Sur la dimension des mesures

Yanick Heurteaux*

Table des matières

*Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620, Université Blaise Pascal, F-63177 Aubière, France

L'objectif de ces notes de cours est de présenter un état des lieux concernant la notion de dimension des mesures, en insistant en particulier sur les différents moyens qu'on peut développer pour l'estimer ou la calculer. On montrera aussi, à travers l'exemple des mesures quasi-Bernoulli, le lien profond qui existe entre le calcul de la dimension de mesures annexes et l'analyse multifractale. Le modèle des mesures quasi-Bernoulli, qui mêle harmonieusement analyse, systèmes dynamiques et théorie ergodique, nous semble pédagogiquement intéressant en raison de la relative simplicité des outils nécessaires à son traitement. Les idées développées dans l'article fondateur de Brown, Michon Peyrière ([BMP92]) puis dans [Heu98] ont par ailleurs donné naissance à de nombreux prolongements dans lesquels la combinatoire associée à la dynamique devient de plus en plus complexe (voir par exemple et de façon non exhaustive, [LN00], [FL02], [Fen03], [Ye] ou [Tes04a]).

Afin d'être le plus possible auto-contenu, ce texte propose aussi en appendice une preuve du théorème de Shannon-McMillan, outil clé dans l'étude des mesures quasi-Bernoulli.

1 Etude d'un exemple

On note $\mathcal{F}_n$ la famille des intervalles dyadiques de $n^{\text{ème}}$ génération sur $[0,1[$ et $p \in]0,1[$. On considère le produit de Bernoulli de paramètre p. C'est la mesure m définie de la façon suivante. Si $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ sont des entiers valant 0 ou 1 et si $I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right[\in \mathcal{F}_n$,

$$m\left(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = p^{s_n}(1-p)^{n-s_n}, \quad \text{où} \quad s_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \ .$$

A chaque point $x \in [0,1[$, on peut associer une unique suite $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ de 0 ou de 1 telle que pour tout n, $x \in I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$. Ainsi, les ε_i peuvent être vues comme des variables aléatoires sur l'espace $[0,1[$ muni de la probabilité m. Il est facile de constater que les ε_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. Elles vérifient donc

$$m(\{\varepsilon_i = 1\}) = p \quad \text{et} \quad m(\{\varepsilon_i = 0\}) = 1-p \ .$$

Ainsi, par la loi forte des grands nombres, s_n/n converge dm-presque sûrement vers p. Si $I_n(x)$ désigne l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ contenant x, on a donc pour dm presque tout $x \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(m(I_n(x)))}{\ln|I_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{s_n \ln p + (n-s_n)\ln(1-p)}{n \ln 2} = -(p\log_2(p)+(1-p)\log_2(1-p)) \ .$$

Notons pour simplifier $h(p) = -(p\log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p))$ et introduisons les quantités

$$\dim_*(m) = \inf(\dim(E)\ ;\ m(E) > 0) \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \inf(\dim(E)\ ;\ m(E) = 1)\ .$$

Il est facile de se convaincre grâce au théorème de Billingsley que

$$\dim_*(m) = \dim^*(m) = h(p)\ .$$

Cela signifie que la mesure m est portée par un ensemble de dimension $h(p)$ tandis que tout ensemble de dimension inférieure à $h(p)$ est négligeable pour la mesure m. On dit encore que la mesure m est unidimensionnelle de dimension $h(p)$. Evidemment, on peut aussi introduire les quantités

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \inf(\mathrm{Dim}(E)\ ;\ m(E) > 0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \inf(\mathrm{Dim}(E)\ ;\ m(E) = 1),$$

où Dim désigne la dimension de packing et on a encore pour notre exemple

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = h(p)\ .$$

Cet exemple est connu depuis fort longtemps et nous apprend aussi que l'ensemble F_p des réels x tels que s_n/n converge vers p est de dimension $h(p)$ (voir par exemple [Bes35], [Egg49], [You82] ou [Fa]) .

2 Dimensions d'une mesure

2.1 Dimension inférieure et dimension supérieure d'une mesure

Définition 2.1. *Soit m une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. On appelle dimension inférieure et dimension supérieure de la mesure m les quantités*

$$\dim_*(m) = \inf(\dim(E)\ ;\ m(E) > 0) \quad \textit{et} \quad \dim^*(m) = \inf(\dim(E)\ ;\ m(E) = 1)\ .$$

Evidemment on a toujours $0 \le \dim_*(m) \le \dim^*(m) \le d$. Lorsqu'il y a égalité, on dit que la mesure est unidimensionnelle et on note $\dim(m)$ la valeur commune. Les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ permettent aussi des comparaisons entre la mesure m et les mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^\alpha$. De façon précise, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soit m une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Alors*

$$\dim_*(m) = \sup(\alpha\ ;\ m << \mathcal{H}^\alpha) \quad \textit{et} \quad \dim^*(m) = \inf(\alpha\ ;\ m \perp \mathcal{H}^\alpha)\ .$$

Ainsi, lorsque la dimension supérieure de la mesure est petite, cela signifie que la mesure m est "très singulière". Par contre, lorsque la dimension inférieure de la mesure m est grande, cela veut dire que la mesure m est "peu singulière".
Preuve de la proposition 2.2. Notons $\alpha_* = \sup(\alpha\ ;\ m << \mathcal{H}^\alpha)$. Si $\alpha < \alpha_*$ et si $m(E) > 0$, alors $\mathcal{H}^\alpha(E) > 0$. Ainsi, $\dim(E) \ge \alpha$. On conclut donc que $\dim_*(m) \ge \alpha$ puis que $\dim_*(m) \ge \alpha_*$. Réciproquement, si $\alpha > \alpha_*$, on peut trouver un ensemble E tel que $m(E) > 0$ et $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Ainsi, $\dim(E) \le \alpha$, ce qui donne $\dim_*(m) \le \alpha$ puis $\dim_*(m) \le \alpha_*$. On montrerait de même que $\dim^*(m) = \inf(\alpha\ ;\ m \perp \mathcal{H}^\alpha)$. •

Les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ sont aussi reliées au comportement asymptotique des fonctions $\frac{\ln m(B(x,r))}{\ln(r)}$. De façon précise, on a le résultat suivant.

Théorème 2.3. ([Fan94, Fal97, Heu98]) *Soit m une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Notons*

$$\Phi_*(x) = \liminf_{r \to 0} \Phi_r(x) \quad \textit{où} \quad \Phi_r(x) = \frac{\ln m(B(x,r))}{\ln(r)}\ .$$

On a

$$\dim_*(m) = \inf \mathrm{ess}\,(\Phi_*) \quad \textit{et} \quad \dim^*(m) = \sup \mathrm{ess}\,(\Phi_*),$$

les bornes essentielles étant relatives à la mesure m. En particulier, l'encadrement $0 \le \Phi_* \le d$ est vrai dm-presque sûrement.

Preuve. Commençons par montrer que $\dim_*(m) = \inf\mathrm{ess}\,(\Phi_*)$. Fixons $\alpha < \inf\mathrm{ess}\,\Phi_*$. Pour dm presque tout x, il existe r_0 tel que si $r < r_0$, $m(B(x,r)) < r^\alpha$. Notons alors

$$E_n = \{x \; ; \; \forall r < 1/n, \; m(B(x,r)) < r^\alpha\} \; .$$

La mesure m est portée par $\bigcup_n E_n$. Ainsi, si $m(E) > 0$, on peut trouver un entier n tel que $m(E \cap E_n) > 0$. Par définition de E_n, il en résulte que $\mathcal{H}^\alpha(E \cap E_n) > 0$ puis que $\dim(E) \geq \alpha$. On a prouvé que $\inf\mathrm{ess}\,(\Phi_*) \leq \dim_*(m)$.

Réciproquement, si $\alpha > \inf\mathrm{ess}\,\Phi_*$, on peut trouver E tel que $m(E) > 0$ et tel que pour tout $x \in E$, $\Phi_*(x) < \alpha$. Si $x \in E$, et si $\delta > 0$, on peut trouver $r_x < \delta$ tel que $m(B(x, r_x)) > r_x^\alpha$. Les boules $B(x, r_x)$ constituent alors un 2δ recouvrement de E. Le problème est que ces boules ne sont pas disjointes. Cependant, grâce au lemme de recouvrement de Besicovich, on peut trouver une constante ξ ne dépendant que de la dimension d et au plus ξ sous familles $B(x_{1,j}, r_{x_{1,j}})_j, \cdots, B(x_{\xi,j}, r_{x_{\xi,j}})_j$ constituées de boules deux à deux disjointes et qui continuent de recouvrir E. On a alors

$$\forall i, \quad \sum_j (\mathrm{diam}\;(B(x_{i,j}, r_{x_{i,j}})))^\alpha = \sum_j (2r_{x_{i,j}})^\alpha \leq 2^\alpha \sum_j m(B(x_{i,j}, r_{x_{i,j}})) \leq 2^\alpha m(\mathbb{R}^d) < +\infty \; .$$

Finalement, $\mathcal{H}^\alpha_{2\delta}(E) \leq \xi 2^\alpha m(\mathbb{R}^d)$ et on conclut que $\mathcal{H}^\alpha(E) < +\infty$ puis que $\dim(E) \leq \alpha$. Grâce à l'arbitraire sur α on obtient $\dim_*(m) \leq \inf\mathrm{ess}\,(\Phi_*)$.

La preuve de l'égalité $\dim^*(m) = \sup\mathrm{ess}\,(\Phi_*)$ se fait en suivant les mêmes idées. •

2.2 Qu'en est-il des dimensions de packing ?

Une question naturelle consiste maintenant à se demander quelle est l'interprétation des bornes essentielles de la fonction $\Phi^* = \limsup_{r\to 0} \Phi_r$. Sans réelle nouvelle idée, on peut prouver des résultats jumeaux de la proposition 2.2 et du théorème 2.3.

Proposition 2.4. *Soit m une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Notons*

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \inf(\mathrm{Dim}(E) \; ; \; m(E) > 0) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \inf(\mathrm{Dim}(E) \; ; \; m(E) = 1) \; .$$

Alors

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \sup(\alpha \; ; \; m << \hat{\mathcal{P}}^\alpha) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \inf(\alpha \; ; \; m \perp \hat{\mathcal{P}}^\alpha),$$

où $(\hat{\mathcal{P}}^\alpha)_\alpha$ désignent les mesures de packing et Dim *la dimension de packing.*

Théorème 2.5. ([Fal97, Heu98]) *Soit m une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Notons*

$$\Phi^*(x) = \limsup_{r\to 0} \Phi_r(x) \quad \textit{où} \quad \Phi_r(x) = \frac{\ln m(B(x,r))}{\ln(r)} \; .$$

On a

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \inf\mathrm{ess}\,(\Phi^*) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \sup\mathrm{ess}\,(\Phi^*),$$

les bornes essentielles étant relatives à la mesure m. En particulier, l'encadrement $0 \leq \Phi^* \leq d$ est vrai dm-presque sûrement.

2.3 Unidimensionnalité et ergodicité

Si l'on revient à l'exemple du produit de Bernoulli développé dans la partie précédente, on a pour cette mesure :

$$\begin{cases} \mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = \dim_*(m) = \dim^*(m) = h(p) \\ \Phi^*(x) = \Phi_*(x) = h(p) \quad dm - \text{presque partout} \ . \end{cases}$$

En particulier, elle est unidimensionnelle. Elle possède aussi des propriétés d'ergodicité par rapport au doublement. C'est ce qui est traduit dans la proposition qui suit.

Proposition 2.6. *Soit m le produit de Bernoulli de paramètre p défini dans la partie 1. On note σ le doublement modulo 1 défini par $\sigma(x) = 2x - \mathrm{Ent}\,(2x)$ où $\mathrm{Ent}\,(2x)$ désigne la partie entière de $2x$. La mesure m est σ-invariante et ergodique.*

Preuve. On reprend les notation de la partie 1. On a

$$\sigma^{-1}(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) = I_{0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \cup I_{1\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \ .$$

Ainsi

$$m(\sigma^{-1}(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n})) = (1-p)m(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) + pm(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) = m(I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}) \ .$$

Par un argument de classe monotone, on en déduit donc que m est σ-invariante. Par ailleurs, notons

$$IJ = I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+p}} \quad \text{si} \quad I = I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \text{ et } J = I_{\varepsilon_{n+1} \cdots \varepsilon_{n+p}} \ .$$

Cette notation reviendra plus tard dans le cours du texte. Si $J \in \mathcal{F}_p$, on constate alors que

$$\sigma^{-n}(J) = \bigcup_{K \in \mathcal{F}_n} KJ \ .$$

Il en résulte que

$$m(I \cap \sigma^{-n}(J)) = m(IJ) = m(I)m(J) \quad \text{si} \quad I \in \mathcal{F}_n \ . \tag{1}$$

Cette relation ne fait que traduire le fait que les variables ε_i sont indépendantes et de même loi.

Par un argument de classe monotone, l'identité (1) est encore vraie pour tout borélien J. En particulier, si J est un borélien σ-invariant,

$$m(I \cap J) = m(I)m(J) \quad \forall n, \ \forall I \in \mathcal{F}_n \ .$$

Là encore, grâce à un argument de classe monotone, on peut remplacer $I \in \mathcal{F}_n$ par I borélien quelconque. En particulier, si $I = [0,1] \setminus J$, on obtient

$$0 = m\left(([0,1] \setminus J) \cap J\right) = (1 - m(J))m(J),$$

ce qui prouve que m est ergodique. •

Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où on peut dégager la propriété générale suivante :

Proposition 2.7. ([Fal97]) *Soit X un fermé de $\mathbb{R}^d$, $T : X \to X$ une application lipschitzienne et m une mesure de probabilités sur X, T-invariante et ergodique. Alors :*

$$\dim_*(m) = \dim^*(m) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m)\ .$$

Preuve. Si T est C-lipschitzienne, $T(B(x,r)) \subset B(T(x), Cr)$. Il en résulte que

$$m(B(x,r)) \le m(T^{-1}(T(B(x,r)))) \le m(T^{-1}(B(T(x),Cr))) = m(B(T(x),Cr))\ .$$

Ainsi, $\Phi_r(x) \ge \Phi_{Cr}(T(x))\frac{\ln(Cr)}{\ln(r)}$, ce qui donne $\Phi_*(x) \ge \Phi_*(T(x))$. La fonction $\Phi_*(x) - \Phi_*(T(x))$ est donc positive d'intégrale nulle. Il s'en suit qu'elle est presque partout nulle, ce qui signifie que Φ_* est T-invariante. Comme Φ_* est bornée et comme la mesure m est ergodique, la fonction Φ_* est donc presque partout constante. Ainsi, $\dim_*(m) = \dim^*(m)$. On montrerait de même que $\mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m)$. •

Remarque 1. La fonction $\sigma(x) = 2x - \mathrm{Ent}(2x)$ n'est pas lipschitzienne, ce qui semble dire que la mesure produit de Bernoulli ne relève pas de la proposition 2.7. Cependant, si on identifie les points 0 et 1, c'est à dire si on voit la mesure m comme une mesure sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S_1$, elle devient invariante par rapport à l'opération de doublement qui est parfaitement régulière.

Remarque 2. Une autre façon de voir les choses est de considérer le produit de Bernoulli comme une mesure sur l'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, les intervalles $I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$ s'identifiant aux cylindres $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ de l'ensemble de Cantor. Modulo cette identification, l'application σ n'est autre que le shift $(\varepsilon_n)_{n\ge1} \mapsto (\varepsilon_n)_{n\ge2}$ sur l'ensemble de Cantor abstrait.

3 Le point de vue discrétisé

La dimension de Hausdorff pouvant aussi se calculer en ne faisant intervenir que des cubes ℓ-adiques, on peut établir une version discrète des énoncés de la partie précédente. Fixons un entier $\ell \ge 2$, notons $\mathcal{F}_n$ la famille des cubes ℓ-adiques de la $n^{\text{ème}}$ génération et supposons que la mesure m soit une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. Si $I_n(x)$ désigne l'unique élément de $\mathcal{F}_n$ qui contient x et si $\log_\ell$ désigne le logarithme en base ℓ, on peut introduire la suite de variables aléatoires X_n définies par

$$X_n(x) = -\log_\ell\left(\frac{m(I_n(x))}{m(I_{n-1}(x))}\right)\ . \tag{2}$$

Si $|I_n(x)| = \ell^{-n}$ désigne la "longueur" du cube $I_n(x)$, on a alors

$$\frac{S_n(x)}{n} = \frac{X_1(x) + \ldots + X_n(x)}{n} = \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|}$$

et les quantités $\dim_*(m)$ et $\dim^*(m)$ sont reliées au comportement asymptotique de la suite $\frac{S_n}{n}$. Plus précisément, avec les mêmes idées que lors des théorèmes 2.3 et 2.5, on peut aussi établir que

$$\dim_*(m) = \inf\mathrm{ess}\ \left(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right) \quad \text{et} \quad \dim^*(m) = \sup\mathrm{ess}\ \left(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)\ . \tag{3}$$

De même, on peut prouver que

$$\mathrm{Dim}_*(m) = \inf \mathrm{ess} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \sup \mathrm{ess} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \right) . \tag{4}$$

3.1 Un exemple

Décrivons une exemple élémentaire et bien connu (voir par exemple [BK90] ou [Bis95]) qui généralise le cas des produits de Bernoulli et qui permet de voir l'utilité de l'interprétation probabiliste que l'on vient de mettre en valeur. Supposons $d = 1$ et fixons une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels tels que $0 < p_n < 1$. Reprenons les notations de la partie 1 et construisons maintenant la mesure m de telle sorte que

$$m\left(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}1}\right) = p_n m\left(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}}\right) \quad \text{et} \quad m\left(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}0}\right) = (1-p_n) m\left(I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}}\right) \ .$$

Les ε_i sont encore des variables aléatoires indépendantes et vérifient

$$m\left(\{\varepsilon_n = 1\}\right) = p_n \quad \text{et} \quad m\left(\{\varepsilon_n = 0\}\right) = 1 - p_n \ .$$

Les variables X_n, définies comme en (2), sont dans ce cas indépendantes et bornées dans L^2. La loi forte des grands nombres assure alors la convergence presque-sûre vers 0 de

$$\frac{S_n - \mathbb{E}\left[S_n\right]}{n} \tag{5}$$

et on conclut aisément que pour dm-presque tout $x \in [0,1[$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \liminf_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k + (1-p_k)\log_2(1-p_k) \ .$$

On notera $h_*(m) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]$, quantité qu'on appelera entropie inférieure (voir paragraphe suivant).

La mesure est m est là encore unidimensionnelle de dimension $\dim(m) = h_*(m)$. De façon plus précise, on déduit en fait de (5) l'existence d'une sous-suite n_k telle que pour dm-presque tout $x \in [0,1[$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}(x)|} = h_*(m) \ .$$

On verra lors de la partie 4.3 que ce type de propriété caractérise les mesures dont la dimension se calcule à l'aide d'une formule d'entropie.

Evidemment, un résultat similaire concernant les dimensions de packing est vérifié. La mesure est unidimensionnelle au sens des dimensions de packing et vérifie

$$\mathrm{Dim}(m) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \limsup_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k + (1-p_k)\log_2(1-p_k) := h^*(m) \ .$$

3.2 La fonction τ, son interprétation probabiliste, ses liens avec l'entropie

Les identités (3) et (4) ne sont évidemment guère utiles pour fournir des estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure de la mesure m. Nous allons chercher à établir des majorations et des minorations des quantités $\dim_*(m)$, $\dim^*(m)$, $\mathrm{Dim}_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$, puis à décrire ou préciser certains cas d'égalité.

Pour cela, introduisons la fonction τ, bien connue des multifractalistes. Supposons comme plus haut que la mesure m soit une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. La fonction τ est définie par

$$\tau(q) = \limsup_{n\to+\infty} \tau_n(q) \quad \text{avec} \quad \tau_n(q) = \frac{1}{n \log \ell} \log\left(\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^q\right) . \tag{6}$$

Cette fonction est finie sur $[0,+\infty[$ et peut être dégénérée sur $]-\infty,0[$. Elle est convexe et décroissante sur son intervalle de définition. Dans l'espace $[0,1[^d$ muni de ses boréliens et de la probabilité m, on peut de plus écrire :

$$\tau_n(1-q) = \frac{1}{n}\log_\ell \mathbb{E}\left[\ell^{qS_n}\right] \quad \text{et} \quad \tau(1-q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log_\ell \mathbb{E}\left[\ell^{qS_n}\right] .$$

En dérivant, on obtient aussi :

$$-\tau_n'(1) = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{-1}{n}\sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)\log_\ell m(I) .$$

Cette quantité n'est autre que l'entropie de la mesure m relativement à la partition $\mathcal{F}_n$. Nous la noterons $h_n(m)$. Pour une mesure générale, la suite $h_n(m)$ ne converge pas. Cependant, on peut toujours définir l'entropie inférieure et l'entropie supérieure de la mesure m par les formules

$$h_*(m) = \liminf_{n\to\infty} h_n(m) \quad \text{et} \quad h^*(m) = \limsup_{n\to\infty} h_n(m) . \tag{7}$$

Lorsque les quantités $h_*(m)$ et $h^*(m)$ coïncident, la valeur commune est notée plus simplement $h(m)$. Il s'agit alors de l'entropie de la mesure m.

Remarquons enfin que les propriétés de convexité des fonctions τ_n entrainent les inégalités :

$$-\tau_+'(1) \le h_*(m) \le h^*(m) \le -\tau_-'(1) , \tag{8}$$

où τ_-' et τ_+' sont les dérivées à gauche et à droite de la fonction τ.

Pour terminer ce paragraphe, revenons sur l'exemple développé dans le paragraphe précédent. Les calculs de τ, $h_*(m)$ et $h^*(m)$ donnent

$$\begin{aligned}
\tau(q) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_2\left(p_k^q + (1-p_k)^q\right) \\
h_*(m) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{-1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\log_2 p_k + (1-p_k)\log_2(1-p_k) \\
h^*(m) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{-1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\log_2 p_k + (1-p_k)\log_2(1-p_k) .
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque m est un produit de Bernoulli de paramètre p (c'est à dire lorsque pour tout k, $p_k = p$), on trouve

$$\tau(q) = \log_2 (p^q + (1-p)^q) \quad \text{et} \quad h_*(m) = h^*(m) = -(p \log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p)) \; .$$

3.3 Des estimations générales

Théorème 3.1. ([Heu98, BH02]) *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. On a ;*

$$-\tau'_+(1) \le \dim_*(m) \le h_*(m) \le h^*(m) \le \mathrm{Dim}^*(m) \le -\tau'_-(1) \; . \tag{9}$$

Remarques. 1. En particulier, grâce à (3) et (4), si $\dim_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m)$, alors, l'entropie $h(m)$ existe et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = h(m), \qquad dm\text{-presque partout} \; .$$

On obtient alors une conclusion "de type Shannon-McMillan" dans un contexte non dynamique.

2. Réciproquement, s'il existe un réel h tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = h$ presque sûrement, on a

$$\dim_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) \quad \text{et} \quad h_*(m) = h^*(m) = h \; .$$

3. Dans [Nga97], S.M. Ngai établit des inégalités similaires à $-\tau'_+(1) \le \dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) \le -\tau'_-(1)$. Il s'intéresse ensuite surtout au cas où $\tau'(1)$ existe. Ici, notre propos consiste plutôt à étudier le cas où τ n'est pas dérivable eu point 1 (voir parties 3.4 et 4.2) puis à trouver des conditions suffisantes assurant que $\tau'(1)$ existe (voir partie 5).

Le fait d'avoir relié les quantités $\dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m)$ au comportement asymptotique de la suite S_n/n nous permet de donner une preuve très simple du théorème 3.1. Les inégalités $\dim_*(m) \le h_*(m)$ et $h^*(m) \le \mathrm{Dim}^*(m)$ sont des conséquences du lemme de Fatou. Quant aux inégalités $-\tau'_-(1) \le \dim_*(m)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) \le -\tau'_+(1)$, on peut les voir comme des conséquences de l'inégalité de Cramer-Chernoff. Ce n'est pas la démarche suivie dans [Heu98], mais on peut isoler le résultat suivant qui entraine immédiatement le théorème 3.1.

Théorème 3.2. ([Heu99]) *Soit $(S_n)_{n\ge0}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la fonction*

$$L(q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \mathbb{E}\left[\ell^{qS_n}\right]$$

est finie sur un voisinage I de l'origine. On a alors :

$$L'_-(0) \le \operatorname{inf\,ess}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \quad et \quad \operatorname{sup\,ess}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \le L'_+(0) \; .$$

De plus, la suite $\frac{S_n}{n}$ est dominée dans $L^1(\mathbb{P})$ et on a

$$\operatorname{inf\,ess}\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}\right) \le \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] \le \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] \le \operatorname{sup\,ess}\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}\right) \; .$$

Preuve. Soit $\alpha > L'_+(0)$ et $q > 0$. En reprenant la démarche classique de Cramer-Chernoff,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\ell^{qn\alpha}} \mathbb{E}\left[\ell^{qS_n}\right] \ .$$

En passant au logarithme puis à la limite supérieure en n, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right)\right) \leq L(q) - q\alpha \ .$$

En optimisant en q, on trouve

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_\ell \left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right)\right) \leq -\sup_{q>0\,,\,q\in I} (q\alpha - L(q)) = -L^*(\alpha) < 0,$$

où L^* désigne la transformée de Legendre de L. Si $0 < \varepsilon < L^*(\alpha)$ et n assez grand, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right) \leq e^{-n(L^*(\alpha)-\varepsilon)},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\}\right) = 0 \ .$$

Finalement, presque sûrement, $\frac{S_n}{n} < \alpha$ à partir d'un certain rang, ce qui entraine que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} \leq \alpha$. L'inégalité

$$\sup\mathrm{ess}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq L'_+(0)$$

en découle. On montrerait de même l'inégalité

$$L'_-(0) \leq \inf\mathrm{ess}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \ .$$

Pour établir le deuxième point du théorème, on commence par constater que la suite $\frac{S_n}{n}$ est dominée dans $L^1(\mathbb{P})$. En effet, Notons $X = \sup_n \left|\frac{S_n}{n}\right|$. On a :

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq t\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq t\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq -t\right)$$

Par ailleurs, si $q > 0$ est tel que $L(q) < +\infty$ et si $\varepsilon > 0$, le calcul précédent nous permet de trouver un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \log_\ell \left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq t\right)\right) \leq \frac{1}{n} \log_\ell \left(\mathbb{E}\left[\ell^{qSn}\right]\right) - qt \leq L(q) + \varepsilon - qt \ .$$

Ainsi,

$$\sum_{n\geq n_0} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq t\right) \leq \sum_{n\geq n_0} \ell^{n(L(q)+\varepsilon-qt)} \leq \frac{\ell^{L(q)+\varepsilon-qt}}{1-\ell^{L(q)+\varepsilon-qt}} \quad \text{si } t \text{ est grand}$$

et on peut conclure que la fonction $t \mapsto \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq t\right)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue au voisinage de $+\infty$. On traiterait de même la fonction $t \mapsto \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq -t\right)$. Finalement,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\, dt < +\infty \ .$$

Ayant maintenant justifié que la suite $\frac{S_n}{n}$ est dominée dans $L^1(\mathbb{P})$ par la variable aléatoire X, en appliquant le lemme de Fatou à la suite positive $X + \frac{S_n}{n}$, on trouve,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] + \operatorname{inf\,ess}\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}\right) &= \mathbb{E}\left[X + \operatorname{inf\,ess}\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[X + \left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}\right)\right] \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[X + \frac{S_n}{n}\right] \\
&= \mathbb{E}[X] + \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] \ ,
\end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité. On montrerait de même la deuxième inégalité en appliquant le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives $X - \frac{S_n}{n}$. •

3.4 Comment exploiter concrètement les estimations du théorème 3.1

Dans la pratique, il est difficile de calculer explicitement la fonction τ (et donc les nombres $\tau'_-(1)$ et $\tau'_+(1)$). Cependant, si on sait majorer au voisinage du point 1 la fonction τ par une fonction χ dérivable à gauche et à droite au point 1 et vérifiant $\chi(1) = 0$, on obtient :

$$\dim_*(m) \geq -\chi'_+(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) \leq -\chi'_-(1) \ .$$

En particulier, cette remarque s'applique en prenant $\chi = \log_\ell(\beta)$ où

$$\beta(q) = \limsup_{n\to+\infty} \beta_n(q) \quad \text{et} \quad \beta_n(q) = \sup_{I\in\mathcal{F}_n} \left(\sum_{J\subset I,\ J\in\mathcal{F}_{n+1}} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q \right) \ .$$

En effet,

$$\tau_n(q) \leq \frac{\log\beta_{n-1}(q) + \cdots + \log\beta_0(q)}{n\log\ell} \ .$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\tau(q) &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\beta_{n-1}(q) + \cdots + \log\beta_0(q)}{n\log\ell} \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\beta_n(q)}{\log\ell} = \frac{\log\beta(q)}{\log\ell} \ .
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\beta(1) = 1$, on peut dégager le corollaire suivant.

Corollaire 3.3. ([Heu95, Heu98]) *En toute généralité, on a aussi*

$$\dim_*(m) \geq -\frac{\beta'_+(1)}{\ln(\ell)} \quad et \quad \mathrm{Dim}^*(m) \leq -\frac{\beta'_-(1)}{\ln(\ell)} \ .$$

La fonction β_n estime les contrastes qui existent entre la masse d'un cube I et la masse de ses fils. Dans de nombreuses situations, ceux-ci sont controlés. On peut alors obtenir des estimations de la dimension de la mesure.

Décrivons un exemple élémentaire où cette démarche s'applique. Supposons $d = 1$ et $\ell = 2$. Fixons $p \geq 1/2$ et imaginons que tout cube $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ possède un fils J tel que $m(J) \geq p\, m(I)$. Il est facile de constater que dans cette situation,

$$\beta_n(q) \leq p^q + (1-p)^q \quad \text{si } q \in]0,1[\ .$$

Par ce qui précède, on peut alors aisément mesurer le degré de singularité de m et prouver que

$$\dim^*(m) \leq \mathrm{Dim}^*(m) \leq -(p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p)) \ .$$

De même, si maintenant $p \leq 1/2$ et si m est une mesure telle que pour tout cube $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ les deux fils I_1 et I_2 de I vérifient $m(I_1) \geq pm(I)$ et $m(I_2) \geq pm(I)$ on obtient aisément l'estimation

$$\mathrm{Dim}_*(m) \geq \dim_*(m) \geq -(p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p)) \ .$$

Dans chacun des deux exemples que l'on vient de décrire, la situation extrémale est obtenue lorsque chaque cube possède un fils dont la masse relative vaut exactement p. La mesure m est alors un produit de Bernoulli. Elle est unidimensionnelle de dimension $-(p \log_2(p) + (1-p) \log_2(1-p))$. C'est l'exemple traité en tout debut de ce texte.

Signalons pour terminer que Bourgain dans [Bou87] et Batakis dans [Bat96] utilisent les quantités $\beta_n(2)$ pour donner, dans certains contextes, des estimations de la dimension de la mesure harmonique.

3.5 Contrastes et estimations des dimensions

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser l'exemple que l'on vient de mettre en valeur et nous allons voir comment on peut exploiter les contrastes de masse entre un cube I et certains de ces fils pour obtenir des estimations des dimensions de la mesure m. Nous supposerons pour simplifier le propos que la mesure m charge tous les cubes $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Fixons un entier $k \in \{1, \cdots, \ell^d - 1\}$ et, pour tout entier $n \geq 1$ et tout cube $I \in \mathcal{F}_n$, notons

$$\delta_k(I) = \max\left(\frac{m(I_1 \cup \cdots \cup I_k)}{m(I)} \ , \ I_1 \cdots I_k \text{ fils de } I \right) \ .$$

Remarquons tout d'abord qu'on a l'encadrement

$$\frac{k}{\ell^d} \leq \delta_k(I) \leq 1 \ .$$

En effet, si $J_1, \cdots, J_{\ell^d}$ désignent les fils de I qu'on suppose avoir rangés par ordre décroissant de masse, on a

$$\delta_k(I) = \frac{m(J_1 \cup \cdots \cup J_k)}{m(I)} \quad \text{et} \quad \forall i > k, \ km(J_i) \leq m(J_1 \cup \cdots \cup J_k) \ .$$

Ainsi,

$$1 = \delta_k(I) + \sum_{j>k} \frac{m(J_i)}{m(I)} \leq \delta_k(I) + \frac{(\ell^d - k)}{k}\delta_k(I)$$

ce qui prouve que $\delta_k(I) \geq \frac{k}{\ell^d}$.

Lorsque $\delta_k(I)$ est proche de k/ℓ^d, c'est que la masse est répartie de façon assez homogène dans le cube I. Si cela se produit pour tous les cubes I, on peut s'attendre à ce que la mesure m ait une grande dimension. Par contre, lorsque pour tout cube I, $\delta_k(I)$ est proche de 1, c'est qu'une petite portion de I capte l'essentiel de la masse. On peut dans ce cas s'attendre dans ce cas à ce que la mesure m ait une petite dimension. Ces remarques heuristiques prennent une forme rigoureuse dans les deux énoncés qui suivent.

Proposition 3.4. ([Heu98]) *Soient m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$, $1 \leq k < \ell^d$ et $\delta \in]k\ell^{-d}, 1[$ tels que pour tout $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$, $\delta_k(I) \geq \delta$. La mesure m vérifie alors*

$$\operatorname{Dim}^*(m) \leq -\delta \log_\ell \left(\frac{\delta}{k}\right) - (1-\delta)\log_\ell \left(\frac{1-\delta}{\ell^d - k}\right) \ .$$

Proposition 3.5. *Soient m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$, $1 \leq k < \ell^d$ et $\delta \in]k\ell^{-d}, 1[$ tels que pour tout $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$, $\delta_k(I) \leq \delta$. Notons $p = \operatorname{Ent}\left[\delta^{-1}\right]$. La mesure m vérifie alors*

$$\dim_*(m) \geq -p\delta \log_\ell(\delta) - (1-p\delta)\log_\ell(1-p\delta) \ .$$

La proposition 3.5 est en fait une conséquence immédiate de la proposition plus générale suivante.

Proposition 3.6. *Soient m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$ et $0 < \delta \leq 1$. On note $p = \operatorname{Ent}\left[\delta^{-1}\right]$. On suppose que pour tout cube $I \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$, on peut trouver une partition $A_1, \cdots, A_j$ de l'ensemble des fils de I telle que*

$$\forall i \in \{1, \cdots, j\}, \qquad \frac{m\left(\bigcup_{J\in A_i} J\right)}{m(I)} \leq \delta \ .$$

Alors

$$\dim_*(m) \geq -p\delta \log_\ell(\delta) - (1-p\delta)\log_\ell(1-p\delta) \ .$$

Remarque 1. Si $\delta > 1/2$, alors $p = 1$. C'est en particulier le cas lorsque $\ell = 2$ et $d = 1$.

Remarque 2. Lorsque $k = 1$ et $\ell = 2$, des estimations comparables à celles des propositions 3.4 et 3.5 sont aussi obtenues dans un article récent de Llorente et Nicolau ([LN04]) et des correctifs logarithmiques sont proposés.

Preuve de la proposition 3.4. Soit $I \in \mathcal{F}_n$ et $I_1, \cdots, I_k$ les fils de I tels que $\delta_k(I) = \frac{m(I_1 \cup \cdots \cup I_k)}{m(I)}$. Notons $S = \{I_1, \cdots, I_k\}$. Si $q < 1$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{J\subset I,\ J\in\mathcal{F}_{n+1}} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q &= \sum_{J\in S}\left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q + \sum_{J\notin S}\left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q \\ &\leq k^{1-q}\left(\delta_k(I)\right)^q + (\ell^d - k)^{1-q}\left(1-\delta_k(I)\right)^q \ . \end{aligned}$$

On constate ensuite que la fonction $t \mapsto k^{1-q}t^q + (\ell^d - k)^{1-q}(1-t)^q$ est décroissante sur l'intervalle $[k\ell^{-d}, 1]$. Ainsi, sous l'hypothèse de la proposition 3.4, on trouve que

$$\forall q \in]0,1[, \quad \beta_n(q) \leq k^{1-q} (\delta)^q + (\ell^d - k)^{1-q} (1-\delta)^q ,$$

ce qui permet de conclure grâce au corollaire 3.3 que

$$\mathrm{Dim}^*(m) \leq -\delta \log_\ell \left(\frac{\delta}{k}\right) - (1-\delta) \log_\ell \left(\frac{1-\delta}{\ell^d - k}\right) .$$

Preuve de la proposition 3.6. Elle s'appuie sur le Lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soient $q > 1$, $j \geq 2$ et $\frac{1}{j} < \delta \leq 1$. Notons $M(\delta, j)$ le maximum de la fonction $F(a_1, \cdots, a_j) = a_1^q + \cdots + a_j^q$ sous les contraintes $a_1 + \cdots + a_j = 1$ et pour tout i, $0 \leq a_i \leq \delta$. Alors*

$$M(\delta, j) = p\delta^q + (1 - p\delta)^q$$

où $p = \mathrm{Ent}\left[\delta^{-1}\right]$.

Preuve. Il s'agit d'un problème de maximum sous contraintes. La fonction F étant symétrique, on peut rajouter les contraintes $a_1 \geq \cdots \geq a_j$ sans changer le problème. C'est ce que l'on fera afin de simplifier les notations. On constate aussi que l'on a toujours $j \geq p + 1$.

Si $0 < a_2 \leq a_1 < \delta$, la fonction $\varepsilon \mapsto (a_1 + \varepsilon)^q + (a_2 - \varepsilon)^q$ est strictement croissante à droite de $\varepsilon = 0$. Ainsi, le maximum est atteint lorsque $a_1 = \delta$. On prouve alors le lemme par récurrence sur l'entier p.

Supposons d'abord $p = 1$, c'est à dire $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$. On a

$$F(\delta, a_2, \cdots, a_j) \leq \delta^q + (a_2 + \cdots + a_j)^q = \delta^q + (1-\delta)^q .$$

Par ailleurs sous l'hypothèse $p = 1$, $0 \leq 1 - \delta < \delta$ et $F(\delta, 1-\delta, 0, \cdots, 0) = \delta^q + (1-\delta)^q$. On conclut donc que $M(\delta, j) = \delta^q + (1-\delta)^q$.

Supposons ensuite la conclusion du lemme satisfaite pour toute valeur de $\mathrm{Ent}\left[\delta^{-1}\right]$ comprise entre 1 et $p - 1$ et prenons δ tel que $\mathrm{Ent}\left[\delta^{-1}\right] = p$. Le réel δ satisfait donc l'encadrement $\frac{1}{p+1} < \delta \leq \frac{1}{p}$. On remarque que

$$F(\delta, a_2, \cdots, a_j) = \delta^q + (1-\delta)^q \left(\left(\frac{a_2}{1-\delta}\right)^q + \cdots + \left(\frac{a_j}{1-\delta}\right)^q \right) .$$

Les réels $\frac{a_i}{1-\delta}$ sont soumis aux contraintes

$$0 \leq \frac{a_i}{1-\delta} \leq \frac{\delta}{1-\delta} .$$

Comme de plus

$$\mathrm{Ent}\left[\frac{1-\delta}{\delta}\right] = p - 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{j-1} < \frac{\delta}{1-\delta},$$

on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour trouver que

$$F(\delta, a_2, \cdots, a_j) \quad \leq \quad \delta^q + M\left(\frac{\delta}{1-\delta}\, , j-1\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^q + (1-\delta)^q \left((p-1)\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^q + \left(1-(p-1)\frac{\delta}{1-\delta}\right)^q \right) \\
&= p\delta^q + (1-p\delta)^q \ .
\end{aligned}
$$

Ainsi $M(\delta, j) \le p\delta^q + (1-p\delta)^q$. Cette dernière inégalité est en fait une égalité si on constate que $1 - p\delta \le \delta$ et que

$$F(\delta, \cdots, \delta, (1-p\delta), 0, \cdots, 0) = p\delta^q + (1-p\delta)^q \ .$$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition 3.6. On va estimer la fonction β du paragraphe 3.4. Fixons $I \in \mathcal{F}_n$. Si $q > 1$, on a, grâce au lemme 3.7 :

$$\sum_{J \subset I,\, J \in \mathcal{F}_{n+1}} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q = \sum_{i=1}^{j} \sum_{J \in A_i} \left(\frac{m(J)}{m(I)}\right)^q \le \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{m\left(\bigcup_{J \in A_i} J\right)}{m(I)}\right)^q \le p\delta^q + (1-p\delta)^q \ .$$

On en déduit que

$$\beta(q) \le p\delta^q + (1-p\delta)^q \qquad \text{si } q > 1 \ .$$

On peut donc conclure que

$$\dim_*(m) \ge -\frac{\beta'_+(1)}{\log \ell} \ge -p\delta \log_\ell(\delta) - (1-p\delta)\log_\ell(1-p\delta) \ .$$

4 Des situations où l'on peut calculer la dimension des mesures par une formule exacte

4.1 Les égalités $-\tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m)$ et $-\tau'_+(1) = \dim_*(m)$ sont souvent fausses

En général, les inégalités $-\tau'_+(1) \le \dim_*(m)$ et $-\tau'_-(1) \ge \mathrm{Dim}^*(m)$ sont strictes. Par exemple, Olsen propose dans [Ols00] un exemple de mesure discrète telle que $-\tau'_-(1) = 1$ et $-\tau'_+(1) = 0$. Nous allons décrire ici un exemple encore plus convaincant.

Proposition 4.1. *Soit μ une mesure diffuse sur $[0,1[$ et ne chargeant pas les points. On peut construire une mesure m équivalente à μ et dont la fonction τ vérifie*

$$\tau(q) = \sup(1-q, 0) \quad \text{si } q > 0 \ .$$

En particulier, les mesures m et μ ont mêmes dimensions. Cependant, la fonction τ associée à m est dégénérée.

En appliquant cette proposition à un produit de Bernoulli dont le paramètre p vérifie

$$-(p \log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p)) = h,$$

on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. ([Heu99]) *Pour tout réel $h \in]0,1[$, on peut construire une mesure de probabilités m sur $[0,1[$ telle que*

$$\tau(q) = \sup(1-q, 0) \text{ si } q > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = h \ dm\text{-presque-sûrement}\,.$$

Preuve de la proposition 4.1. Pour fixer les idées, supposons $\ell = 2$. Fixons une mesure μ diffuse sur $[0,1[$ et ne chargeant pas les points. La construction de la mesure m se fait en deux étapes. Si $I \in \mathcal{F}_n$ notons $\mu_I = (\mu(I))^{-1}\, 1\!\!1_I \mu$. On définit dans un premier temps la mesure m_1 par la formule

$$m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} c n^{-2} 2^{-n} \mu_I,$$

où c est choisi tel que $c \sum_{n \geq 1} n^{-2} = 1$. La mesure m_1 est clairement équivalente à la mesure μ. Par ailleurs, si $I \in \mathcal{F}_n$, on constate que

$$m_1(I) \geq c n^{-2} 2^{-n} \ .$$

Comme $\mathcal{F}_n$ contient 2^n points, on en déduit que pour tout $q \in]0,1[$,

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m_1(I)^q \geq 2^n \left[c n^{-2} 2^{-n} \right]^q \ .$$

Avec des notations évidentes, on trouve alors $\tau_1(q) \geq 1 - q$ si $q \in]0,1[$. Par ailleurs, l'inégalité $\tau_1(q) \leq 1 - q$ est toujours vérifiée en dimension 1 lorsque $q \in]0,1[$. Ainsi,

$$\forall q \in]0,1[, \quad \tau_1(q) = 1 - q \ .$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, notons $J_n = \left[2^{-n}, 2^{-n+1} \right[$ On observe que la réunion des intervalles J_n vaut $]0,1[$. On va modifier la masse globale de l'intervalle J_n. De façon précise, notons

$$\alpha_n = \sup \left(\frac{1}{n^2 m_1(J_n)}, 1 \right)$$

puis

$$m = \sum_{n=1}^{+\infty} c \alpha_n 1\!\!1_{J_n} m_1$$

où c est choisi de telle sorte que m soit une mesure de probabilités. Comme $m \geq c m_1$, on trouve (avec des notations qui se comprennent) $\tau(q) \geq \tau_1(q)$ si $q > 0$. En particulier, on conserve l'égalité $\tau(q) = 1 - q$ si $q \in]0,1[$. Par ailleurs,

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \geq m(J_n)^q \geq \left[\frac{c}{n^2} \right]^q ,$$

ce qui entraine que $\tau(q)$ est positif si $q \geq 1$. Comme par ailleurs, l'inégalité $\tau(q) \leq 0$ est toujours vérifiée pour $q \geq 1$, on a

$$\forall q \in]1 + \infty[, \quad \tau(q) = 0 \ .$$

C'est ce qu'il restait à établir. •

4.2 Une condition suffisante assurant $-\tau'_+(1) = \dim_*(m)$ et $-\tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m)$

Le corollaire 4.2 prouve qu'on doit ajouter des hypothèses d'homogénéité sur la mesure m pour espérer obtenir les égalités

$$\tau'_+(1) = \dim_*(m) \quad \text{et} \quad \tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m) \ .$$

Une hypothèse possible pour y parvenir est la suivante. Par souci de simplification, supposons que $d = 1$. Les intervalles de $\mathcal{F}_n$ peuvent alors se coder à l'aide des mots $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ constitués de lettres $\varepsilon_i \in \{0, \cdots, \ell - 1\}$. De façon précise, on peut noter

$$I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{\ell^n} \right[\ .$$

On conviendra alors de noter

$$IJ = I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n+p}} \quad \text{si} \quad I = I_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \text{ et } J = I_{\varepsilon_{n+1} \cdots \varepsilon_{n+p}} \ . \tag{10}$$

Supposons alors qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\forall I, J \in \bigcup_n \mathcal{F}_n, \qquad m(IJ) \leq C\, m(I)\, m(J) \ . \tag{11}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 4.3. ([Heu98]) *Sous l'hypothèse* (11),

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1) \ .$$

Remarque. L'hypothèse (11) est en particulier vérifiée lorsque m est un produit de Bernoulli où on a même vu lors de la partie 2.3 que la propriété $m(IJ) = m(I)m(J)$ était satisfaite. De façon plus générale, elle est aussi vérifiée lorsque m est une mesure quasi-Bernoulli (voir partie 5). Cependant, il existe des mesures vérifiant (11) qui ne sont pas quasi-Bernoulli. En particulier tout barycentre de deux mesures quasi-Bernoulli continue de vérifier (11) mais n'est en général plus quasi-Bernoulli (pour plus de détails, voir l'exemple développé page 333 dans [Heu98]).
Preuve du théorème 4.3. Soit $q > 0$. On commence par constater que la suite $\tau_n(q)$ converge et que de plus,

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \geq C^{-q} \ell^{n\tau(q)} \ . \tag{12}$$

C'est une conséquence immédiate de la sous-multiplicativité de la suite $a_n = C^q \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q$. Il est alors connu que $(a_n)^{1/n}$ converge vers sa borne inférieure.

Introduisons les notations suivantes

$$A_n(x) = \frac{\log(m(I_n(x)))}{\log |I_n(x)|}, \quad A_*(x) = \liminf_{n \to +\infty} A_n(x) \quad \text{et} \quad A^*(x) = \limsup_{n \to +\infty} A_n(x) \ .$$

On se souvient que $\dim_*(m) = \operatorname{inf\,ess}(A_*)$ et $\mathrm{Dim}^*(m) = \operatorname{sup\,ess}(A^*)$.
Preuve de l'inégalité $\dim_*(m) \leq -\tau'_+(1)$. Soit $\alpha > -\tau'_+(1) = \alpha_0$. On cherche à montrer que $\alpha \geq \dim_*(m)$. Pour cela, on va montrer qu'il existe un ensemble de mesure positive sur lequel $A_* \leq \alpha$. Notons

$$L_n = \{I \in \mathcal{F}_n \ ; \ m(I) > |I|^\alpha\} \quad \text{et} \quad B_n = \bigcup_{I \in L_n} I \ . \tag{13}$$

Pour tout $q > 1$, la convexité de la fonction τ et l'inégalité (12) nous apprennent que $C^{-q}\ell^{n\alpha_0(1-q)} \leq C^{-q}\ell^{n\tau(q)} \leq \sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^q$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} C^{-q}\ell^{n\alpha_0(1-q)} &\leq \sum_{I\in L_n} m(I)^q + \sum_{I\notin L_n} m(I)^q \\ &\leq \left(\sum_{I\in L_n} m(I)\right)^q + \sum_{I\notin L_n} m(I)^{q-1+1} \\ &\leq m(B_n)^q + \sum_{I\notin L_n} |I|^{(q-1)\alpha} m(I) \\ &\leq m(B_n) + (1-m(B_n))\ell^{n\alpha(1-q)} \ . \end{aligned}$$

On trouve alors

$$m(B_n) \geq \frac{C^{-q}\ell^{n\alpha_0(1-q)} - \ell^{n\alpha(1-q)}}{1-\ell^{n\alpha(1-q)}} \ .$$

Ici, $\alpha > \alpha_0$ et $1-q < 0$. En prenant $1-q = -\delta/n$, on trouve

$$m(B_n) \geq \frac{C^{-(1+\delta/n)}\ell^{-\delta\alpha_0} - \ell^{-\delta\alpha}}{1-\ell^{-\delta\alpha}} \ .$$

Finalement, si on choisit δ de telle sorte que $C^{-1}\ell^{-\delta\alpha_0} > \ell^{-\delta\alpha}$, on trouve l'existence d'un réel η strictement positif tel que

$$m(B_n) \geq \eta \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \ .$$

Il s'en suit que $m(\limsup B_n) \geq \eta > 0$. Sur l'ensemble $\limsup B_n$, $A_n(x) < \alpha$ infiniment souvent et donc $A_* \leq \alpha$. Ainsi, on a bien $\alpha \geq \operatorname{inf\,ess}(A_*) = \dim_*(m)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.
Preuve de l'inégalité $\mathrm{Dim}^*(m) \geq -\tau'_-(1)$. Les idées sont assez proches de celles déployées lors de la preuve de l'inégalité $\dim_*(m) \leq -\tau'_+(1)$. On note maintenant $\alpha_0 = -\tau'_-(1)$ et on fixe $\alpha < \alpha_0$. Si L_n et B_n sont définis comme en (13), et si $\widetilde{B}_n = [0,1[\setminus B_n$, on trouve maintenant pour tout $q \in]1/2, 1[$,

$$\begin{aligned} C^{-q}\ell^{n\alpha_0(1-q)} &\leq \sum_{I\in\mathcal{F}_n} m(I)^q \\ &\leq \sum_{I\in L_n} m(I)^{1+(q-1)} + \sum_{I\notin L_n} m(I)^q \\ &\leq m(B_n)\ell^{n\alpha(1-q)} + m(\widetilde{B}_n)^q(\ell^n - \mathrm{card}(L_n))^{1-q} \\ &\leq (1-m(\widetilde{B}_n))\ell^{n\alpha(1-q)} + m(\widetilde{B}_n)^{1/2}\ell^{n(1-q)} \end{aligned}$$

Choisissons δ de telle sorte que $\ell^{\delta\alpha} - C^{-1}\ell^{\delta\alpha_0} < 0$ puis q tel que $1-q = \delta/n$. On a alors

$$m(\widetilde{B}_n)\ell^{\delta\alpha} - m(\widetilde{B}_n)^{1/2}\ell^{\delta} \leq \ell^{\delta\alpha} - C^{-q}\ell^{\delta\alpha_0} \leq \ell^{\delta\alpha} - C^{-1}\ell^{\delta\alpha_0} \ . \qquad (14)$$

On constate que le polynôme $P(X) = \ell^{\delta\alpha}X^2 - \ell^{\delta}X + C^{-1}\ell^{\delta\alpha_0} - \ell^{\delta\alpha}$ a deux racines strictement positives. L'inégalité (14) impose donc que $m(\widetilde{B}_n) \geq \eta$ pour un certain réel $\eta > 0$ ne dépendant que de δ, α et α_0. On trouve alors

$$m(\limsup \widetilde{B}_n) \geq \eta \ .$$

Sur l'ensemble $\limsup \widetilde{B}_n$, $A_n \geq \alpha$ infiniment souvent. Ainsi

$$\mathrm{Dim}^*(m) = \operatorname{sup\,ess}(A^*) = \operatorname{sup\,ess}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \geq \alpha$$

et l'inégalité $\mathrm{Dim}^*(m) \geq -\tau'_-(1)$ en résulte. •

Notons que seule l'inégalité (12) est nécessaire pour démontrer le théorème 4.3. Cette remarque se trouve aussi dans le thèse de Benoît Testud ([Tes04a]). On peut donc dégager le résultat plus général suivant.

Théorème 4.4. *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ et un voisinage $\mathcal{V}$ du point 1 tels que*

$$\forall n \geq 1, \quad \forall q \in \mathcal{V}, \quad \tau_n(q) \geq \tau(q) - \frac{c}{n} \ .$$

Alors, la mesure m vérifie

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = -\tau'_-(1) \ .$$

4.3 Les mesures dont la dimension se calcule à l'aide de l'entropie

Reprenant les inégalités (9), on s'interesse dans ce paragraphe aux mesures m vérifiant $\dim_*(m) = h_*(m)$ ou $\mathrm{Dim}^*(m) = h^*(m)$. Ce type de propriété est lié à un comportement asymptotique bien particulier de la suite $\frac{S_n}{n}$. C'est ce qui est traduit dans le résultat qui suit.

Théorème 4.5. ([BH02]) *Soit m une mesure de probabilités sur $[0,1[^d$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\dim_*(m) = h_*(m)$

(ii) $\dim_*(m) = \dim^*(m) = h_*(m)$

(iii) *Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour dm-presque tout $x \in [0,1[^d$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}(x)|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{S_{n_k}(x)}{n_k} = \dim_*(m) \ .$$

Remarques. 1. En particulier, les mesures dont la dimension se calcule à l'aide d'une formule d'entropie sont unidimensionnelles. Cependant, l'égalité $\dim_*(m) = h_*(m)$ traduit une propriété d'homogénéité plus forte et correspond à une intervertion de quantificateurs ; la mesure m est unidimensionnelle si et seulement si pour dm-presque tout x, il existe une sous-suite n_k telle que $S_{n_k}(x)/n_k$ converge vers $\dim_*(m)$ tandis qu'elle vérifie $\dim_*(m) = h_*(m)$ si et seulement si il existe une sous-suite n_k telle que pour dm-presque tout x, $S_{n_k}(x)/n_k$ converge vers $\dim_*(m)$.

2. Les propriétés équivalentes du théorème 4.5 sont entre autres satisfaites lorsque $\tau'(1)$ existe. Cependant, l'exemple décrit dans le paragraphe 3.1 prouve que cette hypothèse n'est pas nécessaire.

3. La conclusion (iii) peut se voir comme une version faible d'un résultat "de type Shannon-McMillan" obtenu dans un contexte où il n'y a pas de système dynamique sous-jacent.

4. On peut évidemment aussi établir qu'il y a équivalence entre

(i) $\mathrm{Dim}^*(m) = h^*(m)$

(ii) $\mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) = h^*(m)$

(iii) Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour dm-presque tout $x \in [0,1[^d$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log m(I_{n_k}(x))}{\log |I_{n_k}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{S_{n_k}(x)}{n_k} = \mathrm{Dim}^*(m) \ .$$

5. La mesure décrite au paragraphe 3.1 vérifie les conclusions du théorème 4.5 ainsi que celles de la remarque précédente. Cependant, pour cette mesure, on peut avoir

$$\dim_*(m) = \dim^*(m) = h_*(m) < h^*(m) = \mathrm{Dim}_*(m) = \mathrm{Dim}^*(m) \ .$$

La conclusion du théorème 4.5 suggère qu'on puisse construire des mesures unidimensionnelles dont la dimension ne se calcule pas à l'aide d'une formule d'entropie. De tels exemples sont proposés dans [BH02].

Comme pour le théorème 3.1, il existe un énoncé probabiliste qui entraine le théorème 4.5.

Théorème 4.6. *Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est dominée dans $L^1(\mathbb{P})$. Notons*

$$Z_* = \liminf_{n\to+\infty} Z_n \ .$$

Il y a équivalence entre

(i) $\inf\mathrm{ess}\ (Z_*) = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n]$

(ii) $Z_* = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n]$ *$d\mathbb{P}-$presque sûrement*

(iii) *Il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} Z_{n_k} = \inf\mathrm{ess}\ (Z_*) \quad d\mathbb{P} - \textit{presque sûrement} \ .$$

Ramarque. Pour obtenir le théorème 4.5, il suffit d'appliquer le théorème 4.6 à la suite $Z_n = \frac{S_n}{n}$ où $\frac{S_n(x)}{n} = \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|}$.

Preuve du théorème 4.6. Notons X une domination de la suite Z_n. Comme lors de la démonstration du théorème 3.2, le lemme de Fatou appliqué à la suite positive $X + Z_n$ nous donne :

$$\mathbb{E}\,[X] + \inf\mathrm{ess}\,(Z_*) \leq \mathbb{E}\,[X + Z_*] \leq \mathbb{E}\,[X] + \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n] \ . \tag{15}$$

Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i). Le théorème de convergence dominée appliqué à la suite Z_{n_k} nous donne

$$\inf\mathrm{ess}\ (Z_*) = \mathbb{E}\left[\lim_{k\to+\infty} Z_{n_k}\right] = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_{n_k}] \geq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n] \ .$$

L'inégalité inverse est donnée par (15).

Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii). On reprend les inégalités (15). On est dans le cas d'égalité, ce qui signifie que $Z_* = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n]$ $d\mathbb{P}-$presque sûrement.

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii). Quitte à remplacer Z_n par $Z_n + X$, on peut supposer que Z_n est positif. Notons $\delta = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,[Z_n]$. On s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 4.7. *Soit $\eta \in]0,1[$ et $n_0 \geq 1$. On peut trouver $n_1 \geq n_0$ tel que*

$$\mathbb{P}\left[Z_{n_1} > \delta + \eta\right] \leq (2+\delta)\eta \ .$$

Preuve. Comme $Z_* = \delta$ presque sûrement, on peut trouver $n'_0 \geq n_0$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq n'_0} \left\{Z_n > \delta - \eta^2\right\}\right] > 1 - \eta^2 \ .$$

Par ailleurs, on peut trouver $n_1 \geq n'_0$ tel que

$$\mathbb{E}\left[Z_{n_1}\right] < \delta + \eta^2 \ .$$

Notons

$$A = \left\{Z_{n_1} > \delta - \eta^2\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{Z_{n_1} > \delta + \eta\right\} \ .$$

Puisque $Z_n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \delta + \eta^2 &\geq \mathbb{E}\left[Z_{n_1}\right] \\ &\geq \int_{A \setminus B} Z_{n_1} d\mathbb{P} + \int_B Z_{n_1} d\mathbb{P} \\ &\geq (\delta - \eta^2)(\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]) + (\delta + \eta)\mathbb{P}[B] \ . \end{aligned}$$

Comme de plus, $\mathbb{P}[A] \geq 1 - \eta^2$, on trouve

$$\mathbb{P}[B] \leq \frac{2\eta^2 + \delta\eta^2}{\eta + \eta^2} \leq (2+\delta)\eta \ .$$

Pour prouver le théorème 4.6, on utilise le lemme en prenant $\eta = 2^{-n}$ et on peut ainsi construire une sous-suite n_k telle que pour tout k,

$$\mathbb{P}\left[Z_{n_k} > \delta + 2^{-k}\right] \leq (2+\delta)2^{-k} \ .$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient alors

$$\limsup_{k \to +\infty} Z_{n_k} \leq \delta \qquad d\mathbb{P} - \text{presque sûrement} \ .$$

Par ailleurs

$$\delta = S_* \leq \liminf_{k \to +\infty} Z_{n_k} \qquad d\mathbb{P} - \text{presque sûrement} \ .$$

Ainsi, la sous-suite Z_{n_k} converge presque sûrement vers δ. De plus, sous l'hypothèse (ii), $Z_* = \operatorname{inf\,ess}(Z_*) = \delta$ $d\mathbb{P}-$presque sûrement. c.q.f.d. •

4.4 L'entropie est une mauvaise notion de dimension

Même si l'on se restreint aux mesures m telles que $h(m)$ existe, l'entropie constitue une mauvaise notion de dimension pour la mesure m. En particulier, deux mesures peuvent être équivalentes et avoir des entropies différentes, ce qui n'est pas naturel pour une "bonne" notion de dimension. Précisons ce phénomène par l'exemple suivant.

Proposition 4.8. *Soient m_0 et m_1 deux mesures de probabilités sur $[0,1[^d$ telles que les entropies $h(m_0)$ et $h(m_1)$ existent et son différentes. Pour $\alpha \in]0,1[$, notons*

$$m_\alpha = \alpha m_1 + (1-\alpha) m_0 \ .$$

Alors,

$$h(m_\alpha) = \alpha h(m_1) + (1-\alpha) h(m_0) \ .$$

En particulier la famille de mesures $(m_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ est constituée de mesures équivalentes pour laquelle l'entropie varie dans tout un intervalle.

Preuve. On reprend les notations du paragraphe 3.2. La concavité de la fonction $x \mapsto -x \log_\ell(x)$ nous assure que

$$h_n(m_\alpha) \geq \alpha h_n(m_1) + (1-\alpha) h_n(m_0),$$

ce qui donne

$$h_*(m_\alpha) \geq \alpha h(m_1) + (1-\alpha) h(m_0) \ . \tag{16}$$

D'un autre coté, si $q < 1$ et si x et y sont deux réels positifs, on sait que

$$(\alpha x + (1-\alpha) y)^q \leq \alpha^q x^q + (1-\alpha)^q y^q \ .$$

Ainsi

$$\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \leq \alpha^q \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m_1(I)^q + (1-\alpha)^q \sum_{I \in \mathcal{F}_n} m_0(I)^q \ .$$

On observe que les deux membres de l'inégalité prennent la valeur 1 au point 1. Ainsi, on peut dériver l'inégalité pour obtenir

$$h_n(m_\alpha) \leq \alpha h_n(m_1) - \frac{\alpha \log_\ell \alpha}{n} + (1-\alpha) h_n(m_0) - \frac{(1-\alpha)\log_\ell(1-\alpha)}{n},$$

et conclure que

$$h^*(m_\alpha) \leq \alpha h(m_1) + (1-\alpha) h(m_0) \ . \tag{17}$$

Les inégalités (16) et (17) fournissent la conclusion de la proposition 4.8.

5 Les mesures quasi-Bernoulli

Par souci de simplification on suppose encore dans cette partie $d = 1$ et on reprend les notations du paragraphe 4.2. On dit que la mesure de probabilités m est une mesure quasi-Bernoulli si on peut trouver un réel $C \geq 1$ tel que

$$\forall I, J \in \bigcup_n \mathcal{F}_n, \quad \frac{1}{C} m(I)\, m(J) \leq m(IJ) \leq C\, m(I)\, m(J) \ . \tag{18}$$

Introduisons les applications naturelles (liées au codage) entre $[0,1[$ et l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} = \{0, \ldots, \ell - 1\}^{\mathbb{N}^*}$:

$$J \ : \ [0,1[\longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S \ : \ \mathcal{C} \longrightarrow [0,1] \ .$$

Elles sont définies par :

$$J(x) = (\varepsilon_i)_{i \geq 1} \text{ si } \{x\} = \bigcap_n I_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \quad \text{et} \quad S((\varepsilon_i)_{i\geq 1}) = \bigcap_n \bar{I}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \ .$$

L'application J est une bijection entre $[0,1[$ et le complémentaire d'un ensemble dénombrable de $\mathcal{C}$. Comme une mesure quasi-Bernoulli ne charge pas les points (sauf si c'est une masse de Dirac), on peut alors transporter la mesure m par l'application J et travailler sur l'ensemble de Cantor. Nous appelerons encore m cette nouvelle mesure et nous travaillerons sur celle-ci. Toutes les propriétés que nous établirons sur cette nouvelle mesure peuvent évidemment se transposer à la mesure initiale.

Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots construits sur l'alphabet $\{0,\cdots,\ell-1\}$. Les mots de $\mathcal{M}$ s'identifient aux cylindres de $\mathcal{C}$ et on utilisera systématiquement cette identification. La propriété (18) devient alors

$$\forall a,b\in\mathcal{M},\quad \frac{1}{C}\,m(a)m(b)\leq m(ab)\leq C\,m(a)m(b)\ . \tag{19}$$

On dira maintenant que m est une mesure quasi-Bernoulli sur l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$.

Notons $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des mots de longueur n et, si $x=x_1x_2\cdots\in\mathcal{C}$, $I_n(x)=x_1\cdots x_n$ l'unique cylindre de $\mathcal{M}_n$ contenant x.

On peut dans ce nouveau contexte encore définir les fonctions τ_n et τ. Des propriétés de sous et sur multiplicativité comparables à celles mises en valeur dans le paragraphe 4.2 nous assurent que la suite $\tau_n(q)$ est convergente lorsque m est une mesure quasi-Bernoulli. On a donc

$$\tau(q)=\lim_{n\to+\infty}\tau_n(q)\quad\text{avec}\quad \tau_n(q)=\frac{1}{n\,\log\ell}\,\log\left(\sum_{a\in\mathcal{M}_n}m(a)^q\right)\ . \tag{20}$$

et l'encadrement suivant est vérifié

$$C^{-|q|}\ell^{n\tau(q)}\leq\sum_{a\in\mathcal{M}_n}m(a)^q=\ell^{n\tau_n(q)}\leq C^{|q|}\ell^{n\tau(q)}\ . \tag{21}$$

Notons enfin qu'on peut, sans perte de généralité, supposer que pour tout $a\in\mathcal{M}$, $m(a)>0$. En effet, si tel n'est pas le cas, grâce à la propriété quasi-Bernoulli, c'est qu'il existe un cylindre $a\in\mathcal{M}_1$ tel que $m(a)=0$. Finalement, certaines lettres de l'alphabet ne comptent pas et on pourrait travailler sur un ensemble de Cantor abstrait construit à partir d'un alphabet plus petit.

5.1 Loi du 0-1, propriétés de mélange

L'intérêt de travailler sur $\mathcal{C}$ est que maintenant on est dans un contexte dynamique grâce au shift

$$\sigma\ :\ (\varepsilon_n)_{n\geq1}\in\mathcal{C}\longmapsto(\varepsilon_n)_{n\geq2}\in\mathcal{C}\ . \tag{22}$$

En particulier, si $a\in\mathcal{M}_n$, le cylindre ab se lit aussi $a\cap\sigma^{-n}(b)$.

On peut isoler les propriétés suivantes qui reprennent en les complétant des remarques faites par Carleson dans [Car85].

Proposition 5.1. *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$. Notons B_0 la tribu des boréliens, $B_n=\sigma^{-n}(B_0)$ et $B_\infty=\bigcap_n B_n$.*

(i) *Pout tout $E\in B_\infty$, $\quad m(E)=0$ ou $m(E)=1$. (loi du 0-1)*

(ii) *Si de plus m est σ-invariante, elle est fortement mélangeante. C'est à dire*

$$\forall A, B \in B_0, \quad \lim_{n\to\infty} m\left(A \cap \sigma^{-n}(B)\right) = m(A)\, m(B) \ .$$

Remarque. En particulier, toute mesure quasi-Bernoulli σ-invariante est ergodique.
Preuve. Fixons un borélien $E \in B_\infty$ de mesure strictement positive. Pour tout entier n, on peut trouver un borélien F tel que $E = \sigma^{-n}(F)$. On peut aussi trouver un cylindre $a_0 \in \mathcal{M}_n$ tel que

$$\frac{m(a_0 \cap E)}{m(a_0)} \geq \frac{1}{2}\, m(E) \ .$$

Comme m est une mesure quasi-Bernoulli, on a de plus

$$\forall a \in \mathcal{M}_n,\ \forall b \in \mathcal{M}, \quad \frac{m(a \cap \sigma^{-n}(b))}{m(a)} \geq \frac{1}{C^2}\, \frac{m(a_0 \cap \sigma^{-n}(b))}{m(a_0)} \ .$$

Si cette inégalité est vraie pour tous les cylindres b, elle est en fait vraie pour tous les ouverts, puis par régularité pour tous les boréliens. En remplaçant b par F, on trouve donc

$$\forall a \in \mathcal{M}_n, \quad \frac{m(a \cap E)}{m(a)} \geq \frac{1}{C^2}\, \frac{m(a_0 \cap E)}{m(a_0)} \geq \frac{1}{2C^2}\, m(E) \ .$$

Par un raisonnement similaire au précédent, l'inégalité $m(a \cap E) \geq (2C^2)^{-1}\, m(E)\, m(a)$, vraie pour tout cylindre a est aussi vraie pour tout borélien. En particulier, $m((\mathcal{C} \setminus E) \cap E) \geq (2C^2)^{-1}\, m(E)\, m(\mathcal{C} \setminus E)$. On obtient donc $m(\mathcal{C} \setminus E) = 0$. C'est ce qu'on voulait établir.

La preuve de (ii) est alors classique. Notons $Z_n = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A | B_n\right]$. C'est une martingale par rapport à la filtration décroissante B_n (on parle alors de martingale renversée). Elle converge donc dans L^2 (et presque sûrement) vers $Z_\infty = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A | B_\infty\right]$. Comme B_∞ est une tribu triviale, la variable Z_∞ est constante. De plus, la convergence dans L^2 entraine la convergence des espérances. On trouve ainsi que

$$Z_\infty = \mathbb{E}\left[Z_\infty\right] = m(A) \qquad dm - \text{presque sûrement} \ .$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \left|m(A \cap \sigma^{-n}(B)) - m(A)m(B)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\sigma^{-n}(B)}\right] - \mathbb{E}\left[m(A)\mathbb{1}_{\sigma^{-n}(B)}\right]\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[(Z_n - Z_\infty)\mathbb{1}_{\sigma^{-n}(B)}\right]\right| \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left[|Z_n - Z_\infty|^2\right]\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la mesure m est fortement mélangeante. •
Remarque. Il n'est pas nécessaire de faire appel ici à des résultats puissants sur les martingales. Seul le point suivant, bien connu en théorie hilbertienne, est nécéssaire : si F_n est une suite décroissante des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H et si p_n désigne la projection orthogonale sur F_n, alors, pour tout $x \in H$, $p_n x$ converge vers $p_\infty x$ où p_∞ désigne la projection orthogonale sur $F_\infty = \bigcap_n F_n$.

Introduisons maintenant la définition suivante.

Définition 5.2. *Soient m_1 et m_2 deux mesures de probabilités sur $\mathcal{C}$. On dit que m_1 et m_2 sont fortement équivalentes si on peut trouver une constante $c > 0$ telle que :*

$$\frac{1}{c}\, m_1 \leq m_2 \leq c\, m_1 \ .$$

On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 5.3. *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Il existe une unique mesure de probabilités, quasi-Bernoulli, σ-invariante et fortement équivalente à m. Elle s'obtient comme limite faible de la suite m_n définie par*

$$m_n(E) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m\left(\sigma^{-k}(E)\right) \ .$$

Preuve. Toute mesure fortement équivalente à une mesure quasi-Bernoulli est encore quasi-Bernoulli. De plus, deux mesures de probabilités ergodiques et équivalentes sont égales (voir proposition 6.2). D'où, l'unicité. Pour prouver l'existence, on commence par comparer m_n et m. Pour tout cylindre a, on a :

$$m(\sigma^{-k}(a)) = m\left(\bigcup_{b\in\mathcal{M}_k} ba\right) = \sum_{b\in\mathcal{M}_k} m(ba) \leq C \sum_{b\in\mathcal{M}_k} m(b)m(a) = Cm(a) \ .$$

Il s'en suit que pour tout n, $m_n \leq Cm$. On montrerait de même que $m_n \geq \frac{1}{C}m$. Ainsi, les mesures m_n et m sont fortement équivalentes avec une constante indépendante de n. Par ailleurs

$$m_n(ab) \leq Cm(ab) \leq C^2 m(a)m(b) \leq C^4 m_n(a)m_n(b) \ .$$

On montrerait de même une inégalité dans l'autre sens. Ainsi, les mesures m_n sont quasi-Bernoulli avec une constante indépendante de n. Finalement, toute valeur d'adhérence de la suite m_n sera quasi-Bernoulli et fortement équivalente à m (les inégalités passent à la limite car sur le Cantor $\mathcal{C}$, les fonctions $\mathbb{1}_a$ sont continues lorsque a est un cylindre).

Considérons enfin une valeur d'adhérence μ de la suite m_n et une sous-suite n_k telle que m_{n_k} converge faiblement vers μ. Si f est une fonction continue sur $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\int f\circ\sigma(x)dm_{n_k}(x) &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\int f\circ\sigma^{j+1}(x)dm(x)\\ &= \int f(x)dm_{n_k}(x) + \frac{1}{n_k}\left[\int f\circ\sigma^{n_k+1}(x)dm(x) - \int f\circ\sigma(x)dm(x)\right] \ .\end{aligned}$$

A la limite on obtient $\int f\circ\sigma(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$, ce qui signifie que μ est σ-invariante.

Enfin, grâce à l'unicité de la mesure quasi-Bernoulli σ-invariante et équivalente à m, la suite m_n ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Par compacité, on peut conclure que la suite m_n est convergente. •

5.2 La fonction τ est dérivable au point 1

Le corollaire 5.3, le théorème de Shannon-McMillan et le théorème 4.3 nous permettent de démontrer le :

Théorème 5.4. ([Heu98]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Les quantités $\tau'(1)$ et $h(m)$ existent et on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = -\tau'(1) = h(m) \quad dm\text{-presque-sûrement} .$$

Remarque. Si on munit le Cantor $\mathcal{C}$ de l'ultra métrique donnant le diamètre ℓ^{-n} aux cylindres de $\mathcal{M}_n$, on peut à nouveau introduire une notion de dimension de Hausdorff et de dimension des mesures. La quantité $\frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n}$ se lit encore comme le rapport entre le logarithme de la masse de $I_n(x)$ et le logarithme de son diamètre. Ainsi, la mesure m est unidimensionnelle de dimension $\dim(m) = -\tau'(1) = h(m)$.

Si on introduit les ensembles

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{C} \ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m(I_n(x))}{n} = \alpha \right\} , \tag{23}$$

et si on utilise le théorème de Billingsley (cf [Fa]), le théorème 5.4 nous apprend donc que

$$\dim(E_{-\tau'(1)}) = \dim(m) = -\tau'(1) . \tag{24}$$

C'est un premier pas vers l'analyse multifractale de la mesure m.

Preuve du théorème 5.4. Notons μ l'unique mesure quasi-Bernoulli fortement équivalente à m et σ-invariante. Les mesures m et μ ont même fonction τ et mêmes dimensions. De plus, les résultats de la partie 4.2 s'appliquent aux mesures m et μ. Ainsi

$$\dim_*(m) = \dim_*(\mu) = -\tau'_+(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}^*(m) = \mathrm{Dim}^*(\mu) = -\tau'_-(1) .$$

Enfin, le théorème de Shannon-McMillan s'applique à la mesure μ. Il nous dit que l'entropie

$$h(\mu) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \sum_{a\in\mathcal{M}_n} \mu(a)\log_\ell(\mu(a))$$

existe et que pour $d\mu$-presque tout $x \in \mathcal{C}$,

$$\frac{-\log_\ell \mu(I_n(x))}{n} = \frac{-\log_\ell \mu(x_1\cdots x_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(\mu) . \tag{25}$$

La mesure μ est donc unidimensionnelle. Comme les mesures m et μ sont fortement équivalentes, on peut remplacer μ par m dans l'identité (25). Finalement on trouve

$$\dim_*(m) = -\tau'_+(1) = h(m) = -\tau'_-(1) = \mathrm{Dim}^*(m),$$

Ce qui prouve la dérivabilité de τ au point 1. •

Notons enfin que le théorème 5.4 et le corollaire 3.3 nous permettent de déduire le :

Corollaire 5.5. ([BH00]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Notons m_0 la mesure de probabilités homogéne sur $\mathcal{C}$ (caractérisée par le fait que tout cylindre de $\mathcal{M}_n$ porte la masse ℓ^{-n}). On a alors :*

$$\dim(m) = 1 \Longleftrightarrow \tau'(1) = -1 \Longleftrightarrow m \text{ est fortement équivalente à } m_0 \ .$$

Preuve. Supposons que m n'est pas fortement équivalente à m_0. On peut supposer par exemple que l'inégalité $m_0 \leq cm$ n'est satisfaite pour aucune constante c (l'autre cas se traiterait de même). On peut alors trouver un entier n_0 et un cylindre $a_0 \in \mathcal{M}_{n_0}$ tels que $m(a_0) < \frac{1}{\ell C} m_0(a_0)$ où C est la constante apparaissant dans la propriété quasi-Bernoulli. On a alors pour tout cylindre $a \in \mathcal{M}$,

$$\frac{m(aa_0)}{m(a)} \leq \frac{1}{\ell} m_0(a_0) = \ell^{-(n_0+1)} \ .$$

Ainsi, pour tout $q \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{M}_{n_0}} m(ab)^q &\leq m(aa_0)^q + (\ell^{n_0} - 1) \left[\frac{m(a) - m(aa_0)}{\ell^{n_0} - 1} \right]^q \\ &\leq \left(\ell^{-(n_0+1)q} + (\ell^{n_0} - 1) \left[\frac{1 - \ell^{-(n_0+1)}}{\ell^{n_0} - 1} \right]^q \right) m(a)^q := \gamma(q) m(a)^q \ . \end{aligned}$$

En sommant sur tous les mots a puis en itérant, on trouve

$$\sum_{a \in \mathcal{M}_{pn_0}} m(a)^q \leq (\gamma(q))^p \qquad \text{pour tout } p \geq 0,$$

ce qui permet de conclure que

$$\tau(q) \leq \frac{1}{n_0} \log_\ell \gamma(q) \ .$$

On trouve alors

$$\dim(m) = -\tau'(1) \leq \frac{-\gamma'(1)}{n_0 \log \ell} < 1 \ .$$

5.3 L'analyse multifractale des mesures quasi-Bernoulli

Brown, Michon et Peyrière ont prouvé dans [BMP92] que le formalisme multifractal fonctionnait pour les mesures quasi-Bernoulli. Plus précisément, en définissant les ensembles E_α comme en (23), ils ont établi le théorème suivant.

Théorème 5.6. ([BMP92]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. Si τ est dérivable en q et si $\alpha = -\tau'(q)$, on a :*

$$\dim(E_\alpha) = \tau^*(\alpha)$$

où les ensembles de niveau E_α sont définis comme dans la formule (23) *et où $\tau^*(\alpha) = \inf_q(\alpha q + \tau(q))$ est la transformée de Legendre de la fonction τ.*

La preuve repose sur la construction, due à Michon ([Mic83])), d'une mesure annexe m_q (appelée mesure de Gibbs) telle que pour tout cylindre a, $m_q(a) \approx m(a)^q |a|^{\tau(q)}$ (on note $|a| = \ell^{-n}$ si $a \in \mathcal{M}_n$).

Le défaut du théorème 5.6 est qu'il ne s'applique qu'aux points où $\tau'(q)$ existe. Nous sommes maintenant en mesure de prouver que la fonction τ est partout dérivable.

Théorème 5.7. ([Heu98]) *Soit m une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{C}$. La fonction τ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\alpha \in]-\tau'(+\infty), -\tau'(-\infty)[$,*

$$\dim(E_\alpha) = \tau^*(\alpha) \ .$$

Remarque. Dans [Tes04b], Testud introduit une notion plus faible qu'il appelle quasi-Bernoulli au sens faible. Dans ce contexte plus général, il montre que la fonction τ est encore dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie $\dim(E_\alpha) = \tau^*(\alpha)$ pour tout $\alpha \in]-\tau'(+\infty), -\tau'_+(0)[$. Par contre, il montre aussi dans [Tes05a] que la fonction τ peut posséder des points de non dérivabilité sur $]-\infty, 0[$. Ces résultats s'appliquent à une large classe de mesures autosimilaires avec empiètements (voir aussi [Tes05b]).

5.4 Preuve du théorème 5.7

En fait, nous pouvons donner une preuve du théorème 5.7 qui n'utilise pas le résultat de Brown Michon et Peyrière et qui simplifie sensiblement leur argument. Ce n'est pas la démarche utilisée dans [Heu98] mais elle nous semble intéressante en soi.

On commence par construire la mesure m_q.

Lemme 5.8. *Soit $q \in \mathbb{R}$. Il existe une mesure m_q appelée mesure de Gibbs à l'état q et une constante $c \geq 1$ vérifiant*

$$\forall a \in \mathcal{M} \qquad \frac{1}{c} m(a)^q |a|^{\tau(q)} \leq m_q(a) \leq c m(a)^q |a|^{\tau(q)} \ .$$

Preuve. La démarche de Michon (voir [Mic83]) peut être simplifiée. Commençons par introduire une notation. Si F_1 et F_2 sont deux fonctions dépendant de q mais aussi de cylindres de $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$, on ecrira $F_1 \approx F_2$ pour exprimer qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant éventuellement de q mais ne dépendant pas des autres paramètres qui interviennent et telle que $\frac{1}{C} F_1 \leq F_2 \leq C F_1$. On constate tout d'abord que $\ell^{(n+p)\tau_{n+p}(q)} \approx \ell^{n\tau_n(q)} \, \ell^{p\tau_p(q)}$. En effet,

$$\ell^{(n+p)\tau_{n+p}(q)} = \sum_{a \in \mathcal{M}_n, b \in \mathcal{M}_p} m(ab)^q \approx \sum_{a \in \mathcal{M}_n} \sum_{b \in \mathcal{M}_p} m(a)^q m(b)^q = \ell^{n\tau_n(q)} \, \ell^{p\tau_p(q)} \ .$$

Appelons μ_n la mesure qui porte le cylindre $a \in \mathcal{M}_n$ à la masse $m(a)^q |a|^{\tau_n(q)} = m(a)^q \ell^{-n\tau_n(q)}$ et qui est homogène sur les cylindres de $\mathcal{M}_n$. C'est une mesure de probabilités. Si $a \in \mathcal{M}_n$ et si $p \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \mu_{n+p}(a) &= \sum_{b \in \mathcal{M}_p} \mu_{n+p}(ab) \\ &= \sum_{b \in \mathcal{M}_p} m(ab)^q \ell^{-(n+p)\tau_{n+p}(q)} \\ &\approx m(a)^q \ell^{-n\tau_n(q)} \sum_{b \in \mathcal{M}_p} m(b)^q \ell^{-p\tau_p(q)} \\ &= m(a)^q \ell^{-n\tau_n(q)} \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a vu dans l'estimation (21) que $\ell^{n\tau_n(q)} \approx \ell^{n\tau(q)}$. Finalement

$$\forall a \in \mathcal{M}_n, \quad \forall k > n, \qquad \mu_k(a) \approx m(a)^q \ell^{-n\tau(q)} = m(a)^q |a|^{\tau(q)} \ .$$

Notons alors m_q une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_k)_{k\geq 1}$. Comme $\mathbb{1}_a$ est une fonction continue sur l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$, on peut passer à la limite pour obtenir que

$$\forall a \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{c}\, m(a)^q |a|^{\tau(q)} \leq m_q(a) \leq c\, m(a)^q |a|^{\tau(q)}, \tag{26}$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.8. •

On peut maintenant terminer la preuve du théorème 5.7. Un calcul élémentaire nous assure alors que la fonction τ associée à la mesure m_q (que nous noterons τ_q) vérifie :

$$\tau_q(t) = \tau(qt) - t\tau(q)\ .$$

De plus, la mesure m_q est encore quasi-Bernoulli. En effet

$$m_q(ab) \approx m(ab)^q |ab|^{\tau(q)} \approx [m(a)m(b)]^q (|a||b|)^{\tau(q)} \approx m_q(a) m_q(b)\ .$$

La dérivabilité de τ_q au point 1 entraîne alors la dérivabilité de τ au point q et la relation

$$-\tau_q'(1) = -q\tau'(q) + \tau(q) = \tau^*(-\tau'(q))\ .$$

Posons $\alpha = -\tau'(q)$. L'encadrement (26) nous permet de dire que

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{C}\ ;\ \lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\ell m_q(I_n(x))}{n} = -\tau_q'(1) \right\}\ .$$

La relation (24), écrite pour m_q, nous donne finalement

$$\dim(E_\alpha) = \dim(m_q) = -\tau_q'(1) = \tau^*(\alpha)\ .$$

Evidemment, le raisonnement permettant de prouver la dérivabilité de τ au point q ne fonctionne que lorsque $q \neq 0$. La dérivabilité de τ en 0 se fait par un autre argument. On reprend l'encadrement (21). En passant aux logarithmes, il nous dit que

$$|\tau_n(q) - \tau(q)| \leq \frac{|q| \log_\ell C}{n}\ .$$

En particulier, $\tau_n(0) = \tau(0)$. et on trouve donc

$$\left| \frac{\tau_n(q) - \tau_n(0)}{q} - \frac{\tau(q) - \tau(0)}{q} \right| \leq \frac{\log_\ell C}{n}\ .$$

En passant à la limite lorsque q tend vers 0 par valeurs supérieures ou inférieures, on obtient

$$\begin{cases} \left|\tau_n'(0) - \tau_+'(0)\right| \leq \dfrac{\log_\ell C}{n} \\ \left|\tau_n'(0) - \tau_-'(0)\right| \leq \dfrac{\log_\ell C}{n} \end{cases}$$

et on peut conclure que $\tau_+'(0) = \tau_-'(0)$. •

5.5 Un exemple : l'analyse multifractale des produits de Bernoulli

Les produits de Bernoulli, développés lors de la partie 1, sont les exemples les plus simples de mesures quasi-Bernoulli. Pour ces mesures, tous les calculs peuvent se faire de façon explicite. On reprend les notations de la partie 1 et on appelle donc m un produit de Bernoulli de paramètre p. Notons

$$E_\alpha = \left\{ x \in [0,1[\ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} = \alpha \right\} \quad \text{et} \quad F_\beta = \left\{ x \in [0,1[\ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \beta \right\} .$$

Souvenons nous que les quantités $m(I_n(x))$ et s_n sont reliées par la relation

$$m(I_n(x)) = p^{s_n}(1-p)^{n-s_n} .$$

Ainsi, si $\beta \in [0,1]$ et si $\alpha = -\beta \log_2 p - (1-\beta)\log_2(1-p)$, on a $E_\alpha = F_\beta$. Remarquons de plus que les ensembles F_β sont vides si $\beta \notin [0,1]$. Ainsi, les ensembles E_α sont vides si α n'est pas compris entre $-\log_2 p$ et $-\log_2(1-p)$.

Appelons μ_β le produit de Bernoulli de paramètre β. Les résultats de la partie 1 appliqués à la mesure μ_β nous apprennent que

$$\dim(\mu_\beta) = \dim(F_\beta) = h(\beta) = -(\beta \log_2(\beta) + (1-\beta)\log_2(1-\beta)) .$$

On obtient donc pour toute valeur de α comprise entre $-\log_2 p$ et $-\log_2(1-p)$

$$\dim(E_\alpha) = -(\beta\log_2(\beta)+(1-\beta)\log_2(1-\beta)) \qquad \text{où } \alpha = -(\beta\log_2 p+(1-\beta)\log_2(1-p)) .$$

On peut aussi écrire

$$\dim(E_\alpha) = h\left(\frac{\alpha + \log_2(1-p)}{\log_2(1-p) - \log_2(p)} \right) .$$

Remarque 1. Ici, $\tau(q) = \log_2(p^q + (1-p)^q)$. On pourrait aussi faire le calcul de la transformée de Legendre τ^* et utiliser le théorème 5.7.
Remarque 2. Si $\alpha = -(\beta\log_2 p+(1-\beta)\log_2(1-p))$ et si q est tel que $\alpha = -\tau'(q)$, il est facile de se convaincre que la mesure μ_β n'est autre que la mesure de Gibbs à l'état q pour la mesure m (voir lemme 5.8).

6 Appendice : Le théorème de Shannon-McMillan

On a vu lors de l'étude des mesures quasi-Bernoulli que le théorème de Shannon-McMillan était un outil clé pour prouver la dérivabilité de la fonction τ. On rappelle tout d'abord le théorème de Birkhoff.

Théorème 6.1. (Théorème ergodique de Birkhoff) *Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilités, $T : X \to X$ une application mesurable. On suppose que la mesure m est T-invariante et ergodique. Alors, pour toute fonction $f \in L^1(m)$*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f(y)dm(y) \quad dm\text{-presque sûrement} .$$

Pour une preuve détaillée de ce résultat classique, nous renvoyons par exemple à [Bil65] ou à [Zin97]. Contentons nous de dégager un corollaire qui nous a été utile lors du paragraphe 5.1.

Corollaire 6.2. *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $T : X \to X$ une application mesurable. Soient $m_1 \neq m_2$ deux mesures de probabilités T-invariantes et ergodiques. Alors, les mesures m_1 et m_2 sont étrangères.*

Preuve. Supposons que les mesures m_1 et m_2 ne sont pas étrangères. Soit $E \in \mathcal{B}$. On peut touver un ensemble A_1 de mesure pleine pour m_1 et tel que pour tout tout $x \in A_1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_E(T^k(x)) = m_1(E) \ .$$

On peut faire de même avec la mesure m_2 et trouver un ensemble A_2 de mesure pleine pour m_2 tel que pour tout tout $x \in A_2$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_E(T^k(x)) = m_2(E) \ .$$

Comme les mesures m_1 et m_2 ne sont pas étrangères, A_1 et A_2 possèdent un point commun. On trouve donc que $m_1(E) = m_2(E)$. •

Le théorème 6.1 est un outil clé pour établir le théorème de Shannon-McMillan dont voici maintenant l'énoncé.

Théorème 6.3. (Théorème de Shannon-McMillan) *Notons σ le shift sur l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} = \{0, \cdots, \ell-1\}^{\mathbb{N}^*}$, défini comme en* (22). *Soit m une mesure sur $\mathcal{C}$ σ-invariante et ergodique. L'entropie*

$$h(m) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} \sum_{a \in \mathcal{M}_n} m(a) \log m(a)$$

existe et, pour dm-presque tout $x = x_1 x_2 \cdots \in \mathcal{C}$,

$$\frac{-\log m(x_1 \cdots x_n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} h(m) \ .$$

Preuve du théorème 6.3. On peut trouver cette preuve par exemple dans [Zin97]. On commence par établir un certain nombre de lemmes.

Lemme 6.4. *L'entropie $h(m)$ existe.*

Preuve. La concavité du logarithme nous donne

$$\sum_{b \in \mathcal{M}_p} \frac{m(ab)}{m(a)} \log \left(\frac{m(b)}{m(ab)} \right) \leq \log \left(\sum_{b \in \mathcal{M}_p} \frac{m(b)}{m(a)} \right) = -\log m(a) \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{M}_p} \log m(b) \sum_{a \in \mathcal{M}_n} m(ab) - \sum_{a \in \mathcal{M}_n,\ b \in \mathcal{M}_p} m(ab) \log m(ab) &= \sum_{a \in \mathcal{M}_n,\ b \in \mathcal{M}_p} m(ab) \log \left(\frac{m(b)}{m(ab)} \right) \\ &\leq -\sum_{a \in \mathcal{M}_n} m(a) \log m(a) \ . \end{aligned}$$

La mesure m étant σ-invariante, on remarque que $\sum_{a \in \mathcal{M}_n} m(ab) = m(b)$. On conclut donc que la suite $U_n = -\sum_{a \in \mathcal{M}_n} m(a) \log m(a)$ est sous-additive. Ainsi, la suite U_n/n converge donc vers sa borne inférieure. •

Lemme 6.5. *La suite* $J_n(x) = \frac{m(x_2\cdots x_n)}{m(x_1\cdots x_n)}$ *est une martingale relativement à la filtration* $\mathcal{B}_n$ *des tribus engendrées par les ensembles* $\mathcal{M}_n$*. De plus* $J_n \geq 1$*. La suite* $(J_n)_{n\geq 1}$ *converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée* J_m *et appelée jacobien de* σ *relativement à* m*.*

Preuve. On constate que $m(x_2\cdots x_n) = \sum_{y\in\mathcal{M}_1} m(yx_2\cdots x_n)$, ce qui implique que $J_n \geq 1$. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}\left[J_{n+1}|\mathcal{B}_n\right] = \sum_{a\in\mathcal{M}_n} \frac{\mathbb{E}\left[J_{n+1}1\!\!1_a\right]1\!\!1_a}{m(a)} \ .$$

Or, si $a = a_1\cdots a_n \in \mathcal{M}_n$,

$$\begin{aligned}
\int_a J_{n+1}(x)dm(x) &= \int_a \frac{m(x_2\cdots x_{n+1})}{m(x_1\cdots x_{n+1})}dm(x) \\
&= \int_a \frac{m(a_2\cdots a_n x_{n+1})}{m(a_1\cdots a_n x_{n+1})}dm(x) \\
&= \sum_{x_{n+1}} \frac{m(a_2\cdots a_n x_{n+1})}{m(a_1\cdots a_n x_{n+1})}m(a_1\cdots a_n x_{n+1}) \\
&= m(a_2\cdots a_n) \ .
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}\left[J_{n+1}|\mathcal{B}_n\right] = \sum_{a\in\mathcal{M}_n} \frac{m(a_2\cdots a_n)}{m(a_1\cdots a_n)}1\!\!1_a = J_n,$$

ce qui prouve que J_n est une martingale. Comme de plus $J_n \geq 0$, la martingale J_n converge presque sûrement.

Lemme 6.6. *La variable aléatoire* $M = \sup_n(\log J_n)$ *est intégrable par rapport à* m*, ce qui signifie que la suite* $\log J_n$ *est dominée dans* $L^1(m)$*.*

Preuve.

$$\{M > t\} = \left\{\sup_n J_n > e^t\right\} = \left\{x \ ; \ \inf_n \frac{m(x_1\cdots x_n)}{m(x_2\cdots x_n)} < e^{-t}\right\} \ .$$

Ainsi, pour chaque point $x \in \{M > t\}$, on peut trouver un cylindre maximal $c \in \mathcal{M}$ contenant x et tel que $m(c) < e^{-t}m(\sigma(c))$. Ces cylindres maximaux sont nécessairement deux à deux disjoints. On peut donc écrire

$$\{M > t\} = \bigcup_k c_k,$$

où les c_k sont des cylindres deux à deux disjoints et tels que $m(c_k) < e^{-t}m(\sigma(c_k))$. On a donc

$$m\left(\{M > t\}\right) = \sum_k m(c_k) \leq e^{-t}\sum_k m(\sigma(c_k)) \ .$$

En regroupant les cylindres c_k selon leur première lettre, on trouve que

$$\sum_k m(\sigma(c_k)) \leq \ell \ .$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left[M\right] = \int_0^{+\infty} m\left(\{M > t\}\right)dt \leq \int_0^{+\infty} \ell e^{-t}dt \leq \ell < +\infty.$$

Lemme 6.7. (Formule de Rohlin) $\quad \mathbb{E}\left[\log(J_m)\right] = h(m)$.

Preuve. Grâce au lemme 6.6, on peut utiliser le théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\log(J_m)\right] &= \lim_{n\to+\infty} \int \log\left(J_n(x)\right) dm(x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int \log\left(\frac{m(x_2\cdots x_n)}{m(x_1\cdots x_n)}\right) dm(x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{x_1\cdots x_n} \log\left(\frac{m(x_2\cdots x_n)}{m(x_1\cdots x_n)}\right) m(x_1\cdots x_n) \right) .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'invariance de m par rapport au shift nous apprend que

$$\sum_{x_1\cdots x_n} \log\left(m(x_2\cdots x_n)\right) m(x_1\cdots x_n) = \sum_{x_2\cdots x_n} \log\left(m(x_2\cdots x_n)\right) m(x_2\cdots x_n) .$$

Notons $U_n = -\sum_{x_1\cdots x_n} \log\left(m(x_1\cdots x_n)\right) m(x_1\cdots x_n)$. On vient d'établir que

$$\mathbb{E}\left[\log(J_m)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[-U_{n-1} + U_n\right] .$$

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left((U_2 - U_1) + \cdots + (U_{n+1} - U_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1} - U_1}{n} = \mathbb{E}\left[\log(J_m)\right] .$$

De plus, la suite U_n/n converge vers l'entropie $h(m)$. On peut donc conclure que

$$\mathbb{E}\left[\log(J_m)\right] = h(m) .$$

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 6.3. Un calcul élémentaire nous donne

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(J_k(\sigma^{n-k}(x))\right) = -\log\left(m(x_1\cdots x_n)\right) .$$

On peut alors écrire

$$-\frac{\log\left(m(x_1\cdots x_n)\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\log J_k - \log J_m)\circ\sigma^{n-k}(x) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\left(J_m\circ\sigma^{n-k}(x)\right) . \tag{27}$$

Le théorème de Birkhoff nous apprend que dm-presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\left(J_m\circ\sigma^{n-k}(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int \log(J_m(y))dm(y) = h(m) .$$

Il s'agit donc de voir que l'autre terme dans l'identité (27) converge presque sûrement vers 0. Notons

$$M_N = \sup_{k>N} \left|\log J_k - \log J_m\right| .$$

La suite M_N converge presque sûrement vers 0 et vérifie la domination

$$M_N \le M_0 \le 2M \in L^1(m)$$

où M est la variable aléatoire intervenant dans le lemme 6.6. De plus, on a la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log J_k - \log J_m)\circ\sigma^{n-k}(x)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} M_0\circ\sigma^{n-k}(x) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} M_N\circ\sigma^{n-k}(x) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}[M_0 - M_N]\circ\sigma^{n-k}(x) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_N\circ\sigma^{n-k}(x) \ .
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Birkhoff, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_N\circ\sigma^{n-k}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int M_N(y)dm(y) \quad dm\text{-presque sûrement} \ .$$

De plus, la suite M_N converge presque sûrement vers 0 et de façon dominée. Ainsi, l'intégrale $\int M_N(y)dm(y)$ converge vers 0 lorsque $N\to+\infty$. Fixons alors $\varepsilon>0$ et N tel que $\int M_N(y)dm(y)\leq\varepsilon$. Pour presque tout x,

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_N\circ\sigma^{n-k}(x)\leq\varepsilon \ .$$

Enfin, le théorème de Birkhoff nous dit que les moyennes de Césaro de la suite

$$([M_0 - M_N]\circ\sigma^n(x))_{n\geq 0}$$

convergent presque-sûrement vers $\int [M_0 - M_N]\,dm$. Ainsi, la suite $([M_0 - M_N]\circ\sigma^n(x))_{n\geq 0}$ est presque sûrement négligeable devant n. On conclut donc que pour presque tout x,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}[M_0 - M_N]\circ\sigma^{n-k}(x) = 0 \ .$$

Vu l'arbitraire sur ε, on obtient que pour presque tout x,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log J_k - \log J_m)\circ\sigma^{n-k}(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

C'est ce qu'il restait à prouver. •

Remerciements. L'auteur remercie vivement Benoît Testud pour sa lecture attentive de ce manuscript.

Références

[Bat96] A. Batakis. Harmonic measure of some Cantor type sets. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **21** : 255–270, 1996.

[Bes35] A.S. Besicovitch. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. *Math. Annalen*, **110** : 321–330, 1934-35.

[BH00] T. Bousch and Y. Heurteaux. Caloric measure on domains bounded by Weierstrass-type graphs. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **25** : 501–522, 2000.

[BH02] A. Batakis and Y. Heurteaux. On relations between entropy and Hausdorff dimension of measures. *Asian J. Math.*, **6** : 399–408, 2002.

[Bil65] P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information.* John Wiley & Sons, 1965.

[Bis95] A. Bisbas. A multifractal analysis of an interesting class of measures. *Colloq. Math.*, **69** : 37–42, 1995.

[BK90] A. Bisbas and C. Karanikas. On the Hausdorff dimension of Rademacher Riesz products. *Monatsh. Math.*, **110** : 15–21, 1990.

[BMP92] G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière. On the Multifractal Analysis of Measures. *J. Stat. Phys.*, **66** : 775–790, 1992.

[Bou87] J. Bourgain. On the Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimension. *Invent. Math.*, **87** : 477–483, 1987.

[Car85] L. Carleson. On the support of harmonic measure for sets of Cantor type. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **10** : 113–123, 1985.

[Egg49] H.G. Eggleston. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **20** : 31–46, 1949.

[Fa]

[Fal97] K. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry.* John Wiley & Sons Ltd., New-York, 1997.

[Fan94] A.H. Fan. Sur la dimension des mesures. *Studia Math.*, **111** : 1–17, 1994.

[Fen03] D.J. Feng. Smoothness of the L^q-spectrum of self-similar measures with overlaps. *J. London Math. Soc. (2)*, **68** : 102–118, 2003.

[FL02] D.J. Feng and K.S. Lau. The pressure function for products of non-negative matrices. *Math. Res. Lett.*, **9** : 363–378, 2002.

[Heu95] Y. Heurteaux. Sur la comparaison des mesures avec les mesures de Hausdorff. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321** : 61–65, 1995.

[Heu98] Y. Heurteaux. Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **34** : 309–338, 1998.

[Heu99] Y. Heurteaux. Présentation de travaux en vue de l'habilitation à diriger des recherches. Technical report, Orsay, 1999.

[LN00] K.S. Lau and S.M. Ngai. Second-order self-similar identities and multifractal decompositions. *Indiana Univ. Math. J.*, **49** : 925–972, 2000.

[LN04] J.G. Llorente and A. Nicolau. Regularity properties of measures, entropy and the law of the iterated logarithm. *Proc. London Math. Soc. (3)*, **89** : 485–524, 2004.

[Mic83] G. Michon. Mesures de Gibbs sur les cantor réguliers. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, **58** : 267–285, 1983.

[Nga97] S.M. Ngai. A dimension result arising from the L^q spectrum of a measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** : 2943–2951, 1997.

[Ols00] L. Olsen. Dimension inequalities of multifractal Hausdorff measures and multifractal packing measures. *Math. Scand.*, **86** : 109–129, 2000.

[Tes04a] B. Testud. *Etude d'une classe de mesures autosimilaires : calculs de dimensions et analyse multifractale.* PhD thesis, Université Blaise Pascal, 2004.

[Tes04b] B. Testud. Mesures quasi-Bernoulli au sens faible : résultats et exemples. à paraître aux *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2004.

[Tes05a] B. Testud. Phase transitions for the multifractal analysis of self-similar measures. soumis, 2005.

[Tes05b] B. Testud. Transitions de phase dans l'analyse multifractale des mesures autosimilaires. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **340** : 653–658, 2005.

[Ye] Y.L. Ye.

[You82] L.S. Young. Dimension, entropy and Lyapounov exponents. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2** : 109–124, 1982.

[Zin97] M. Zinsmeister. *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, volume **4** of *Panoramas et synthèses*. Société Mathématique de France, 1997.