Licence de Mathématiques, semestre S5
U.E. 35MATF3 : Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
Les docments, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits.
Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur le paramètre α pour que la fonction

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n\alpha} f(x+n)$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable à valeurs dans $]0, +\infty]$.

1. Montrer que
$$\mu(X)^2 \leq \int_X f^2(x)\, d\mu(x) \int_X \frac{1}{f^2(x)}\, d\mu(x)\ .$$
2. Que peut-t-on dire de la mesure μ s'il existe une fonction $g\ :\ X \to \mathbb{C}$ telle que $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ et $\frac{1}{g} \in \mathcal{L}^2(\mu)$.

Problème

Dans tout le problème, m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et f est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. On pose

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}dt \ .$$

1. Montrer que Lf est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $Lf(0)$?
2. On suppose dans cette question que la fonction $g(t) = tf(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrer que Lf est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$,

$$(Lf)'(x) = -Lg(x) \ .$$

3. On suppose dans cette question que $\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}dt < +\infty$. Montrer que Lf est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} Lf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \ .$$

(on fera intervenir la fonction $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[\longmapsto f(t)e^{-tx}$).

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par $f_n(t) = \sin t \, \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

   $$Lf_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}(\cos n + x \sin n)}{1+x^2} \ .$$

   (on remarquera que $Lf_n(x) = \mathcal{I}m\left(\int_0^n e^{t(i-x)}dt\right)$).

   (b) Rappeler pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$. En déduire que

   $$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,+\infty[, \qquad |e^{-nx}(\cos n + x\sin n)| \leq e^{-(n-1)x} \leq 1 \ .$$

   (c) Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} Lf_n(x)dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

   (d) A l'aide de la question 4, en déduire que

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} \ .$$

   Peut-on en déduire que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$?

5. On suppose dans cette question que la fonction f est positive, et que Lf est dérivable en 0. On fixe une suite h_n de réels positifs convergeant vers 0. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} tf(t)dt \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{Lf(0) - Lf(h_n)}{h_n} \ .$$

En déduire que la fonction $tf(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
A-t-on $\int_0^{+\infty} tf(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{Lf(0) - Lf(h_n)}{h_n}$?

6. Dans cette question, f est supposée intégrable sur $[0,+\infty[$ sans hypothèse supplémentaire. Montrer que Lf est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.