

CURRICULUM VITÆ

| | |
|-------------------|--|
| NOM | Arnaud MÜNCH |
| DATE DE NAISSANCE | 4 août 1974 à La Flèche (72) |
| NATIONALITÉ | Française |
| POSITION ACTUELLE | PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS |
| LABORATOIRE | Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand |
| ADRESSE | UMR CNRS 6620 - UFR de Sciences et Techniques Université Blaise Pascal Campus des Cézeaux - Aubière- 63177 |
| EMAIL | arnaud.munch@math.univ-bpclermont.fr |
| WEB | http://math.univ-bpclermont.fr/~munch/ |
| TÉLÉPHONE / FAX | + 33 473 407 054/ +33 473 407 064 |
| MOBILE | 06 37 42 39 53 |

DOMAINE DE RECHERCHE

- Problème mathématique en mécanique du solide - Analyse Numérique - Calcul Scientifique
- Elasticité non linéaire - Mécanique de la rupture - Calcul des variations
- Théorie du contrôle et de l'optimisation - Stabilisation de système hyperbolique
- Optimisation de forme et relaxation par mesure de Young - Théorie spectrale des coques.
- Contrôle et problème inverse, approximation pour l'équation de la chaleur

DIPLÔME

- 2008 : Habilitation à diriger des recherches.
- 1999-2002 : Thèse en Mathématiques Appliquées (ONERA/ Paris VI - Financement BDI-DGA-CNRS).
- 1997-1998 : DEA Analyse Numérique / Mécanique (Université de Rennes I).
- 1996-1997 : DEA d'Analyse Mathématique (Université de Tours).

EXPÉRIENCE PROFESSIONNELLE

- 2009- : Professeur des universités à l'université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- 2004-2009 : Maître de conférence à l'université de Franche-Comté, Besançon.
- 2003-2004 : Post-doctorat at MADRID (Universidad Autonoma) dans le département de Mathématiques avec Pr. Enrique ZUAZUA.
- 2002-2003 : Post-doctorat at l'INRIA-Rocquencourt (projet MACS : Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures avec Dominique CHAPELLE.
- 1998-1999 : Service Militaire en tant que scientifique du contingent à l' "Institut Supérieur des Matériaux et Mécanique Avancées" du MANS (<http://www.ismans.fr>).

LABORATOIRE D'AFFECTION

Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand - UMR CNRS 6620 : Directeur : Mickael HEUSENER

Ecole Doctorale Louis Pasteur : Directeur : Mironel ENESCU

Mes travaux concernent l'étude de problèmes mathématiques appliquées à la mécanique des solides. On y distingue les trois axes de recherches non-indépendants suivants : i) *Modélisation en calcul des structures (fissuration et coques)* ii) *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes dynamiques* iii) *Relaxation pour des problèmes d'optimisation de forme.*

TRAVAUX LIÉS À LA THÈSE DE DOCTORAT

Le premier point de mes axes de recherche concerne la modélisation en calcul des structures (fissuration et coque). Ce point a été abordé lors de ma thèse de troisième cycle effectuée à l'ONERA et à PARIS VI [1]. Cette thèse a eu pour thème d'une part la modélisation de la propagation des fissures dans les coques composites stratifiées [2,4] et d'autre part, l'analyse et la modélisation des joints collés [3,5,6]. Le modèle de la propagation du front de fissure est obtenu, dans le cadre de la mécanique de la rupture, en utilisant le critère de Griffith (introduit en 1921) postulant la croissance du front si le taux de restitution de l'énergie associé excède une valeur critique, déterminée expérimentalement. Ce taux de restitution est défini comme la variation de l'énergie de déformation par rapport à la variation infinitésimale du front, se calcule explicitement en utilisant les techniques de variation de domaine. La réécriture préalable du système de l'élasticité tridimensionnelle dans le repère local attaché à la surface moyenne de la coque rend ce calcul très technique. Le critère de Griffith, revisité récemment dans plusieurs travaux, peut être vue comme un principe de moindre énergie du système mécanique. Précisément, l'état du front de fissure à chaque équilibre minimise l'énergie totale, somme de l'énergie mécanique et de l'énergie dite de rupture. Ce faisant, la propagation de la fissure se ramène à un problème de frontière libre, étudié classiquement par les méthodes d'optimisation de forme. D'un autre côté, l'analyse des modèles de joint collé consiste à étudier le comportement asymptotique par rapport à un paramètre ϵ d'un assemblage formé de deux adhérents joint par un adhésif. Le paramètre ϵ intervient dans le rapport entre les épaisseurs et rigidités des différents constituants. L'analyse fait apparaître des modèles non linéaires de joint collé, lequel disparaît d'un point de vue géométrique et est remplacé par une énergie dite d'adhésion (non linéaire par rapport au saut du déplacement transverse) définie sur la surface moyenne. Les outils précédents permettent alors l'étude de la rupture du joint dans ce cadre asymptotique.

TRAVAUX EFFECTUÉS DEPUIS LA THÈSE JUSQU'À L'HABILITATION

Le travail [8] en collaboration avec DOMINIQUE CHAPELLE et CHRISTINEL MARDARÉ, effectué au cours d'un séjour post-doctoral à l'INRIA, reste dans le cadre asymptotique et étudie si le passage à la limite de l'épaisseur vers zero et celui du coefficient de Poisson vers $1/2$ (limite incompressible) commutent. L'objectif étant notamment l'étude des coques quasi-incompressibles utilisées dans la fabrication des pneumatiques. La réponse est positive pour les modèles de coques minces mais

négligée pour des modèles enrichis, dits de coque 3-D, prenant en compte le mode de pincement dans l'épaisseur. Pour ces derniers, on montre que la commutation est retrouvée en éliminant un terme de l'énergie, s'apparentant à une technique de déverouillage au niveau continu.

Avec le séjour post-doctoral effectué à Madrid avec ENRIQUE ZUAZUA dans le cadre du Réseau Européen "TMR Smart System", apparaît un nouvel axe de recherche : la contrôlabilité (exacte) des systèmes dynamiques hyperboliques. Si la thématique est différente, les équations et systèmes mis en jeu sont similaires. Un premier travail [13] en collaboration avec ADEMIR FERNANDO PAZOTO a concerné l'approximation numérique uniforme d'une équation des ondes amorties homogène. Le système associé est dissipatif et l'énergie décroît exponentiellement avec le temps. Cette propriété est uniformément perdue lorsque l'on approxime le système par les schémas numériques usuels : dans ce cas, approximation numérique et décroissance exponentielle ne commutent pas. L'introduction d'un terme de viscosité, défini sur tout le domaine, a pour effet de filtrer les hautes fréquences et ainsi de restaurer cette commutativité. Le phénomène est similaire mais plus subtil dans le cadre de la contrôlabilité exacte, frontière ou interne de l'équation des ondes. Cela est dû au phénomène de dispersion numérique : précisément le schéma numérique introduit des modes parasites haute-fréquence dont la vitesse de propagation est de l'ordre du paramètre d'approximation. Ce faisant, ces modes ne peuvent pas être observés en temps uniforme par le contrôle (exception faite du cas peu intéressant lorsque le contrôle agit sur tout le domaine). CARLOS CASTRO, SORIN MICU et moi-même avons introduit dans [16] un schéma semi-discret en espace, uniformément contrôlable : précisément, nous démontrons que le contrôle frontière de norme L^2 -minimale, ramenant à zéro l'énergie discrète de ce système, converge en norme L^2 vers le contrôle de norme L^2 -minimale du système continu, lorsque le paramètre d'approximation en espace tend vers zéro. J'ai ensuite proposé une solution, dans le cas alors ouvert, de l'approximation complète temps-espace [7,9]. Disposant alors de méthodes d'approximation robustes, il est alors intéressant d'optimiser la forme et la position du support soit du contrôle exacte, soit du terme d'amortissement. Dans le premier cas, on cherche le support, de mesure donnée, du contrôle optimal parmi tous les HUM-contrôles associés (c'est à dire qui a support donné minimise la norme L^2) : il s'agit ainsi d'une double optimisation [15,17]. Dans le second cas, on cherche le support du terme d'amortissement pour l'énergie du système est minimale à un instant donné [24]. La méthode d'approximation de ces problèmes d'optimisation de forme utilise le cadre de la méthode de level set, laquelle permet de travailler sur un maillage fixe. D'un point de vue qualitatif, les résultats numériques illustrent l'existence d'un nombre arbitraire de minima locaux, et ainsi le caractère mal posé de ce type de problème. A la faveur d'une visite de GIUSSEPE GEYMONAT au laboratoire, une étude en collaboration également avec FARID AMMAR-KHODJA est menée sur la contrôlabilité exacte frontière des systèmes dynamiques modélisant les vibrations des arches et des coques élastiques (voir [21]). Pour ces systèmes, il n'y a pas contrôlabilité uniforme par rapport à l'épaisseur. Cela est dû à la perte de compacité dans la transition coque/membrane : l'opérateur membranaire limite présente alors un spectre essentiel : la contrôlabilité est obtenue en raisonnant sur l'orthogonal de l'espace propre associé à ce spectre. Enfin, la contrôlabilité exacte d'un système de piezo-electricité a été étudié récemment avec BERNADETTE MIARA ([28]). De même, le cas de la stabilisation pour un système non-linéaire est traité dans [26].

Un troisième axe de recherche, initié en 2005 en collaboration avec le groupe OMEVA du professeur PABLO PEDREGAL s'attache alors à obtenir des relaxations pour des problèmes d'optimisation de forme associés à des systèmes hyperboliques dépendant du temps : c'est à dire des formulations bien posées (dites relaxées), et dont le minimum coïncide avec l'infimum du problème initial. Signalons que la majorité des travaux dans ce sens concernait jusqu'alors les systèmes elliptiques indépendants du temps. Dans le cas hyperbolique, la présence du temps rend nettement plus difficile le processus de relaxation. Principalement, deux méthodes permettent aujourd'hui d'obtenir des relaxations : d'une part la méthode de l'homogénéisation, et d'autre part l'approche variationnelle non convexe basée sur le calcul d'enveloppe quasi-convexe. Les résultats obtenus avec FAUSTINO MAESTRE, PABLO PEDREGAL et FAUSTINO PERIAGO du groupe OMEVA s'inscrivent dans ce dernier cadre.

Le premier résultat concerne l'équation des ondes amorties mentionnées plus haut [11,12] où il apparaît que la reformulation relaxée dérive simplement de la formulation initiale en remplaçant l'ensemble des fonctions caractéristiques par son enveloppe convexe pour la topologie faible étoilée, i.e. l'ensemble des densités. Ce résultat attendu dans la mesure où l'inconnue de forme apparaît dans le terme d'ordre 0 de l'équation d'état a été ensuite étendu où cas de l'opérateur de l'élasticité linéaire. Le calcul explicite du quasi-convexifié -en utilisant la mesure de Young - dans le cas où l'inconnue de forme apparaît dans le terme de divergence, plus usuel en homogénéisation, conduit à des formulations plus évoluées. Il y apparaît notamment la moyenne harmonique de la densité. On se réfère ainsi aux travaux [14] et [18]. Il est important de noter que dans ces cas, on obtient des matériaux dits dynamiques (la distribution optimale varie en espace mais aussi en temps !). Le cas de l'équation de la chaleur a été étudié et comparé avec la méthode de l'homogénéisation : on obtient notamment le fait non trivial que la distribution optimal de deux matériaux minimisant le flux de chaleur dans un interval de temps fixé est indépendante du temps [20].

Il devient alors intéressant de mélanger ces différentes notions et ainsi obtenir des résultats pour des systèmes complexes. Nous avons ainsi considéré la relaxation du problème d'optimisation de forme qui consiste à minimiser le taux de restitution de l'énergie d'une structure fissurée par rapport à la distribution de deux matériaux [29]. De la même façon, on peut minimiser ce taux par rapport à l'amplitude et la position d'un chargement frontière additionnel (agissant ainsi comme une contre-force à la force initiale et fixe responsable de l'accroissement du taux) (travail en collaboration avec PATRICK HILD [22,27]. La relaxation interne par mesure de Young pour le taux de restitution est traité dans [29].

TRAVAUX RÉCENTS ET EN COURS

Mes travaux récents portent des questions de contrôlabilité exacte. De nombreuses questions ouvertes et originales demeurent concernant les coques minces, aussi bien dans le cas membranaire que dans le cas en flexion. Les travaux en cours portent sur une analyse fine du spectre de l'opérateur des coques lorsque l'épaisseur tend vers zéro. L'analyse fait apparaître une densification du spectre de l'opérateur des coques sur \mathbb{R}^+ tout entier lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Cela est dû à la présence du spectre essentiel pour l'opérateur limite et à une couche limite près du bord. Il en résulte que contrôlabilité exacte et passage à la limite dans l'épaisseur ne commutent pas. L'étude revient alors à déterminer pour quelle classe de donnée initiale une telle propriété -naturelle dans la pratique - a lieu. Par ailleurs, dans le cas de l'ANR Conum (Contrôlabilité numérique et application à la biologie) en collaboration avec le groupe contrôle d'Aix-Marseille I, je m'intéresse maintenant à la contrôlabilité des systèmes de réaction-diffusion modélisant la propagation des cellules cancéreuses. Ces systèmes sont non linéaires et paraboliques et pour lesquels il convient de faire une analyse numérique approfondie (travail en collaboration avec FRANCK BOYER et FLORENCE HUBERT). Des expériences numériques montrent que la détermination du contrôle de norme L^2 -minimal pour l'équation de la chaleur est exponentiellement mal posé, et ce fait aussi difficile que le cas des ondes. Précisément, la norme L^2 en espace du contrôle présente une couche limite proche du temps de contrôlabilité. Plusieurs analyses autour de ce problème très délicat sont en cours, notamment et séparément avec ENRIQUE FERNANDEZ-CARA et ENRIQUE ZUAZUA. Par ailleurs, cette thématique fait également l'objet de la thèse de KARINE MAUFFREY, co-encadrée avec FARID AMMAR-KHODJA. Ce point s'inscrit dans la thématique des mathématiques pour la biologie, actuellement en plein essor. Un co-encadrement de thèse est également prévu avec FRANCISCO PERIAGO et ALBERTO MURILLO sur la contrôlabilité dans le cas non cylindrique où le support varie avec le temps.

ACTIVITÉ ET ANIMATION SCIENTIFIQUE

- 2006-2010 Titulaire de la Prime de recherche et d'encadrement doctorale.
- 22-24 JUIN 2006 Organisation d'un colloque à Besançon "Inequality and contact problem in Mechanics" (avec M. Bostan et P. Hild)
- 2005-2008 Membre de l'ANR "Jeunes chercheurs" ANR-05-JC-0182-0, intitulée "*Variational inequality in solids mechanics : analysis and simulations*" avec M. Bostan (Besançon), P. Hild (Besançon, Coordinateur) et Y. Renard (INSA-Lyon).
- 2005- Membre extérieur du groupe OMEVA (Optimisation et Méthode VAriationnelle) coordonné par le Prof. Pablo Pedregal, commun au université de de Castilla-La-Mancha (Ciudad Real) et de Murcia (Carthagène)- (<http://matematicas.uclm.es/omeva/>)
- 26-27 SEPTEMBRE 2007 Organisation d'un colloque "Inverse Problem and Control" (avec C. Dupaix et F. Ammar-Khodja)- financé par le conseil régional de Franche-Comté
- 2007-2010 Membre de l'ANR "Jeunes chercheurs" ANR-07-JC-0139-01, intitulé "*Control, Inverse Problem and Numerics : Application to biology*" avec C. Dupaix, F. Ammar-Khodja (Besançon) et A. Benabdallah, F. Boyer, F. Hubert, J Le Rousseau (Coordinateur) (LATP, Marseille).
- 2004-2007 Responsable du séminaire d'analyse numérique.
- 2004- Reviewer for AMS and Referee pour Esaim : COCV, Journal of Optimization, Theory and Applications, Journal de Mathématiques Pure et Appliquée, Portugliae Mathematicae, Numerisch Mathematics, IMA J. Applied Mathematics, SIAM control and optimization, Structural Optimization, etc.
- 2006- : Membre élu du conseil scientifique du laboratoire et de la CSE 25-26.
- 2008-2009 : Financement par le conseil regional de financement d'un projet de deux années sur les contrôles des cellules cancéreuses (en collaboration avec F. Ammar-Khodja et les équipes de Nancy, Metz et Mulhouse). Montant du financement : 10Keuros
- 19 JUIN 2008 : Organisation d'une journée numérique au laboratoire avec Mihai Bostan (4 exposés d'une heure).
- 31 OCTOBRE 2008 : Organisation d'une journée d'analyse numérique au laboratoire (6 exposés de 50 minutes de G. Allaire, E.Fernandez-Cara, J-P. Raymond, J. Rappaz, A. Henrot et D. Chapelle).
- FEVRIER 2009 : Membre du comité scientifique du congrès "Control and Inverse problems in PDE : Theoretical and Numerical Aspects" qui aura lieu au CIRM (Luminy-Marseille).
- AVRIL 2010 : Membre du comité d'organisation du prochain congrès Picof'10 (Problème inverse, Contrôle et Optimisation de forme) qui aura lieu à Cartagena (Province de Murcia, Espagne).
- 2007-2010 Membre de l'ANR "Jeunes chercheurs" ANR-07-JC-0139-01, intitulé "*Control, Inverse Problem and Numerics : Application to biology*"
- 2008-2011 Membre d'un projet espagnol (08720/PI/08- Fundacion Seneca - Gobierno Regional de Murcia). Les deux autres membres sont F. Periago et A. Murillo (Cartagena). Le projet porte sur la thematique du controle pour des domaines non-cylindrique. Financement : 27Keuros.

ENCADREMENT ET CO-ENCADREMENT D'ÉTUDIANTS

- Avril-Juin 2000 Laurent DROMER, Master d'analyse numerique de Paris VI.
- Avril-Juin 2001 : David FORICHER, Master de Mathématiques appliquées de l' X-ENSTA.

- Février-Juin 2006 : Guillaume JOUVET, Master de Mathématique de Besançon.
- Février-Juin 2007 : Jean-Christophe KOLB, Master de Mathématique de Besançon (actuellement en thèse à l'EPFL).
- Avril-Septembre 2008 : Karine MAUFFREY, Master de Mathématique de Besançon (co-encadrement avec F. AMMAR-KHODJA).
- Septembre 2008- : Co-Encadrement avec F. AMMAR-KHODJA de la thèse de troisième cycle de K. MAUFFREY (Bourse de Région) sur la contrôlabilité exacte et approchée de quelques modèles non-linéaires de réaction-diffusion avec application à la biologie.

ENSEIGNEMENT À BESANCON

Depuis mon arrivée à Besancon en septembre 2004, j'assure chaque année les cours de Mathématique à l'ISIFC (Institut supérieur des ingénieurs de Franche-Comté), école d'ingénieur rattachée à l'université. Les cours, travaux dirigés et travaux pratiques portent sur l'algèbre linéaire, le calcul différentiel et intégral, les série et transformée de Fourier, la transformée de Laplace, la méthode des différences finies, la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. En 2007-2008, j'ai obtenu une délégation du CNRS de 6 mois. Les quatres derniers services se décomposent de la facon suivante :

- 2008-2009 : **201.5 heures equivalent TD** : 35.5 TD + 4.5TP Analyse Appliquée (L2) - 20CM+40TD Discretisation des EDP (L3) - 6h CM controle en M2 recherche - 24CM + 48 TD de mathématique générale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier semestre)
- 2007-2008 : **95 heures equivalent TD** : 39 TD Analyse Appliquée (L2) - 16h CM contrôle en M2 recherche - 16CM + 8 TD d'analyse numerique à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 second semestre)
- 2006-2007 : **216.5 heures equivalent TD** : 26.5TD analyse Starter SVT - 12CM+22TD+21TP en M1 Master Pro sur le contrôle des systemes dynamique avec application à la finance - 16h CM contrôle en M2 recherche - 48CM+32TD+12TP de mathématique générale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier et second semestre)
- 2005-2006 : **203 heures equivalent TD** : 47TD d'algèbre numérique en L2 - 20 TD d'encadrement de deux projets de L3) 48CM+32TD+48TP de mathématique générale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier et second semestre)

ENSEIGNEMENT EN MASTER

- Février-Mai 2007- Cours en Master I Pro (Statistique-Probabilité) : "*Introduction au contrôle optimal et application à la finance*" - 12 étudiants - 48 h.
- Février-Avril 2007- : Cours en Master II Recherche : "*Contrôlabilité exacte et optimisation de forme pour des systèmes dynamique hyperbolique*" - 3 étudiants - 16h.
- Février-Avril 2008- : Cours en Master II Recherche : "*Contrôlabilité exacte et optimisation de forme pour des systèmes dynamique hyperbolique*" - 3 étudiants - 16h.
- Décembre 2008- : Cours en Master II Recherche : "*Introduction à la théorie du contrôle pour l'équation des ondes*" - 5 étudiants - 6h.

THÈSE

1. **Thèse de Doctorat** en Mécanique Théorique soutenue le 18 septembre 2002 à l'université Paris VI ;
Titre : *Modélisation théorique et numérique de la propagation de front de fissure dans les coques minces élastiques* -
Jury : Y. OUSSET (Directeur), F. KRASUCKI (Directrice), J-B. LEBLOND (Président), J-J. MARIGO (Rapporteur), F. LEBON (Rapporteur), P. DESTUYNDER (Examinateur), J-L. CHABOCHE (Examinateur).
2. **Habilitation à diriger des recherches** en Mathématiques Appliquées soutenue le 30 octobre 2008 à l'université de Besançon ;
Titre : *Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques* -
Jury : G. ALLAIRE (Rapporteur), P. DESTUYNDER (Rapporteur), E. ZUAZUA (Rapporteur), J-P. RAYMOND (Président), P.HILD (Examinateur), J. RAPPAZ (Examinateur), D. CHAPPELLE (Examinateur), A. HENROT (Examinateur), E. FERNANDEZ-CARA (Examinateur).

PUBLICATION

1. *Energy release rate for a thin curvilinear beam* avec Y. Ousset (Paris), C.R.Acad.Sci. Paris, t.**328**, Série IIb, 471-476 (2000).
2. *Asymptotic analysis of a bonded joint in nonlinear elasticity* avec F. Krasucki (Montpellier) et Y. Ousset, C.R.Acad.Sci. Paris, **329**, Série IIb, p.429-434 (2001).
3. *Numerical simulation of delamination growth in curved interfaces* avec Y.Ousset, Comp. Meth. Appl. Mech. and Engrng, **191**(19-20), 2073-2095 (2002).
4. *Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joints* with F. Krasucki and Y. Ousset, Int. J. of Solids and Structures, **39/26**, 6355-6383 (2002).
5. *Mathematical analysis of nonlinear joints models* avec F. Krasuki et Y. Ousset, Math. Models Meth. Appl. Sci., **14**(4), 535-556 (2004).
6. *Family of implicit and controllable schemes for the 1-D wave equation*, C.R.Acad.Sci. Paris Série I **339**, 733-738 (2004).
7. *Asymptotic consideration shedding light on the incompressible shell models* avec D. Chapelle (INRIA) et C. Mardaré (Paris VI), J. of Elasticity, **76**(3), 199-246 (2004).
8. *A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-D wave equation*, Esaim : Mathematical Modeling and Numerical Analysis, **39**(2), 377-418 (2005).
9. *Un problème d'optimisation de forme pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes 2D*. C.R.Acad.Sci. Paris Série I **343**(3), 2006, 213-218.
10. *A variational approach to a shape design problem for the wave equation*, avec P. Pedregal (Ciudad Real) et F. Periago (Cartagena). C.R.Acad.Sci. Paris Série I **343**(5), 2006, 371-376.
11. *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, avec P. Pedregal et F. Periago. Journal of Differential Equations, **231**(1), 330-353 (2006).

12. *Uniform stabilization of a viscous numerical approximation scheme for a locally damped wave equation* avec A.F. Pazoto (Rio de Janeiro), *Esaim : Control, Optimization and Calculus of Variation*, **13(2)**, 265-293 (2007)
13. *A spatio-temporal design problem for a damped wave equation*, avec F. Maestre (Ciudad Real) et P. Pedregal, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **68(1)**, 109-132 (2007).
14. *Optimal design of the support of the control for the 2-D wave equation : numerical investigations*, *Int. J. Numerical Analysis and Modeling*, **5(2)**, 331-351 (2008).
15. *Boundary controllability of a semi-discrete wave equation on the unit square with mixed finite elements*, avec C. Castro (Madrid) et S. Micu (Craiova, Romania). *IMA J. Numerical Analysis*, **28(1)**, 186-214 (2008).
16. *Optimal design under the one-dimensional wave equation*, avec F. Maestre (Univ. Ciudad Real) et P. Pedregal (Univ. Ciudad Real). *Interface and Free Boundaries Journal* **10(1)**, 87-117, (2008).
17. *Relaxation of an optimal design problem for the Heat equation*, avec P. Pedregal et F. Periago. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. **89(3)** 225-247 (2008).
18. *On the exact controllability of mixed order system with essential spectrum*, avec F. Ammar-Khodja (Besancon) et G. Geymonat (Montpellier). *C.R. Acad. Sci., Série Mathématique*. **346(11-12)**, 629-634 (2008)
19. *On the control of crack growth in elastic media*, avec P. Hild (Besancon) and Y. Ousset. *C. R. Acad. Sci. Série Mécanique*, **336(5)**, 422-427 (2008).
20. *Boundary stabilization on a nonlinear arch : Theoretical vs. Numerical Analysis*. with A.F. Pazoto. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, **10(1)**, 197-219 (2008).
21. *On the active control of crack growth in elastic media*, with P. Hild (Besancon) and Y. Ousset. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **198**, 407-419 (2008).
22. *Optimal internal stabilization of a damped wave equation by a topological approach*. *Int. J. Applied Mathematics and Computer Science*, **19(1)**, 15-37 (2009).
23. *Optimal location of the support of the control for the 1-D wave equation : numerical investigations*, *Computational Optimization and Applications*, **42**, 443-470 (2009).
24. *Controllability of a piezoelectric body. Theory and numerical simulation*, with B. Miara (ESIEE, Marne-La-Vallée). *Applied Mathematics and Optimization*, **59(3)**, 383-412 (2009).
25. *An optimal design problem for the stabilization of the linear system of elasticity*, avec P. Pedregal (Univ. Ciudad Real) et F. Periago (Univ. Cartagena). *Arch. Rat. Mech. Anal.* **193(1)** 171-193 (2009).
26. *An implicit scheme uniformly controllable for the 2-D wave equation on the unit square*, avec M. Asch (Université d'Amiens). To appear in *Journal Optimization Theory and Application*. **143(3)** 417-438 (2009).
27. *Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanic*, avec P. PEDREGAL. A paraître dans *Esaim : COCV* (doi : 10.1051/cocv/2009019).
28. *Exact controllability of a string submitted to a boundary unilateral obstacle*, avec F. Ammar-Khodja et S. Micu. A paraître dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Série C*.

PRÉ-PUBLICATION

1. *Exact boundary controllability of a Bernoulli cylindrical arch*. En revision dans IMA Journal of Control.
2. *Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation*, avec G. Allaire (CMAP,X) et F. Periago.
3. *Numerical null controllability of the 1D heat equation : primal algorithms*, avec E. Fernandez-Cara (Sevilla).
4. *Numerical approximation of trajectory controls for the heat equation through transmutation*, avec E. Zuazua (Bilbao).
5. *Optimal distribution of the internal null control for the 1D heat equation*, avec F. Periago (Cartagena).
6. *Exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum*, avec F. Ammar-Khodja et K. Mauffrey.

EN PRÉPARATION

1. *Numerical null controllability of the 1D heat equation : dual algorithms*, avec E. Fernandez-Cara (Sevilla).
2. *On the controllability of a membrane dominated shell*, avec F. AMMAR-KHODJA (Univ. Besancon) and G. GEYMONAT (Montpellier).
3. *On the singular control of degenerated mixed order system derived from shell theory*

RAPPORT

1. *A New algorithm for evaluating the in-circle LLL predicate* avec O. BEAUMONT (Bordeaux), Research report INRIA n° **1312**, 2000.
2. Wavecontrol : a program for the control and stabilization of waves. Manual (2005) [avec C. CASTRO, M. CEA, S. MICU, M. NEGREANU et E. ZUAZUA]
3. *Optimal design of the support of the control for a parabolic equation*, Non soumis, 2007.

CONFÉRENCE INTERNATIONALE

- [JUN 2001](#) European Conference on Computational Mechanics, Cracow Poland - [MAI 2001](#) *VI^{ieme}* colloque national en calcul des structures - [SEPTEMBRE 2001](#) Congrès Français de Mécanique, Nancy - [SEPTEMBRE 2002](#) 14th European Conference on Fracture - [MAI 2002](#) *34^{ieme}* congrès d'Analyse numérique, Anglet - [MAI 2003](#) *VI^{ieme}* colloque national en calcul des structures, Giens 20-23 - [JUN 2003](#) *35^{ieme}* congrès d'analyse numérique, La grande Motte - [JUN 2004](#) *36^{ieme}* congrès d'analyse numérique, Strasbourg - [JUILLET 2004](#) *4th* ECCOMAS04, Jyväskylä, Finlande - [JUN 2005](#) 2ème congrès SMAI, Evian - [MAI 2005](#) *VII^{ieme}* colloque national en calcul des structures, Giens - [SEPTEMBRE 2005](#) 16th IFAC World

Congress, Prague - [AUGUST 2006](#) International congress of mathematicians, Madrid - [AUGUST 2006](#) 8^{ieme} colloque Franco-Roumain, Chambéry - [SEPTEMBRE 2006](#) V^{ieme} Workshop on PDE, Rio de Janeiro - [JUILLET 2007](#) ICIAM 07, Zurich - [JUILLET 2007](#) WAVES07, Reading - [SEPTEMBRE 2007](#) CEDYA, Sevilla - [AVRIL 2008](#) Picof'08, Marrakech - [FEVRIER 2009](#) Control and Inverse Problems, Luminy - [JUN 2009](#) WCSMO-8, Lisbonne - [JUILLET 2009](#) CDPS Toulouse

SÉMINAIRE EN FRANCE ET À L'ÉTRANGER AVANT SEPTEMBRE 09

- [5 MAI 2009](#) Université d'Amiens - [24 AVRIL 2009](#) BCAM, Bilbao - [14 AVRIL 2009](#) Université de Strasbourg - [10 AVRIL 2009](#) Université de Limoges - [17 MARS 2009](#) Université de Seville - [3 MARS 2009](#) MIP, Toulouse 3 - [24 FÉVRIER 2009](#) Institut Elie Cartan, Nancy I - [19 FÉVRIER 2009](#) CIRM- Luminy - [18 DÉCEMBRE 2008](#) Université de Tours - [10 DÉCEMBRE 2008](#) EPFL- Lausanne - [5 JUIN 2008](#) Université d'Avignon - [7 MAI 2008](#) Université de Rome I - [23 JANVIER 2008](#) Université de Castilla-La-Mancha - [20 DÉCEMBRE 2007](#) ENSTA Paris - [5 DÉCEMBRE 2007](#) Université de Castilla-La-Mancha (Espagne) - [30 OCTOBRE 2007](#) Université de Cartagena (Spain) - [2 OCTOBRE 2007](#) Aix-Marseille I, LATP - [27 SEPTEMBRE 2007](#) Université de Besançon - [3 MAI 2007](#) UFRJ- Rio de Janeiro (Brazil) - [26 AVRIL 2007](#) IMPA- Rio de Janeiro - [24 AVRIL 2007](#) LNCC - Petropolis (Brésil) - [11 JUIN 2006](#) Université d'Aix-Marseille I - [8 FÉVRIER 2006](#) ENS Cachan (Bruz) - [3 FÉVRIER 2006](#) Ciudad Real - [31 JANVIER 2006](#) Université de Picardie (Amiens) - [20 DÉCEMBRE 2005](#) Ecole Polytechnique (Palaiseau) - [31 AOUT 2005](#) Benasque (Espagne) - [31 MAI 2005](#) Université d'Aix-Marseille I (LATP) - [5 MAI 2005](#) Université de Carthagena (Espagne) - [MARCH 2, 2005](#) INSA Toulouse - [1 MARS 2005](#) Université de Toulouse - [8 OCTOBRE 2004](#) Université de Besançon - [APRIL 10, 2003](#) Université de Besançon - [28 JUNE 2001](#) Université de Paris VI - [25 MAI 2000](#) Université de Paris VI.

SÉMINAIRE/CONFÉRENCE À PARTIR DE SEPTEMBRE 09

- [13 NOVEMBRE 2009](#) - On the approximation of null controls for the 1D heat equation, *Journée Inter-Labo JERA* Grenoble.
- [28 SEPTEMBRE 2009](#) - On the ill-posedness of the numerical null controllability of the 1D heat equation, *Workshop Control and Inverse problems of systems governed by PDEs*, Seville.
- [12 SEPTEMBRE 2009](#) - Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation, *International workshop on homogenization and optimal design*, Seville.

SÉJOUR DE RECHERCHE À L'ÉTRANGER

- [OCTOBRE 2003-SEPTEMBRE 2004](#) MADRID - [MAI 2005](#) CARTAGENA - [MAI 2007](#) RIO DE JANEIRO - [OCTOBRE 2007-JANVIER 2008](#) CIUDAD REAL - [MAI 2008](#) ROME - [JANVIER-FEVRIER 2009](#) ECOLE POLYTECHNIQUE- PALAISEAU - [MARS 2009](#) SEVILLE - [AVRIL 2009](#) BILBAO - [JANVIER 2010](#) CARTAGÈNE

COLLABORATEUR

- Yves OUSSET (ONERA, Paris) - Françoise KRASUCKI (Montpellier) - Dominique CHAPELLE (INRIA Rocquencourt) - Ademir Fernando PAZOTO (Rio de Janeiro, Brésil) - Carlos CASTRO (Madrid) - Sorin MICU (Craiovie, Roumanie) - Enrique ZUAZUA (Madrid) - Farid AMMAR-KHODJA (Besançon) - Francisco PERIAGO (Cartagena, Espagne) - Faustino MAESTRE (Ciudad Real, Espagne) - Pablo PEDREGAL (Ciudad Real) - Franck BOYER (Aix-Marseille II) - Florence HUBERT (Aix-Marseille I) - Patrick HILD (Besançon) - Giuseppe GEYMONAT (Montpellier) - Marc ASCH (Amiens) - Bernadette MIARA (Marne-La-Vallée) - Paola LORETI (Rome), Enrique FERNANDEZ-CARA (Seville), Michel MEHRENERBERGER (Strasbourg).

PRIX

- Prix du meilleur poster Section "Control Theory and Optimization" au Congrès International des Mathématiciens (ICM), Madrid 2006.

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE D'HABILITATION

Ce document de synthèse des travaux effectués depuis septembre 2004 comporte deux parties non indépendantes : la première aborde la résolution de quelques problèmes de contrôlabilité exacte. La seconde s'inscrit dans la thématique de l'optimisation de forme utilisant des techniques de relaxation.

La première partie aborde l'approximation numérique de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes posée sur des cylindres bornés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, c'est-à-dire l'approximation de fonctions $v \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)$ telles que pour tout $T > 2$ et $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, la solution unique de

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ y = v \mathcal{X}_{\Gamma_0}, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1) & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

vérifie $(y(T, \cdot), y'(T, \cdot)) = (0, 0)$. De telles fonctions existent lorsque le triplet (Ω, Γ_0, T) vérifie la condition d'optique géométrique. Leur approximation est délicate dans la mesure où l'usage des schémas numériques convergents usuels conduit, pour une large classe de données initiales, à une suite de contrôles $(v_h)_h$ - indicée par le paramètre d'approximation h - non uniformément bornée par rapport à h : précisément, la norme L^2 de v_h diverge exponentiellement. On dit que de tels schémas ne sont *pas uniformément contrôlables*. Cette non-commutation entre approximation numérique et contrôlabilité exacte est connue depuis les travaux du groupe de ROLAND GLOWINSKI et a été analysée plus récemment par le groupe de ENRIQUE ZUAZUA. Elle est due aux hautes fréquences - générées par l'approximation numérique - dont la vitesse de groupe est de l'ordre de h et qui ne peuvent être observées par la zone Γ_0 , support du contrôle en un temps uniforme. En d'autres termes, le spectre numérique associé à ces schémas - à l'image du schéma à trois points centré en dimension 1 ou du schéma à cinq points en dimension 2, présente au moins un point d'accumulation. Déterminer des schémas éliminant cette pathologie est facile : il suffit par exemple de

relaxer la condition de contrôlabilité et de chercher une suite $(v_h)_h$ telle que $(y_h(T), y'_h(T)) = O(h)$. Déterminer des schémas uniformément contrôlables efficaces, c'est-à-dire, d'une part assurant une vitesse convergence de la norme $\|v_h\|_{l^2}$ conforme au degré d'approximation, et d'autre part, conduisant à une condition de stabilité CFL raisonnable, est nettement moins facile. Une méthode simple consiste à éliminer ces hautes fréquences par une technique de filtrage numérique. Citons également les méthodes multi-grilles qui s'apparentent à une technique de projection hors de ces fréquences. Une autre possibilité, exploitée ici, consiste à redresser le spectre pour les hautes fréquences et ainsi éliminer tout point d'accumulation. Dans le cadre des différences finies en une dimension d'espace, nous montrons que le schéma suivant :

$$(\bar{\mathcal{S}}_{h,\Delta t}) \begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} + \frac{1}{4}(h^2 - \Delta t^2)\Delta_h \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, & (0, T) \times (0, 1) \\ y_{h,\Delta t}(t, 0) = 0, \quad y_{h,\Delta t}(t, 1) = v_{h,\Delta t}(t), & (0, T) \\ (y_{h,\Delta t}(0, \cdot), y_{h,\Delta t}(0, \cdot)) = (y^0, y^1) \end{cases}$$

sous la condition $T > 2 \max\left(1, \Delta t^2/h^2\right)$ est uniformément contrôlable. Cette inégalité conduit à la condition de stabilité

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

L'équation principale est formellement la discrétisation de l'équation $y'' - y_{xx} + \epsilon(h, \Delta t)y''_{xx} = 0$, $\epsilon(h, \Delta t) = (h^2 - \Delta t^2)/4$, non contrôlable en raison de ce terme singulier d'ordre 4. Au niveau discret, ce terme qui s'annule lorsque $h = \Delta t$, conduit à un spectre $(\lambda_{k,h,\Delta t})_{1 \leq k \leq J}$ bien séparé (sans point d'accumulation) : en particulier, l'écart de la racine carrée des deux dernières valeurs propres est

$$\sqrt{\lambda_{J,h,\Delta t}} - \sqrt{\lambda_{J-1,h,\Delta t}} = \pi h^2 \Delta t^{-2} + o(h^2).$$

La démonstration de la contrôlabilité uniforme de ce schéma d'ordre deux repose sur l'utilisation du célèbre lemme d'Ingham adapté au cas discret. La mise en œuvre numérique confirme la convergence de $\|v_h\|_{l^2(0,T)}$ en $O(h)$, en particulier dans le cas le plus sévère de données y^0 discontinues. Par ailleurs, le conditionnement numérique de l'opérateur HUM correspondant est polynomial en $O(h^{-2})$ à comparer au comportement exponentiel pour les schémas usuels. Enfin, remarquons que la condition de stabilité CFL est d'autant moins restrictive que le temps de contrôlabilité T - supérieur à 2 - est grand. Nous traitons également le cas de la dimension deux d'espace pour lequel le schéma standard à cinq points n'est pas uniformément contrôlable. En revanche, pour le carré unité, le schéma semi-discret élément fini mixte obtenu par une approximation \mathbb{Q}_1 de la position y et \mathbb{Q}_0 de la vitesse y' sur chaque quadrangle est uniformément contrôlable en h . L'observabilité uniforme est obtenue en utilisant la méthode des multiplicateurs discrets. La résolution numérique exacte en temps - s'appuyant sur la connaissance explicite des fonctions et valeurs propres - du problème de la contrôlabilité illustre la robustesse de ce schéma. Un autre schéma uniformément contrôlable est celui obtenu formellement de la discrétisation par différence finie centrée de l'équation

$$\left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_1}^2\right)\left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_2}^2\right)y'' - \Delta y = 0, \quad (0, T) \times (0, 1)^2.$$

Cependant, après discrétisation en temps, il apparaît que la vitesse de groupe associée au schéma aux éléments finis mixtes est uniformément minorée si et seulement si Δt est de l'ordre de $h^{3/2}$, altérant son utilisation. Afin de remédier à cela, on introduit alors, de façon similaire au cas 1-d, un schéma aux différences finies à trois paramètres : un paramètre pour contrôler la stabilité et deux paramètres pour contrôler le spectre. Après optimisation de ces trois paramètres, il apparaît que le schéma formellement obtenu par discrétisation centrée de l'équation

$$\left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_1}^2\right)\left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_2}^2\right)y'' - \left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_1}^2\right)\partial_{x_2}^2 y - \left(1 + \frac{h^2}{4}\partial_{x_2}^2\right)\partial_{x_1}^2 y = 0, \quad (0, T) \times (0, 1)^2$$

et auquel on applique la méthode de Newmark, est inconditionnellement stable, consistant d'ordre deux en temps et espace et possède une vitesse de groupe uniformément minorée si Δt est de l'ordre de h . De plus, le schéma est très peu dispersif avec un spectre $\{\omega_{\mathcal{N},h,\Delta t}^{1/4,1,0}(\boldsymbol{\xi})\}$ très proche du spectre continu $\{\omega(\boldsymbol{\xi})\}_{\boldsymbol{\xi} \in (0,\pi/h)}$ défini par $\omega(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|$: pour $\Delta t = h/\sqrt{2}$, on a

$$\omega(\boldsymbol{\xi}) \leq \omega_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0}(\boldsymbol{\xi}) \leq \sqrt{2}\omega(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h, \pi/h)^2,$$

et la remarquable égalité pour $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$: $\omega(\xi_1, \xi_1) = \omega_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}^{1/4,1,0}(\xi_1, \xi_1)$. Enfin, pour un contrôle agissant sur deux cotés consécutifs du carré unité, la condition de contrôlabilité uniforme est $\Delta t \leq h\sqrt{T/(2\sqrt{2})}$. La mise en œuvre confirme la robustesse de ce schéma, dans le cadre de la contrôlabilité exacte, pour toute donnée dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Remarquons que les schémas précédents sont *équivalents* aux schémas aux différences finies usuels, à un terme de perturbation singulière près défini sur tout le domaine. Négligeables pour les faibles fréquences, ces termes soigneusement calibrés permettent d'observer les composantes hautes fréquences en un temps uniforme. On peut les concevoir comme des termes de contrôles internes de faibles amplitudes.

Naturellement, la pathologie qui a lieu pour la contrôlabilité exacte se retrouve dans le cadre voisin de la stabilisation. Soient $\omega \subset \Omega \in C^2(\mathbb{R}^N)$ un ouvert borné et $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $a(x) \geq a_0 > 0$ dans ω . Si l'énergie associée à la solution de l'équation des ondes amorties

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y' = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ y = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1) & \{0\} \times \Omega \end{cases}$$

décroit exponentiellement pour toute donnée $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ - lorsque le triplet (Ω, ω, T) satisfait la condition géométrique en temps long - cette propriété n'est pas vraie au niveau discret uniformément en h lorsque les schémas usuels sont employés. Dans le cas $N = 2$ nous montrons que, pour toute discrétisation régulière Ω_h de Ω , telle que $\Omega_h \subset \Omega$ pour tout $h = (h_1, h_2)$, le schéma issu de la discrétisation en espace de l'équation

$$y'' - \Delta y + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y' - h_1^2 \partial_{x_1}^2 y' - h_2^2 \partial_{x_2}^2 y' = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

est exponentiellement stable. Précisément, il existe deux constantes strictement positives C et α indépendantes de (h_1, h_2) telles que l'énergie E_{h_1, h_2} satisfasse la propriété

$$E_{h_1, h_2}(t) \leq CE_{h_1, h_2}(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall (h_1, h_2) \in (0, 1)$$

pour chaque solution y_{h_1, h_2} . La démonstration repose sur la méthode des multiplicateurs semi-discrets. A nouveau, le terme de viscosité introduit dans le schéma - analogue ici à une régularisation de Tychonoff permet d'amortir uniformément les composantes hautes fréquences et ainsi d'obtenir un taux de décroissance exponentielle uniformément minoré. Nous montrons la convergence faible étoile de la solution y_{h_1, h_2} stabilisée vers y dans $L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ lorsque la donnée $(y_{h_1, h_2}^0, y_{h_1, h_2}^1)$ converge faiblement vers (y^0, y^1) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Cela valide la méthode. Enfin, la mise en œuvre numérique - plus aisée que celle de la contrôlabilité exacte - indique clairement, lorsque le terme de viscosité est employé, que l'abscisse spectrale $-\max\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_h)\}$ de l'opérateur d'amortissement \mathcal{A}_h est uniformément minoré.

Le reste de la première partie, de nature plus théorique, étudie des questions de stabilisation et de contrôlabilité de systèmes dynamiques modélisant les vibrations d'arche ou coque mince. Une première étude concerne la stabilisation d'un système non linéaire de type Marguerre-Vlasov

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt}^\varepsilon - h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon)_x = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ w_{tt}^\varepsilon - w_{xxtt}^\varepsilon + w_{xxxx}^\varepsilon - (w_x^\varepsilon h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon))_x + k(x)h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0, \end{cases}$$

faisant le lien, via un paramètre ε , entre les systèmes de type Von Kármán ($\varepsilon = 1$) et les systèmes de type Kirchhoff-Love ($\varepsilon = 0$). Le système à deux inconnues $(u^\varepsilon, w^\varepsilon)$ - les déplacements respectivement longitudinal et normal - modélise une arche de courbure $k(x)$ et de longueur L . Encastrée en $x = 0$, l'arche est soumise à une dissipation frontière en $x = L$ agissant sur la déformation longitudinale h :

$$h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) = -\varepsilon^\alpha u_t^\varepsilon(L, t); \quad h(u_x^\varepsilon, w^\varepsilon) \equiv u_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon) + k(x)w^\varepsilon$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. L'analyse porte sur le comportement asymptotique de la solution de ce système dissipatif par rapport à ε selon les valeurs de α . Nous montrons la décroissance exponentielle de l'énergie uniformément en ε si $\alpha \in [0, 1]$ et si la courbure k est suffisamment petite. Le passage à la limite en ε met en évidence deux systèmes distincts selon que $\alpha \in (0, 1]$ ou $\alpha = 0$. Dans le premier cas, la solution w^ε converge faiblement vers w , vérifiant le modèle linéaire de poutre de Rayleigh

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} = 0, \quad x \in (0, L), t > 0.$$

L'énergie associée décroît exponentiellement. Le cas $\alpha = 0$ conduit à un comportement plus riche, retenant la non linéarité et la courbure : w^ε converge vers w solution de

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} - \frac{1}{L} \left[\zeta + \int_{\Omega} \left(\frac{w_x^2}{2} + k(x)w \right) dx \right] (w_{xx} - k(x)) = 0, \quad x \in (0, L), t > 0,$$

où ζ est solution d'une équation différentielle ordinaire en temps. A nouveau, l'énergie de ce système non linéaire décroît exponentiellement. Enfin, des expériences numériques pour les cas ouverts $\alpha < 0$ et $\alpha > 1$ suggèrent que le taux de décroissance tend vers zéro avec ε .

Une seconde étude concerne l'analyse de la contrôlabilité frontière exacte de système du type

$$\mathbf{y}_\varepsilon'' + \mathbf{A}_M \mathbf{y}_\varepsilon + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F \mathbf{y}_\varepsilon = 0, \quad (0, T) \times \omega,$$

modélisant les vibrations d'une coque élastique mince. \mathbf{A}_M et \mathbf{A}_F désignent les opérateurs de membrane et de flexion, respectivement d'ordre deux et quatre. Le déplacement \mathbf{y}_ε se décompose en les déplacements tangentiels $y_{\varepsilon, \alpha} = (y_{\varepsilon, 1}, y_{\varepsilon, 2})$ et le déplacement normal $y_{\varepsilon, 3}$, tandis que ε désigne la demi-épaisseur constante de la coque et ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 désigne la surface moyenne. Dans le cas d'une arche, il y a un seul déplacement tangentiel et $\omega \subset \mathbb{R}$. Pour tout ε positif et T suffisamment grand (dépendant de l'épaisseur et de la courbure), la méthode des multiplicateurs conduit à l'existence d'une fonction $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $L^2((0, T) \times \partial\omega)$ agissant de la façon suivante :

$$y_{\varepsilon, \alpha} = v_\alpha, \quad (\varepsilon^2) y_{\varepsilon, 3} = 0 \quad (\varepsilon^2) \partial_n y_{\varepsilon, 3} = v_3, \quad (0, T) \times \partial\omega$$

qui contrôle toute donnée initiale de $L^2(\omega)^3 \times (H^{-1}(\omega) \times H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega))$. Lorsque la courbure est nulle, la coque dégénère géométriquement en une plaque et les déplacements tangentiels $(y_{\varepsilon, 1}, y_{\varepsilon, 2})$, solutions d'un système d'ordre deux sont découplés du déplacement normal $y_{\varepsilon, 3}$, solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre. Par ailleurs, dans le cas d'une hémisphère, des calculs analytiques ont mis en évidence que, pour certaines données, la contrôlabilité n'est pas uniforme en ε , le temps de contrôlabilité étant de l'ordre $T = O(C/\varepsilon)$ où C désigne la courbure. Cette propriété générale est due à la perte de compacité de l'opérateur $\mathbf{A}_\varepsilon \equiv \mathbf{A}_M + \varepsilon^2 \mathbf{A}_F$ dans la transition coque-membrane : précisément, l'opérateur \mathbf{A}_M est un opérateur d'ordre mixte qui possède un spectre essentiel. A cela s'ajoute un phénomène de couche limite près de $\partial\omega$ pour la composante normale. L'objet de l'étude est néanmoins d'identifier la classe des données initiales pour laquelle la contrôlabilité est uniforme. Cela est fait dans le cadre simple d'une arche cylindrique pour laquelle $\omega = (0, 1)$ en étudiant le cas $\varepsilon = 0$: l'étude porte sur l'existence d'un contrôle $v \in L^2(0, T)$ tel que la solution

$$\begin{cases} \mathbf{y}'' + \mathbf{A}_M \mathbf{y} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ y_1(\cdot, 0) = 0, y_1(\cdot, 1) = v, & \text{dans } (0, T) \\ (\mathbf{y}(0, \cdot), \mathbf{y}'(0, \cdot)) = (\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1), & \text{dans } \omega. \end{cases}, \quad \mathbf{A}_M \mathbf{y} = a \begin{pmatrix} -(y_{1,1} + C y_3)_{,1} \\ C(y_{1,1} + C y_3) \end{pmatrix}$$

satisfasse $\mathbf{y}(\xi, T) = \mathbf{y}'(\xi, T) = 0$ pour tout ξ de ω et $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \in (L^2(\omega))^2 \times (H^{-1}(\omega) \times L^2(\omega))$. Le cas limite fournit un exemple où le nombre de contrôles est inférieur au nombre de composantes de \mathbf{y} (1 pour 2 dans le cas de l'arche et 2 pour 3 dans le cas de la coque). L'étude montre que 0 est l'élément unique du spectre essentiel ($\sigma_{ess}(\mathbf{A}_M) = \{0\}$) puis que la contrôlabilité a lieu pour toute donnée dans l'orthogonal du noyau de \mathbf{A}_M . A nouveau, le théorème d'Ingham et la méthode HUM sont employés. Dans le cas d'une coque cylindrique, l'opérateur membranaire a un noyau réduit à zero mais un spectre essentiel sous la forme d'un intervalle $[0, a]$, $a > 0$. La première partie s'achève par une description brève d'un travail récent portant sur la contrôlabilité (non linéaire) d'une corde soumise à un obstacle unilatéral.

La seconde partie s'inscrit dans le cadre de l'optimisation de forme pour des problèmes dynamiques. Précisément, il s'agit d'optimiser la distribution de deux phases aux caractéristiques distinctes le long d'un domaine borné, éventuellement dépendante de la variable temporelle. Mathématiquement, cela revient à minimiser une fonctionnelle non convexe sur un sous-ensemble des fonctions caractéristiques, qui dépend quadratiquement du gradient de la solution d'un système dynamique, typiquement l'équation des ondes. Généralement, ces problèmes non linéaires sont mal posés dans la mesure où l'infimum n'est pas atteint dans la classe des fonctions caractéristiques. L'étude consiste alors à déterminer une formulation relaxée bien posée de ces problèmes. Pour cela, la démarche utilisée dans le cas elliptique par le groupe de PABLO PEDREGAL est adaptée : elle consiste à réécrire le problème de forme comme un problème variationnel *standard* puis à calculer le quasi-convexifié correspondant en faisant usage des mesures de Young, lesquelles permettent d'identifier les limites faibles de suites de fonctions.

Le premier exemple détaillé dans ce document est le suivant : pour tout $L \in (0, 1)$

$$(P_\omega) : \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega \in \mathcal{X}_L} E(\mathcal{X}_\omega, a, T), \quad E(\mathcal{X}_\omega, a, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{\omega, a}(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla y_{\omega, a}(t, \mathbf{x})|^2) dx, \quad t \geq 0$$

avec

$$\mathcal{X}_L = \left\{ \mathcal{X} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega| \right\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

où $y_{\omega, a}$ désigne la solution de l'équation des ondes amorties introduite précédemment. $E(\mathcal{X}_\omega, a, t)$ en représente l'énergie à l'instant t . Le problème (P_ω) consiste à optimiser la dissipation du système par rapport à la forme de la zone ω - supposée indépendante du temps - support de la fonction d'amortissement a . La relation $\|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|$ est une contrainte sur la mesure de ω . En préalable au calcul d'une formulation relaxée, nous utilisons la méthode des lignes de niveaux pour approcher numériquement de façon simple ce problème. Cette méthode numérique permet une description indépendante de la frontière $\partial\omega$ et se ramène à la résolution d'une équation d'Hamilton-Jacobi non linéaire du premier ordre. La mise en œuvre, pour un L fixé, met en évidence le rôle de l'amplitude de la fonction constante a sur la nature de la solution. Précisément, dès que a excède une valeur critique - dépendante principalement de L - les expériences numériques suggèrent que le problème (P_ω) est mal posé (forte dépendance de la solution vis-à-vis de l'initialisation du domaine, nombre important de composantes connexes disjointes). En revanche, pour a arbitrairement petit, la méthode conduit de façon robuste à une position optimale, reliée aux extrema de la donnée initiale (y^0, y^1) comme l'indique la relation suivante de type *dérivée topologique* :

$$E(\mathcal{X}_\omega, a, T) = E(\emptyset, a, T) + a \int_{\omega} \int_0^T y'_{\emptyset, 0}(t, \mathbf{x}) p_{\emptyset, 0}(t, \mathbf{x}) dt + o(a)$$

où $p_{\emptyset, 0}$ désigne la solution d'un problème adjoint. Cette bifurcation par rapport à la valeur a est reliée au phénomène d'*over-damping*, lequel se traduit par une perte de la dissipation lorsque a

est arbitrairement grand (en d'autres termes, la fonction $a \rightarrow E(\mathcal{X}_\omega, a, T)$ n'est pas monotone décroissante sur \mathbb{R}^+).

L'analyse de la formulation relaxée confirme cette propriété. Cette formulation est simplement obtenue en remplaçant l'ensemble des fonctions caractéristiques par son enveloppe convexe pour la topologie faible étoilée de L^∞ :

$$(RP_\omega) : \min_{s \in S_L} E(s, a, T), \quad E(s, a, t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'_{s,a}(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla y_{s,a}(t, \mathbf{x})|^2) dx, \quad t \geq 0$$

avec $S_L = \{s \in L^\infty(\Omega; [0, 1]), \|s\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|\}$ et $y_{s,a}$ solution de $y''_{s,a} - \Delta y_{s,a} + a(\mathbf{x})s(\mathbf{x})y'_{s,a} = 0$. Cette relaxation est obtenue en plusieurs étapes :

- La première étape consiste à réécrire sous forme variationnelle le problème (P_ω) : dans le cas unidimensionnel ($n = 1$), l'équation des ondes amorties prend la forme

$$\operatorname{div}(y_t + a\mathcal{X}_\omega y, -y_x) = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

avec $\operatorname{div} = (\partial_t, \partial_x)$, ω étant indépendant du temps. De la caractérisation des vecteurs 2-D à divergence nulle, il existe alors un potentiel scalaire $v = v(t, x) \in H^1((0, T) \times \Omega)$ tel que $A\nabla y + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \bar{y}$ avec $\nabla y = (y_t, y_x)^T$, $\bar{y} = (y, 0)^T$. On introduit alors le champ de vecteur $U = (y, v) \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$ et les ensembles de matrices $\Lambda_0 = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\}$, $\Lambda_{1,\lambda} = \{M \in \mathcal{M}^{2 \times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\}$, où $M^{(i)}$, $i = 1, 2$ désigne la i -ème colonne de M , $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1, 0)^T$. Cela permet de réécrire le problème sous la forme vectorielle non convexe suivante :

$$(VP_\omega) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) dx dt$$

soumis à

$$\begin{cases} U \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2 \\ U^{(1)} = 0 & (0, T) \times \partial\Omega \\ U^{(1)}(0, \cdot) = u_0(\cdot), \quad U_t^{(1)}(0, \cdot) = u_1(\cdot), & \Omega \\ \int_0^1 V(x, U(t, x), \nabla U(t, x)) dx = L, & (0, T). \end{cases}$$

où les densités W et V sont définies par

$$W(x, U, M) = \begin{cases} \frac{1}{2} |M^{(1)}|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}, \quad V(x, U, M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}}$ est l'ensemble des champs y qui vérifient la relation $y'' - y_{xx} + a(\mathbf{x})y' = 0$ et représente ω . Λ_0 représente son complémentaire.

- Les étapes suivantes consistent à calculer le relaxé de (VP_ω) , soit

$$\bar{m} = \inf_U \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} CQW(t, x, \nabla U(t, x), s(x)) dx dt \right\}$$

où l'infimum est pris sur les champs $U \in (H^1((0, T) \times \Omega))^2$ qui satisfont les conditions aux limites et où la fonction s satisfait $s \in S_L$. La quantité $CQW(x, U, \nabla U(t, x), s(x))$ désigne le *quasi-convexifié contraint* de la densité W , défini pour tout $(F, s) \in \mathcal{M}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}$ fixe, par

$$CQW(x, U, F, s) = \inf_{\nu} \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} W(x, U, M) d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}(F, s) \right\},$$

où

$$\mathcal{A}(F, s) = \left\{ \nu : \nu \text{ est une } H^1 \text{ - mesure de Young homogène,} \right. \\ \left. F = \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} M d\nu(M) \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{M}^{2 \times 2}} V(M) d\nu(M) = s \right\}.$$

La difficulté est que la classe des mesures $\mathcal{A}(F, s)$ n'est pas explicitement connue. La seconde étape consiste alors à résoudre le problème de minimisation précédent sur la classe plus large et explicite \mathcal{A}^* des mesures polyconvexes. Ce calcul se ramène à la résolution d'un problème de programmation mathématique linéaire en les premiers et seconds moments de ν . Le polyconvexifié obtenu, noté CPW fournit une borne inférieure du minimum \bar{m} .

- La troisième et dernière étape consiste à étudier si cette borne inférieure est atteinte par au moins une mesure appartenant à la classe, disons \mathcal{A}_* (les laminés), incluse dans $\mathcal{A}(F, s)$, de telle façon que $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Dans un tel cas, on en déduit alors la valeur exacte de CPW . Cette étape se ramène à chercher une condition de rang un sur les mesures. Enfin, les laminés caractérisent la micro-structure optimale.

L'analyse pour le problème (P_ω) conduit à un laminé de rang 1. L'analyse dans le cas bi-dimensionnel est identique, à l'introduction de potentiels de Clebsch près, à la première étape. La résolution numérique du problème (RP_ω) - plus aisée que la méthode des lignes de niveaux - confirme ce phénomène de bifurcation par rapport à la valeur de a . Si a est suffisamment petit, la densité optimale obtenue est une fonction caractéristique : le problème (RP_ω) coïncide avec le problème original (P_ω) alors bien posé. Pour a suffisamment grand, la densité optimale est telle que l'ensemble $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\}$ est de mesure non nulle : la distribution optimale est composée d'un nombre arbitrairement grand de composantes disjointes.

Cette analyse est généralisée au cas de l'opérateur d'élasticité linéaire pour lequel l'équation principale est :

$$\mathbf{u}'' - \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + a(\mathbf{x}) \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}) \mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad (0, T) \times \Omega$$

avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \text{div}(\mathbf{u}) \mathbf{Id} + \mu(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T)$ le tenseur symétrique des contraintes. On s'affranchit de la dimension en espace en utilisant les mesures de Young $Div - Rot$, associées aux champs (\mathbf{F}, \mathbf{G})

$$\mathbf{F} = (\mathbf{u}' + a(\mathbf{x}) \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}) \mathbf{u}, -\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{G} = (\mathbf{u}', \nabla_x \mathbf{u})$$

tels que $\nabla_{t,x} \cdot \mathbf{F} = 0$ et $Rot \mathbf{G} = 0$. A nouveau, la relaxation est simplement obtenue en remplaçant l'ensemble $\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)=L|\Omega|}\}$ par l'ensemble $\{s \in L^\infty(\Omega, [0, 1]), \|s\|_{L^1(\Omega)=L|\Omega|}\}$.

La situation est plus difficile lorsque la fonction de forme \mathcal{X}_ω est présente dans l'opérateur de divergence. Une analyse détaillée du problème suivant -généralisant une situation statique très étudiée - est effectuée :

$$(P) : \quad \inf_{\mathcal{X} \in L^\infty((0,T) \times \Omega, \{0,1\})} I(\mathcal{X}), \quad I(\mathcal{X}) = \int_0^T \int_\Omega [u_t^2(t, x) + a(t, x, \mathcal{X}) u_x^2(t, x)] dx dt$$

où $\Omega = (0, 1)$ et u est l'unique solution de

$$\begin{cases} u_{tt} - \text{div}([\alpha \mathcal{X} + \beta(1 - \mathcal{X})] u_x) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{dans } (0, T). \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{X} \in L^\infty([0, T] \times \Omega; \{0, 1\})$ désigne la variable de forme et indique la position du matériau de caractéristique α au temps t . On suppose $0 < \alpha < \beta$ et $a(t, x, \mathcal{X}) = \mathcal{X}(t, x) a_\alpha(t, x) + (1 - \mathcal{X}(t, x)) a_\beta(t, x)$, avec $a_\alpha, a_\beta \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$. Enfin, on suppose que la quantité du matériau

de caractéristique α est contrainte par la condition $\int_{\Omega} \mathcal{X}(t, x) dx \leq V_{\alpha} |\Omega|$, pour tout $t \in (0, T)$. Le problème (P) a donc pour objectif d'optimiser la répartition spatio-temporelle de deux matériaux de conductivité α et β au sein d'une corde vibrante. La notion de matériaux dynamiques a été introduite récemment par K.A. LURIE. Le processus de relaxation conduit au problème suivant :

$$(RP) : \quad \min_{U, s} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t, \mathbf{x}, \nabla U(t, \mathbf{x}), s(t, \mathbf{x})) dx dt$$

soumis à

$$\begin{cases} U \in H^1([0, T] \times \Omega)^2, \quad tr(\nabla U(t, \mathbf{x})) = 0, \\ U^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad U_t^{(1)}(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ U^{(1)}(t, 1) = U^{(1)}(t, 0) = 0 \quad \text{dans } [0, T], \\ 0 \leq s(t, \mathbf{x}) \leq 1, \quad \int_{\Omega} s(t, \mathbf{x}) dx \leq V_{\alpha} |\Omega| \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où φ - le quasi-convexifié - est explicitement donné en fonction de U , α , β et a_{α} , a_{β} . A nouveau, $U = (u, v)$ où est une variable auxiliaire qui apparaît dans l'étape de reformulation variationnelle. Tr désigne l'opérateur trace et $\nabla = (\partial_t, \partial_x)$. De plus, les micro-structures optimales sont représentées par des laminés d'ordre un et deux, selon notamment les valeurs de a_{α} et a_{β} . Bien qu'explicite, cette formulation est peu manipulable dans la mesure où l'équation des ondes a disparu et se trouve incorporée dans les contraintes définissant φ . Dans certains cas simples, typiquement $(a_{\alpha}, a_{\beta}) = (\alpha, \beta)$ et $(a_{\alpha}, a_{\beta}) = (1, 1)$, il est néanmoins possible d'éliminer la variable auxiliaire $U^{(2)}$ et ainsi de reformuler (RP) de façon plus standard : cela fait apparaître les moyennes harmonique et arithmétique de (α, β) . Les simulations numériques effectuées montrent l'influence de la donnée initiale (y^0, y^1) et de l'amplitude de l'écart $\beta - \alpha$ sur la nature de la distribution optimale, laquelle rend le système globalement fortement dissipatif. La combinaison des deux problèmes précédents

$$(P_{\omega_1, \omega_2}) \quad \inf_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + a(t, \mathbf{x}, \mathcal{X}_{\omega_1}) |u_x|^2) dx dt$$

avec $\mathcal{X}_{\omega_1} \in L^{\infty}(\Omega \times (0, T); \{0, 1\})$, $\mathcal{X}_{\omega_2} \in L^{\infty}(\Omega; \{0, 1\})$ où u est la solution unique de

$$u_{tt} - \nabla_x([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})] u_x) + a(\mathbf{x}) \mathcal{X}_{\omega_2} u_t = 0, \quad (0, T) \times \Omega$$

est ensuite discutée. Il s'agit d'optimiser simultanément la distribution spatio-temporelle du matériau α sur $\omega_1 \subset \Omega \times (0, T)$ et de la distribution statique de la zone d'amortissement $\omega_2 \subset \Omega$. Pour toute valeur de a , il apparaît que la micro-structure optimale est donnée par des laminés d'ordre un uniquement. Cela illustre l'effet régularisant du terme de dissipation sur la micro-structure optimale et indique également le caractère *instable* des laminés d'ordre deux exhibés dans le problème (P) . Enfin, dans le cadre de l'équation de la chaleur posée sur $\Omega \times (0, T)$, Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , le flux de chaleur est minimisé par rapport à la distribution de deux conductivités thermiques distinctes. La méthode de l'homogénéisation - développée dans ce cadre par GRÉGOIRE ALLAIRE et l'approche variationnelle sont respectivement utilisées, dans le cas d'une distribution statique et dynamique.

Cette seconde partie fait également le lien avec la précédente en introduisant un problème d'optimisation de forme dans le cadre de la contrôlabilité exacte interne pour l'équation des ondes : précisément, si v_{ω} désigne, pour tout ω fixé, le contrôle HUM supporté sur $\omega \times (0, T)$, nous cherchons le domaine ω de mesure $L|\Omega|$, solution du problème suivant :

$$(P_{\omega}) : \quad \inf_{\omega \subset V_L(y^0, y^1, T)} J(\mathcal{X}_{\omega}), \quad \text{où } J(\mathcal{X}_{\omega}) = \frac{1}{2} \|v_{\omega}\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2, \quad (1)$$

et $V_L(y^0, y^1, T) = \{\omega \in V(y^0, y^1, T); |\omega| = L|\Omega|\}$. $V(y^0, y^1, T)$ est l'ensemble des domaines qui satisfont la condition d'optique géométrique. Le temps de contrôlabilité T ainsi que la mesure $|\omega|$, fixés,

peuvent être arbitrairement petits. Les expériences numériques suggèrent, pour des données (y^0, y^1) régulières, que le problème (\mathcal{P}_ω) est bien posé dans la classe des fonctions caractéristiques. Enfin, nous vérifions que les domaines optimaux permettent une réduction de la constante d'observabilité associée au système adjoint.

La fin de cette seconde partie est consacrée à des problèmes d'optimisation dans le cadre de la mécanique de la rupture : nous introduisons la notion de contrôle de fissure. Les équations sont indépendantes du temps. La quantité optimisée est le taux de restitution de l'énergie, égal dans le cadre scalaire du laplacien, à

$$g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = \int_{\Omega} a_{\mathcal{X}_\omega}(\mathbf{x})(A_\psi(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u)dx, \quad A_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 2\psi_{1,2} \\ 0 & -\psi_{1,1} \end{pmatrix}$$

où ψ est une fonction à support compact, définie sur un domaine Ω fissuré. La quantité g_ψ , positive mais non définie positive, est une mesure de la singularité du champ u en pointe de fissure. Un critère mécanique dû à A.A. GRIFFITH postule la propagation de la fissure dès que ce taux atteint un seuil. Dans un premier travail, dans le cadre de l'élasticité linéaire en petits déplacements, nous minimisons ce taux par rapport à l'amplitude et la position d'une contre-force agissant sur une partie de la frontière distincte du support du chargement initial. L'étude, prenant en compte la condition de contact unilatéral sur les lèvres de la fissure, met en évidence la compétition entre le mode I d'ouverture et le mode II de cisaillement. Dans un second travail, dans le cadre du laplacien, nous minimisons ce taux, par rapport à la distribution de deux matériaux de conductivité thermique α et β . Dans ce cas, u est la solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}([\alpha\mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}) + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega(\mathbf{x}))]\nabla u) = 0 & \Omega, \\ u = u_0 & \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \beta \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g & \Gamma_g \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

Une formulation relaxée de ce problème est obtenue en remplaçant $g_\psi(u, \mathcal{X})$ par $g_\psi(v, s)$ où v est solution du problème non linéaire

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(s)\nabla v + B(s)|\nabla v|t) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \beta \nabla v \cdot \boldsymbol{\nu} = g, & \text{sur } \Gamma_g. \end{cases}$$

avec $A(s), B(s) = (\lambda^+(s) \pm \lambda^-(s))/2$, équivalent au précédent si et seulement si la densité s optimale est une fonction caractéristique. Il apparaît que la conductivité optimale n'est pas uniforme autour de la pointe de fissure. λ^+ et λ^- désignent les moyennes arithmétique et harmonique de (α, β) pondérées par s .

Le document s'achève par une description brève de quelques perspectives et problèmes ouverts.

QUELQUES PERSPECTIVES

-
- Le premier chapitre de l'habilitation indique qu'une technique permettant de recouvrer l'observabilité uniforme pour l'équation des ondes est de rajouter un terme du type $(h^2 - \Delta t^2)\Delta_{\Delta t}\Delta_h y_h$, négligeable pour les composantes faible fréquence de la solution (discrète). Dans le cas *simple* de l'équation des ondes, ce type de terme, qui dépend explicitement de la solution, est identifié à la main, soit par une analyse spectrale, soit pour absorber dans une énergie (et donc

un schéma) modifiée les termes de mauvais signe de l'inégalité d'observabilité. De façon plus systématique, il est peut-être intéressant de considérer une équation du type

$$y''(t, x) - \Delta y(t, x) + \varepsilon V(t, x) = v(t, x) \mathcal{X}_\omega(x), \quad (0, T) \times \Omega \quad (2)$$

avec ε de l'ordre h^α ($\alpha \in \mathbb{N}$), V une fonction régulière telle que $\|V\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq 1$, d'en déterminer le contrôle exact v (dépendant de la fonction V) puis d'optimiser la constante d'observabilité associée par rapport à V :

$$\inf_{V, \|V\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq 1} C_{obs}(\phi_V, V). \quad (3)$$

- L'approximation numérique de la contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur n'est pas abordée ici. Des travaux récents ont montré, au moins dans le cas semi-discret unidimensionnel, que le schéma aux différences finies usuel conduit à une séquence de contrôles uniformément convergente. En d'autres termes, la pathologie numérique observée pour l'équation de ondes n'a pas lieu pour l'équation de la chaleur. Cependant, dans la pratique, l'implémentation numérique de la contrôlabilité exacte (où l'état final est une trajectoire de l'équation de la chaleur) exhibe un mauvais comportement de la méthode du gradient conjugué : le nombre d'itérations est notamment très important¹. Si pour tout h , on introduit les deux constantes $C_1(h)$ et $C_2(h)$ telles que

$$C_1(h) \|\phi_h(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\omega \int_0^T \phi_h^2(x, t) dx dt \leq C_2(h) \|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \phi_h(T, \cdot) \in L^2(\Omega) \quad (4)$$

où ϕ_h est la solution de

$$\begin{cases} \phi_h' + c\phi_{h,xx} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ \phi_h = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ \phi_h(T, \cdot) = \phi_T, & \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

le conditionnement numérique de l'opérateur HUM est encadré de la façon suivante :

$$C_1(h)C_2^{-1}(h)h^{-2} \leq \text{cond}(\Lambda_h) \leq C_2(h)C_1^{-1}(h)h^{-2}. \quad (6)$$

La constante d'observabilité $C_1(h)$ est uniformément minorée en h . En revanche, la constante $C_2(h) \rightarrow \infty$ quand h tend vers zéro. Des expériences numériques indiquent que le conditionnement se comporte en $e^{c/h}$, $c > 0$: le problème est exponentiellement mal posé. La régularisation de Tychonoff permet d'améliorer la robustesse de l'approximation, au prix cependant d'une convergence très lente du contrôle. Par ailleurs, l'ajout du terme singulier $-h^\alpha \phi_{h,xx}'$, $\alpha \in (1, 2]$ permet de réduire la valeur du conditionnement numérique (qui reste toutefois exponentiel) et d'améliorer sensiblement le comportement du gradient conjugué. La détermination d'une méthode ou d'un préconditionnement robuste et efficace demeure un challenge. Plusieurs travaux sont en cours, notamment dans le cadre de l'ANR CONUM.

- Je suis également intéressé par traiter quelques problèmes en contrôlabilité non linéaire. Il semble par exemple intéressant d'étendre au cas interne (contrôle ou obstacle) l'étude récente [?] mentionnée en fin de première partie et concernant la contrôlabilité frontière d'une corde soumise à un obstacle unilatéral. Dans ce cas, la méthode des caractéristiques est plus lourde à mettre en œuvre. Par ailleurs, dans la thématique de l'ANR Conum, une thèse co-encadrée avec F. AMMAR-KHODJA va débiter en octobre 2008 sur la contrôlabilité de systèmes non linéaires de réaction-diffusion.

1. exception faite du cas où le contrôle interne est distribué sur le domaine tout entier !

- Beaucoup reste à faire sur la contrôlabilité des coques membranaires. L'intérêt théorique - au delà des applications évidentes - et la difficulté, provient de la présence du spectre essentiel de l'opérateur membranaire \mathbf{A}_M , réduit à un point dans le cas d'une surface elliptique, et à un intervalle dans le cas d'une surface parabolique. Le cas de la flexion pure est également intéressant : le système est alors

$$\begin{cases} \mathbf{y}'' + \mathbf{A}_F \mathbf{y} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{A}_M \mathbf{y} = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ + \text{Conditions aux limites} \end{cases} \quad (7)$$

\mathbf{A}_F désigne l'opérateur de flexion.

- La contrôlabilité des ondes locales qui apparaissent à l'interface de deux matériaux de caractéristiques différentes me semble à examiner. Il s'agit par exemple d'étendre l'étude des joints collés au cas dynamique et prévenir la rupture du joint, lieu de concentration d'énergie, par une action de contrôle. Le problème fait apparaître un spectre essentiel. De même, l'étude de l'approximation du contrôle HUM de l'équation des ondes posée sur un domaine fissuré semble également un challenge.
- Dans la seconde partie de l'habilitation concernant l'optimisation de forme, nous avons travaillé à donnée initiale $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)$ fixée. Il serait intéressant d'étudier systématiquement l'optimisation de domaine ω uniformément par rapport aux données initiales, et considérer les problèmes du type :

$$\inf_{\omega} \sup_{(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1)} J(\omega, \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1) \quad (8)$$

a priori pas plus difficiles au niveau de l'analyse de la relaxation. Par exemple, nous avons résolu avec F. Boyer et F. Hubert pour $L \in (0, 1)$, le problème suivant

$$\inf_{\omega \subset \Omega, |\omega|=L|\Omega|} C(\omega) = \sup_{\phi_T \in L^2(\omega)} \frac{\|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\int_{\omega} \int_0^T \phi^2(x, t) dx dt}, \quad (9)$$

avec $\Omega = (0, 1)$ et ϕ solution de (5). A ω fixé dans Ω , le supremum se ramène à un calcul spectral, résolu par l'algorithme de la puissance². L'infimum utilise les techniques de la seconde partie : on obtient que la densité optimale s varie peu sur Ω de sorte que la distribution optimale de ω est - aux effets du bord près - uniforme sur le domaine Ω . Le caractère uniforme de la distribution est naturellement dû au fait que l'on minimise uniformément en les données initiales. Il est probable qu'une telle propriété demeure pour l'équation des ondes, ainsi que pour les autres problèmes considérés dans la seconde partie. Cela reste à vérifier.

- Je mentionne également le cas des problèmes inverses (dans des situations dynamiques), lorsqu'il s'agit de localiser une inhomogénéité à partir de mesures frontières. Ces problèmes ne sont rien d'autres que des problèmes d'optimisation de forme, l'intégrande de la fonctionnelle à minimiser étant défini sur le bord de mesure. Il serait intéressant d'utiliser les techniques de la seconde partie dans ces cas.
- Enfin, je souhaite aborder plus systématiquement les problèmes d'optimisation de forme pour des domaines dépendants du temps ; dans le cadre de la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes 1-D, des calculs préliminaires suggèrent que le support du contrôle HUM *suit* les composantes et les rebonds de la solution contrôlée

(Mis à jour le 01 avril 2009)

2. chaque itération est un problème de contrôlabilité.