UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques, semestre S5

U.E. de Calcul Intégral

Durée de l'épreuve : 1 heure

Les documents, les calculatrices ainsi que les téléphones portables sont interdits. Les trois parties sont indépendantes.

Dans toute l'épreuve, m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours

1. Soit N un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Rappeler ce que signifie : N est négligeable pour la mesure de Lebesgue.
2. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue est encore négligeable pour la mesure de Lebesgue.
3. Montrer qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est non négligeable pour la mesure de Lebesgue.
4. Enoncer le lemme de Fatou.

Exercice 1

1. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de boréliens contenus dans $[0,1]$ tels que $m(A_n) \geq 1/10$ pour tout n. Montrer que
$$m\left(\limsup_{n\geq 0} A_n\right) \geq \frac{1}{10} .$$
2. Le résultat reste-t-il vrai si on retire l'hypothèse $A_n \subset [0,1]$ pour tout n ?

Exercice 2

On pose $f(x) = 1 - x^2$ et on note g la **partie positive** de f.

1. Représenter graphiquement g. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$. La fonction $f - g$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels et α est un paramètre réel. On pose

$$g_n(x) = g(n^\alpha(x - q_n)) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) .$$

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx$ puis trouver la condition nécessaire et suffisante portant sur α et sur $(q_n)_{n\geq 1}$ pour que G soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. Dans cette question $\alpha = 2$ et $q_n = n$ pour tout n. Trouver une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$ telle que la fonction $H = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g_n$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que pour tout $A > 0$,
$$\sup_{x\geq A} H(x) = +\infty .$$
4. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si K est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $A > 0$,
$$\inf_{x\geq A} K(x) = 0 .$$
(cette question est indépendante des précédentes).