UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2005-2006
Deuxième session

Licence de Mathématiques, semestre S5
U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé de trois exercices indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto e^{-t}t^{-x}$ et $t \mapsto e^{-t}t^{-x}\ln t$ sont intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[1, +\infty[$.

Dans tout la suite, on considère l'application F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{-x}\,dt\ .$$

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les limites
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)\ .$$
4. Etudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} F(n)$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n F(n)$ est convergente et exprimer sa somme sous la forme d'une intégrale.

On note D l'ensemble des nombres réels tels que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{-x}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

6. Déterminer D.

Pour $x \in D$, on pose $G(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{-x}dt$.

7. Montrer que G est continue sur D.

8. Montrer que pour tout $x \in D$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-x)} \ .$$

(on pourra développer la fonction exponentielle en série entière).

Exercice 2

Dans tout l'exercice, $(X, \mathcal{A}, m)$ est un espace mesuré et $f \ : \ X \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive et intégrable par rapport à la mesure m. Pour tout réel $t \geq 0$, on note $A_t = \{x \in X \ ; \ f(x) \geq t\}$.

1. Montrer que l'application φ qui a tout réel $t \geq 0$ associe $\varphi(t) = m(A_t)$ est décroissante et converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$t\, m(A_t) \leq \int_{A_t} f(x)\, dm(x) \ .$$

En déduire que

$$\lim_{t \to +\infty} t\, m(A_t) = 0 \ .$$

(on fera intervenir une suite quelconque t_n convergeant vers $+\infty$).

3. On suppose que la mesure m est σ-finie. En faisant intervenir la fonction indicatrice de l'ensemble

$$T = \{(x, t) \in X \times [0, +\infty[\ ; \ f(x) \geq t\} \ ,$$

montrer que φ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \int_X f(x)\, dm(x) \ .$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, l'intervalle $[1, +\infty[$ est muni de la mesure de Lebesgue et on note $\mathcal{L}^p([1, +\infty[)$ l'espace des fonctions $f \ : \ [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ telles que $\int_1^{+\infty} |f(x)|^p\, dx < +\infty$. On pose alors $\|f\|_p = \left(\int_1^{+\infty} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$.

On fixe un réel $p > 1$ et $f \in \mathcal{L}^p([1, +\infty[)$. Pour $x \geq 1$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{L}^p([1, +\infty[)$ et que $\|g\|_p \leq \|f\|_p$.
2. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[)$ et que $\|g\|_1 \leq (p-1)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_p$.