UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles

Année Universitaire 2004-2005
Première session

Licence de Mathématiques, semestre S5

Module de Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 2 heures
L'usage de tout document et de tout matériel de calcul est interdit.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le résultat d'une question pourra être admis pour traiter les questions suivantes.
La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

Pour $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2}\, dx \ .$$

Justifier l'existence de U_n, montrer que la suite U_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, m)$ et un entier $p \geq 2$. Montrer que si deux fonctions f et g sont dans l'espace $\mathcal{L}^p(X)$, alors la fonction $f^{p-1}g$ est intégrable.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue. Soient $\alpha > 0$ et f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

1. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n^{-\alpha} f(nx) \right| \right) dx = \|f\|_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \leq +\infty \ .$$

2. On suppose de plus que f est intégrable. Montrer que pour presque tout x de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0 \ .$$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, β est un paramètre strictement positif. On pose

$$f_\beta(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x/t^\beta} e^{-t^2} dt \ .$$

1. Montrer que f_β est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f_β est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Soit x_n une suite de réels positifs convergeant vers 0. Montrer que la limite

$$\lim_{n \to +\infty} f'_\beta(x_n)$$

existe dans $[-\infty, +\infty]$ (on séparera les cas $\beta < 1$, $\beta \geq 1$ et on ne cherchera pas à faire un calcul explicite).
La fonction f_β est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 5

Dans tout l'exercice, $(X, \mathcal{A}, m)$ est un espace mesuré où $m(X) = 1$. On considère une fonction φ mesurable positive sur X et un paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que

$$\int_X e^{-\lambda\varphi(x)}\, dm(x) < +\infty \ .$$

2. (a) Calculer

$$\int_{\varphi(x)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv \ .$$

   (b) Montrer que

$$\int_X e^{-\lambda\varphi(x)}\, dm(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} m\left\{\varphi \leq v\right\}\, dv$$

(on fera intervenir l'ensemble $T = \{(x, v) \in X \times [0, +\infty[\ ; \ \varphi(x) \leq v\})$.