Fonctions Holomorphes - Propriétés Fondamentales

1 Définition - exemples

Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes est dite holomorphe sur U si :

$$\forall z \in U \ , \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \ \text{ existe} \ .$$

On note alors $f'(z)$ cette limite.

Exemples : les polynômes, les fractions rationnelles en dehors de leurs pôles, les sommes de séries entières sur leur disque de convergence...

Stabilités : par somme, par produit, par composition, par quotient en dehors des zéros du dénominateur.

2 Chemin - lacet - intégrale le long d'un chemin

Pour nous, un chemin sera toujours la donnée d'une application $\gamma \ : \ [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux. Un lacet est un chemin vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si f est une application continue au voisinage de $\gamma([a,b])$ on appelle intégrale de f le long du chemin γ la quantité :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \ .$$

Il faut remarquer que si $\delta = \gamma \circ \Phi$ où Φ est strictement croissante, continue et de classe C^1 par morceaux, $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\delta f(z)\, dz$. C'est pour cela qu'en général, on ne précise pas le paramètrage mais seulement l'image géométrique et le sens de parcours du chemin.

3 Indice d'un point par rapport à un lacet

Si γ est un lacet et si $z_0 \notin \gamma([a,b])$, on appelle indice de z_0 par rapport à γ la quantité :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \ .$$

Théorème 3.1 *La fonction* $z_0 \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *est à valeurs entières et constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ *. Elle vaut* 0 *sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ *.*

La fonction Ind compte le nombre de tours que fait le lacet γ autour du point z_0 au sens précis suivant :

Théorème 3.2 *Soit* Δ *est une demi-droite issue de* z_0*. Pour calculer* $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$*, on compte le nombre de fois où le lacet traverse la demi-droite dans le sens trigonométrique et on soustrait à cette quantité le nombre de fois où le lacet traverse la demi-droite dans le sens rétrograde. Le nombre entier ainsi trouvé ne dépend pas de la demi-droite* Δ *choisie.*

4 La formule de Cauchy locale et ses conséquences

4.1 Notion de primitive

On dit qu'une fonction f définie et continue sur un ouvert connexe (i.e. un domaine) U de $\mathbb{C}$ est primitivable sur U s'il existe une fonction F holomorphe sur U avec $F' = f$.

Théorème 4.1

1. *La fonction* f *est primitivable dans* U *si et seulement si pour tout lacet* γ *dont l'image est incluse dans* U*, on a :* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

2. *Si* U *est étoilé par rapport à* z_0 *et si* $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ *pour tout triangle* T *inclus dans* U *dont un sommet est* z_0*, alors,* f *est primitivable et on peut lui appliquer le 1.*

Remarque : on a abusivement identifié le bord du triangle avec une paramétrisation de celui-ci.

4.2 Théorème de Cauchy Goursat (Théorème technique)

Théorème 4.2 *Soit* T *un triangle plein et* U *un ouvert contenant* T *. Si* $z_0 \in U$ *et si* f *est continue dans* U *et holomorphe dans* $U \setminus \{z_0\}$ *, alors,* $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ *.*

4.3 Ses conséquences

La conjonction des théorèmes 4.1 et 4.2 permet d'établir les deux énoncés suivants :

Théorème 4.3 *Si* U *est étoilé et si* f *est holomorphe dans* U*, on a :*

1. f *est primitivable dans* U *.*
2. *pour tout lacet* γ*, tracé dans* U*,* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Théorème 4.4 *Si* f *est holomorphe dans un ouvert quelconque* U*, le théorème 4.3 s'applique dans tout disque inclus dans* U*. C'est pour cela qu'on parle de théorie locale.*

En appliquant les théorèmes 4.1 et 4.2 à la fonction $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$, on obtient aussi les conséquences fondamentales suivantes :

Théorème 4.5 (Formule de Cauchy locale) *Si U est un ouvert étoilé et f est une fonction holomorphe dans U, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\,\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \ ,$$

où γ est un lacet tracé dans U et $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$.

Corollaire 4.6 (Théorème fondamental) *Soit U un ouvert et f holomorphe dans U . Alors, f est analytique dans U . Plus précisément, si $z_0 \in U$, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins égal à la distance de z_0 au complémentaire de U et on a :*

$$\forall z \in D(z_0, d(z_0, \mathbb{C} \setminus U)) \ , \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \ ,$$

où pour $r < d(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \ ,$$

le cercle étant parcouru dans le sens direct.

Remarque : pour retrouver ces formules, on peut imaginer le développement, diviser par $(z - z_0)^{n+1}$ et intégrer terme à terme...

Corollaire 4.7 *Si f est holomorphe, f est indéfiniment dérivable au sens complexe.*

Théorème 4.8 *Tous les énoncés concernant les fonctions analytiques se transposent aux fonctions holomorphes (Théorème de Liouville, Principe des zéros isolés et du prolongement analytique, Principe du maximum).*

5 Notion de logarithme

5.1 Détermination continue de l'argument

Définition 5.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 et θ une fonction continue dans U. On dit que θ constitue une détermination continue de l'argument dans U si :*

$$\forall z \in U, \quad z = |z|\, e^{i\theta(z)} \ .$$

Le théorème qui suit décrit un exemple fondamental d'ouvert possédant des déterminations continues de l'argument.

Théorème 5.2

1. *L'application $t \in]\alpha, \alpha + 2\pi[\mapsto e^{it} \in S_1 \setminus \{e^{i\alpha}\}$ est un homéomorphisme.*
2. *L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{xe^{i\alpha}, x \geq 0\}$ possède donc des déterminations continues de l'argument.*

5.2 Notion de logarithme

Définition 5.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue (resp. détermination holomorphe) du logarithme dans U toute fonction F continue (resp. holomorphe) dans U telle que :*

$$\forall z \in U, \quad e^{F(z)} = z \ .$$

Il faut remarquer qu'en général, l'identité $F(e^z) = z$ n'a pas de sens. Le membre de gauche n'est même en général pas correctement défini.

Le théorème qui suit caractérise géométriquement les ouverts de $\mathbb{C}^*$ qui possèdent des déterminations holomorphes du logarithme.

Théorème 5.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Il y a équivalence entre :*

1. *Il existe sur U une détermination continue de l'argument*
2. *Il existe sur U une détermination continue du logarithme*
3. *Il existe sur U une détermination holomorphe du logarithme*
4. *La fonction $1/z$ est primitivable dans U*
5. *Pour tout lacet γ, tracé dans U, $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$*
6. *Pour tout lacet γ, tracé dans U,* $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

Exemples : les ouverts $\mathbb{C} \setminus \{xe^{i\alpha}, x \geq 0\}$ constituent des exemples fondamentaux d'ouverts maximaux sur lesquels on peut construire un logarithme. La preuve du théorème 5.4 est basée sur le :

Lemme 5.5 *Si f est une détermination continue du logarithme dans U, alors, f est holomorphe dans U et $f'(z) = 1/z$.*

5.3 Logarithme d'une fonction

En reprenant la démarche du paragraphe précédent, on peut décrire les fonctions qui possèdent un logarithme.

Théorème 5.6 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U ne s'annulant pas. Il y a équivalence entre :*

1. *Il existe une fonction holomorphe F telle que $e^F = f$*
2. *La fonction f'/f possède des primitives dans U*
3. *Pour tout lacet γ dans U, $\int_\gamma f'/f = 0$.*

6 Singularités - fonctions méromorphes

Si $z_0 \in U$ et si f est holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$, on dit que f a une singularité isolée en z_0.

Théorème 6.1 (Description des singularités isolées) *Soit f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$. Trois cas peuvent se présenter :*

1. *f est bornée au voisinage de z_0 . Alors, f se prolonge en une fonction holomorphe dans U . On dit que la singularité est effaçable.*
2. *$|f(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to z_0$. On peut alors trouver un entier m positif et des coefficients $a_{-1}, \cdots, a_{-m}$ tels que la fonction $f(z) - \sum_{n=1}^{m} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ soit holomorphe au voisinage de z_0 . On dit alors que f possède un pôle d'ordre m au point z_0 .*
3. *L'image de tout voisinage de z_0 par f est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f possède une singularité essentielle en z_0 .*

Une fonction f est dite méromorphe dans un ouvert U si on peut trouver un ensemble I inclus dans U constitué de points isolés tel que f soit holomorphe dans $U \setminus I$ et possède un pôle en chacun des points de I.

Théorème 6.2 (Développement en série de Laurent) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$. On peut trouver des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que si $r < d(z_0, \mathbb{C}\setminus U)$ on ait :*

$$\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \ , \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \ .$$

Lorsque la singularité est effaçable, les $(a_n)_{n<0}$ sont tous nuls. Lorsque la fonction possède un pôle d'ordre m au point z_0, les coefficients $(a_n)_{n<-m}$ sont tous nuls. Enfin, lorsque la singularité au point z_0 est essentielle, il y a parmi les $(a_n)_{n<0}$ une infinité de coefficients non nuls.

Définition 6.3 *Si f possède une singularité isolée en z_0, on appelle résidu de f en z_0 et on note $\mathrm{Res}(f, z_0)$ le coefficient a_{-1} décrit lors du théorème précédent.*

Remarque : On peut montrer par intégration que si f possède une singularité isolée au point z_0, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\, dz$ où $D(z_0, r)$ est un petit disque centré en z_0 et parcouru dans le sens direct. On peut aussi remarquer que la formule de Cauchy $\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2i\pi f(z_0)$ peut s'interpréter en disant que $f(z_0)$ est le résidu en z_0 de la fonction méromorphe $\frac{f(z)}{z-z_0}$. On va chercher à englober toutes les formules précédentes en une seule. Cela sera donné par le théorème des résidus.

7 Formule de Cauchy globale - Théorème des résidus

La philosophie de cette partie est la suivante : lors de la formule de Cauchy locale, les hypothèses sur l'ouvert étaient fortes (U étoilé). Ici, on va supprimer toute contrainte sur U et plutôt les remplacer par des hypothèses géométriques sur le lacet.

On appelle *cycle* toute réunion finie de lacets disjoints. Si le cycle γ est constitué des lacets $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, l'intégrale le long du cycle γ n'est autre que la somme des intégrales le long de chacun des lacets γ_i. En particulier, la notion d'indice se transpose.

Définition 7.1 *Soit U un ouvert et γ un cycle dans U . On dit que le cycle γ est homologue à 0 dans U si pour tout point $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$, l'indice du point z_0 par rapport à γ est nul.*

Théorème 7.2 (Formule de Cauchy globale) *Soit f une fonction holomorphe dans U et soit γ un cycle homologue à 0 dans U . Alors :*

1. $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.
2. *Si* $z_0 \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \,\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$.

Théorème 7.3 (Théorème des résidus) *Soit f une fonction méromorphe dans U et soit γ un cycle homologue à zéro dans U . Si P désigne l'ensemble des pôles de f, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{\xi \in P} \mathrm{Ind}(\gamma, \xi) \,\mathrm{Res}(f, \xi) \ .$$

Il faut remarquer que la somme de droite ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

8 Suites de fonctions holomorphes

La formule de Cauchy permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 8.1 *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U, convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f. Alors, f est holomorphe sur U et, pour tout ordre de dérivation p, la suite $f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f^{(p)}$.*

Corollaire 8.2 *L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est fermé dans l'ensemble des fonctions continues sur U pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. L'application $f \mapsto f'$ est continue lorsqu'on munit l'ensemble des fonctions holomorphes sur U de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

En mélangeant la formule de Cauchy, le théorème d'Ascoli et le théorème 8.1, on peut aussi établir la propriété de compacité suivante :

Théorème 8.3 (Propriété de Montel) *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U. On suppose que pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall n \geq 0, \quad \forall z \in K, \quad |f_n(z)| \leq C \ .$$

Alors, la suite f_n possède une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe f.

9 Application ouverte - Théorème d'inversion

Les deux résultats suivants montrent encore à quel point les fonctions holomorphes ont des propriétés remarquables.

Théorème 9.1 (Théorème de l'application ouverte) *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe non constante sur U. Alors f est ouverte. C'est à dire que pour tout ouvert $V \subset U$, $f(V)$ est ouvert.*

Théorème 9.2 (Théorème d'inversion) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application holomorphe injective dans U. Alors :*

1. *$f(U)$ est ouvert*
2. *f est un homéomorphisme de U dans et sur $f(U)$*
3. *Pour tout $z \in U$, $f'(z) \neq 0$*
4. *f est biholomophe. On dit alors que f est une représentation conforme de U sur $f(U)$.*

Voici un exemple d'utilisation de ces théorèmes

Corollaire 9.3 *Les application holomorphes injectives de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ s'écrivent $f(z) = az + b$ où $a \neq 0$.*

10 Ouverts simplement connexes

Définition 10.1 *On dit que l'ouvert U est simplement connexe s'il est connexe et si tout cycle inscrit dans U est homologue à 0 dans U .*

Exemples et contre exemples : un ouvert étoilé est simplement connexe, une couronne n'est pas simplement connexe. Intuitivement, un ouvert connexe est simplement connexe s'il ne possède pas de "trous".

Théorème 10.2 *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U. Pour tout cycle γ dont l'image est incluse dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. En particulier, f est primitivable dans U .*

Corollaire 10.3 *Dans tout ouvert U simplement connexe et ne contenant pas 0, on peut construire des déterminations holomorphes du logarithme.*

Citons enfin pour terminer le célèbre théorème de la représentation conforme de Riemann qui peut se voir comme une conséquence de la propriété de Montel.

Théorème 10.4 (Théorème de Riemann) *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$. Alors, U est conforme au disque unité ouvert. En d'autres termes, il existe une bijection biholomorphe entre U et le disque unité.*

Remarque : le théorème de Liouville nous apprend que $\mathbb{C}$ et le disque unité ne sont pas conformes.

11 Références bibliographiques

[1] Henri CARTAN. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes ; Hermann*

[2] Walter RUDIN. *Real and complex analysis ; Mc Graw Hill*