UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2006-2007
Première session

Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

Pour tout $n \geq 2$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}$.
Montrer que $I_n < +\infty$, que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue m. On fixe deux réels p et q strictement supérieurs à 1 et conjugués.

1. Rappeler la relation liant p et q.
2. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres complexes. Expliquer pourquoi on a l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q\right)^{1/q} \leq +\infty \ .$$

3. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ deux suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, boréliennes et à valeurs complexes. On suppose que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n(x)|^p \ dx < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int |g_n(x)|^q \ dx < +\infty \ .$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n g_n\|_1$ est convergente (on majorera $\|f_n g_n\|_1$ puis on utilisera la question précédente).

4. En déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) g_n(x)$ est absolument convergente.

5. Soit φ une fonction presque partout égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$. La fonction φ est-elle intégrable ?

Problème

Question préliminaire. Rappeler pourquoi les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ sont convergentes et donner une formule reliant $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

On note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt \ .$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $F(0)$. Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa limite en $+\infty$.
3. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} F(n)$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n F(n)$ est convergente et exprimer sa somme sous la forme d'une intégrale sans chercher à calculer cette intégrale.

Pour tout nombre réel a, on note $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a F(x)\, dx$.

5. Montrer que
$$J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{2+2a}} \int_0^{+\infty} u^a e^{-u}\, du \ .$$
En déduire les valeurs de a telles que $J(a)$ soit finie.
6. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et vérifie pour tout $x > 0$,
$$F'(x) - F(x) = -\frac{c}{\sqrt{x}}, \quad \text{où } c = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \ .$$

On pose $G(x) = e^{-x} F(x)$.

7. Calculer G' en utilisant la question 6. En déduire l'expression de $G(x) - G(0)$ à l'aide d'une intégrale puis trouver la valeur de c.
8. Etablir finalement que pour tout $x \geq 0$,
$$F(x) = \sqrt{\pi} e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2} du \ .$$