UNIVERSITE BLAISE PASCAL — Année Universitaire 2007-2008
U.F.R. Sciences et Technologies — Première session

Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.
Les trois parties du problème sont aussi largement indépendantes.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice

Dans tout l'exercice, f est une fonction **positive** de la variable réelle intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(1-\cos(x/n))\, f(x)\, dx \ .$$

1. Montrer que pour tout $n > 0$, $I_n < +\infty$.

On suppose que la suite I_n est bornée.

2. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx < +\infty \ .$$

Problème

On pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du$.

Question préliminaire. Rappeler pourquoi $J < +\infty$.

Partie 1.

1. Montrer que pour tout $u \geq 0$, $\quad 0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$.

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2 x}}{t^2}\, dt \ .$$

2. Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
   (on pourra constater que pour $x \geq 0$, $\quad 0 \leq \frac{1-e^{-t^2 x}}{t^2} \leq \min(x, 1/t^2)$).
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $\quad F'(x) = \dfrac{J}{2\sqrt{x}}$.
   En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\quad F(x) = J\sqrt{x}$.

Partie 2. On cherche dans cette partie à calculer J. Pour $x \geq 0$, on pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, dt\ .$$

4. Montrer que G est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
5. Calculer $G(0)$ et montrer que G est bornée sur $[0, +\infty[$.
6. Montrer que G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\forall x > 0, \quad G'(x) - G(x) = -F'(x) = -\frac{J}{2\sqrt{x}}\ .$$

7. Vérifier que $H(x) = \dfrac{J}{2} e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du$ est une solution bornée de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = -\frac{J}{2\sqrt{x}}\ . \tag{1}$$

En déduire l'expression générale de la solution de (1) puis montrer que pour tout $x > 0$, $G(x) = H(x)$. Montrer alors que $J = \sqrt{\pi}$.

Partie 3. Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On introduit les fonctions de deux variables

$$\varphi(t, u) = e^{-t^2 u} \quad \text{et} \quad \psi(t, u) = e^{-t^2 u} \sin u\ .$$

8. Montrer que φ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[\times[0, n]$ et exprimer son intégrale en fonction de $F(n)$. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{[0,+\infty[\times[0,n]} \varphi(t, u)\, dtdu\ .$$

La fonction φ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$?

9. Montrer que ψ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[\times[0, n]$ puis montrer que

$$\iint_{[0,+\infty[\times[0,n]} \psi(t, u)\, dtdu = \frac{J}{2} \int_0^n \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^{+\infty} J_n(t)\, dt\,,$$

avec $J_n(t) = \int_0^n e^{-t^2 u} \sin u\, du$.

10. Un calcul simple (qu'on ne demande pas d'expliquer) permet d'établir que pour tout $t > 0$,

$$J_n(t) = \frac{1 - e^{-t^2 n}(\cos n + t^2 \sin n)}{t^4 + 1}\ .$$

Montrer alors que $\iint_{[0,+\infty[\times[0,n]} \psi(t, u)\, dtdu$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer cette limite à l'aide d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

11. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 u}\, |\sin u|\, du \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2 u}\, \frac{1 - \cos 2u}{2}\, du\ .$$

Calculer cette dernière intégrale puis montrer que ψ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[^2$. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|\sin u|}{\sqrt{u}}\, du\ .$$