UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2006-2007
Deuxième session

Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue m. On fixe deux réels p et q strictement supérieurs à 1 et conjugués. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, borélienne et à valeurs complexes. On suppose que $f \in \mathcal{L}^p(m)$ et $f \in \mathcal{L}^q(m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^2(m)$ et que $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p \|f\|_q$.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n^{1/2} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x) \ .$$

1. Montrer que la suite f_n converge presque partout vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Discuter selon les valeurs de $p \geq 1$ la convergence de la suite f_n vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de $p \geq 1$ la fonction

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

appartient-elle à $L^p(\mathbb{R})$?

Exercice 3

On considère la fonction G définie sur $[0, +\infty[^2$ par

$$G(x, y) = e^{-xy^2} \sin x$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\, dx \geq \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}} \; .$$

En déduire que la fonction $g \, : \, x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue (on justifiera proprement sa réponse).

2. A l'aide du théorème de Fubini, et de la question précédente, montrer que la fonction G n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[^2$.

Problème

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt \; .$$

1. Expliquer pourquoi la fonction $\frac{t}{e^t-1}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la dérivabilité de F.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(xt)\, e^{-nt}\, dt \; .$$

En déduire que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} \; .$$

5. Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt \; .$$

6. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pout tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\left| \sin u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{\left|u^{2n+1}\right|}{(2n+1)!} \leq \frac{|u| e^{|u|}}{2n+1} \; .$$

En déduire qu'il existe des réels $(c_k)_{k \geq 0}$ tels que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{2k+1} \; .$$

On exprimera les coefficients c_k sous forme intégrale sans chercher à calculer leur valeur explicite.

7. Que peut-on en déduire quant aux propriétés de régularité de la fonction F sur l'intervalle $]-1, 1[$?