LES SERIES DE LAMBERT

Dans tout l'exercice, $\alpha \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la série de fonctions

$$L_\alpha(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{k^\alpha \, z^k}{1 - z^k} .$$

1. Montrer que la fonction L_α est définie et holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$.

2. Montrer que :

$$\forall z \in D(0,1), \quad L_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_\alpha(n) \, z^n ,$$

   où $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d/n} d^\alpha$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \frac{L_\alpha(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} s_\alpha(n) \, x^n ,$$

   où $s_\alpha(n) = \sum_{d=1}^{n} [n/d] \, d^\alpha$ et $[\ell]$ désigne la partie entière du réel ℓ .

4. Dans cette question, on cherche un équivalent de $L_0(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

   (a) Si $x \in [0,1[$, calculer à l'aide des fonctions usuelles :

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1 + 1/2 + \ldots + 1/n) \, x^{n-1} .$$

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \left| x \, \Phi(x) - \frac{L_0(x)}{1-x} \right| \leq \frac{x}{(1-x)^2} .$$

   En déduire que :

$$L_0(x) \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \quad \text{lorsque} \quad x \to 1^- .$$

5. Montrer que si $\alpha < 0$, on a:

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)\, L_\alpha(x) = \zeta(1-\alpha) \; .$$

6. Dans cette question, on cherche un équivalent de $L_\alpha(x)$ lorsque $x \to 1^-$ et lorsque α est strictement positif.

   (a) Montrer que si $\alpha \geq 1$, la fonction $[1/x]x^\alpha$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et vérifie :
$$\int_0^1 [1/x]x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}\zeta(\alpha+1) \; .$$
   En déduire que :
$$s_\alpha(n) \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\zeta(\alpha+1) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty \; .$$

   (b) Montrer que l'estimation de $s_\alpha(n)$ reste valable sous la seule hypothèse $\alpha > 0$.

   (c) Déduire de ce qui précède que :
$$\frac{L_\alpha(x)}{(1-x)} \sim \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+1}x^n \quad \text{lorsque} \quad x \to 1^- \; .$$

   (d) En se souvenant que si $\beta > 0$, $\Gamma(\beta) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\beta}{\beta(\beta+1)...(\beta+n)}$, montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\beta x^n \sim \frac{\beta\,\Gamma(\beta)}{(1-x)^{\beta+1}} \quad \text{lorsque} \quad x \to 1^- \; .$$

   (e) Conclure que :
$$L_\alpha(x) \sim \frac{\zeta(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \quad \text{lorsque} \quad x \to 1^- \; .$$

Remarque : pour résoudre cet exercice, on est amené à utiliser plusieurs fois le lemme suivant (qu'on peut trouver dans Titchmarsh) :

Lemme : Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon 1 et à coefficients <u>positifs</u>. On suppose de plus que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent et que les quantités a_n et b_n sont équivalentes lorsque $n \to +\infty$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{lorsque} \quad x \to 1^- \; .$$