Intégrale de Riemann - Intégrale de Lebesgue

Les nouveaux programmes, en vigueur pour le concours 98, indiquent clairement que le candidat doit maîtriser (y compris pour se présenter à l'oral) la théorie de l'intégrale de Lebesgue. On peut se référer à [2] où à [5] pour un exposé clair de sa construction. Cependant, la théorie de Riemann, voire la construction élémentaire et extrêmement rapide de l'intégrale des fonctions réglées, ne doivent à mon avis pas être complètement ignorées. N'importe quel livre de classes préparatoires ([1] ou [4] par exemple) constitue un bon traité sur le sujet. A travers les lignes qui suivent, on ne cherchera pas à développer ces différentes théories mais plutôt à mettre en valeur leurs ressemblances et leurs différences.

La démarche utilisée pour construire une théorie de l'intégration est toujours la même. On commence par décrire une classe de fonctions *simples* sur laquelle on construit l'intégrale. Il s'agira toujours d'une *forme linéaire positive* (i.e. prenant des valeurs positives sur les fonctions positives). Ensuite, on cherche à prolonger cette forme linéaire tout en gardant la linéarité et la positivité. Les fonctions pour lesquelles ce travail sera possible sont appelées *fonctions intégrables.* Evidemment, plus la classe de fonctions simples est riche, plus on peut espérer construire une large classe de fonctions intégrables. Dans le cadre de l'intégrale de Riemann on se contente de prendre comme fonctions simples les fonctions en escalier, c'est à dire les combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'intervalles. Par contre, lorsqu'on construit l'intégrale de Lebesgue, on part d'une classe beaucoup plus riche de fonctions simples ; à savoir les fonctions étagées qui sont encore les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles boréliens.

1 De l'intégrale des fonctions en escalier vers l'intégrale de Riemann

On note $\mathcal{E}s([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$. Si $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{[a_k,b_k]}$ est une telle fonction, la quantité $\sum_{k=1}^n \alpha_k(b_k - a_k)$ est indépendante de la décomposition de f comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices. On la note $\int_a^b f(x)\,dx$. On crée ainsi sur l'espace $\mathcal{E}s([a,b])$ une forme linéaire positive. On peut alors chercher à étendre cette notion d'intégrale par un argument d'approximation. L'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\,\|f\|_\infty$$

suggére dans un premier temps d'étendre l'intégrale aux limites uniformes de fonctions en escalier. On s'appuie alors sur le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :*

1. *La fonction f possède en tout point de $[a,b]$ une limite à gauche et une limite à droite*
2. *La fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

On dit alors que la fonction f est réglée. En particulier, les fonctions continues ou les fonctions monotones sont réglées. On note $\mathcal{R}e([a,b])$ l'espace des fonctions réglées sur $[a,b]$.

La proposition 1.1 nous assure que l'espace $\mathcal{R}e([a,b])$ est fermé dans l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$ pour la convergence uniforme. C'est donc un espace de Banach. Le prolongement des applications uniformément continues nous affirme donc :

Proposition 1.2 *Sur $\mathcal{R}e([a,b])$, Il existe une unique forme linéaire prolongeant la notion d'intégrale d'une fonction en escalier. Elle est encore positive et vérifie :*

$$\forall f \in \mathcal{R}e([a,b]), \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \ .$$

Je rappelle entre autres cette construction car elle permet avec un minimum d'effort de construire l'intégrale des fonctions continues et donc de prouver que les fonctions continues possèdent des primitives (il est facile de voir que si f est continue, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ se dérive en f).

L'idée de l'intégrale de Riemann est de faire une approximation de la fonction qu'on cherche à intégrer à l'aide de fonctions en escalier dont les intégrales sont voisines (lors de la proposition 1.2, on approche la fonction à intégrer par des fonctions en escalier uniformément proches). C'est l'objet de ce qui suit :

Théorème 1.1 ([4]) *Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit :*

$$\int^* f = \inf\left(\textstyle\int_a^b g(t)\,dt,\ g \geq f,\ g \in \mathcal{E}s([a,b])\right) \quad et \quad \int_* f = \sup\left(\textstyle\int_a^b g(t)\,dt,\ g \leq f,\ g \in \mathcal{E}s([a,b])\right) \ .$$

Il y a équivalence entre :

1. $\int^* f = \int_* f$
2. *Il existe deux suites de fonctions en escalier g_n et θ_n telles que :*

$$|f - g_n| \leq \theta_n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(t)dt = 0 \ .$$

On dit dans ce cas que f est Riemann-intégrable et on note :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int^* f = \int_* f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt \ .$$

On note $\mathcal{R}i([a,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. L'intégrale reste une forme linéaire positive dans $\mathcal{R}i([a,b])$.

Remarque 1.2 On peut, par un procédé analogue construire l'intégrale de Riemann pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Une fonction bornée sera Riemann-intégrable si on peut trouver deux suites de fonctions en escalier g_n et θ_n telles que $\int_a^b \theta_n(t)dt$ tende vers 0 et $\|f - g_n\| \leq \theta_n$.

Remarque 1.3 On a l'inclusion $\mathcal{R}e([a,b]) \subset \mathcal{R}i([a,b])$. Cette inclusion est stricte. Il est facile de montrer par exemple que la fonction $\sin 1/x$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ sans être réglée.

2 Les lacunes de l'intégrale de Riemann

Le cadre de définition de l'intégrale de Riemann est très strict (intervalle d'intégration compact, fonctions à intégrer nécessairement bornées). On peut sans difficultés introduire la notion d'intégrale impropre, ce qui permet d'intégrer sur un intervalle non borné et éventuellement des fonctions non bornées. Mais, même après cette généralisation, la théorie présente des lacunes. Nous allons en commenter deux.

2.1 L'intégrale de Riemann se comporte mal vis à vis des limites simples

Il est facile de voir que l'espace $\mathcal{R}i([a,b])$ est stable par limite uniforme. Plus précisément, si f_n est une suite de $\mathcal{R}i([a,b])$ convergeant uniformément vers f, $f \in \mathcal{R}i([a,b])$ et son intégrale sur $[a,b]$ coincide avec la limite des intégrales des fonctions f_n. Par contre, l'espace $\mathcal{R}i([a,b])$ ne possède pas de stabilité élémentaire vis à vis de la convergence simple. Par exemple, si q_n désigne une numérotation des rationnels de $[0,1]$, la suite $f_n = \mathbb{1}_{\{q_1,\dots,q_n\}}$ est uniformément bornée et converge ponctuellement vers une fonction non Riemann-intégrable (voir [3], page 1). Cette lacune sera comblée par l'intégrale de Lebesgue. Citons un deuxième exemple qui va dans le même sens et qu'on réexploitera par la suite.

On construit un ensemble de Cantor de la façon suivante. On considère une suite δ_n strictement décroissante de nombres strictement positifs et telle que $\delta_0 = 1$. On construit les fermés F_n de la façon suivante :

– $F_0 = [0,1]$,

– F_n est réunion de 2^n intervalles fermés disjoints de longueur $\delta_n/2^n$

– On obtient F_{n+1} à partir de F_n en remplaçant chaque intervalle $I = [\alpha,\beta]$ de F_n par $I' \cup I''$ où $I' = [\alpha, \alpha + \delta_{n+1}/2^{n+1}]$ et $I'' = [\beta - \delta_{n+1}/2^{n+1}, \beta]$.

On pose alors :

$$K = \bigcap_{n \geq 0} F_n \ .$$

Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor traditionnel s'obtient par ce procédé en prenant $\delta_n = 2^n/3^n$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1 ([3] page 15) *La fonction* $\mathbb{1}_K$ *est Riemann-intégrable si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. *Pourtant dans tous les cas, la suite* $\mathbb{1}_{F_n}$ *est une suite de fonctions en escalier uniformément bornée qui converge simplement et en décroissant vers* $\mathbb{1}_K$.

2.2 L'espace $\mathcal{R}i([a,b])$ n'est pas complet pour la semi-norme $\int_a^b |f(t)|\,dt$

La quantite $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$ est clairement une semi-norme sur l'espace $\mathcal{R}i([a,b])$. Cependant, l'espace $\mathcal{R}i([a,b])$ n'est pas complet pour cette semi-norme. Citons deux exemples qui illustrent ce phénomène.

Exemple 2.2 ([3] page 9) On pose $f_n(x) = \inf(1/\sqrt{x}, n)$. La suite f_n est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, mais il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{R}i([a,b])$ telle que $\|f_n - f\|_1$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. •

Cet exemple peut paraître artificiel dans la mesure où la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ possède une intègrale de Riemann impropre sur $[0,1]$. De plus, la suite d'intégrales impropres $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt$ converge vers 0. L'exemple qui suit est de ce fait plus significatif.

Exemple 2.3 ([3] page 11) On reprend l'exemple d'ensemble de Cantor développé dans le paragraphe précédent. La suite $\mathbb{1}_{F_n}$ est de Cauchy dans l'espace $(\mathcal{R}i([a,b]), \|\cdot\|_1)$. Cependant, elle possède une limite dans l'espace $(\mathcal{R}i([a,b]), \|\cdot\|_1)$ si et seulement si δ_n converge vers 0. Du reste, dans ce cas, la limite au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est autre que la fonction $\mathbb{1}_K$. •

En fait, l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrables sur $[a,b]$ pourra se voir comme une version du complété de $\mathcal{R}i([a,b])$ pour la semi-norme $\|\cdot\|_1$. On sait, d'un point de vue abstrait, que le complété existe. Mais il n'est pas du tout clair qu'une version de ce complété puisse être construit à l'aide d'un ensemble de fonctions : c'est tout le travail de la construction de l'intégrale de Lebesgue.

3 De l'intégrale des fonctions étagées vers l'intégrale de Lebesgue

On suppose connue la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: c'est l'unique mesure m sur l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $m([a,b]) = b - a$. Il faut se souvenir que sa construction n'est pas triviale. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction étagée sur I, toute combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de boréliens. Si $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ est une telle fonction, et si de plus les ensembles A_k sont de mesure finie, on dira que f est une fonction étagée intégrable. On note $\mathcal{E}t(I)$ cet ensemble. Il est facile de se convaincre que la quantité $\sum_{k=1}^n \alpha_k m(A_k)$ est indépendante de la décomposition de f comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices. On la note $\int_I f(x)\,dx$. On crée ainsi sur l'espace $\mathcal{E}t(I)$ une forme linéaire positive. Il faut remarquer que la famille de fonctions simples est ici beaucoup plus riche que lors de la construction le l'intégrale de Riemann. Il est clair que $\mathcal{E}s([a,b]) \subset \mathcal{E}t([a,b])$. Cependant, il y a beaucoup de fonctions étagées qui ne sont pas en escalier. Les fonctions $\mathbb{1}_K$ décrites précédemment en sont un exemple type. Pour construire l'intégrale de Lebesgue, on utilise comme dans la première partie un argument d'approximation. On commence par étendre la notion à toutes les fonctions mesurables positives en posant :

$$\int_I f(t)\, dt = \sup\left(\textstyle\int_I g(t)\, dt,\ 0 \leq g \leq f,\ g \in \mathcal{E}t(I)\right) \leq +\infty \ .$$

Ensuite, on appelle fonction intégrable toute fonction mesurable f à valeurs complexes telle que :

$$\int_I |f(t)|\, dt < +\infty \ .$$

On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I. Si $f \in \mathcal{L}^1(I)$, la valeur de $\int_I f(t)\, dt$ s'obtient grâce à la décomposition de f en fonctions positives. Par exemple, si f est à valeurs réelles, et si $f = f^+ - f^-$, on pose $\int_I f(t)\, dt = \int_I f^+(t)\, dt - \int_I f^-(t)\, dt$. Cette formule est naturelle si on veut conserver la linéarité. De plus, la contrainte $\int_I |f(t)|\, dt < +\infty$ est inévitable pour pouvoir correctement définir $\int_I f(t)\, dt$: Si $|f|$ est d'intégrale infinie, les quantités $\int_I f^+(t)\, dt$ et $\int_I f^-(t)\, dt$ sont en général toutes deux infinies...

Avec cette construction, on comble les deux lacunes précedemment décrites de l'intégrale de Riemann. C'est l'objet des deux théorèmes qui suivent et qui forment la clé de voute de la théorie.

Théorème 3.1 (Théorème de convergence dominée, [2], [5]) *Soit f_n une suite de $\mathcal{L}^1(I)$. On suppose que f_n converge simplement vers f (il suffit même que la convergence ait lieu presque partout) et qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq g$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \ .$$

Théorème 3.2 (Théorème de Riesz-Fischer, [2], [5]) *Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}^1(I), \|\cdot\|_1)$. Alors, il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que :*

$$(*) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_I |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \ .$$

De plus, on peut trouver une sous-suite f_{n_k} et une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telles que :

$$\left(\lim_{k \to +\infty} f_{n_k} = f \text{ presque partout}\right) \quad \text{et} \quad \left(\forall k \geq 0,\ \ |f_{n_k}| \leq g \text{ presque partout}\right) \ .$$

La dernière précision du théorème 3.2 constitue une sorte de réciproque du théorème de convergence dominée. Elle prouve d'une certaine façon que les hypothèses du théorème 3.1 sont optimales : on ne peut se passer d'une hypothèse de domination.

La conclusion $(*)$ signifie la convergence au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_1$ de la suite f_n vers la fonction f. Celle-ci entraine la convergence presque partout d'une sous-suite f_{n_k} vers f.

Il faut souligner comme le montre l'exemple qui suit qu'il n'y a en général pas convergence presque partout de la suite f_n.

Exemple 3.3 Notons $\mathcal{F}_k$ la famille des intervalles diadiques de $[0,1[$ de génération k. C'est à dire :

$$\mathcal{F}_k = \left\{ [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}[\ , \ p \in \{0, \ldots, 2^k - 1\} \right\} \ .$$

On définit alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ en posant :

$$f_n = \mathbb{1}_{[p/2^k,(p+1)/2^k[} \ \text{ si } \ n = 2^k + p \ \text{ et } \ p \in \{0, \ldots, 2^k - 1\} \ .$$

La suite f_n converge vers 0 au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_1$ sur $[0,1[$. Cependant, elle vérifie :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \ \text{ et } \ \limsup_{n \to +\infty} f_n(x) = 1 \ .$$

Par contre, la sous-suite f_{2^k} converge presque partout vers 0. •

4 Comparaison des deux notions d'intégrale

4.1 Les fonctions Riemann-intégrables sont Lebesgue-intégrables

Pour comprendre le lien entre les deux notions de convergence, il faut tout d'abord introduire la tribu de Lebesgue, complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue ; elle est constituée des ensembles qui sont réunion d'un borélien et d'un ensemble négligeable. La mesure de Lebesgue puis la notion d'intégrale s'étendent naturellement à cette tribu. On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.1 ([2] page 34) *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, f est Lebesgue mesurable sur $[a,b]$ et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, l'intégrale de f au sens de Riemann coïncide avec son intégrale au sens de Lebesgue.*

La preuve de cette proposition est élémentaire. En voici la trame. Pour les distinguer, on note $\int_I$ l'intégrale au sens de Lebesgue et $\int_a^b$ l'intégrale au sens de Riemann. On suppose f Riemann-intégrable, à valeurs réelles et on considère deux suites de fonctions en escalier f_n et g_n, l'une croissante, l'autre décroissante, vérifiant $f_n \leq f \leq g_n$ et telles que $\int_a^b (g_n(t) - f_n(t))dt$ converge vers 0. Si $f_* = \sup f_n$ et $f^* = \inf g_n$, on a $f_* \leq f \leq f^*$. Par ailleurs, grâce au théorème de convergence dominée et en remarquant que l'intégrale au sens de Lebesgue d'une fonction en escalier coïncide avec son intégrale au sens de Riemann, on a :

$$\int_I f_* = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n, \quad \int_I f^* = \lim_{n \to +\infty} \int_I g_n \quad \text{et} \quad \int_I f^* - f_* = 0 \ .$$

Ainsi, comme $f_* \leq f \leq f^*$, la fonction f est presque partout égale à une fonction borélienne intégrable (la fonction f_*). Elle est Lebesgue intégrable et son intégrale au sens de Lebesgue coïncide avec celle de f_*. On conclut en constatant que la suite $\int_I f_n = \int_a^b f_n(t)\,dt$ converge aussi vers l'intégrale de f au sens de Riemann (cf. la définition de l'intégrale de Riemann).

Evidemment, l'ensemble $\mathcal{L}^1([a,b])$ est beaucoup plus gros que l'espace $\mathcal{R}i([a,b])$. Par exemple, les fonctions $1\!\!1_K$ de la partie 2 sont toutes dans $\mathcal{L}^1([a,b])$.

Remarque 4.1 En général, une fonction Riemann-intégrable n'est pas borélienne. Elle est seulement mesurable par rapport à la tribu complétée de Lebesgue. Par exemple, on peut montrer que l'ensemble triadique de Cantor (correspondant à $\delta_n = 2^n/3^n$) possède un sous-ensemble A non borélien. La fonction indicatrice de A est alors Riemann-intégrable sans être borélienne.

4.2 Approximation "horizontale" et approximation "verticale"

La différence d'approche entre les deux notions d'intégrale peut aussi se voir à l'aide du théorème qui suit :

Théorème 4.2 ([1], [4], [2] et [5]) *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que $|f|$ est bornée par M.*

– *Si $f \in \mathcal{R}i([a,b])$ et si on note $a_k^n = a + k(b-a)/n$, on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a_k^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k^n\right)\, 1\!\!1_{[a_k^n, a_{k+1}^n[}(t)\,dt\ .$$

– *Si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ et si on note $E_k^n = \{x\ ;\ kM/n \leq f(x) < (k+1)M/n\ \}$, on a :*

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{kM}{n} m\left(E_k^n\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{kM}{n}\, 1\!\!1_{E_k^n}(t)\,dt\ .$$

Lorsque f est Riemann-intégrable, on atteint son intégrale en appoximant la fonction par une constante sur des sous-intervalles de $[a,b]$ de longueur petite. Par contre dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on découpe l'intervalle image en petits intervalles (les $[kM/n, (k+1)M/n[$) et on approche la fonction f sur les images réciproques de ces intervalles (i.e. les E_k^n). Les ensembles E_k^n peuvent être très compliqués. On sait seulement qu'ils sont boréliens.

Il faut noter que dans le contexte du théorème 4.2, la condition $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ signifie seulement f mesurable (car f est bornée).

4.3 Comparaison des deux notions de fonctions intégrables par le biais des propriétés de régularité

On peut aussi comprendre la différence entre les deux notions de fonctions intégrables grâce aux deux théorèmes qui suivent et qui décrivent les propriétés de régularité des fonctions intégrables.

Théorème 4.3 (Théorème de Lebesgue, [3] page 111) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable pour la mesure de Lebesgue.*

Théorème 4.4 (Théorème de Lusin, [2] page 104) *Soit $f \in \mathcal{L}^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $\omega \subset I$ de mesure inférieure à ε tel que la restriction de f au complémentaire de ω soit continue.*

Si on reprend l'exemple des fonctions $\mathbb{1}_K$ de la partie 2, l'ensemble des points de discontinuité de $\mathbb{1}_K$ est exactement K. On retrouve ainsi une nouvelle preuve du théorème 2.1. Par contre, pour tous les compacts K, on peut vérifier que les conditions du théorème 4.4 sont satisfaites. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut, par régularité de la mesure de Lebesgue, trouver un compact C disjoint de K, inclus dans $[0,1]$ tel que $K \cup C$ ait une mesure supérieure à $1 - \varepsilon$. La restriction de $\mathbb{1}_K$ à $K \cup C$ est alors continue.

5 L'intégrale de Riemann au service des fonctions à valeurs vectorielles

L'intégrale de Riemann se définit aisément pour une classe de fonctions f à valeurs dans un espace de Banach E (voir remarque 1.2). Par contre, il est assez délicat d'étendre la théorie de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans E (sauf si celui ci est de dimension finie car alors on peut travailler coordonnée par coordonnée). Il peut cependant parfois être utile de savoir intégrer des fonctions à valeurs vectorielles. Illustrons ce propos en commentant le théorème de Cauchy-Lipschitz. On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle :

$$X'(t) = F(X(t), t) \ , \quad X(t_0) = X_0 \ . \tag{1}$$

En toute généralité, l'inconnue X et la fonction F sont à valeurs vectorielles. Pour chercher à résoudre ce problème, on s'empresse de le transformer en un problème intégral. Résoudre (1) équivaut à rechercher les fonctions continues X vérifiant :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(X(s), s)\, ds \ . \tag{1'}$$

Pour pouvoir poser (1'), il faut donc savoir intégrer les fonctions continues à valeurs vectorielles. Lorsque F est localement lipschitzienne par rapport à la première variable, on sait alors résoudre (1') en utilisant le théorème du point fixe (voir [1] ou [4]).

6 Références bibliographiques

[1] ARNAUDIES FRAYSSE. Cours de Maths. ; Analyse ; Dunod (1989).

[2] DENY. Théorie de l'intégration ; Orsay-plus (1989).

[3] HEURTEAUX, HULIN, PIQUARD, QUEFFELEC. Exercices corrigés de calcul intégral ; Orsay-plus (1991).

[4] LELONG-FERRAND, ARNAUDIES. Cours de Maths. ; Analyse ; Dunod (1977).

[5] RUDIN. Real ans complex analysis ; Mc Graw Hill (1974).