Licence de Mathématiques, semestre S5

Module de Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
L'usage de tout document et de tout matériel de calcul est interdit.
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

Soit g une fonction borélienne, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que g est intégrable sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue et on pose $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2} |g(kx)|$.

1. Montrer que
$$\int_0^1 S(x)dx = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}\right) \int_0^1 |g(x)|\, dx \; .$$

2. Montrer que pour presque tout $x \in [0,1]$, la série $\sum_{k\geq 1} k^{-2} g(kx)$ est convergente, puis que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k\geq 1} k^{-2} g(kx)$ est convergente.

3. La fonction presque partout définie par $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2} g(kx)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$?

Exercice 2

On note
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2} \frac{dt}{1+t^2} \; .$$

1. Montrer que F est bien définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(0)$.

2. Montrer que G est bien définie, paire, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G'' = F$ (on rappelle les inégalités vraies pour tout réel $u \neq 0$, $\frac{1-\cos u}{u^2} \leq \frac{1}{2}$ et $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leq 1$).

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(0) - F(x) + G(x) = C\,|x| \quad \text{où} \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$

4. Déduire des questions 2 et 3 que la fonction F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et vérifie sur cet intervalle $F'' = F$.

5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$. En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, m)$ et un réel $p > 1$. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^p(X)$ et $h = \max(|f|, |g|)$.

1. Montrer que $h \in \mathcal{L}^p(X)$ et que $\|h\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

2. On note $\varphi(t) = t^p$ pour $t \geq 0$. Montrer que si $0 \leq a \leq b$,
$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq |b - a| \max(\varphi'(a), \varphi'(b)) \ .$$
En déduire que pour tout $x \in X$,
$$\big|\, |f(x)|^p - |g(x)|^p \,\big| \leq p\,|f(x) - g(x)|\, h(x)^{p-1} \ .$$

3. Montrer que
$$\big\|\, |f|^p - |g|^p \,\big\|_1 \leq p\,\|f - g\|_p\, \|h\|_p^{p-1} \ .$$

4. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que si f et g vérifient $\|f\|_p \leq R$ et $\|g\|_p \leq R$, on ait :
$$\big\|\, |f|^p - |g|^p \,\big\|_1 \leq C_R\, \|f - g\|_p \ .$$
En déduire que l'application $f \in \mathcal{L}^p(X) \longmapsto |f|^p \in \mathcal{L}^1(X)$ est continue.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $F \ : \ (x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

2. Calculer $\iint_{[0,1]\times[0,+\infty[} F(x, y)dxdy$ et en déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \frac{\ln 5}{4} \ .$$