Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

1. Montrer que les polynômes de Bernoulli B_n vérifient
$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1} \ .$$
En déduire une formule donnant $\sum_{n=1}^{N} n^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

2. Trouver le développement asymptotique sur l'échelle des puissances de n de $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha}$, $(\alpha > 1)$.

3. Trouver le développement asymptotique sur l'échelle des puissances de n de $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$, $(\alpha > -1)$. Prouver en particulier l'existence d'une constante γ_α intervenant dans le développement comme coefficient de "n^0".

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n^{i\alpha}}{n \ln \ln n}$?

5. Soit $0 < \alpha < 1$. On veut donner un équivalent lorsque $n \to \infty$ de
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik^\alpha} \ .$$
On pose $f(x) = e^{i(x+1)^\alpha}$.
   (a) Montrer par changement de variables puis par intégration par parties que
   $$\int_0^{n-1} f(x)dx \sim \frac{1}{i\alpha} e^{in^\alpha} n^{1-\alpha} \ .$$
   (b) Montrer que les fonctions $f^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ et plus précisément que
   $$|f^{(l)}(x)| \leq C_l |x+1|^{l(\alpha-1)} \ .$$
   (c) Appliquer la formule d'Euler-MacLaurin à l'ordre p et vérifier que si p est bien choisi, le reste est $o(n^{1-\alpha})$. Conclure.

6. Soit f_n la fonction 2π-périodique égale à $B_n(\frac{t}{2\pi})$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de f_n. En déduire que
$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |b_{2n}| \ .$$

7. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_t(z) = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1} \ .$$

Montrer que

$$f_t(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} z^n \quad \text{si } |z| < 2\pi \ .$$

On suppose $0 \leq t < 1$ et $k \geq 2$. En appliquant la formule de résidus à la fonction $f_t(z)z^{-k-1}$ sur le carré de sommets $R + i\pi(2R+1)$, $-R + i\pi(2R+1)$, $-R - i\pi(2R+1)$ et $R - i\pi(2R+1)$, trouver le développement en série de Fourier de $\tilde{B}_k$ (périodisée de B_k) pour $k \geq 2$. Comparer avec l'exercice précédent.