Transformée de Fourier

1. Montrer à l'aide du théorème d'isomorphisme de Banach que l'application
$$f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$$
n'est pas surjective. On pourra faire intervenir la suite
$$f_k(x) = \mathbb{1}_{[-k,k]}(x) \frac{\sin x}{x} \ .$$
Montrer cependant que l'image de cette application est dense dans $C^0(\mathbb{R})$.

2. Montrer que toute fonction f de classe C^2 et telle que f, f' et f'' soient intégrables est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

3. Soient $\alpha \in]0,1[$ et f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $|x|^\alpha f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est α-höldérienne.

4. Montrer que toute fonction de classe C^1 à support compact est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

5. Soit f une fonction intégrable et à support compact. Montrer que $\hat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il si $\hat{f}$ est aussi à support compact ?

6. Soit K un compact non négligeable de $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{x+K} f(t)dt = 0 \ .$$
Montrer que f est nulle presque partout (utiliser l'exercice précédent).

7. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$ presque partout (les fonctions $\widehat{f * g}$ et $\hat{g}$ étant considérées au sens de Plancherel).

8. On fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'opérateur
$$g \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto Tg = f * g \in L^2(\mathbb{R})$$
a pour norme $\|T\| = \|\hat{f}\|_\infty$. Décrire ses valeurs propres. Montrer que le spectre de T vaut
$$A = \{\hat{f}(x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\} \ .$$

Indication : si $\lambda \in A$, montrer qu'il ne peut exister $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in L^2(\mathbb{R})$, $\|(\hat{f} - \lambda Id)h\|_2 \geq \delta \|h\|_2$ et utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach.

9. Rappeler pourquoi $\{\hat{f},\ f \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $(C^0(\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$. Pour toute mesure de probabilités μ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\mu}(x) = \int e^{-itx} d\mu(t) \ .$$

Après avoir justifié que $\int \hat{f}\, d\mu = \int f(x)\hat{\mu}(x)dx$, montrer que deux mesures de probabilités μ et ν telles que $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ sont égales. Montrer aussi que si X_n est une suite de variables aléatoires dont la suite des fonctions caractéristiques converge simplement vers la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X, alors, la suite X_n converge en loi vers X (version faible du théorème de Paul Levy).

10. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(\tau_x f)_{x \in \mathbb{R}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\{x \ ; \ \hat{f}(x) = 0\}$ est négligeable. Retrouver alors que l'espace $L^2(\mathbb{R})$ est séparable.

11. *Les fonctions de Weierstrass.*
Soit $\lambda = (\lambda_n)$ une suite croissante de réels positifs. On suppose que λ vérifie la condition de lacunarité suivante : il existe $q > 1$ tel que pour tout n,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q \ .$$

Si $\alpha = (\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_n |\alpha_n| < \infty$, on définit la fonction W par

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n x) \ .$$

(a) Montrer que W est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\sum_n |\lambda_n \alpha_n| < \infty$, alors, W est de classe C^1.

On cherche à montrer le résultat beaucoup plus subtile suivant : si W est dérivable en un point x_0, alors $\lambda_n \alpha_n \to 0$. En particulier, si $b > 1$ et $\alpha \in]0, 1]$, ceci prouve que la fonction $W(x) = \sum_n b^{-n\alpha} \cos(b^n x)$ est nulle part dérivable.

(b) Montrer qu'il existe une fonction $\psi \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\psi}$ soit de classe C^∞, à support dans $[1/q, q]$ et vérifie $\hat{\psi}(1) = 1$. Que valent $\int \psi(x)dx$ et $\int x\psi(x)dx$?

(c) On pose, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \int_{\mathbb{R}} W(x)\psi(\lambda_k(x - x_0))dx \ .$$

Montrer que

$$I_k = \frac{\alpha_k}{2\lambda_k} e^{-i\lambda_k x_0} \ .$$

(d) On suppose maintenant que W est dérivable en x_0. Montrer qu'il existe une fonction continue bornée g vérifiant $g(0) = 0$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$W(x) = W(x_0) + (x - x_0)W'(x_0) + (x - x_0)g(x - x_0) \ .$$

Montrer que $I_k = o(\lambda_k^{-2})$ puis conclure.

12. *Les polynômes de Hermite.*
On pose, pour $x, t \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{H}_t(x) = e^{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{4}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \ ,$$

ce qui définit $H_n(x)$.

(a) Montrer que

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{H}_{-it} \ .$$

(b) Montrer que

$$H_n(x)e^{-x^2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \ .$$

(c) En déduire que $2(n+1)H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$. Conclure que H_n est un polynôme de degré n à coefficients réels et de même parité que n. Déterminer son coefficient dominant.

(d) Calculer pour $0 \le m \le n$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx \ ,$$

puis

$$c_n = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx$$

et en déduire que les fonctions $h_n(x) = c_n^{-1/2} H_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$ forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

(e) Montrer que, à t fixé, la série

$$\sum_{n \ge 0} H_n(x) t^n e^{\frac{-x^2}{2}}$$

converge vers $\mathcal{H}_t$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}(h_n) = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n \ .$$

Ainsi, les fonctions h_n sont des vecteurs propres de la transformée de Fourier.

(f) On veut montrer qu'en fait $\{h_n,\ n \geq 0\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que si $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, la suite $\phi(x)e^{-x^2/2} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-ix\xi)^x}{n!}$, $N \geq 0$ est dominée dans $L^1(\mathbb{R})$. En déduire que la famille $\{h_n,\ n \geq 0\}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.