Exercices de calcul intégral (suite)

1. Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$. On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on pose :
$$F(x) = \alpha + \int_a^x f(t)dt \quad \text{et} \quad G(x) = \beta + \int_a^x g(t)dt \ .$$
Montrer la formule "d'intégration par parties" :
$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$
en suivant chacune des deux méthodes suivantes :
– A l'aide du théorème de Fubini
– En approximant convenablement les fonctions f et g par des fonctions continues et en utilisant la formule classique d'intégration par parties.

2. On reprend les notations de l'exercice sur la transformée de Hardy. Décrire le spectre ponctuel de l'opérateur T. Lorsque $p = 2$, décrire l'adjoint de T.

3. On considére l'opérateur de translation sur $L^2_{2\pi}$ défini par :
$$\tau_a f(x) = f(x - a) \ .$$
Décrire les valeur propre de τ_a et les sous espaces propres associés.

4. Soit F une 2π-périodique et lipschitzienne.

   (a) En évaluant de deux façons différentes $\|\tau_h F - F\|_2^2$, Montrer que :
   $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \left| \hat{F}(n) \right|^2 \leq M^2 \ ,$$
   où M est la constante de lipschitz de F. En déduire que la série de Fourier de F converge normalement vers F.

   (b) On pose $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} ik\hat{F}(k)e^{ikx}$. Montrer que la suite f_n converge dans $L^2_{2\pi}$. On note f sa limite. Montrer que :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$

(c) On cherche à montrer que $f \in L^\infty_{2\pi}$. Pour cela, on introduit l'approximation de l'unité définie pour $x \in [-\pi, \pi]$ par :

$$\theta_n(x) = n\pi \mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x) \ .$$

Constater que $\|\theta_n * f\|_\infty \leq M$ puis conclure (faites attention au raisonnement...).

5. Si $f \in L^2_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Lambda_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)$. Montrer que l'ensemble des fonctions $f \in L^2_{2\pi}$ telles que $\Lambda_n(f)$ converge est un sous-espace dense de $L^2_{2\pi}$ et qu'il est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

6. Soit f une fonction mesurable additive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = e^{if(x)}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'intégrale $\int_0^\delta g(x)dx$ soit non nulle. En déduire que la fonction g est de classe C^∞ et vérifie une équation différentielle que l'on précisera (on fera intervenir $\int_x^{\delta+x} g(t)dt$). En déduire g puis montrer que $f(x) = ax$ pour une certain a réel.

7. On reprend l'exercice 6 de la feuille sur la transformée de Fourier. On fixe $f \in L^1(\mathbb{R})$ et on regarde l'opérateur :

$$g \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto Tg = f * g \in L^2(\mathbb{R}) \ .$$

Montrer que le spectre de T vaut $A = \{\hat{f}(x) \ \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ (si $\lambda \in A$, montrer qu'il ne peut exister $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in L^2$, $\|(\hat{f} - \lambda)h\|_2 \geq \delta \|h\|_2$ et utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach).

8. *A propos des multiplicateurs.*
Soient F et G deux sous-espaces de $L^1_{2\pi}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de F dans G si pour toute fonction $f \in F$ il existe $g \in G$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{g}(n) = a_n \hat{f}(n)$. Montrer qu'alors g est unique. On notera $\Lambda f = g$. On se propose de décrire les multiplicateurs dans diverses situations.

   (a) $F = G = L^2_{2\pi}$.
   Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $L^2_{2\pi}$ dans lui-même si et seulement si elle est bornée (on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhauss).

   (b) $F = L^2_{2\pi}$ et $G = \mathcal{C}_{2\pi}$.

      i. Montrer que s'il existe $h \in L^2_{2\pi}$ avec $a_n = \hat{h}(n)$ pour tout n, alors la suite (a_n) est un multiplicateur de $L^2_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

      ii. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $L^2_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'application Λ est continue (penser au graphe fermé). En déduire qu'il existe $h \in L^2_{2\pi}$ tel que pour tout entier n, $a_n = \hat{h}(n)$ (on pourra considérer l'application $f \mapsto \Lambda f(0)$). Expliciter l'opérateur Λ.

(c) $F = \mathcal{C}_{2\pi}$ et $G = \mathcal{C}_{2\pi}$.

i. Montrer que l'application Λ est continue. En déduire que la suite a_n est bornée.

ii. On pose $Lf = \Lambda f(0)$. Vérifier que L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $L(e^{int}) = a_n$.

iii. Soit μ une mesure positive finie sur $[0, 2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$b_n = \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \ .$$

Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ (écrire Λf en fonction de f et μ).

iv. On note $\mathcal{C}'_{2\pi}$ le dual de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Montrer que l'application :

$$L \in \mathcal{C}'_{2\pi} \longmapsto \left(L(e^{int})\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

est non surjective. En déduire qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bornée qui ne soit pas un multiplicateur de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans lui-même.