UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2007-2008
Deuxième session

Licence de Mathématiques, semestre S5
U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice

Soit $(X, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Rappeler la définition de l'ensemble $\limsup_n A_n$ et rappeler pourquoi cet ensemble est encore dans la tribu $\mathcal{A}$.
2. On suppose que la série $\sum_n m(A_n)$ est convergente. Justifier que pour tout entier $p \geq 0$,
$$m\left(\bigcup_{n\geq p} A_n\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} m(A_n)$$
puis montrer que $m(\limsup_n A_n) = 0$.

Problème

On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$. On rappelle aussi que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 1.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq \cosh u \leq e^{|u|}$. Montrer ensuite que pour tout réel x, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\cosh xt$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cosh xt\,dt\ .$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

On pose
$$a_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt\ .$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{2n-1}{2} a_{n-1}$. En déduire que pour tout $n \geq 0$,
$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4} \ .$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos xt \, dt \ .$$

5. Montrer que G est bien définie et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4} \ .$$

Partie 2.

6. Montrer que pour tout nombre réel x, la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \frac{\sin xt}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin xt}{t} \, dt \ .$$

7. Montrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = G(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x e^{-t^2/4} \, dt \ .$$

Partie 3. On cherche dans cette partie à retrouver le résultat de la question 7. par une autre méthode. Pour cela, on introduit la fonction de deux variables
$$k(t,x) = e^{-t^2} \cos xt \ .$$

On fixe un réel $A > 0$.

8. Montrer que la fonction k est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur le rectangle $[0, +\infty[\times [0, A]$.
9. Sans utiliser la partie 2, établir la double égalité
$$\iint_{[0,+\infty[\times[0,A]} k(t,x) \, dt \, dx = H(A) = \int_0^A G(x) \, dx$$
et conclure.