Problème

I

Soient f et h deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation :

$$f * g = h \ , \quad g \in L^1(\mathbb{R}) \ . \tag{1}$$

Question préliminaire : Donner une condition nécessaire portant sur $\hat{f}$ et $\hat{h}$ pour que (1) ait des solutions. Montrer sur un exemple que cette condition n'est pas toujours suffisante.

A. On suppose dans cette partie que $\hat{f}(0) = 1$.

1. Montrer l'existence d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1], \ \hat{\varphi}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \notin [-2, 2], \ \hat{\varphi}(x) = 0 \ .$$

On pose pour $\lambda > 0$, $\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi(\lambda x)$.

2. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|\psi_\lambda\|_1 = 0$ où $\psi_\lambda = \hat{f}(0)\varphi_\lambda - f * \varphi_\lambda$. En déduire l'existence d'une fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ et d'un voisinage V de 0 tels que :

$$\|\psi\|_1 < 1 \quad \text{et} \quad \hat{\psi} = 1 - \hat{f} \text{ sur } V \ .$$

On suppose dans le reste de cette partie que $\hat{h}$ est à support dans V. On définit la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_0 = h \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ g_{n+1} = \psi * g_n \ .$$

3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_1$ est convergente et en déduire que la fonction $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ est définie presque partout et est dans $L^1(\mathbb{R})$.

4. Calculer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{h}$ et $\hat{\psi}$ uniquement. En déduire que g est solution de (1).

B. On suppose dans cette partie que la transformée de Fourier de f ne s'annule pas. On cherche alors à montrer que si $\hat{h}$ est à support compact, l'équation (1) possède une solution.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que si $\hat{h}$ est à support dans V_x, alors (1) possède une solution.

On suppose désormais que $\hat{h}$ est à support compact K et on fixe un recouvrement fini $V_1 \dots V_n$ de K constitué d'ensembles du type V_x.

2. Prouver l'existence de fonctions $\varphi_1 \dots \varphi_n$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \mathrm{Supp}\,(\hat{\varphi}_i) \subset V_i \quad \text{et} \quad \forall x \in K,\ \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i(x) = 1\ .$$

3. En déduire que l'équation (1) possède une solution.

II

Dans tout l'exercice, on fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$ et on cherche à démontrer le théorème suivant :

Théorème. *La famille des translatées de f est totale dans $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\hat{f}$ ne s'annule pas.*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f_x(t) = f(t-x)$ et $W = \overline{\mathrm{vect}\,(f_x\ ,\ x \in \mathbb{R})}$.

1. Montrer que la condition du théorème est nécessaire.

2. Montrer que si $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g * h) * \varphi(x) = g * (h * \varphi)(x)\ .$$

3. On rappelle que le dual de $L^1(\mathbb{R})$ s'identifie à $L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach que si $k \notin W$, on peut construire $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$k * \varphi \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad \forall h \in W,\ h * \varphi \equiv 0\ .$$

En déduire que si $h \in W$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors, $g * h \in W$ (ainsi W est un idéal de $L^1(\mathbb{R})$).

On suppose désormais que $\hat{f}$ ne s'annule pas.

4. A l'aide du **I** montrer que W contient toutes les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact.

5. En déduire que $W = L^1(\mathbb{R})$ (on fera intervenir les fonctions φ_λ du **I**).