SERIES TRIGONOMETRIQUES ET SERIES DE FOURIER

L'objet des lignes qui suivent est d'essayer de préciser à travers quelques énoncés simples les différences et les ressemblances entre les séries trigonométriques et les séries de Fourier. Mais avant toute chose, qu'appelle-t-on série trigonométrique?

Définition 0.1 *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la variable réelle s'écrivant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$ ou encore (après réecriture) toute série de fonctions du type $\sum_{n\geq 0} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.*

Ainsi, une série trigonométrique doit être vue comme une série formelle indépendamment de toute considération de convergence. Les problèmes de convergence pourront ensuite revêtir différents aspects (convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence L^p).

Considérons un instant une série trigonométrique convergente (sans préciser le type de convergence). Son terme général tend vers 0. Dans toutes les situations qui nous intéressent, quitte à extraire une sous-suite, le terme général convergera donc presque partout vers 0. Si on se souvient du lemme de Cantor, il est donc raisonnable de ne chercher à étudier que les séries trigonométriques pour lesquelles $c_n \to 0$ (resp. $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$). C'est ce qu'on fera par la suite. Rappelons le lemme de Cantor :

Lemme 0.2 ([1]) *Si $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge vers 0 pour presque tout x, alors, les suites a_n et b_n convergent vers 0.*

La définition 1 nous incite tout de suite à constater que les séries de Fourier sont exactement les séries trigonométriques pour lesquelles il existe une fonction $f \in L^1_{2\pi}$ vérifiant $c_n = \hat{f}(n)$ pour tout n. Ainsi, la différence entre les deux notions vient de la non surjectivité de l'application Fourier :

Théorème 0.3 ([2]) *L'application $f \in L^1_{2\pi} \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{Z})$ est non surjective. En d'autres termes, il existe des séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier.*

La différence entre les deux notions peut aussi se lire à travers l'énoncé suivant :

Théorème 0.4 ([2] et [3]) *Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *Si $f \in L^1_{2\pi}$ et si $S_n f(x)$ converge presque partout vers 0, alors, $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

(ii) *Il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}$ et une suite de nombres complexes c_n non tous nuls tels que $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ converge vers 0 si $x \notin \mathcal{N}$. Ainsi, dans le cadre des séries trigonométriques, on n'a pas de critère d'unicité vis à vis de la convergence presque sûre.*

Lorsqu'on étudie une série trigonométrique, plusieurs questions de nature différente peuvent se poser :

- Se demander si la série trigonométrique est une série de Fourier

- Se poser le problème de sa convergence (convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence $L^p \ldots$).

Il faut avoir conscience que les liens entre ces deux questions ne sont pas évidents. Par exemple, ce n'est pas parce qu'une série trigonométrique converge presque partout que c'est une série de Fourier. Il n'est même pas clair dans le cas où elle converge que la fonction qu'elle définit soit dans $L^1_{2\pi}$. Enfin, si c'est le cas, il n'est pas dit que les c_n sont les coefficients de Fourier de cette fonction intégrable (voir théorème 0.4).

A travers les lignes qui suivent, nous allons décrire un peu plus précisément la situation sur une classe de séries trigonométriques. On s'intéressera aux séries $\sum b_n \sin nx$ où b_n est une suite de réels positifs décroissant vers 0.

Théorème 0.5 *Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0. La fonction :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et mesurable. Si de plus f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = b_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0\ .$$

Ainsi, la série $\sum b_n \sin nx$ est une série de Fourier et c'est même la série de Fourier de f (on a noté $b_n(f)$ et $a_n(f)$ les coefficients de fourier de f en sin *et* cos*).*

Corollaire 0.6 *Sous les hypothèses du théorème 5, si la fonction f est dans $L^1_{2\pi}$, alors, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}$ est convergente. Par exemple, la fonction (partout définie)*

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il faut clairement distinguer l'énoncé du corollaire 0.6 de celui qui affirme (voir [4] ou [5]) que si la série $\sum_n b_n \sin nx$ est une série de Fourier, alors $\sum \frac{b_n}{n}$ converge. Le lien entre les deux se fait par l'intermédiaire du théorème 5.

Démontrons le théorème 0.5. Une transformation d'Abel assure que la série proposée converge ponctuellement. On peut même dire un peu plus. Comme les sommes $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ sont uniformément bornées en n et en $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, on prouve, à l'aide d'une transformation d'Abel, que la série converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. Donc f est définie partout et continue en dehors des multiples de 2π. Faisons l'hypothèse supplémentaire que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction f est impaire, ses coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls. De plus, l'intégrabilité de la fonction f permet d'écrire :

$$\forall n \geq 1, \quad \pi b_n(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} f(t) \sin nt\, dt\ .$$

Or, la convergence uniforme de la série sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ permet de calculer $\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} f(t) \sin nt \, dt$ en échangeant l'intégrale et la série. Sauf erreur de ma part, le calcul donne :

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} f(t) \sin nt \, dt = b_n \left(\pi - \varepsilon + \frac{\sin 2n\varepsilon}{2n} \right) + \sum_{k \neq n} b_k \left(\frac{\sin(k+n)\varepsilon}{k+n} - \frac{\sin(k-n)\varepsilon}{k-n} \right) .$$

Finalement, si on sait que la série qui apparait converge uniformément par rapport au paramètre ε, on peut passer à la limite sous le signe somme lorsque $\varepsilon \to 0$ et conclure la proposition. Ce dernier point résulte du lemme suivant :

Lemme 0.7 *Soit $(c_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissant vers 0. Alors, la série $\sum_{k\geq 1} c_k \frac{\sin kx}{k}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

C'est élémentaire grace à une transformation d'Abel en se souvenant que ([5]) :

$$\exists C > 0 \ ; \ \forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq C \ .$$

Il faut noter que l'hypothèse de décroissance sur c_k n'est pas nécessaire pour obtenir le lemme, mais la preuve devient alors plus subtile (voir [5] ou [4] p.6).

Signalons pour terminer cette fiche de lecture l'approche de Titchmarch ([4] page 420) pour prouver que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

n'est pas intégrable sur $[0, 2\pi]$. La convergence uniforme de la série sur les intervalles $[a, b]$, ou $0 < a < b < 2\pi$, permet d'écrire :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos na - \cos nb}{n \ln n} \ .$$

Supposons de plus que f soit intégrable sur $[0, 2\pi]$. La quantité $\int_a^b f(t)dt$ possède alors une limite finie lorsque a tend vers 0. La contradiction vient du lemme suivant :

Lemme 0.8 *On a :*

$$\lim_{a \to 0^+} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos na}{n \ln n} = +\infty \ .$$

Là encore, une transformation d'Abel est bien utile pour conclure. Un calcul élémentaire nous assure l'identité :

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\cos \frac{(n+1)a}{2} \sin \frac{na}{2}}{\sin a/2} \ .$$

Pour tout $a > 0$, appelons N la partie entière de $1/a$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{\cos ka}{k \ln k}\right| &= \left|\frac{S_{N-1}(a)}{N \ln N} + \sum_{k=N}^{+\infty} S_k(a) \cdot \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{S_{N-1}(a)}{N \ln N}\right| + \sum_{k=N}^{+\infty} |S_k(a)| \cdot \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\right) \\
&\leq \frac{2}{|\sin(a/2)|\, N \ln N} \\
&\leq \frac{2\pi}{\ln N} \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, cette quantité tend vers 0 lorsque $a \to 0^+$. Par ailleurs, on a la minoration :

$$\sum_{k=2}^{N-1} \frac{\cos ka}{k \ln k} \geq \cos 1 \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k \ln k} \ .$$

Le lemme résulte donc de la divergence de la série de terme général $1/(k \ln k)$.

Remarque finale. Ces quelques lignes doivent sensibiliser le lecteur sur la différence qui existe entre série de Fourier et série trigonométrique. Une série de Fourier est une série trigonométrique particulière qui résulte de l'analyse d'une fonction 2π-périodique et localement intégrable. La théorie des séries de Fourier met alors en valeur des conditions qui permettent la synthèse de cette fonction à l'aide de sa série de Fourier. Il est en général faux qu'une série trigonométrique abstraite, même lorsqu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$, donne naissance à une fonction analysable (c'est à dire localement intégrable). Enfin, même si c'est le cas, il n'est jamais clair que l'analyse de cette fonction nous redonne la série de départ.

Références bibliographiques

[1] Y. HEURTEAUX, D. HULIN, F. PIQUARD, H. QUEFFELEC. *Exercices et problèmes corrigés de calcul intégral ; Orsay Plus.*

[2] Y. KATZNELSON. *An introduction to Harmonic Analysis ; Wiley.*

[3] S. KECHRIS and A. LOUVEAU. *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness ; Cambridge University press.*

[4] E.C. TITSCHMARCH. *The Theory of Functions ; Oxford U. Press.*

[5] H. QUEFFELEC, C. ZUILY. *Eléments d'Analyse pour l'Agrégation ; Masson.*