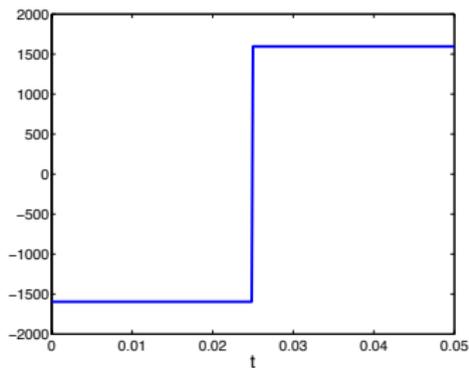
$$\varphi_T^{k+1} = \varphi_T^k + \eta \lambda^k(T)$$

5. Si $\|\lambda^k(T)\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$, retour au 1. Sinon, stop.

Sortie: Solution contrôlée λ^k par le contrôle v^k .

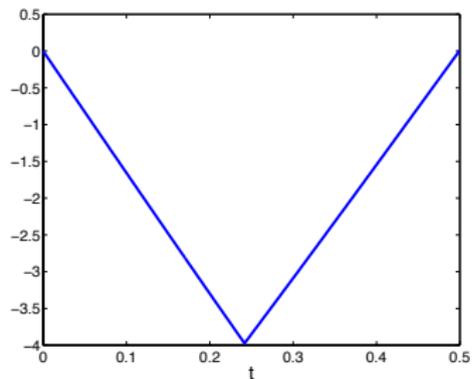
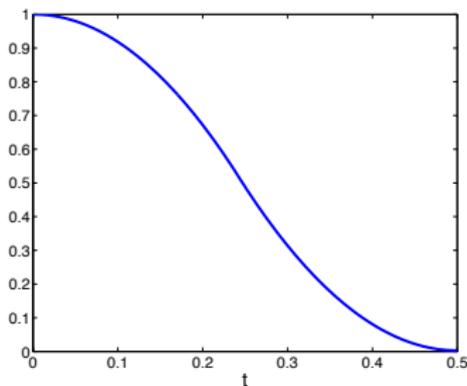
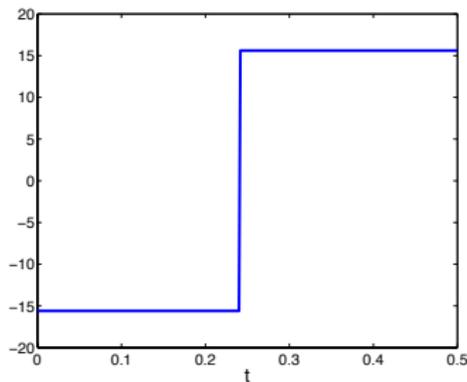
Application numérique sur le système masse-ressort :

$T = 0.05$

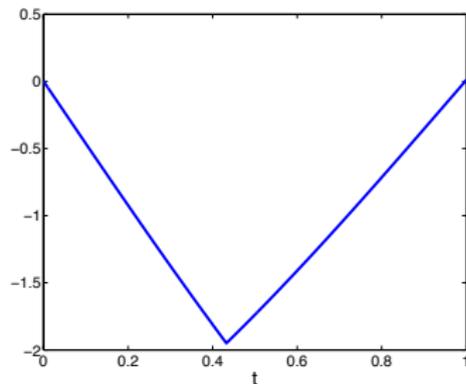
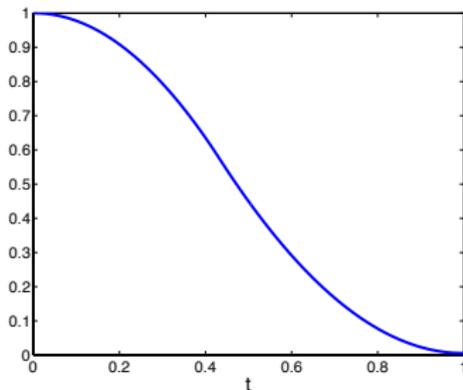
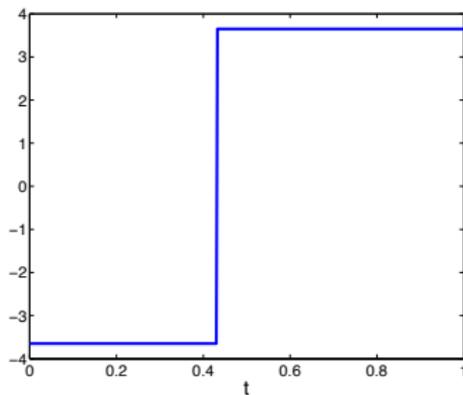


Application numérique sur le système masse-ressort :

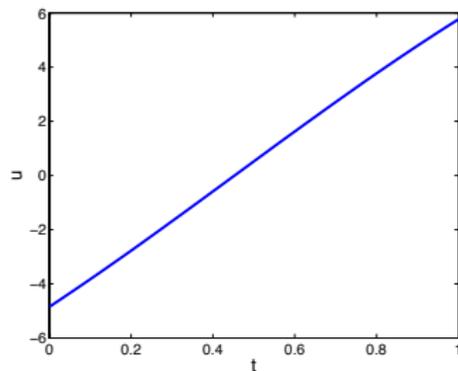
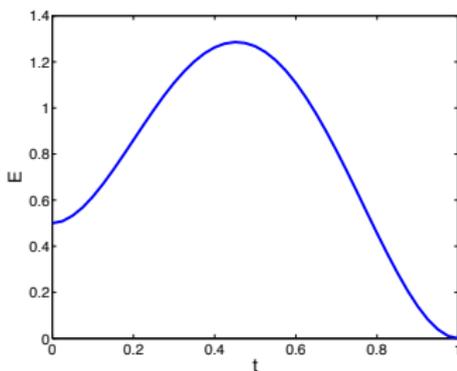
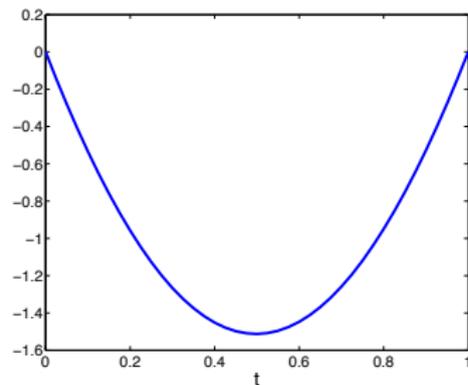
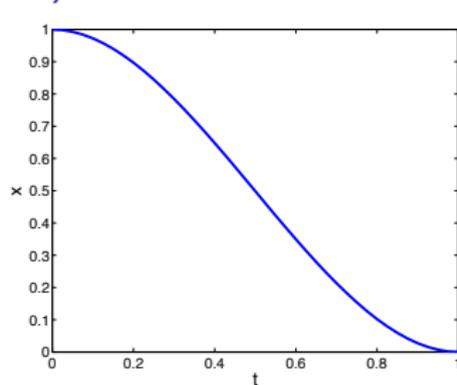
$T = 0.5$



Application numérique sur le système masse-ressort : $T = 1$.

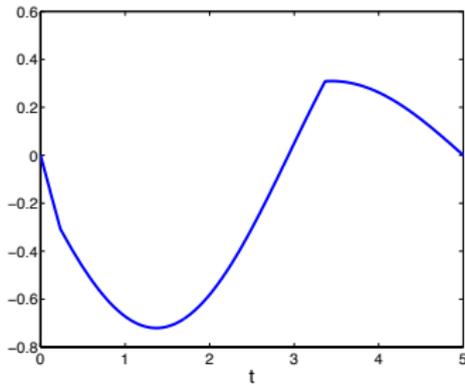
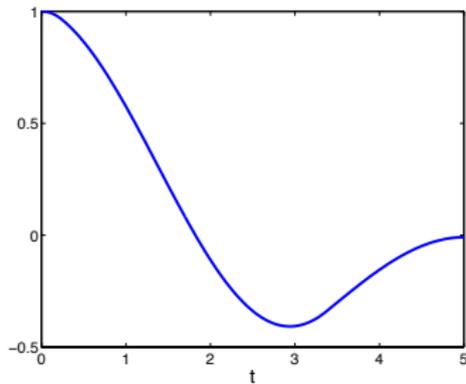
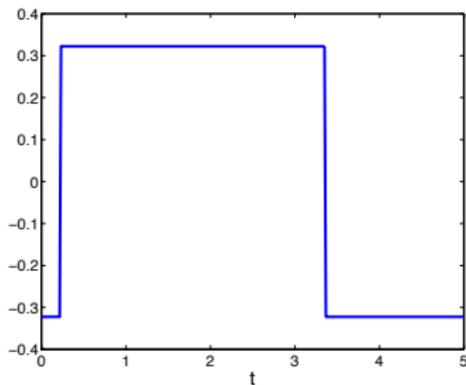


Application numérique du système masse-ressort : $m = R = T = 1$ (comparaison avec le contrôle L^2 minimale)



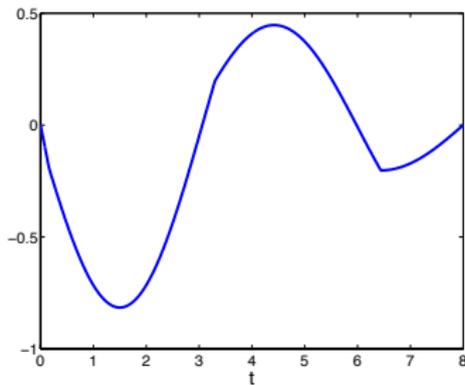
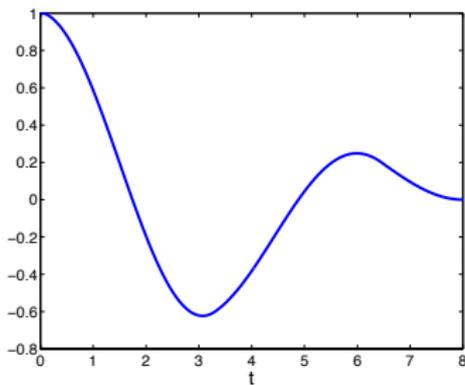
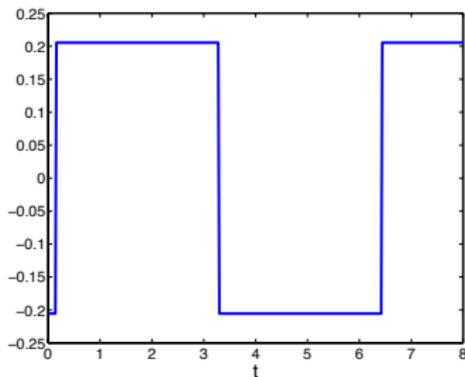
Application numérique sur le système masse-ressort :

$T = 5$



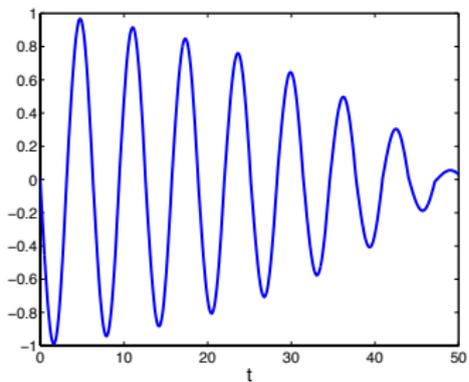
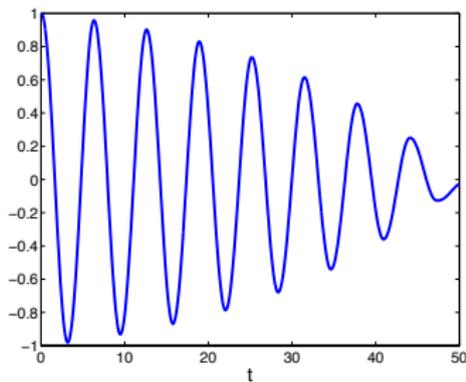
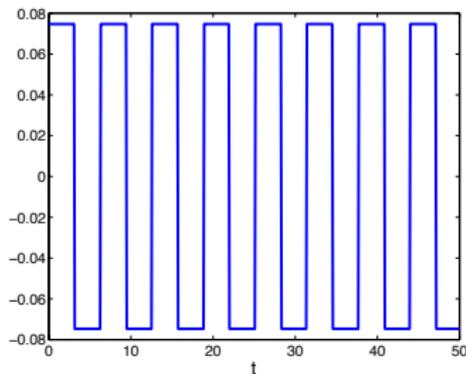
Application numérique sur le système masse-ressort :

$T = 8$



Application numérique sur le système masse-ressort :

$T = 50$



Minimisation directe par rapport à la variable contrôle

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad (56)$$

sous les contraintes

- ▶ X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (57)$$

- ▶ $X_u(T) = 0$.

⇒ La solution est un contrôle bang-bang.

Pour relaxer la contrainte égalité $X_u(T) = 0$, on peut introduire le problème pénalisé:
 $\forall \epsilon > 0$,

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J_\epsilon(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} + \epsilon^{-1} \|X_u(T) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (58)$$

sous la contrainte (60) en espérant que $u_\epsilon \rightarrow u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$

Minimisation directe par rapport à la variable contrôle

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad (56)$$

sous les contraintes

- ▶ X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (57)$$

- ▶ $X_u(T) = 0$.

⇒ La solution est un contrôle bang-bang.

Pour relaxer la contrainte égalité $X_u(T) = 0$, on peut introduire le problème pénalisé:
 $\forall \epsilon > 0$,

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J_\epsilon(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} + \epsilon^{-1} \|X_u(T) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (58)$$

sous la contrainte (60) en espérant que $u_\epsilon \rightarrow u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$

Minimisation directe par rapport à la variable contrôle

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad (56)$$

sous les contraintes

- ▶ X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (57)$$

- ▶ $X_u(T) = 0$.

⇒ La solution est un contrôle bang-bang.

Pour relaxer la contrainte égalité $X_u(T) = 0$, on peut introduire le problème pénalisé:
 $\forall \epsilon > 0$,

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J_\epsilon(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} + \epsilon^{-1} \|X_u(T) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (58)$$

sous la contrainte (60) en espérant que $u_\epsilon \rightarrow u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$

Minimisation directe par rapport à la variable contrôle

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} \quad (56)$$

sous les contraintes

► X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (57)$$

► $X_u(T) = 0$.

⇒ La solution est un contrôle bang-bang.

Pour relaxer la contrainte égalité $X_u(T) = 0$, on peut introduire le problème pénalisé:

$\forall \epsilon > 0$,

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J_\epsilon(u) = \|u\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} + \epsilon^{-1} \|X_u(T) - 0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (58)$$

sous la contrainte (60) en espérant que $u_\epsilon \rightarrow u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$

Probleme duale: temps d'atteinte minimale

Soit $K > 0$. On considère le problème du temps d'atteinte minimale :

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = T = \int_0^T 1 dt \quad (59)$$

sous les contraintes

▶ X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (60)$$

▶ $X_u(T) = 0$.

▶ $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$

⇒ La solution est un contrôle bang-bang !

Probleme duale: temps d'atteinte minimale

Soit $K > 0$. On considère le problème du temps d'atteinte minimale :

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = T = \int_0^T 1 \, dt \quad (59)$$

sous les contraintes

► X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (60)$$

► $X_u(T) = 0$.

► $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$

⇒ La solution est un contrôle bang-bang !

Probleme duale: temps d'atteinte minimale

Soit $K > 0$. On considère le problème du temps d'atteinte minimale :

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = T = \int_0^T 1 \, dt \quad (59)$$

sous les contraintes

► X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (60)$$

► $X_u(T) = 0$.

► $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$

⇒ La solution est un contrôle bang-bang !

Probleme duale: temps d'atteinte minimale

Soit $K > 0$. On considère le problème du temps d'atteinte minimale :

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = T = \int_0^T 1 \, dt \quad (59)$$

sous les contraintes

► X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (60)$$

► $X_u(T) = 0$.

► $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$

⇒ La solution est un contrôle bang-bang !

Probleme duale: temps d'atteinte minimale

Soit $K > 0$. On considère le problème du temps d'atteinte minimale :

$$\min_{u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)} J(u) = T = \int_0^T 1 dt \quad (59)$$

sous les contraintes

► X_u est solution de

$$\begin{cases} X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ X_u(0) = X_0 \end{cases} \quad (60)$$

► $X_u(T) = 0$.

► $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$

⇒ La solution est un contrôle bang-bang !

Partie III - Contrôle en temps minimum de systèmes différentielles linéaires

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec la contrainte $|u(t)| \leq K$ pour tout $t \in [0, T]$ tel que $X(T) = 0$.

Temps d'atteinte minimal - Définition

On considère le problème

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec $u \in \Omega$ un compact de \mathbb{R}^n qui contient 0.

On cherche à atteindre la cible 0 en un temps minimal.

Definition

$$t^* = \inf\{t > 0, X_u(t) = 0\}.$$

On note u^* , s'il existe, un tel contrôle dans Ω . Alors

$$0 = e^{At^*} X(0) + \int_0^{t^*} e^{A(t^*-s)} Bu^*(s) ds$$

Temps d'atteinte minimal - Définition

On considère le problème

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec $u \in \Omega$ un compact de \mathbb{R}^n qui contient 0.

On cherche à atteindre la cible 0 en un temps minimal.

Definition

$t^* = \inf\{t > 0, X_u(t) = 0\}$.

On note u^* , s'il existe, un tel contrôle dans Ω . Alors

$$0 = e^{At^*} X(0) + \int_0^{t^*} e^{A(t^*-s)} Bu^*(s) ds$$

Temps d'atteinte minimal - Définition

On considère le problème

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec $u \in \Omega$ un compact de \mathbb{R}^n qui contient 0.

On cherche à atteindre la cible 0 en un temps minimal.

Definition

$t^* = \inf\{t > 0, X_u(t) = 0\}$.

On note u^* , s'il existe, un tel contrôle dans Ω . Alors

$$0 = e^{At^*} X(0) + \int_0^{t^*} e^{A(t^*-s)} Bu^*(s) ds$$

Temps d'atteinte minimal - Définition

On considère le problème

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu(t), & t > 0, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec $u \in \Omega$ un compact de \mathbb{R}^n qui contient 0.

On cherche à atteindre la cible 0 en un temps minimal.

Definition

$$t^* = \inf\{t > 0, X_u(t) = 0\}.$$

On note u^* , s'il existe, un tel contrôle dans Ω . Alors

$$0 = e^{At^*} X(0) + \int_0^{t^*} e^{A(t^*-s)} Bu^*(s) ds$$

Temps d'atteinte minimal - Théorème d'existence

On note l'ensemble de tous les états atteignables par $u \in \Omega$ au temps t :

$$\mathcal{A}(X_0, t) = \{X_u(t), u \in \Omega, X_u(0) = X_0\}.$$

Théorème

Supposons que l'état (final) nul est atteignable: $\exists \tau > 0$ tel que $0 \in \mathcal{A}(X_0, \tau)$. Alors, il existe un contrôle optimal qui permet de l'atteindre en temps minimal.

Cela résulte de la compacité de Ω et de la convexité de $\mathcal{A}(X_0, t)$.

L'unicité est fautive en générale: il peut y avoir plusieurs contrôles pour le même temps minimal.

Temps d'atteinte minimal - Théorème d'existence

On note l'ensemble de tous les états atteignables par $u \in \Omega$ au temps t :

$$\mathcal{A}(X_0, t) = \{X_u(t), u \in \Omega, X_u(0) = X_0\}.$$

Theoreme

Supposons que l'état (final) nul est atteignable: $\exists \tau > 0$ tel que $0 \in \mathcal{A}(X_0, \tau)$. Alors, il existe un contrôle optimal qui permet de l'atteindre en temps minimal.

Cela résulte de la compacité de Ω et de la convexité de $\mathcal{A}(X_0, t)$.

L'unicité est fautive en générale: il peut y avoir plusieurs contrôles pour le même temps minimal.

Temps d'atteinte minimal - Théorème d'existence

On note l'ensemble de tous les états atteignables par $u \in \Omega$ au temps t :

$$\mathcal{A}(X_0, t) = \{X_u(t), u \in \Omega, X_u(0) = X_0\}.$$

Theoreme

Supposons que l'état (final) nul est atteignable: $\exists \tau > 0$ tel que $0 \in \mathcal{A}(X_0, \tau)$. Alors, il existe un contrôle optimal qui permet de l'atteindre en temps minimal.

Cela résulte de la compacité de Ω et de la convexité de $\mathcal{A}(X_0, t)$.

L'unicité est fautive en générale: il peut y avoir plusieurs contrôles pour le même temps minimal.

Temps d'atteinte minimal - Théorème d'existence

On note l'ensemble de tous les états atteignables par $u \in \Omega$ au temps t :

$$\mathcal{A}(X_0, t) = \{X_u(t), u \in \Omega, X_u(0) = X_0\}.$$

Theoreme

Supposons que l'état (final) nul est atteignable: $\exists \tau > 0$ tel que $0 \in \mathcal{A}(X_0, \tau)$. Alors, il existe un contrôle optimal qui permet de l'atteindre en temps minimal.

Cela résulte de la compacité de Ω et de la convexité de $\mathcal{A}(X_0, t)$.

L'unicité est fautive en générale: il peut y avoir plusieurs contrôles pour le même temps minimal.

Condition nécessaire d'optimalité: principe de Pontryagin

Theoreme (Principe de Pontryagin - Cas linéaire en temps minimum)

Soit u^ un contrôle admissible transférant le système de X_0 en $X_u(t^*) = 0$ dans le temps t^* . Si t^* est minimal, alors il existe une solution φ , non identiquement nulle aux équations adjointes telle que pour presque tout s , u^* réalise le maximum de l'Hamiltonien $v \rightarrow H(v) = \langle \varphi, Bv \rangle$ sur Ω .*

Autrement dit, toute trajectoire optimale X vérifie le système d'optimalité:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu^*(t), & -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), & t \in (0, t^*), \\ X(0) = X_0, X(t^*) = 0, \\ \langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}, & \forall v \in \mathcal{U}, \end{cases} \text{ p.p.s} \quad (61)$$

Condition nécessaire d'optimalité: principe de Pontryagin

Theoreme (Principe de Pontryagin - Cas linéaire en temps minimum)

Soit u^ un contrôle admissible transférant le système de X_0 en $X_u(t^*) = 0$ dans le temps t^* . Si t^* est minimal, alors il existe une solution φ , non identiquement nulle aux équations adjointes telle que pour presque tout s , u^* réalise le maximum de l'Hamiltonien $v \rightarrow H(v) = \langle \varphi, Bv \rangle$ sur Ω .*

Autrement dit, toute trajectoire optimale X vérifie le système d'optimalité:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu^*(t), & -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), & t \in (0, t^*), \\ X(0) = X_0, X(t^*) = 0, \\ \langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}, & \forall v \in \mathcal{U}, \end{cases} \text{ p.p.s} \quad (61)$$

Condition nécessaire d'optimalité: principe de Pontryagin

Theoreme (Principe de Pontryagin - Cas linéaire en temps minimum)

Soit u^ un contrôle admissible transférant le système de X_0 en $X_u(t^*) = 0$ dans le temps t^* . Si t^* est minimal, alors il existe une solution φ , non identiquement nulle aux équations adjointes telle que pour presque tout s , u^* réalise le maximum de l'Hamiltonien $v \rightarrow H(v) = \langle \varphi, Bv \rangle$ sur Ω .*

Autrement dit, toute trajectoire optimale X vérifie le système d'optimalité:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu^*(t), & -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), & t \in (0, t^*), \\ X(0) = X_0, X(t^*) = 0, \\ \langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}, & \forall v \in \mathcal{U}, \end{cases} \text{ p.p.s} \quad (61)$$

Le cas scalaire : $m = 1$ (un seul contrôle)

$$n = 2, m = 1; B = (0 \ 1)^T. \Omega = [-b, a]$$

La condition

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall v \in \Omega, \quad \text{p.p.s}$$

se réécrit

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \max_{v \in \Omega} \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{p.p.s}$$

soit

$$\varphi_2(s)u_2^*(s) = \max_{v_2 \in [-b, a]} \varphi_2(s)v_2(s)$$

ce qui finalement donne

$$u_2^*(s) = \begin{cases} a & \text{si } \varphi_2(s) > 0, \\ [-b, a] & \text{si } \varphi_2(s) = 0, \\ -b & \text{si } \varphi_2(s) < 0 \end{cases} \quad (62)$$

On obtient un contrôle (quasi) bang-bang.

Par exemple, si $b = a$, il vient $u_2^*(s) = a \operatorname{signe}(\varphi_2(s))$. Un temps t_c auquel le contrôle change de signe est un temps de commutation.

Le cas scalaire : $m = 1$ (un seul contrôle)

$$n = 2, m = 1; B = (0 \ 1)^T. \Omega = [-b, a]$$

La condition

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall v \in \Omega, \quad \text{p.p.s}$$

se réécrit

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \max_{v \in \Omega} \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{p.p.s}$$

soit

$$\varphi_2(s)u_2^*(s) = \max_{v_2 \in [-b, a]} \varphi_2(s)v_2(s)$$

ce qui finalement donne

$$u_2^*(s) = \begin{cases} a & \text{si } \varphi_2(s) > 0, \\ [-b, a] & \text{si } \varphi_2(s) = 0, \\ -b & \text{si } \varphi_2(s) < 0 \end{cases} \quad (62)$$

On obtient un contrôle (quasi) bang-bang.

Par exemple, si $b = a$, il vient $u_2^*(s) = a \operatorname{signe}(\varphi_2(s))$. Un temps t_c auquel le contrôle change de signe est un temps de commutation.

Le cas scalaire : $m = 1$ (un seul contrôle)

$$n = 2, m = 1; B = (0 \ 1)^T. \Omega = [-b, a]$$

La condition

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall v \in \Omega, \quad \text{p.p.s}$$

se réécrit

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \max_{v \in \Omega} \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{p.p.s}$$

soit

$$\varphi_2(s)u_2^*(s) = \max_{v_2 \in [-b, a]} \varphi_2(s)v_2(s)$$

ce qui finalement donne

$$u_2^*(s) = \begin{cases} a & \text{si } \varphi_2(s) > 0, \\ [-b, a] & \text{si } \varphi_2(s) = 0, \\ -b & \text{si } \varphi_2(s) < 0 \end{cases} \quad (62)$$

On obtient un contrôle (quasi) bang-bang.

Par exemple, si $b = a$, il vient $u_2^*(s) = a \operatorname{signe}(\varphi_2(s))$. Un temps t_c auquel le contrôle change de signe est un temps de commutation.

Le cas scalaire : $m = 1$ (un seul contrôle)

$$n = 2, m = 1; B = (0 \ 1)^T. \Omega = [-b, a]$$

La condition

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall v \in \Omega, \quad \text{p.p.s}$$

se réécrit

$$\langle \varphi(s), Bu^*(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \max_{v \in \Omega} \langle \varphi(s), Bv(s) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{p.p.s}$$

soit

$$\varphi_2(s)u_2^*(s) = \max_{v_2 \in [-b, a]} \varphi_2(s)v_2(s)$$

ce qui finalement donne

$$u_2^*(s) = \begin{cases} a & \text{si } \varphi_2(s) > 0, \\ [-b, a] & \text{si } \varphi_2(s) = 0, \\ -b & \text{si } \varphi_2(s) < 0 \end{cases} \quad (62)$$

On obtient un contrôle (quasi) bang-bang.

Par exemple, si $b = a$, il vient $u_2^*(s) = a \operatorname{signe}(\varphi_2(s))$. Un temps t_c auquel le contrôle change de signe est un temps de commutation.

Exemple

Considérons le système dans \mathbb{R}^2 :

$$x_1'(t) = x_2, x_2'(t) = 2x_2(t) + u(t), |u(t)| \leq 1$$

On part de $(0, 0)$ et on cherche à atteindre $(a, 0)$, $a > 0$.

On vérifie que le système est contrôlable. Par ailleurs, le système adjoint est donnée par

$$p_1' = 0, p_2' = -p_1 - 2p_2$$

et le contrôle extremal est donné par $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$. On a que $p_1 = \text{cste}$ puis $p_2(t) = -p_1/2 + \lambda e^{-2t}$. Il n'y a donc qu'un seul de temps de commutation.

Si $u(t) = \epsilon = \pm 1$, il vient alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\epsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}(x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})(e^{2(t-t_0)} - 1) + x_1(t_0), \\ x_2(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + (x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})e^{2(t-t_0)} \end{aligned} \tag{63}$$

Pour atteindre $(a, 0)$, on voit alors qu'il faut d'abord prendre $u(t) = +1$ sur $t \in [0, t_1]$ puis $u(t) = -1$ sur $[t_1, t^*]$ avec t_1, t^* fonction de a .

Exemple

Considérons le système dans \mathbb{R}^2 :

$$x_1'(t) = x_2, x_2'(t) = 2x_2(t) + u(t), |u(t)| \leq 1$$

On part de $(0, 0)$ et on cherche à atteindre $(a, 0)$, $a > 0$.

On vérifie que le système est contrôlable. Par ailleurs, le système adjoint est donnée par

$$p_1' = 0, p_2' = -p_1 - 2p_2$$

et le contrôle extremal est donné par $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$. On a que $p_1 = \text{cste}$ puis $p_2(t) = -p_1/2 + \lambda e^{-2t}$. Il n'y a donc qu'un seul de temps de commutation.

Si $u(t) = \epsilon = \pm 1$, il vient alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\epsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}(x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})(e^{2(t-t_0)} - 1) + x_1(t_0), \\ x_2(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + (x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})e^{2(t-t_0)} \end{aligned} \tag{63}$$

Pour atteindre $(a, 0)$, on voit alors qu'il faut d'abord prendre $u(t) = +1$ sur $t \in [0, t_1]$ puis $u(t) = -1$ sur $[t_1, t^*]$ avec t_1, t^* fonction de a .

Exemple

Considérons le système dans \mathbb{R}^2 :

$$x_1'(t) = x_2, x_2'(t) = 2x_2(t) + u(t), |u(t)| \leq 1$$

On part de $(0, 0)$ et on cherche à atteindre $(a, 0)$, $a > 0$.

On vérifie que le système est contrôlable. Par ailleurs, le système adjoint est donnée par

$$p_1' = 0, p_2' = -p_1 - 2p_2$$

et le contrôle extremal est donné par $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$. On a que $p_1 = \text{cste}$ puis $p_2(t) = -p_1/2 + \lambda e^{-2t}$. Il n'y a donc qu'un seul de temps de commutation.

Si $u(t) = \epsilon = \pm 1$, il vient alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\epsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}(x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})(e^{2(t-t_0)} - 1) + x_1(t_0), \\ x_2(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + (x_2(t_0) + \frac{\epsilon}{2})e^{2(t-t_0)} \end{aligned} \tag{63}$$

Pour atteindre $(a, 0)$, on voit alors qu'il faut d'abord prendre $u(t) = +1$ sur $t \in [0, t_1]$ puis $u(t) = -1$ sur $[t_1, t^*]$ avec t_1, t^* fonction de a .

Exercice

On considère le système suivant ($n = m = 2$):

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= u_1(t) + 0u_2(t); & x_2'(t) &= u_1(t) + 0u_2(t), \\x_1(0) &= x_2(0) = -1;\end{aligned}$$

avec $|u_i(t)| \leq 1$ pour presque tout t . On souhaite atteindre $(0, 0)$.

Montrez que $T = 1$ est optimal. Montrez qu'il y a une infinité de contrôles optimaux mais que l'état est unique.

Partie IV - Contrôlabilité de l'équation des ondes linéaire

Equations des ondes en une dimension d'espace

$x \in \Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} y''(x, t) - (c(x)y_x)_x = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (64)$$

y_0, y_1 : **position et vitesse initiale**

Sans force extérieure ($f = 0$), l'énergie du système (non contrôlé) est donnée par :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 (|y'(x, t)|^2 + c(x)|y_x(x, t)|^2) dx \quad (65)$$

et est constante au cours du temps; $E(t) = E(0)$. Le système est **conservatif**.

On cherche un contrôle **frontière** v tel que $y(1, t) = v(t)$ tel que $E(T) = 0$ pour $T > 0$ suffisamment grand.

Equations des ondes en une dimension d'espace

$x \in \Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} y''(x, t) - (c(x)y_x)_x = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (64)$$

y_0, y_1 : **position et vitesse initiale**

Sans force extérieure ($f = 0$), l'énergie du système (non contrôlé) est donnée par :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 (|y'(x, t)|^2 + c(x)|y_x(x, t)|^2) dx \quad (65)$$

et est constante au cours du temps; $E(t) = E(0)$. Le système est **conservatif**.

On cherche un contrôle **frontière** v tel que $y(1, t) = v(t)$ tel que $E(T) = 0$ pour $T > 0$ suffisamment grand.

Equations des ondes en une dimension d'espace

$x \in \Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} y''(x, t) - (c(x)y_x)_x = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (64)$$

y_0, y_1 : **position et vitesse initiale**

Sans force extérieure ($f = 0$), l'énergie du système (non contrôlé) est donnée par :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 (|y'(x, t)|^2 + c(x)|y_x(x, t)|^2) dx \quad (65)$$

et est constante au cours du temps; $E(t) = E(0)$. Le système est **conservatif**.

On cherche un contrôle **frontière** v tel que $y(1, t) = v(t)$ tel que $E(T) = 0$ pour $T > 0$ suffisamment grand.

Remarque: temps minimal de contrôlabilité

Formellement, on écrit

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$$

soit

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)(y) = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)(y)$$

donc si y est solution de l'équation des ondes, y est aussi solution de deux équations de transport :

$$(\partial_t + c \partial_x)(y) = \partial_t y + c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = f(x - ct),$$

$$(\partial_t - c \partial_x)(y) = \partial_t y - c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = g(x + ct)$$

$$\implies y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

L'information se propage à vitesse finie : il faut donc un temps minimal de contrôlabilité pour qu'un contrôle frontière (en $x = 1$) agisse.

Remarque: temps minimal de contrôlabilité

Formellement, on écrit

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$$

soit

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)(y) = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)(y)$$

donc si y est solution de l'équation des ondes, y est aussi solution de deux équations de transport :

$$(\partial_t + c \partial_x)(y) = \partial_t y + c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = f(x - ct),$$

$$(\partial_t - c \partial_x)(y) = \partial_t y - c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = g(x + ct)$$

$$\implies y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

L'information se propage à vitesse finie : il faut donc un temps minimal de contrôlabilité pour qu'un contrôle frontière (en $x = 1$) agisse.

Remarque: temps minimal de contrôlabilité

Formellement, on écrit

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$$

soit

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)(y) = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)(y)$$

donc si y est solution de l'équation des ondes, y est aussi solution de deux équations de transport :

$$(\partial_t + c \partial_x)(y) = \partial_t y + c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = f(x - ct),$$

$$(\partial_t - c \partial_x)(y) = \partial_t y - c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = g(x + ct)$$

$$\implies y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

L'information se propage à vitesse finie : il faut donc un temps minimal de contrôlabilité pour qu'un contrôle frontière (en $x = 1$) agisse.

Remarque: temps minimal de contrôlabilité

Formellement, on écrit

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)$$

soit

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)(y) = (\partial_t + c \partial_x)(\partial_t - c \partial_x)(y)$$

donc si y est solution de l'équation des ondes, y est aussi solution de deux équations de transport :

$$(\partial_t + c \partial_x)(y) = \partial_t y + c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = f(x - ct),$$

$$(\partial_t - c \partial_x)(y) = \partial_t y - c \partial_x y = 0 \implies y(x, t) = g(x + ct)$$

$$\implies y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

L'information se propage à vitesse finie : il faut donc un temps minimal de contrôlabilité pour qu'un contrôle frontière (en $x = 1$) agisse.

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

On cherche une solution du problème homogène par **série de Fourier**. On cherche une solution à **variables séparées** sous la forme

$$y(x, t) = g(t)f(x)$$

ce qui donne, en injectant dans l'équation

$$g_{tt}(t)f(x) - c^2g(t)f_{xx}(x) = 0$$

soit

$$\frac{g_{tt}(t)}{g(t)} = \frac{c^2f_{xx}(x)}{f(x)}$$

soit

$$-g_{tt}(t) = \lambda g(t), \quad -c^2f_{xx}(x) = \lambda f(x)$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

On cherche une solution du problème homogène par **série de Fourier**. On cherche une solution à **variables séparées** sous la forme

$$y(x, t) = g(t)f(x)$$

ce qui donne, en injectant dans l'équation

$$g_{tt}(t)f(x) - c^2g(t)f_{xx}(x) = 0$$

soit

$$\frac{g_{tt}(t)}{g(t)} = \frac{c^2f_{xx}(x)}{f(x)}$$

soit

$$-g_{tt}(t) = \lambda g(t), \quad -c^2f_{xx}(x) = \lambda f(x)$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

On cherche une solution du problème homogène par **série de Fourier**. On cherche une solution à **variables séparées** sous la forme

$$y(x, t) = g(t)f(x)$$

ce qui donne, en injectant dans l'équation

$$g_{tt}(t)f(x) - c^2g(t)f_{xx}(x) = 0$$

soit

$$\frac{g_{tt}(t)}{g(t)} = \frac{c^2f_{xx}(x)}{f(x)}$$

soit

$$-g_{tt}(t) = \lambda g(t), \quad -c^2f_{xx}(x) = \lambda f(x)$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

Le système en f est donné par :

$$\begin{cases} -f_{xx}(x) = \frac{\lambda}{c^2} f(x), & x \in (0, 1), \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \quad (66)$$

soit

$$f_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \lambda_k = c^2(k\pi)^2, k \in \mathbb{N}.$$

Les couples (f_k, λ_k) sont les solutions du problème spectral (66).

g est alors solution de $-g_{tt}(t) = \lambda_k g(t)$ soit

$$g_k(t) = \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$$

Finalement,

$$y_k(x, t) := g_k(t) f_k(x) = \sqrt{2} \left(\alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

est solution de l'équation de $y_{tt} - cy_{xx} = 0$.

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

Le système en f est donné par :

$$\begin{cases} -f_{xx}(x) = \frac{\lambda}{c^2} f(x), & x \in (0, 1), \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \quad (66)$$

soit

$$f_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \lambda_k = c^2(k\pi)^2, k \in \mathbb{N}.$$

Les couples (f_k, λ_k) sont les solutions du problème spectral (66).

g est alors solution de $-g_{tt}(t) = \lambda_k g(t)$ soit

$$g_k(t) = \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$$

Finalement,

$$y_k(x, t) := g_k(t) f_k(x) = \sqrt{2} \left(\alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\beta_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

est solution de l'équation de $y_{tt} - cy_{xx} = 0$.

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

La solution de l'équation des ondes est donc de la forme :

$$y(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

avec (a_k, b_k) les coefficients de Fourier des données initiales y_0 et y_1 :

$$y_0(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \sin(k\pi x), \quad y_1(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(k\pi x) \quad (67)$$

soit

$$a_k := \int_0^1 y_0(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx, \quad b_k := \int_0^1 y_1(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \quad (68)$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

$$a_k := \int_0^1 y_0(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx, \quad b_k := \int_0^1 y_1(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \quad (69)$$

$\|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2$ donc

$$y_0 \in L^2(0,1) \iff \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 < +\infty.$$

On note $H^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1), u_x \in L^2(0,1)\} \subset L^2(0,1)$ et on a :

$$y_0 \in H^1(0,1) \iff \sum (k\pi)^2 a_k^2 < \infty$$

On note $H^{-1}(0,1) := \{u = -y_{xx} \text{ avec } y \in H^1(0,1), y(0) = y(1) = 0\}$ et on a :

$$y_0 \in H^{-1}(0,1) \iff \sum (k\pi)^{-2} a_k^2 < \infty$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

$$a_k := \int_0^1 y_0(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx, \quad b_k := \int_0^1 y_1(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \quad (69)$$

$$\|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 \text{ donc}$$

$$y_0 \in L^2(0,1) \iff \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 < +\infty.$$

On note $H^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1), u_x \in L^2(0,1)\} \subset L^2(0,1)$ et on a :

$$y_0 \in H^1(0,1) \iff \sum (k\pi)^2 a_k^2 < \infty$$

On note $H^{-1}(0,1) := \{u = -y_{xx} \text{ avec } y \in H^1(0,1), y(0) = y(1) = 0\}$ et on a :

$$y_0 \in H^{-1}(0,1) \iff \sum (k\pi)^{-2} a_k^2 < \infty$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

$$a_k := \int_0^1 y_0(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx, \quad b_k := \int_0^1 y_1(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \quad (69)$$

$$\|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 \text{ donc}$$

$$y_0 \in L^2(0,1) \iff \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 < +\infty.$$

On note $H^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1), u_x \in L^2(0,1)\} \subset L^2(0,1)$ et on a :

$$y_0 \in H^1(0,1) \iff \sum (k\pi)^2 a_k^2 < \infty$$

On note $H^{-1}(0,1) := \{u = -y_{xx} \text{ avec } y \in H^1(0,1), y(0) = y(1) = 0\}$ et on a :

$$y_0 \in H^{-1}(0,1) \iff \sum (k\pi)^{-2} a_k^2 < \infty$$

Solution de l'équation des ondes par séries de Fourier

$$a_k := \int_0^1 y_0(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx, \quad b_k := \int_0^1 y_1(x) \sqrt{2} \sin(k\pi x) dx \quad (69)$$

$$\|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 \text{ donc}$$

$$y_0 \in L^2(0,1) \iff \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 < +\infty.$$

On note $H^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1), u_x \in L^2(0,1)\} \subset L^2(0,1)$ et on a :

$$y_0 \in H^1(0,1) \iff \sum (k\pi)^2 a_k^2 < \infty$$

On note $H^{-1}(0,1) := \{u = -y_{xx} \text{ avec } y \in H^1(0,1), y(0) = y(1) = 0\}$ et on a :

$$y_0 \in H^{-1}(0,1) \iff \sum (k\pi)^{-2} a_k^2 < \infty$$

Produit scalaire

Soit $u(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \sin(k\pi x)$, $v(x) = \sqrt{2} \sum_{q \in \mathbb{N}} v_q \sin(q\pi x)$;

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u(x)v(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k \frac{v_k}{k\pi} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^{-2} v_k^2 \right)^{1/2}$$

Détail des calculs:

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \langle u_x, (-\partial_x^{-2} v)_x \rangle_{L^2(0,1)} = \langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)}$$

[avec $-y_{xx} = v$ soit $v_k = (k\pi)^2 y_k$].

$$\langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k (k\pi) y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k (k\pi)^2 y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k$$

Produit scalaire

Soit $u(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \sin(k\pi x)$, $v(x) = \sqrt{2} \sum_{q \in \mathbb{N}} v_q \sin(q\pi x)$;

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u(x)v(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k \frac{v_k}{k\pi} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^{-2} v_k^2 \right)^{1/2}$$

Détail des calculs:

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \langle u_x, (-\partial_x^{-2} v)_x \rangle_{L^2(0,1)} = \langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)}$$

[avec $-y_{xx} = v$ soit $v_k = (k\pi)^2 y_k$].

$$\langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k (k\pi) y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k (k\pi)^2 y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k$$

Produit scalaire

Soit $u(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \sin(k\pi x)$, $v(x) = \sqrt{2} \sum_{q \in \mathbb{N}} v_q \sin(q\pi x)$;

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u(x)v(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k \frac{v_k}{k\pi} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^{-2} v_k^2 \right)^{1/2}$$

Détail des calculs:

$$\langle u, v \rangle_{H^1, H^{-1}} = \langle u_x, (-\partial_x^{-2} v)_x \rangle_{L^2(0,1)} = \langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)}$$

[avec $-y_{xx} = v$ soit $v_k = (k\pi)^2 y_k$].

$$\langle u_x, y_x \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi) u_k (k\pi) y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k (k\pi)^2 y_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k$$

Retour sur la contrôlabilité de l'équation des ondes: $c = 1$

$x \in \Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = 0; y(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (70)$$

On cherche un contrôle v tel que $y(1, t) = v(t)$ et tel que

$$y(x, T) = 0, y'(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

On suppose $y_0 \in L^2(0, 1)$ [$\sum a_k^2 < \infty$] et $y_1 \in H^{-1}(0, 1)$ [$\sum \left(\frac{b_k}{k\pi}\right)^2 < \infty$]

$$\sum \left(\frac{b_k}{k\pi}\right)^2 < \infty$$

Retour sur la contrôlabilité de l'équation des ondes: $c = 1$

$x \in \Omega = (0, 1)$:

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = 0; y(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (70)$$

On cherche un contrôle v tel que $y(1, t) = v(t)$ et tel que

$$y(x, T) = 0, y'(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

On suppose $y_0 \in L^2(0, 1)$ [$\sum a_k^2 < \infty$] et $y_1 \in H^{-1}(0, 1)$ [\sum

$$\sum \left(\frac{b_k}{k\pi} \right)^2 < \infty]$$

Caractérisation des contrôles

Soit $\varphi_0 \in H_0^1(0, 1)$ et $\varphi_1 \in L^2(0, 1)$ et soit φ la solution adjointe

$$\begin{cases} \varphi''(x, t) - \varphi_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi'(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (71)$$

Lemme (Caractérisation des contrôles)

$v \in L^2(0, T)$ est un contrôle à zéro pour les données initiales (y_0, y_1) si et seulement si

$$\int_0^T v(t) \varphi_x(1, t) dt + \langle y_0, \varphi_1 \rangle_{L^2(0,1), L^2(0,1)} - \langle y_1, \varphi_0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1(0,1)} = 0 \quad (72)$$

pour tout $\varphi_0 \in H_0^1(0, 1)$ et $\varphi_1 \in L^2(0, 1)$ où φ est la solution adjointe correspondante.

Preuve - Multiplier l'équation en φ par y et intégrer.

Caractérisation des contrôles

Soit $\varphi_0 \in H_0^1(0, 1)$ et $\varphi_1 \in L^2(0, 1)$ et soit φ la solution adjointe

$$\begin{cases} \varphi''(x, t) - \varphi_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi'(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (71)$$

Lemme (Caractérisation des contrôles)

$v \in L^2(0, T)$ est un contrôle à zéro pour les données initiales (y_0, y_1) si et seulement si

$$\int_0^T v(t) \varphi_x(1, t) dt + \langle y_0, \varphi_1 \rangle_{L^2(0,1), L^2(0,1)} - \langle y_1, \varphi_0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1(0,1)} = 0 \quad (72)$$

pour tout $\varphi_0 \in H_0^1(0, 1)$ et $\varphi_1 \in L^2(0, 1)$ où φ est la solution adjointe correspondante.

Preuve - Multiplier l'équation en φ par y et intégrer.

Minimisation d'une fonctionnelle

On considère alors la fonctionnelle $J : H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(\varphi_0, \varphi_1) := \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 dt + \langle y_0, \varphi_1 \rangle_{L^2(0,1), L^2(0,1)} \\ - \langle y_1, \varphi_0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1(0,1)}$$

Lemme

On suppose que $(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1)$ est un minimiseur de J . Si $\hat{\varphi}$ est la solution adjointe correspondante, alors $v(t) = \hat{\varphi}_x(1, t)$ est un contrôle à zéro pour la donnée initiale (y_0, y_1) .

Coercivité de la fonctionnelle

Definition

On dit que la solution adjointe φ est *observable* au temps T si et seulement il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C E(\varphi_0, \varphi_1) \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 dt, \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \quad (73)$$

avec

$$E(\varphi_0, \varphi_1) = \|\varphi_0, \varphi_1\|_{H_0^1(0,1), L^2(0,1)}^2 := \|\varphi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\varphi_1\|_{L^2(0,1)}^2$$

Theoreme

Si la solution adjointe est observable, alors la fonctionnelle J admet au moins un minimum et implique la contrôlabilité de y au temps T .

Coercivité de la fonctionnelle

Definition

On dit que la solution adjointe φ est **observable** au temps T si et seulement il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C E(\varphi_0, \varphi_1) \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 dt, \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \quad (73)$$

avec

$$E(\varphi_0, \varphi_1) = \|\varphi_0, \varphi_1\|_{H_0^1(0,1), L^2(0,1)}^2 := \|\varphi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\varphi_1\|_{L^2(0,1)}^2$$

Theoreme

Si la solution adjointe est observable, alors la fonctionnelle J admet au moins un minimum et implique la contrôlabilité de y au temps T .

Preuve de l'observabilité pour $T = 2$

On écrit

$$\varphi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

Il vient $\|\varphi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi_x(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 a_k^2$ et

$\|\varphi_1\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi'(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^2$ soit

$$E(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} ((k\pi)^2 a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

$$\varphi_x(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cos(k\pi x)$$

soit

$$\varphi_x(1, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) (-1)^k$$

Preuve de l'observabilité pour $T = 2$

On écrit

$$\varphi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

Il vient $\|\varphi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi_x(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 a_k^2$ et

$\|\varphi_1\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi'(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^2$ soit

$$E(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} ((k\pi)^2 a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

$$\varphi_x(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cos(k\pi x)$$

soit

$$\varphi_x(1, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) (-1)^k$$

Preuve de l'observabilité pour $T = 2$

On écrit

$$\varphi(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \sin(k\pi x)$$

Il vient $\|\varphi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi_x(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k\pi)^2 a_k^2$ et

$\|\varphi_1\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 (\varphi'(x, 0))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^2$ soit

$$E(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} ((k\pi)^2 a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

$$\varphi_x(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cos(k\pi x)$$

soit

$$\varphi_x(1, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) (-1)^k$$

Preuve de l'observabilité pour $T = 2$

$$\varphi_x(1, t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\pi \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) (-1)^k$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T (\varphi_x(1, t))^2 dt &= \sum_{k, p \in \mathbb{N}} (-1)^{k+p} k\pi p\pi a_k a_p \int_0^T \cos(k\pi t) \cos(p\pi t) dt \\ &+ \sum_{k, p \in \mathbb{N}} (-1)^{k+p} k\pi a_k b_p \int_0^T \cos(k\pi t) \sin(p\pi t) dt \\ &+ \sum_{k, p \in \mathbb{N}} (-1)^{k+p} k\pi b_k a_p \int_0^T \sin(k\pi t) \cos(p\pi t) dt \\ &+ \sum_{k, p \in \mathbb{N}} (-1)^{k+p} b_k b_p \int_0^T \sin(k\pi t) \sin(p\pi t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} ((k\pi)^2 a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

Pas d'observabilité uniforme si $T < 2$

Theoreme

Si $T < 2$,

$$\inf_{(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)} \frac{\int_0^T (\varphi_x(1, t))^2 dt}{E(\varphi_0, \varphi_1)} = 0 \quad (74)$$

Autrement dit, il y a certaines composantes des séries de Fourier qui ne peuvent être observés.

Exercice - avec un contrôle en $x = 0$ et un en $x = 1$

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = v_1(t); y(1, t) = v_2(t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (75)$$

On cherche deux contrôles v_1 et v_2 tels que

$$y(x, T) = 0, y'(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Temp minimal de contrôlabilité ?

Observabilité avec la méthode des multiplicateurs.

On multiplie l'équation en φ par $x\varphi_x$ puis on intègre sur $(0, 1) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi_{tt} - \varphi_{xx})x\varphi_x \, dx \, dt = \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{tt}\varphi_x \, dx \, dt - \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{xx}\varphi_x \, dx \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\varphi_t\varphi_{xt} \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx - \int_0^T \int_0^1 x\frac{1}{2}(|\varphi_x|^2)_x \, dx \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\frac{1}{2}(|\varphi_t|^2)_x \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T \frac{1}{2}(|\varphi_t|^2) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_t(1, t)|^2 \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx \\&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2) \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

soit $TE(0) + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$ soit finalement

$$(T-2)E(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

Observabilité avec la méthode des multiplicateurs.

On multiplie l'équation en φ par $x\varphi_x$ puis on intègre sur $(0, 1) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi_{tt} - \varphi_{xx})x\varphi_x \, dx \, dt = \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{tt}\varphi_x \, dx \, dt - \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{xx}\varphi_x \, dx \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\varphi_t\varphi_{xt} \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx - \int_0^T \int_0^1 x\frac{1}{2}(|\varphi_x|^2)_x \, dx \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\frac{1}{2}(|\varphi_t|^2)_x \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T \frac{1}{2}(|\varphi_t|^2) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_t(1, t)|^2 \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx \\&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2) \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

soit $TE(0) + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$ soit finalement

$$(T-2)E(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

Observabilité avec la méthode des multiplicateurs.

On multiplie l'équation en φ par $x\varphi_x$ puis on intègre sur $(0, 1) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T \int_0^1 (\varphi_{tt} - \varphi_{xx})x\varphi_x \, dx \, dt = \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{tt}\varphi_x \, dx \, dt - \int_0^T \int_0^1 x\varphi_{xx}\varphi_x \, dx \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\varphi_t\varphi_{xt} \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx - \int_0^T \int_0^1 x\frac{1}{2}(|\varphi_x|^2)_x \, dx \\&= \int_0^1 \int_0^T -x\frac{1}{2}(|\varphi_t|^2)_x \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt \\&= \int_0^1 \int_0^T \frac{1}{2}(|\varphi_t|^2) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_t(1, t)|^2 \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx \\&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi_x|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2) \, dx \, dt + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

soit $TE(0) + \int_0^1 [x\varphi_t\varphi_x]_0^T \, dx = \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$ soit finalement

$$(T-2)E(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T |\varphi_x(1, t)|^2 \, dt$$

Cas $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Theoreme

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et soit $\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu > 0\}$. Soit

$$T > 2 \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$$

Alors, $\exists C_{obs} > 0$ tel que

$$\|\varphi_0, \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} |\partial_n \varphi|^2 d\sigma dt \quad (76)$$

Preuve - On multiplie l'equation en φ par le multiplicateur $(x - x_0) \cdot \nabla \varphi$ et on fait des IPP.

Lemme

Le contrôle obtenu $v = \nabla \hat{\varphi} \cdot \nu$ est le contrôle de norme L^2 minimale.

Cas $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Theoreme

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et soit $\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu > 0\}$. Soit

$$T > 2 \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$$

Alors, $\exists C_{obs} > 0$ tel que

$$\|\varphi_0, \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} |\partial_n \varphi|^2 d\sigma dt \quad (76)$$

Preuve - On multiplie l'equation en φ par le multiplicateur $(x - x_0) \cdot \nabla \varphi$ et on fait des IPP.

Lemme

Le contrôle obtenu $v = \nabla \hat{\varphi} \cdot \nu$ est le contrôle de norme L^2 minimale.

Cas $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Theoreme

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et soit $\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu > 0\}$. Soit

$$T > 2 \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$$

Alors, $\exists C_{obs} > 0$ tel que

$$\|\varphi_0, \varphi_1\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} |\partial_n \varphi|^2 d\sigma dt \quad (76)$$

Preuve - On multiplie l'equation en φ par le multiplicateur $(x - x_0) \cdot \nabla \varphi$ et on fait des IPP.

Lemme

Le contrôle obtenu $v = \nabla \hat{\varphi} \cdot \nu$ est le contrôle de norme L^2 minimale.

Stabilisation frontière

On considère l'équation

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = 0; y_x(1, t) = \alpha(t)y_t(1, t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (77)$$

Lemme

Si $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2) dx$, alors $E'(t) = \int_0^T \alpha(t) |y_t(1, t)|^2 dt$.

Théorème (décroissance exponentielle de l'énergie)

Soit $\alpha < 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que $E(t) \leq E(0)e^{-\beta t}$

Stabilisation frontière

On considère l'équation

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = 0; y_x(1, t) = \alpha(t)y_t(1, t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (77)$$

Lemme

Si $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2) dx$, alors $E'(t) = \int_0^T \alpha(t) |y_t(1, t)|^2 dt$.

Theoreme (décroissance exponentielle de l'énergie)

Soit $\alpha < 0$. Il existe $\beta > 0$ tel que $E(t) \leq E(0)e^{-\beta t}$

Exercice : Stabilisation et contrôlabilité interne (ou distribué)

Soit $\omega \subset \Omega$ On considère l'équation

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = v \mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (78)$$

On cherche $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que $E(T) = 0$.

Inégalité d'observabilité: il faut montrer l'existence d'une constante C_{obs} tel que

$$E(0) \leq C_{obs} \int_0^T \int_\omega |\varphi(x, t)|^2 dx dt, \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = a(x)y_t(x, t)\mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (79)$$

$$\implies E'(t) = \int_0^T \int_\omega a(x)|y_t|^2 dx dt$$

Exercice : Stabilisation et contrôlabilité interne (ou distribué)

Soit $\omega \subset \Omega$ On considère l'équation

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = v \mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (78)$$

On cherche $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que $E(T) = 0$.

Inégalité d'observabilité: il faut montrer l'existence d'une constante C_{obs} tel que

$$E(0) \leq C_{obs} \int_0^T \int_\omega |\varphi(x, t)|^2 dx dt, \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = a(x)y_t(x, t)\mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (79)$$

$$\implies E'(t) = \int_0^T \int_\omega a(x)|y_t|^2 dx dt$$

Exercice : Stabilisation et contrôlabilité interne (ou distribué)

Soit $\omega \subset \Omega$ On considère l'équation

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = v \mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (78)$$

On cherche $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que $E(T) = 0$.

Inégalité d'observabilité: il faut montrer l'existence d'une constante C_{obs} tel que

$$E(0) \leq C_{obs} \int_0^T \int_\omega |\varphi(x, t)|^2 dx dt, \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

$$\begin{cases} y''(x, t) - y_{xx}(x, t) = a(x)y_t(x, t)\mathbf{1}_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (79)$$

$$\implies E'(t) = \int_0^T \int_\omega a(x)|y_t|^2 dx dt$$

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ y_i , $i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique

Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $\omega = (0, 1)$. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ et soit le système de deux équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} y_1'' - (y_{1,\xi\xi} + cy_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_2'' + c(y_{1,\xi} + cy_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ y_1(0, t) = 0, y_1(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ y_i(\xi, 0) = y_i^0(\xi), y_i'(\xi, 0) = y_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega, \end{cases} \quad (80)$$

où

- ▶ $y_i, i = 1, 2$ est une fonction de $(\xi, t) \in \omega$ et $t \in (0, T)$: $y_i = y_i(\xi, t)$;
- ▶ $y_i'(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial t}$, $y_i''(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial t^2}$;
- ▶ $y_{i,\xi}(\xi, t) := \frac{\partial y_i(\xi, t)}{\partial \xi}$; $y_{i,\xi\xi}(\xi, t) := \frac{\partial^2 y_i(\xi, t)}{\partial \xi^2}$;
- ▶ v est une variable de contrôle fonction de $t \in (0, T)$: $v = v(t)$;
- ▶ $(y_i^0, y_i^1) = (y_i^0(\xi), y_i^1(\xi))$ représente la position et vitesse initiale de la variable y_i .

y_1 est la **composante tangentielle** du déplacement de l'arche, y_2 sa **composante normale**. On suppose $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, y_2^1) \in H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega)$.

Exercice : Arche cylindrique - état adjoint

$$\begin{cases} \phi_1'' - (\phi_{1,\xi\xi} + c\phi_{2,\xi}) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ \phi_2'' + c(\phi_{1,\xi} + c\phi_2) = 0, & (\xi, t) \in \omega \times (0, T), \\ \phi_1(0, t) = \phi_1(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \phi_i(\xi, 0) = \phi_i^0(\xi), \phi_i'(\xi, 0) = \phi_i^1(\xi), \quad i = 1, 2 & \xi \in \omega \end{cases} \quad (81)$$

avec $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0) \in H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ et $\phi^1 = (\phi_1^1, \phi_2^1) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ et on note l'énergie associée

$$E(\phi_1, \phi_2, t) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\phi_1'(\xi, t)|^2 + |\phi_2'(\xi, t)|^2 + |(\phi_{1,\xi} + c\phi_2)(\xi, t)|^2 \right) d\xi. \quad (82)$$

Exercice : Arche cylindrique - Caractérisation des contrôles

Lemme

v est un contrôle à zéro pour (80) si et seulement il vérifie la caractérisation suivante:

$$\int_0^T v(t)(\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) dt - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad (83)$$

pour tout ϕ solution de (81) avec donnée initiale $(\phi_1^0, \phi_2^0) \in H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ et $(\phi_1^1, \phi_2^1) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$

Cette caractérisation suggère d'introduire le problème extremal suivant :

$$\inf_{\phi_1^0, \phi_1^1} \mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) \right)^2 dt + - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} \quad (84)$$

Exercice : Arche cylindrique - Caractérisation des contrôles

Lemme

v est un contrôle à zéro pour (80) si et seulement il vérifie la caractérisation suivante:

$$\int_0^T v(t)(\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) dt - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad (83)$$

pour tout ϕ solution de (81) avec donnée initiale $(\phi_1^0, \phi_2^0) \in H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ et $(\phi_1^1, \phi_2^1) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$

Cette caractérisation suggère d'introduire le problème extremal suivant :

$$\inf_{\phi_1^0, \phi_1^1} \mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) \right)^2 dt + - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} \quad (84)$$

Exercice : Arche cylindrique - Caractérisation des contrôles

Lemme

v est un contrôle à zéro pour (80) si et seulement il vérifie la caractérisation suivante:

$$\int_0^T v(t)(\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) dt - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad (83)$$

pour tout ϕ solution de (81) avec donnée initiale $(\phi_1^0, \phi_2^0) \in H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ et $(\phi_1^1, \phi_2^1) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$

Cette caractérisation suggère d'introduire le problème extremal suivant :

$$\inf_{\phi^0, \phi^1} J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((\phi_{1,\varepsilon} + c\phi_2)(1, t) \right)^2 dt + - \langle y_1^1, \phi_1^0 \rangle_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} + \langle y_1^0, \phi_1^1 \rangle_{L^2(\omega)} - \langle y_2^1, \phi_2^0 \rangle_{L^2(\omega)} + \langle y_2^0, \phi_2^1 \rangle_{L^2(\omega)} \quad (84)$$

Exercice : Arche cylindrique - Inégalité d'observabilité

On souhaite démontrer l'inégalité d'observabilité suivante : il existe une constante $C_{obs} > 0$ telle que

$$\|(\phi_1^0, \phi_1^1)\|_V^2 + \|(\phi_2^0, \phi_2^1)\|_H^2 \leq C_{obs} \int_0^T |(\phi_{1,\xi} + c\phi_2)(1, t)|^2 dt, \quad \forall (\phi_1^0, \phi_1^1) \in V, (\phi_2^0, \phi_2^1) \in H \quad (85)$$

avec $V := H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ et $H = L^2(\omega) \times L^2(\omega)$

$$\|(\phi_1^0, \phi_1^1)\|_V^2 + \|(\phi_2^0, \phi_2^1)\|_H^2 = \|\phi_{1,\xi}^0\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\phi_1^1\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\phi_2^0\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\phi_2^1\|_{L^2(\omega)}^2$$

Exercice : Arche cylindrique - Problème spectral

$$\begin{cases} -(m_{1,\xi\xi}(\xi) + cm_{2,\xi}(\xi)) = \lambda m_1(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ c(m_{1,\xi}(\xi) + cm_2(\xi)) = \lambda m_2(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ m_1(0) = m_1(1) = 0. \end{cases} \quad (86)$$

$$w_k = \left(-\frac{c}{k\pi} \sin(k\pi\xi), \cos(k\pi\xi) \right), \quad v_0 = (0, 1), \quad v_k = \left(\sin(k\pi\xi), \frac{c}{k\pi} \cos(k\pi\xi) \right) \quad (87)$$

associé à 0 (de multiplicité infini), c^2 et $c^2 + (k\pi)^2$ (de multiplicité 1).

Exercice : Arche cylindrique - Problème spectral

$$\begin{cases} -(m_{1,\xi\xi}(\xi) + cm_{2,\xi}(\xi)) = \lambda m_1(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ c(m_{1,\xi}(\xi) + cm_2(\xi)) = \lambda m_2(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ m_1(0) = m_1(1) = 0. \end{cases} \quad (86)$$

$$\mathbf{w}_k = \left(-\frac{c}{k\pi} \sin(k\pi\xi), \cos(k\pi\xi) \right), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_k = \left(\sin(k\pi\xi), \frac{c}{k\pi} \cos(k\pi\xi) \right) \quad (87)$$

associé à 0 (de multiplicité infini), c^2 et $c^2 + (k\pi)^2$ (de multiplicité 1).

Exercice : Arche cylindrique - Série de Fourier

$$(\phi_1^0, \phi_2^0) = \sum_{k \geq 1} a_k \mathbf{w}_k + A_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{k \geq 1} A_k \mathbf{v}_k, \quad (\phi_1^1, \phi_2^1) = \sum_{k \geq 1} b_k \mathbf{w}_k + \mu_0 B_0 \mathbf{v}_0 + \sum_{k \geq 1} \mu_k B_k \mathbf{v}_k, \quad (88)$$

avec $\mu_k = \sqrt{c^2 + k^2 \pi^2}$ et

$$\mathbf{w}_k = \left(-\frac{c}{k\pi} \sin(k\pi\xi), \cos(k\pi\xi) \right), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_k = \left(\sin(k\pi\xi), \frac{c}{k\pi} \cos(k\pi\xi) \right) \quad (89)$$

puis que la solution $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ correspondante se décompose de la façon suivante

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, t) = & \sum_{k \geq 1} (a_k + b_k t) \mathbf{w}_k + (A_0 \cos(\mu_0 t) + B_0 \sin(\mu_0 t)) \mathbf{v}_0 \\ & + \sum_{k \geq 1} (A_k \cos(\mu_k t) + B_k \sin(\mu_k t)) \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (90)$$

Exercice : Arche cylindrique - Pas d'observabilité pour les modes de résonance

$$\phi_{1,\xi}(\cdot, t) + c\phi_2(\cdot, t) = \sum_{k \geq 1} (a_k + b_k t) \left(\frac{d((\mathbf{w}_k)_1)}{d\xi} + c((\mathbf{w}_k)_2) \right)$$

avec $((\mathbf{w}_k)_1)$ la première composante de (\mathbf{w}_k) et $((\mathbf{w}_k)_2)$ la seconde. Immédiatement, on vérifie que $\frac{d((\mathbf{w}_k)_1)}{d\xi} + c((\mathbf{w}_k)_2) = 0$ pour tout k .

Il en résulte que $\phi_{1,\xi}(\cdot, t) + c\phi_2(\cdot, t) = 0$ pour tout t . Le terme de droite de (92) est donc égal à zéro. (92) ne peut avoir lieu dans ce cas.

Exercice : Arche cylindrique - Observabilité pour les autres modes

$$\phi(\cdot, t) = (A_0 \cos(\mu_0 t) + B_0 \sin(\mu_0 t))\mathbf{v}_0 + \sum_{k \geq 1} (A_k \cos(\mu_k t) + B_k \sin(\mu_k t))\mathbf{v}_k. \quad (91)$$

Il faut vérifier que

$$\|(\phi_1^0, \phi_1^1)\|_V^2 + \|(\phi_2^0, \phi_2^1)\|_H^2 \leq C_{obs} \int_0^T |(\phi_{1,\xi} + c\phi_2)(1, t)|^2 dt, \quad \forall (\phi_1^0, \phi_1^1) \in V, (\phi_2^0, \phi_2^1) \in H \quad (92)$$

Exercice : Arche cylindrique - Observabilité

On calcule que

$$E(\phi_1, \phi_2, 0) = \frac{1}{2} \mu_0^2 (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{\mu_k^4}{(k\pi)^2} (A_k^2 + B_k^2). \quad (93)$$

equivalent à

$$\|(\phi_1^0, \phi_1^1)\|_V^2 + \|(\phi_2^0, \phi_2^1)\|_H^2 = A_0^2 + \mu_0^2 B_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(k\pi)^4 + c^2}{(k\pi)^2} A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{\mu_k^4}{(k\pi)^2} B_k^2 \quad (94)$$

Exercice : Arche cylindrique - Généralisation de l'égalité de Parseval

Theoreme d'Ingham de 1936

Theorem

Soit $K \in \mathbb{Z}$ et $(w_k)_{k \in K}$ une famille de nombres réels satisfaisant la condition $\gamma := \inf_{k \neq n} |w_k - w_n| > 0$. Si I est un intervalle borné de longueur $|I| > 2\pi/\gamma$, alors il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$C_1 \sum_{k \in K} |x_k|^2 \leq \int_I |x(t)|^2 dt \leq C_2 \sum_{k \in K} |x_k|^2$$

pour toute fonction x donnée par la somme $x(t) = \sum_{k \in K} x_k e^{iw_k t}$ avec $x_k \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k \in K} |x_k|^2 < \infty$.

Exercice : Arche cylindrique - Observabilité

$(\phi_{1,\xi} + c\phi_2)(1, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{i\Lambda_k t}$ avec

$$\Lambda_k = \begin{cases} -\mu_{-(k+1)} & \text{pour } k < -1 \\ -\mu_0 & \text{pour } k = -1 \\ \mu_0 & \text{pour } k = 1 \\ \mu_{k-1} & \text{pour } k > 1 \end{cases}$$

et

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (-1)^{-(k+1)} \frac{\mu_{-(k+1)}^2}{-(k+1)\pi} (A_{-(k+1)} + iB_{-(k+1)}) & \text{pour } k < -1 \\ \frac{c}{2} (A_0 + iB_0) & \text{pour } k = -1 \\ \frac{c}{2} (A_0 - iB_0) & \text{pour } k = 1 \\ \frac{1}{2} (-1)^{(k-1)} \frac{\mu_{(k-1)}^2}{(k-1)\pi} (A_{(k-1)} - iB_{(k-1)}) & \text{pour } k > 1. \end{cases}$$

$\varepsilon = 0$: Observability inequality in $(\text{Ker } \mathbf{A}_M)^\perp$

We note \mathbf{H}^\perp and \mathbf{V}^\perp the orthogonal of $\text{Ker } \mathbf{A}_M$ in \mathbf{H} and \mathbf{V}

Remarque

From the Korn's inequality, the energy $E(t, \phi)$ defines a norm over $\mathbf{V}^\perp \times \mathbf{H}^\perp$.

Proposition

[Observability] Let $r > 0$. For all time T such that

$$T > T^*(r) \equiv \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma = \min\left(2r^{-1}, \sqrt{r^{-2} + \pi^2} - r^{-1}\right)$$

there exist two strictly positive constants $C_1(r)$ and $C_2(r)$ such that

$$C_1(r)E(0, \phi) \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1, t) dt \leq C_2(r)E(0, \phi)$$

$\forall (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{V}^\perp \times \mathbf{H}^\perp$.

$\varepsilon = 0$: Observability inequality in $(\text{Ker } \mathbf{A}_M)^\perp$

We note \mathbf{H}^\perp and \mathbf{V}^\perp the orthogonal of $\text{Ker } \mathbf{A}_M$ in \mathbf{H} and \mathbf{V}

Remarque

From the Korn's inequality, the energy $E(t, \phi)$ defines a norm over $\mathbf{V}^\perp \times \mathbf{H}^\perp$.

Proposition

[Observability] Let $r > 0$. For all time T such that

$$T > T^*(r) \equiv \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma = \min\left(2r^{-1}, \sqrt{r^{-2} + \pi^2} - r^{-1}\right)$$

there exist two strictly positive constants $C_1(r)$ and $C_2(r)$ such that

$$C_1(r)E(0, \phi) \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1, t) dt \leq C_2(r)E(0, \phi)$$

$\forall (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{V}^\perp \times \mathbf{H}^\perp$.

$\varepsilon = 0$: Observability inequality in $(\text{Ker } \mathbf{A}_M)^\perp$

We compute that

$$E(0, \phi) = \frac{\mu_0^2}{2} (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{k^2 \pi^2} (A_k^2 + B_k^2).$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k + iB_k) e^{-i\mu_k t} + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 + iB_0) e^{-i\mu_0 t} \\ &\quad + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 - iB_0) e^{i\mu_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k - iB_k) e^{i\mu_k t}. \end{aligned}$$

We then apply Ingham's theorem with $I = (0, T)$ and the sequence

$$W = (\dots, -\mu_2, -\mu_1, -\mu_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$$

to obtain that there exists a positive constant C_1 such that

$$C_1 \left(\frac{\mu_0^2}{2} (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{(k\pi)^2} (A_k^2 + B_k^2) \right) \leq \int_0^T (\phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t))^2 dt$$

under the condition $T > 2\pi/\gamma$ with $\gamma = \min(\mu_0 - (-\mu_0), \inf_{k \in \mathbb{N}} |\mu_k - \mu_{k-1}|)$ leading to $T > T^*(r)$.

$\varepsilon = 0$: Observability inequality in $(\text{Ker } \mathbf{A}_M)^\perp$

We compute that

$$E(0, \phi) = \frac{\mu_0^2}{2}(A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{k^2 \pi^2} (A_k^2 + B_k^2).$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k + iB_k) e^{-i\mu_k t} + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 + iB_0) e^{-i\mu_0 t} \\ &\quad + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 - iB_0) e^{i\mu_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k - iB_k) e^{i\mu_k t}. \end{aligned}$$

We then apply Ingham's theorem with $I = (0, T)$ and the sequence

$$w = (\dots, -\mu_2, -\mu_1, -\mu_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$$

to obtain that there exists a positive constant C_1 such that

$$C_1 \left(\frac{\mu_0^2}{2} (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{(k\pi)^2} (A_k^2 + B_k^2) \right) \leq \int_0^T (\phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t))^2 dt$$

under the condition $T > 2\pi/\gamma$ with $\gamma = \min(\mu_0 - (-\mu_0), \inf_{k \in \mathbb{N}} |\mu_k - \mu_{k-1}|)$ leading to $T > T^*(r)$.

$\varepsilon = 0$: Observability inequality in $(\text{Ker } \mathbf{A}_M)^\perp$

We compute that

$$E(0, \phi) = \frac{\mu_0^2}{2}(A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{k^2 \pi^2} (A_k^2 + B_k^2).$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k + iB_k) e^{-i\mu_k t} + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 + iB_0) e^{-i\mu_0 t} \\ &\quad + \frac{r^{-1}}{2} (A_0 - iB_0) e^{i\mu_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k^2}{k\pi} (A_k - iB_k) e^{i\mu_k t}. \end{aligned}$$

We then apply Ingham's theorem with $I = (0, T)$ and the sequence

$$w = (\dots, -\mu_2, -\mu_1, -\mu_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$$

to obtain that there exists a positive constant C_1 such that

$$C_1 \left(\frac{\mu_0^2}{2} (A_0^2 + B_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{(k\pi)^2} (A_k^2 + B_k^2) \right) \leq \int_0^T (\phi_{1,1}(1, t) + r^{-1} \phi_3(1, t))^2 dt$$

under the condition $T > 2\pi/\gamma$ with $\gamma = \min(\mu_0 - (-\mu_0), \inf_{k \in \mathbb{N}} |\mu_k - \mu_{k-1}|)$ leading to $T > T^*(r)$.

$\varepsilon = 0$ - Minimal time of controllability

$$T^*(r) = \frac{\pi}{r-1} \chi_{(r-1 \leq \pi^2/8)} + \frac{2\pi}{\sqrt{r-2 + \pi^2} - r-1} \chi_{(r-1 > \pi^2/8)}$$

$$\sqrt{8} = T^*\left(\frac{\pi^2}{8}\right) \leq T^*(r), \quad \forall r > 0$$

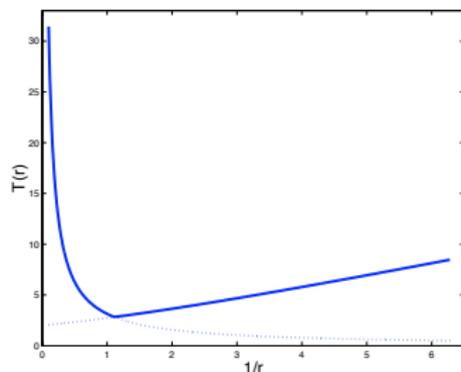


Figure: Lower bound T^* of the time of controllability T with respect to the curvature r^{-1} .

$$\forall (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{v}_0$$

$$2 \min\left(T, \frac{T^3}{3} r^{-2}\right) E_0(\phi) \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1} \phi_3)^2(1, t) dt \leq 2 \max\left(T, \frac{T^3}{3} r^{-2}\right) E_0(\phi). \quad (95)$$

$\epsilon = 0$: Uniform Observability inequality with respect to r^{-1}

We denote by \mathbf{H}_K , \mathbf{V}_K the closed subspace of \mathbf{H} and \mathbf{V} generated by \mathbf{v}_k , for all $k \geq 1$.

Proposition

Let $r > 0$. For all $T > 0$ such that

$$T > T^{**}(r) \equiv \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{r^{-2} + 4\pi^2} - \sqrt{r^{-2} + \pi^2}$$

there exist two positive constants C_1 and C_2 independent of r such that

$$C_1 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{\mathbf{V} \times \mathbf{H}}^2 \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1} \phi_3)^2(1, t) dt \leq C_2 \|(\phi^0, \phi^1)\|_{\mathbf{V} \times \mathbf{H}}^2$$

$\forall (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{V}_K \times \mathbf{H}_K$. ■

$$T^{**}(r) < T^*(r), \quad \forall r > 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} T^{**}(r) = 2.$$