Compléments au corrigé du problème d'analyse 96

Au cours des lignes qui suivent, nous allons préciser le corrigé officiel (publié dans le rapport du jury) et proposer pour certaines question une approche différente.

Partie I
A.

1 °) Il faut dire clairement qu'un espace vectoriel euclidien de dimension finie possède une base orthonormée.

2 °) a) Seule la réciproque est un peu délicate. Supposons $F = E \oplus E_1$ où E et E_1 sont non orthogonaux et fixons $x \in E$ et $x_1 \in E_1$ tels que $(x|x_1) \neq 0$. Si $y = x + \lambda x_1$, on aura $\|p(y)\| > \|y\|$ si et seulement $\lambda^2 \|x_1\|^2 + 2\lambda(x|x_1) < 0$. Cette équation possédant des solutions, la norme de l'opérateur p est bien > 1.

Partie II
A.

2 °) b) L'inégalité $\|\chi(x)\| \leq \|x\|$ résulte de l'estimation $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \, \|x\|$. L'inégalité inverse est une conséquence du a). Rappelons qu'en dimension infinie, l'application χ n'est en général pas surjective. Lorsqu'elle l'est, on dit que l'espace est réfléxif.

3 °) b) Si E est un sous-espace d'un espace vectoriel normé F, la relation $s = 2p - Id_F$ met en bijection les symétries par rapport à E et les projections sur E. On a donc toujours l'encadrement :

$$2\pi(E, F) - 1 \leq \sigma(E, F) \leq 2\pi(E, F) + 1 \ .$$

3 °) c) Le fait que $\pi(E^\perp, F') = 1$ si $E^\perp$ est une droite est une conséquence du théorème de Hahn-Banach (voir questions 1 °) c) et 4 °)). Je propose ici une preuve des inégalités demandées qui fonctionne même en dimension infinie lorsque E est un hyperplan fermé de F. Fixons un tel hyperplan puis un vecteur $f \notin E$. Comme E est fermé, $d(f, E) = \alpha > 0$. Si $\varepsilon > 0$, on peut trouver $y_0 \in E$ tel que pour tout $y \in E$ on ait :

$$\|f - y_0\| \leq (1 + \varepsilon)\alpha \leq (1 + \varepsilon)\|f - y\| \ .$$

En dimension finie, par un argument de compacité, on peut même prendre $\varepsilon = 0$. Posons alors $e = f - y_0$. Pour tout réel λ et pour tout $y \in E$, on a :

$$\|\lambda e\| \leq (1 + \varepsilon)\|\lambda e + y\| \ ,$$

ce qui assure les inégalités :

$$\|y\| \leq (2+\varepsilon)\|y+\lambda e\| \quad \text{et} \quad \|y-\lambda e\| \leq (3+2\varepsilon)\|y+\lambda e\| \ .$$

Finalement, si D est la droite engendrée par e, on a les inégalités :

$$\|p_{E,D}\| \leq 2+\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\sigma_{E,D}\| \leq 3+2\varepsilon \ .$$

On conclut en jouant sur l'arbitraire sur ε.

Partie III

4 °) b) Soyons plus précis et introduisons :

$$G_k = \{(a_n) \in F,\ \forall n \in [2^k, 2^{k+1}[,\ a_n = 0\} \ .$$

L'espace F est somme directe de F_k et de G_k et la projection p_k sur F_k parallélement à G_k est continue de norme 1. Si p était un projecteur continu de F sur E, $q_k = p_k \circ p_{|F_k}$ serait alors un projecteur continu de F_k sur E_k. On aurait donc :

$$a_k \leq \|q_k\| \leq \|p_k\| \, \|p_{|F_k}\| \leq \|p\| \ .$$

Comme a_k tend vers $+\infty$, on aboutit à une contradiction.

Partie IV

A.

1 °) c) L'application $q \mapsto u_q$ est continue comme application linéaire entre deux espaces de dimension finie. On peut aussi donner une preuve plus analytique à la continuité de I. Notons $\| \ \|_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel Q est de dimension finie. Toutes les normes y sont donc équivalentes. Il est facile de constater que la quantité :

$$N_0(q) = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} |q(x)|$$

définit une norme sur Q. Par homogénéité, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |q(x)| \leq N_0(q)\|x\|_2^2 \ .$$

Ainsi, la topologie sur Q n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}^n$. La continuité de I résulte alors du théorème de convergence dominée et du lemme de Fatou. Supposons d'abord que $q_n \to q \in Q_+$. Comme $\sqrt{q}$ est une norme et qu'elles sont toutes équivalentes, On peut trouver $C > 0$ tel que $q \geq C\| \ \|_2^2$. Si n est assez grand, on aura donc :

$$q_n \geq C\| \ \|_2^2 - N_0(q-q_n)\| \ \|_2^2 \geq (C/2)\| \ \|_2^2 \ .$$

Ceci fournit une domination de e^{-q_n} par $e^{-(C/2)\| \ \|_2^2}$ et permet de passer à la limite si on se souvient que $q_n(x)$ converge ponctuellement vers $q(x)$. Enfin, si $q_n \to q \in Q \setminus Q_+$, le lemme de Fatou nous donne :

$$+\infty = I(q) = \int \liminf_{n\to+\infty} e^{-q_n(x)} dx \leq \liminf_{n\to+\infty} I(q_n) \ ,$$

ce qui assure la continuité en q.

2 °) a) K est fermé car $q \mapsto q(x)$ est continue. De plus si C est une constante telle que $N \leq C\| \|_2$, K est inclus dans $\{q \ ; \ N_0(q) \leq C^2\}$. Il est donc aussi borné. C'est un compact de Q.

2 °) b) C'est parce qu'il est fini que le minimum est atteint en un point de Q_+.

3 °) b) La définition de a et l'homogénéité des normes assurent que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(x) \leq N(a)\sqrt{q_N(x)} \ .$$

Il faut aussi rappeler pour que la preuve soit irréprochable qu'une fonction <u>convexe</u> possède un minimum global en un point où sa dérivée s'annule.

3 °) c) Rappelons que le théorème de Pythagore nous assure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_N(x) = q_N(\pi_a(x)) + q_N(\pi_H(x)) \ .$$

B.

5 °) Là encore, donnons une preuve plus analytique de l'identité $nq_N = \| \|_2^2$. En reprenant le calcul proposé dans le corrigé, on constate que l'encadrement $q \leq \| \|_{+\infty}^2 \leq nq$ aboutit à l'identité :

$$2^n = \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n} q(\epsilon_1 e_1 + \dots + \epsilon_n e_n) = 2^n(q(e_1) + \dots + q(e_n)) \ .$$

Toujours à cause de l'encadrement vérifié par q, on obtient alors nécessairement :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad q(e_i) = 1/n \quad \text{et} \quad \forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n, \quad q(\epsilon_1 e_1 + \dots + \epsilon_n e_n) = 1 \ .$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad < e_i | e_j >= \frac{\delta_{i,j}}{n} \ ,$$

où $< \ | \ >$ désigne la forme bilinéaire associée à q. On vient de montrer que si $q \leq \| \|_{+\infty}^2 \leq nq$, nq n'est autre que la forme quadratique canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus, q_N vérifie le même encadrement, on a bien $nq_N = \| \|_2^2$.

7 °) Donnons quelques détails supplémentaires à la preuve proposée. Le fait que N^* reste une norme est facile. Il est aussi clair que $N_1 \leq N_2 \Rightarrow N_2^* \leq N_1^*$. Supposons ensuite $N = \sqrt{q}$ où q est une forme quadratique définie positive. On peut trouver une matrice u_q symétrique telle que $q(x) = (u_q(x)|x)$. De plus u_q est diagonalisable dans une base orthonormée et a toutes ses valeurs propres strictement positives. On peut donc écrire $u_q = {}^t p\, d\, p$ où d est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et où ${}^t p\, p = Id$. En notant ℓ la matrice diagonale à éléments diagonaux positifs telle que $\ell^2 = d$ et en posant $u = {}^t p\, \ell\, p$, u est symétrique et vérifie $q(x) = (u(x)|u(x)) = \|u(x)\|_2^2$.

On a alors, comme indiqué dans le corrigé, $N^*(x) = \|u^{-1}(x)\|_2$, ce qui assure que N^* est issu d'un produit scalaire.Avec les notations précédentes, on a aussi :

$$I(q) = c_n v(\mathcal{E}_q) = \int e^{-\|u(x)\|^2} dx = c_n |\det(u)|^{-1} \int e^{-\|y\|^2} dy \ ,$$

d'où on tire facilement :

$$v(\mathcal{E}_q)v(\mathcal{E}_{q^*}) = \text{Cste} \ .$$

Enfin, pour pouvoir aisément passer à la forme duale du théorème de John, il faut constater que pour toute norme N, on a l'identité $N^{**} = N$. L'homogénéité du produit scalaire nous assure que :

$$N^*(x) = \sup_{y \neq 0} \frac{|(x|y)|}{N(y)} \ .$$

En particulier, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |(x|y)| \leq N^*(x)N(y) \ .$$

Il en résulte que $N^{**} \leq N$. L'inégalité inverse est une conséquence du théorème de Hahn-Banach. Ce n'est pas surprenant si on a bien compris la signification de N^*. Le produit scalaire $(\ |\ )$ permet d'identifier $\mathbb{R}^n$ et son dual. La quantité $N^*(x)$ n'est alors autre que la norme de la forme linéaire $y \mapsto (x|y)$ lorsqu'on a muni $\mathbb{R}^n$ de la norme N. Etant donné $x \neq 0$, le théorème de Hahn-Banach nous apprend l'existence d'une forme linéaire ℓ continue sur $(\mathbb{R}^n, N)$ de norme 1 et telle que $\ell(x) = N(x)$. En d'autres termes, on peut trouver un vecteur z tel que $N^*(z) = 1$ et $(z|x) = N(x)$. Par définition de N^{**}, on obtient alors $N^{**}(x) \geq N(x)$, ce qui constitue l'inégalité non triviale entre les quantités.

Tous ces préliminaires étant mis en place il est alors clair que l'application $X \mapsto X^*$ met en correspondance bijective les ellipsoïdes contenus dans B de volume maximum et les ellipsoïdes contenant la boule unité de $\|\ \|^*$ de volume minimum. On se ramène ainsi à l'énoncé démontré au début de la quatrième partie.